SOLUCIONARI DE LES ACTIVITATS

UNITAT DIDÀCTICA 1

NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

Pàgina 12

Reflexiona i resol

El pas de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

■ **Imaginem que només es coneguessin els nombres enters, $\mathbb{Z}$. Sense utilitzar cap altre tipus de números, intenta resoldre les equacions següents:**

a) $3x = 15$; b) $-2x = 18$; c) $11x = -341$; d) $4x = 34$

Les tres primeres es poden resoldre en $\mathbb{Z}$, ja que les seves solucions són nombres enters.

Per poder resoldre la quarta, necessitem els nombres racionals.

Perquè les equacions del tipus $ax = b$ tinguin sempre solució, inventem el conjunt dels nombres racionals, $\mathbb{Q}$:

Si a i b són racionals i $a \neq 0$, llavors $x = b/a$ és racional.

a) $x = 5$; b) $x = -9$; c) $x = -31$; d) No es pot resoldre.

■ **Digues quines de les equacions següents es poden resoldre en $\mathbb{Z}$ i per a quines és necessari el conjunt dels nombres racionals, $\mathbb{Q}$.**

a) $-5x = 60$　　b) $-7x = 22$
c) $2x + 1 = 15$　　d) $6x - 2 = 10$
e) $-3x - 3 = 1$　　f) $-x + 7 = 6$

a) $x = -12$　　b) $x = -\dfrac{22}{7}$　　c) $x = 7$;

d) $x = 2$　　e) $x = -\dfrac{4}{3}$　　f) $x = 1$

Per a b) i e), necessitem $\mathbb{Q}$.

Pàgina 13

El pas de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

■ **Intenta resoldre, sense sortir de $\mathbb{Q}$, les equacions següents:**

a) $3x^2 - 12 = 0$　　b) $x^2 - 6x + 8 = 0$
c) $2x^2 + x - 1 = 0$　　d) $x^2 - 2 = 0$

Les tres primeres tenen solucions racionals, però la quarta, no, ja que no hi ha cap nombre racional el quadrat del qual sigui 2. Aquesta equació sí que es pot resoldre en el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals.

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$　b) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

c) $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$　d) $x_2 = 2 \to$ No es pot resoldre.

■ **Resol, ara, les equacions següents:**

a) $x^2 - 9 = 0$　　b) $5x^2 - 15 = 0$;
c) $x^2 - 3x - 4 = 0$　　d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$
e) $7x^2 - 7x = 0$　　f) $2x^2 + 3x = 0$

Quines equacions es poden resoldre en $\mathbb{Q}$?

Per a quines equacions és necessari el conjunt dels nombres reals, $\mathbb{R}$?

a) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$　b) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$

c) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$　d) $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4}$,

$x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{4}$;

e) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$　f) $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = 0$

Per a b) i d), necessitem $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ encara no és suficient

■ **Intenta resoldre en $\mathbb{R}$ les equacions següents:**

a) $x^2 - 2 = 0$　　b) $2x^2 - 5x + 1 = 0$
c) $5x^2 - x - 2 = 0$　　d) $x^2 + 1 = 0$

e) $x^2 - 2x + 5 = 0$ **f)** $5x^2 + 10 = 0$

a) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$

b) $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

c) $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{41}}{10}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{41}}{10}$

d) $x^2 = -1 \rightarrow$ No es pot resoldre.

e) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \rightarrow$ No es pot resoldre.

f) $x^2 = -2 \rightarrow$ No es pot resoldre.

Les tres primeres han pogut resoldre's, però les tres últimes no, ja que s'arriba a expressions com ara:

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-2}$

La nova ampliació numèrica haurà de donar validesa a aquestes expressions.

■ **Resol les tres últimes equacions, d), e) i f), utilitzant per a les solucions nombres reals i l'expressió $\sqrt{-1}$.**

Observa que $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = 4\sqrt{-1}$ i $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\sqrt{-1}$

d) $x = \pm\sqrt{-1}$, $x_1 = -\sqrt{-1}$, $x_2 = \sqrt{-1}$

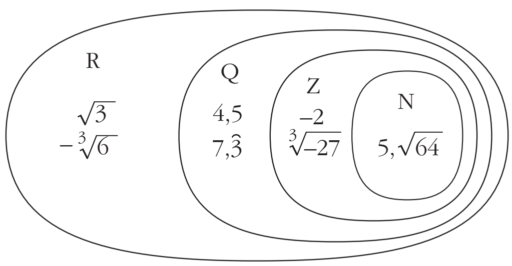
e) $x_1 = 1 - 2\sqrt{-1}$, $x_2 = 1 + 2\sqrt{-1}$

f) $x_1 = -\sqrt{2}\sqrt{-1}$, $x_2 = \sqrt{2}\sqrt{-1}$

Pàgina 14

1. Situa els nombres següents en el diagrama:

$\sqrt{3}$; 5; –2; 4,5; $7,\hat{3}$; $-\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{-8}$



ℕ: 5, $\sqrt{64}$

ℤ: –2, $\sqrt[3]{-27}$, 5, $\sqrt{64}$

ℚ: 4,5, $7,\hat{3}$, –2, $\sqrt[3]{-27}$, 5, $\sqrt{64}$

ℝ: són tots excepte $\sqrt{-8}$

No reals: $\sqrt{-8}$

2. Situa els nombres de l'exercici anterior en les caselles següents. Cada nombre pot estar en més d'un.

Afegeix un nombre més (que t'inventis) a cada casella.

Naturals, ℕ: 5, $\sqrt{64}$, 2

Enters, ℤ: –2, $\sqrt[3]{-27}$, 5, $\sqrt{64}$, 2, –8

Racionals, ℚ: 4,5, $7,\hat{3}$, –2, $\sqrt[3]{-27}$, 5, $\sqrt{64}$, 2, –8, 2,3

Reals, ℝ: tots els anteriors més $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{5}$

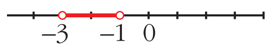
No reals: $\sqrt{-8}$, $\sqrt{-3}$

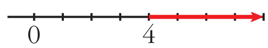
Pàgina 15

3. Representa els conjunts següents:

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

a) 

b) 

c) 

d) 

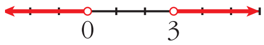
4. Representa els conjunts següents:

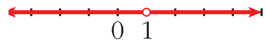
a) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **b)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$

c) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **d)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

a) 

b) 

c) 

d) 

Pàgina 16

5. Troba els valors absoluts següents:

a) $|-11|$ **b)** $|\pi|$ **c)** $|-\sqrt{5}|$

d) $|0|$ **e)** $|3-\pi|$ **f)** $|3-\sqrt{2}|$

g) $|1-\sqrt{2}|$ **h)** $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$ **i)** $|7-\sqrt{50}|$

a) 11 b) π c) $\sqrt{5}$

d) 0 e) $\pi - 3$ f) $3-\sqrt{2}$

g) $\sqrt{2}-1$ h) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ i) $\sqrt{50}-7$

6. Esbrina per a quins valors de *x* s'acompleixen les relacions següents:

a) $|x| = 5$ **b)** $|x| \le 5$ **c)** $|x-4| = 2$;

d) $|x-4| \le 2$ **e)** $|x-4| > 2$

f) $|x+4| > 5$

a) 5 i -5 b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

c) 6 i 2 d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$ $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x > 1$ o $x < -9$

Pàgina 17

7. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$ **d)** $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[4]{x^3}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) y^2

d) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ e) $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2}$ f) $\sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

8. Quin és més gran, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{31^3} = \sqrt[12]{29791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{13^4} = \sqrt[12]{28561}\end{array}\right\} \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$$

9. Redueix a índex comú:

a) $\sqrt[12]{a^5}$ **i** $\sqrt[18]{a^7}$ **b)** $\sqrt[3]{51}$ **i** $\sqrt[9]{132650}$

a) $\sqrt[36]{a^{15}}$ i $\sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{51^3} = \sqrt[9]{132651}$

i $\sqrt[9]{132650}$

10. Simplifica:

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x}\,)^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Pàgina 18

11. Redueix:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$ **d)** $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^{3 \cdot 3}} \cdot \sqrt[12]{2^{2 \cdot 4}} =$

$= \sqrt[12]{2^9} \cdot \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[12]{2^{17}}$

12. Simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\, b^5\, c}{a^2\, b^6\, c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{b\, c^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b\, c}}$

13. Redueix:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$; b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

14. Suma i simplifica:

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$

b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} =$

$= \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} =$

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} =$

$= 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} =$

$= 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

Pàgina 19

15. Racionalitza denominadors i simplica quan puguis:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$ **g)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^3}} \cdot \dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{\sqrt{a^3}}{(\sqrt{a^3})^2} = \dfrac{\sqrt{a^3}}{a^3}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}} = \dfrac{3}{\sqrt{50}} \cdot \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{50}}{(\sqrt{50})^2} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{50}}{50} =$

$= \dfrac{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 5^2}}{2 \cdot 5^2} = \dfrac{3 \cdot 5\sqrt{2}}{2 \cdot 5^2} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}} = \dfrac{4}{\sqrt{18}} \cdot \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{18}}{(\sqrt{18})^2} = \dfrac{4\sqrt{18}}{18} =$

$= \dfrac{4 \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2}}{2 \cdot 3^2} = \dfrac{2^2 \cdot 3\sqrt{2}}{2 \cdot 3^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{2 \cdot 5} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} =$

$= \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2 \cdot 5}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3}} =$

$= \dfrac{2\sqrt[3]{10}}{2 \cdot 5} = \dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

16. Racionalitza denominadors i simplifica quan puguis:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **c)** $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **e)** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

f) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} =$

$= \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} =$

$= \dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a+1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} =$

$= \sqrt{a} + 1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $= \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})} =$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6} =$

$= \dfrac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5 + 2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}+1}{1} + \dfrac{\sqrt{2}-1}{1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} =$

$= \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

Pàgina 22

17. Pren 3,14 com a valor aproximat de π. Dóna una quota de l'error absolut i una altra de l'error relatiu d'aquest número irracional.

Valor aproximat = 3,14

Ea < 0,005

Er $< \dfrac{0{,}005}{3{,}14} < 0{,}0016$

18. Dóna el valor de 100 Φ (recorda que Φ és el nombre d'or) amb 6 xifres significatives i acota l'error absolut i l'error relatiu que es comet.

100 Φ = 161,803399

Error absolut < 0,0000005

Error relatiu $< \dfrac{0{,}0000005}{161{,}803399} < 3{,}09 \times 10^{-9}$

19. La distància de la Terra al Sol és 149 000 000 km.

a) Expressa-la en notació científica.

b) Expressa-la en cm amb dues xifres significatives.

c) Acota els errors absolut i relatiu en els dos casos anteriors.

a) $1{,}49 \cdot 10^8$ km

b) $1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm

c) km $\Rightarrow$ $Ea < 500\,000$

$$Er < \frac{0{,}005}{1{,}49} < 0{,}003$$

cm $\Rightarrow$ $Ea < 5 \cdot 10^{11}$

$$Er < \frac{0{,}05}{1{,}5} < 0{,}03$$

Pàgina 25

20. Troba: a) $\boldsymbol{log_2}$ 16 b) $\boldsymbol{log_2}$ 0,25 c) $\boldsymbol{log_9}$ 1 d) $\boldsymbol{log_{10}}$ 0,1 e) $\boldsymbol{log_4}$ 64 f) $\boldsymbol{log_7}$ 49 g) $\boldsymbol{ln\ e^4}$ h) $\boldsymbol{ln\ e^{-1/4}}$ i) $\boldsymbol{log_5}$ 0,04 j) $\boldsymbol{log_6 \left(\frac{1}{216}\right)}$

a) $log_2\ 2^4 = 4$; b) $log_2\ 0{,}25 = -2$;

c) $log_9\ 1 = 0$; d) $log_{10}\ 0{,}1 = -1$;

e) $log_4\ 4^3 = 3$; f) $log_7\ 7^2 = 2$

g) $ln\ e^4 = 4$; h) $ln\ e^{-1/4} = -0{,}25$

i) $log_5\ 0{,}04 = -2$; j) $log_6 \left(\dfrac{1}{216}\right) = -3$

21. Troba la part sencera de:

a) $\boldsymbol{log_2}$ 60 b) $\boldsymbol{log_5}$ 700

c) $\boldsymbol{log_{10}}$ 43 000 d) $\boldsymbol{log_{10}}$ 0,084

e) $\boldsymbol{log_9}$ 60 f) $\boldsymbol{ln\ e}$

a) $log_2\ 60$, $2^5 = 32$ i $2^6 = 64$

Per tant, $5 < log_2\ 60 < 6$

És a dir, $log_2\ 60 = 5,\ldots$

b) $log_5\ 700$, $5^4 = 625$ i $5^5 = 3\,125$

Per tant, $4 < log_5\ 700 < 5$

És a dir, $log_5\ 700 = 4,\ldots$

c) $log_{10}\ 43\,000$, $10^4 = 10\,000$ i $10^5 = 100\,000$

Per tant, $4 < log_{10}\ 43\,000 < 5$

És a dir, $log_{10}\ 43\,000 = 4,\ldots$

d) $log_{10}\ 0{,}084$, $10^{-1} = 1$ i $10^{-2} = 0{,}1$

Per tant, $-1 < log_{10}\ 0{,}084 < -2$

És a dir, $log_{10}\ 0{,}084 = -1,\ldots$

e) $log_9\ 60$, $9^1 = 9$ i $9^2 = 81$

Per tant, $1 < log_9\ 60 < 2$

És a dir, $log_9\ 60 = 1,\ldots$

f) $ln\ e = 1$

22. Aplica la propietat ⑧ per obtenir els logaritmes següents amb l'ajuda de la calculadora:

a) $\boldsymbol{log_2}$ 1 500; b) $\boldsymbol{log_5}$ 200; c) $\boldsymbol{log_{100}}$ 200; d) $\boldsymbol{log_{100}}$ 40

En cada cas, comprova el resultat usant la potenciació.

a) $\dfrac{log\ 1\,500}{log\ 2} = 10{,}55$; $2^{10{,}55} \approx 1500$

b) $\dfrac{log\ 200}{log\ 5} = 3{,}29$; $5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\ 200}{log\ 100} = 1{,}15$; $100^{1{,}15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\ 40}{log\ 100} = 0{,}80$; $100^{0{,}80} \approx 40$

23. Sabent que $\boldsymbol{log_5 A = 1{,}8}$ i $\boldsymbol{log_5 B = 2{,}4}$, calcula:

a) $\boldsymbol{log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}}$ b) $\boldsymbol{log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}}$

a) $log_5 \sqrt[4]{\dfrac{A^2}{25B}} = log_5\ A^{2/4} - log_5\ 25^{1/4} - log_5 B^{1/4} =$

$= \left(\dfrac{2}{4} \cdot 1{,}8\right) - \left(\dfrac{1}{4} \cdot 2\right) - \left(\dfrac{1}{4} \cdot 2{,}4\right) = -0{,}2$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5\ 5 + log_5 \sqrt{A^3} - log_5 B^2 =$

$= 1 + log_5\ A^{3/2} - log_5\ B^2 =$

$= 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = -1{,}1$

24. Esbrina la relació que hi ha entre $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, sabent que es verifica:

$\boldsymbol{ln\ y = 2x - ln\ 5}$

$ln\ y = ln\ e^{2x} - ln\ 5$, ja que $2x = ln\ e^{2x}$

$ln\ y = ln\left(\dfrac{e^{2x}}{5}\right)$

$y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

Pàgina 27

25. Representa gràficament els nombres complexos següents i digues quins són reals, quins imaginaris i, d'aquests, quins són imaginaris purs:

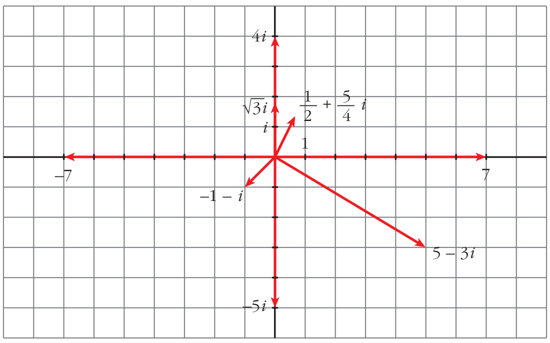
$5 - 3i$; $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}i$; $-5i$; 7; $\sqrt{3}\,i$; 0; $-1 - i$; -7; $4i$

Reals: 7, 0 i –7

Imaginaris: $5 - 3i$, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}i$, $-5i$, $\sqrt{3}\,i$, $-1 - i$, $4i$

Imaginaris purs: $-5i$, $\sqrt{3}\,i$, $4i$

Representació:

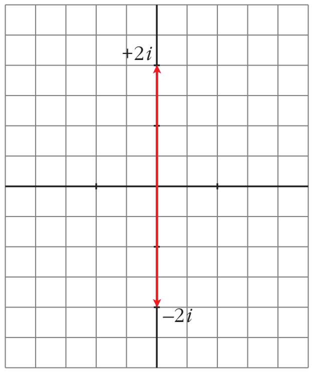


26. Obtén les solucions de les equacions següents i representa-les:

a) $x^2 + 4 = 0$; b) $x^2 + 6x + 10 = 0$; c) $3x^2 + 27 = 0$; d) $3x^2 - 27 = 0$

a) $x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

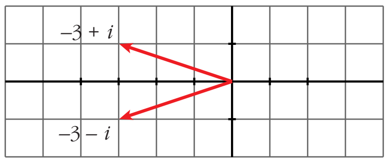
$x_1 = +2i$, $x_2 = -2i$



b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} =$

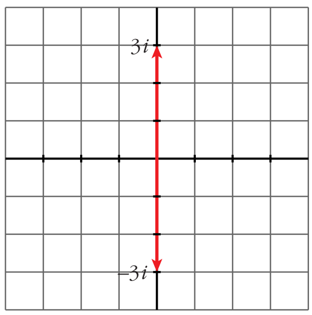
$= \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$

$x_1 = -3 - i$, $x_2 = -3 + i$



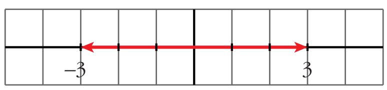
c) $x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$

$x_1 = -3i$, $x_2 = 3i$



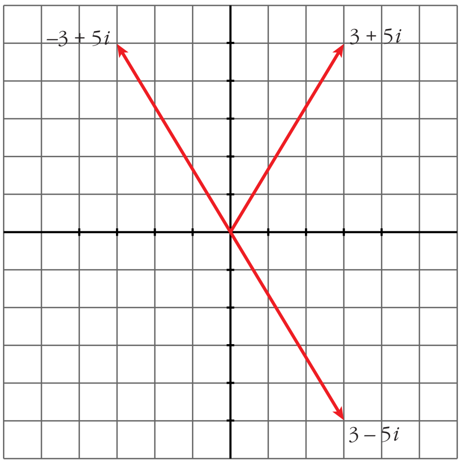
d) $x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

$x_1 = -3$, $x_2 = 3$

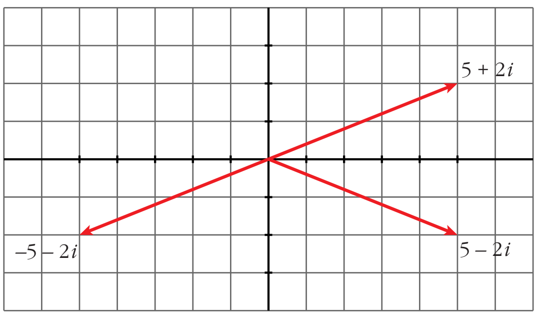


27. Representa gràficament l'oposat i el conjugat de:
a) $3 - 5i$; b) $5 + 2i$; c) $-1 - 2i$; d) $-2 + 3i$; e) 5; f) 0; g) $2i$; h) $-5i$

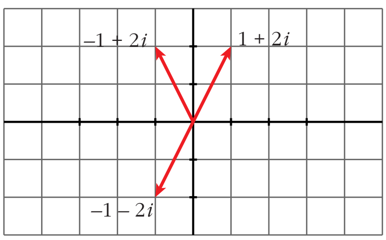
a) Oposat: $-3 + 5i$
Conjugat: $3 + 5i$



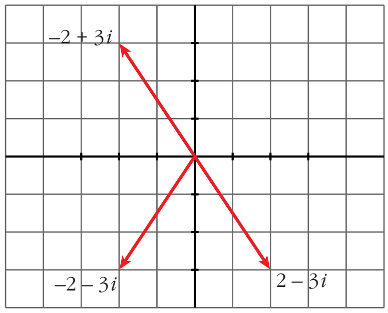
b) Oposat: $-5 - 2i$
Conjugat: $5 - 2i$



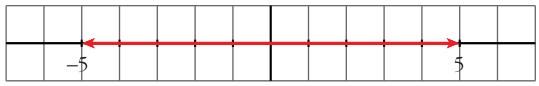
c) Oposat: $1 + 2i$
Conjugat: $-1 + 2i$



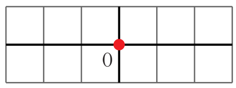
d) Oposat: $2 - 3i$
Conjugat: $-2 - 3i$



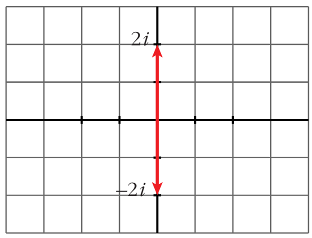
e) Oposat: -5
Conjugat: 5



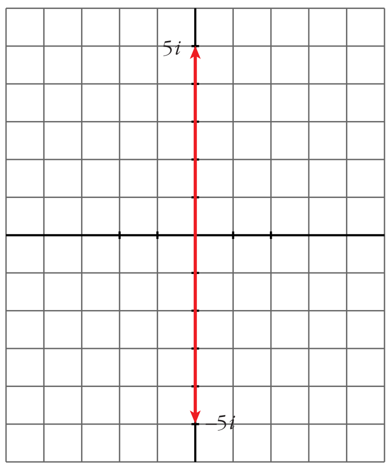
f) Oposat: 0
Conjugat: 0



g) Oposat: $-2i$
Conjugat: $-2i$



h) Oposat: $5i$
Conjugat: $5i$



28. Sabem que $i^2 = -1$. Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Dóna un criteri per simplificar potències de i d'exponent natural.

$i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$; $i^{20} = 1$; $i^{21} = i$; $i^{22} = -1$; $i^{23} = -i$

CRITERI: Dividim l'exponent entre 4 i l'escrivim d'aquesta manera:

$i^n = i^{4c + r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r =$

$= 1 \cdot i^r = i^r$

Per tant, $i^n = i^r$, en què r és el residu de dividir n entre 4.

Pàgina 29

29. Efectua les operacions següents i simplifica'n el resultat:

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$ **g)** $\frac{1 - 4i}{3 + i}$ **h)** $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$;

i) $\frac{5 + i}{-2 - i}$ **j)** $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$ **k)** $\frac{4 - 2i}{i}$;

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$ **m)** $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) =$

$= 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) =$

$= 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 =$

$= 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i$

$- 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) =$

$= (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) =$

$= (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) = (1 - 5i)(1 + 3i) =$

$= 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i =$

$= 16 - 2i$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i} = \frac{(2 + 4i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} =$

$= \frac{8 + 4i + 16i + 8i^2}{16 - 4i^2} = \frac{20i}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$

g) $\frac{1 - 4i}{3 + i} = \frac{(1 - 4i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} =$

$= \frac{3 - i - 12i + 4i^2}{9 - i^2} = \frac{3 - 13i - 4}{9 + 1} =$

$= \frac{-1 - 13i}{10} = \frac{-1}{10} - \frac{13}{10}i$

h) $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i} = \frac{(4 + 4i)(-3 - 5i)}{(-3 + 5i)(-3 - 5i)} =$

$= \frac{-12 - 20i - 12i - 20i^2}{9 - 25i^2} = \frac{-12 - 32i + 20}{9 + 25} =$

$= \frac{8 - 32i}{34} = \frac{8}{34} - \frac{32}{34}i = \frac{4}{17} - \frac{16}{17}i$

i) $\frac{5 + i}{-2 + i} = \frac{(5 + i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} =$

$= \frac{-10 + 5i - 2i + i^2}{4 + 1} = \frac{-10 + 3i - 1}{5} =$

$= \frac{-11 + 3i}{5} = \frac{-11}{5} + \frac{3}{5}i$

j) $\frac{1 + 5i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 5i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} =$

$= \frac{3 - 4i + 15i - 20i^2}{9 - 16i^2} = \frac{3 + 11i + 20}{9 + 16} =$

$= \frac{23 + 11i}{25} = \frac{23}{25} + \frac{11}{25}i$

k) $\frac{4 - 2i}{i} = \frac{(4 - 2i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-4i + 2i^2}{1} =$

$= -4i - 2 = -2 - 4i$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right) = 6 - 15 + \frac{6}{5}i = -9 + \frac{6}{5}i$

m) $\dfrac{(-3i)^2\,(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{9i^2\,(1-2i)}{(2+2i)} =$

$\dfrac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9+18i}{(2+2i)} = \dfrac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} =$

$= \dfrac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \dfrac{-18+54i+36}{4+4} =$

$= \dfrac{18+54i}{8} = \dfrac{18}{8} + \dfrac{54}{8}i = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4}i$

30. Obtén polinomis les arrels dels quals siguin:

a) $2 + \sqrt{3}\,i$ i $2 - \sqrt{3}\,i$

b) $-3i$ i $3i$

c) $1 + 2i$ i $3 - 4i$

(Observa que tan sols quan les dues arrels són conjugades, el polinomi té coeficients reals.)

a) $[x - (2 + \sqrt{3}\,i)]\,[x - (2 - \sqrt{3}\,i)] =$

$= [(x-2) - \sqrt{3}\,i]\,[(x-2) + \sqrt{3}\,i] =$

$= (x-2)^2 - (\sqrt{3}\,i)^2$

$= x^2 - 4x + 4 - 3i^2 = x^2 - 4x + 4 + 3 =$

$= x^2 - 4x + 7$

b) $[x - (-3i)]\,[x - 3i] = [x + 3i]\,[x - 3i] =$

$= x^2 - 9i^2 = x^2 + 9$

c) $[x - (1 + 2i)]\,[x - (3 - 4i)] =$

$= [(x-1) - 2i]\,[(x-3) + 4i] =$

$= (x-1)\,(x-3) + 4(x-1)i -$

$- 2(x-3)i - 8i^2 = x^2 - 4x + 3 +$

$+ (4x - 4 - 2x + 6)i + 8 =$

$= x^2 - 4x + 11 + (2x+2)i =$

$= x^2 - 4x + 11 + 2ix + 2i =$

$= x^2 + (-4 + 2i)x + (11 + 2i)$

31. Quant ha de valer x, real, perquè $(25 - xi)^2$ sigui imaginari pur?

$(25 - xi)^2 = 625 + x^2i^2 - 50xi =$

$= (625 - x^2) - 50xi$

Per tal que sigui imaginari pur:

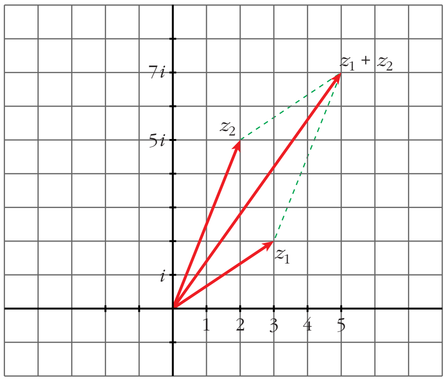
$625 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$

Hi ha dues solucions: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

32. Representa gràficament $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_1 + z_2$. Comprova que $z_1 + z_2$ és una diagonal del paral·lelogram de costats z_1 i z_2.

$z_1 + z_2 = 5 + 7i$



Pàgina 31

33. Escriu en forma polar els nombres complexos següents:

a) $1 + \sqrt{3}\,i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $-1 + i$

d) $5 - 12i$ e) $3i$ f) -5

a) $1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$ b) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

c) $-1 + i = \sqrt{2}_{\,135°}$ d) $5 - 12i = 13_{292°\,37'}$

e) $3i = 3_{90°}$ f) $-5 = 5_{180°}$

34. Escriu en forma binòmica els nombres complexos següents:

a) $5_{(\pi/6)\text{ rad}}$ b) $2_{135°}$ c) $2_{495°}$

d) $3_{240°}$ e) $5_{180°}$ f) $4_{90°}$

a) $5_{(\pi/6)} = 5\left(cos\,\dfrac{\pi}{6} + i\,sin\,\dfrac{\pi}{6}\right) =$

$= 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i$

b) $2_{135°} = 2(cos\,135° + i\,sin\,135°) =$

$= 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

c) $2_{495°} = 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

d) $3_{240°} = 3(cos\ 240° + i\ sin\ 240°) =$

$= 3\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180°} = -5$

f) $4_{90°} = 4i$

35. Expressa en forma polar l'oposat i el conjugat del nombre complex $z = r_\alpha$.

Oposat: $-z = r_{180° + \alpha}$

Conjugat: $\overline{z} = r_{360° - \alpha}$

36. Escriu en forma binòmica i en forma polar el complex:

$z = 8\ (cos\ 30° + i\ sin\ 30°)$

$z = 8_{30°} = 8\ (cos\ 30° + i\ sin\ 30°) =$

$= 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} + \dfrac{8}{2}i = 4\sqrt{3} + 4i$

37. Siguin els nombres complexos
$z_1 = 4_{60°}$ i $z_2 = 3_{210°}$.
a) Expressa z_1 i z_2 en forma binòmica.
b) Troba $z_1 \cdot z_2$ i z_2/z_1 i passa els resultats a forma polar.
c) Compara els mòduls i els arguments de $z_1 \cdot z_2$ i z_2/z_1 amb els de z_1 i z_2 i intenta-hi trobar relacions.

a) $z_1 = 4_{60°} = 4(cos\ 60° + i\ sin\ 60°) =$

$= 4\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\, i$

$z_2 = 3_{210°} = 3(cos\ 210° + i\ sin\ 210°) =$

$= 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

b) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 2\sqrt{3}\, i)\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right) =$

$= -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}\, i^2 =$

$= -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)}{(2 + 2\sqrt{3}i)} =$$

$$\frac{\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)(2 - 2\sqrt{3}i)}{(2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 3i + 9i - 3\sqrt{3}i^2}{4 - 12i^2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60°} \cdot 3_{210°} = (4 \cdot 3)_{60° + 210°} =$
$= 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210°}}{4_{60°}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210° - 60°} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

Pàgina 35

Per practicar

Nombres racionals i irracionals

38. Expressa com a fracció cada decimal i opera:

$0,\overparen{12} - 5,\hat{6} - 0,2\hat{3} + 3,1$

Recorda que $5,\hat{6} = \dfrac{56 - 5}{9}$; $0,2\hat{3} = \dfrac{23 - 2}{90}$.

$$\frac{12}{99} - \frac{51}{9} - \frac{21}{90} + \frac{31}{10} = -\frac{442}{165} = -2,6\overparen{78}$$

39. Demostra que el producte $4,0\hat{9} \cdot 1,3\hat{9}$ és un decimal exacte.

Comprova, passant a fracció, que els dos factors són decimals exactes.

$$4,0\hat{9} = \frac{409 - 40}{90} = \frac{369}{90} = 4,1$$

$$1,3\hat{9} = \frac{139 - 13}{90} = \frac{126}{90} = 1,4$$

$4,0\widehat{9} \cdot 1,3\widehat{9} = 4,1 \cdot 1,4 = 5,74$

40. Calcula: a) $\sqrt{1,\widehat{7}}$ b) $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}}$

a) $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3} = 1,\widehat{3}$

b) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3} = 0,\widehat{4}$

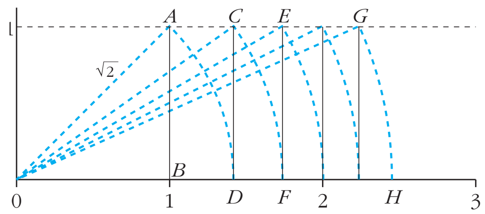
41. Indica, de cada parell de nombres, el major.

a) $\dfrac{140}{99}$ i $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ i $0,\widehat{526}$

c) $4,\widehat{89}$ i $2\sqrt{6}$ d) $-2,098$ i $-2,1$

a) $\sqrt{2}$; b) $0,52\widehat{6}$; c) $4,\widehat{89}$; d) $-2,098$

42. Observa com hem representat alguns nombres irracionals:



En el triangle OAB, $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ i $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Per tant, el punt D representa $\sqrt{2}$.

Quins nombres representen els punts F i H? Justifica'n la resposta.

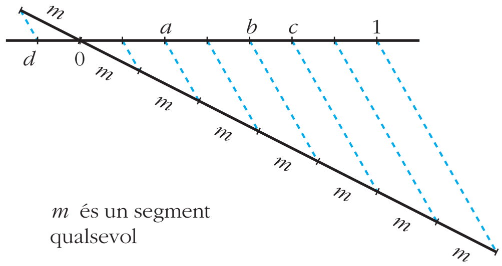
F representa $\sqrt{3}$, ja que $\overline{OF} = \overline{OC} =$

$= \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{DC}^2} = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = \sqrt{3}$

H representa $\sqrt{6}$, ja que $\overline{OH} = \overline{OG} =$

$= (\sqrt{5})^2 + 1^2 = \sqrt{6}$

43. Quins són els nombres racionals *a*, *b*, *c*, *d* representats en aquesta gràfica?



$a = \dfrac{2}{7}$; $b = \dfrac{4}{7}$; $c = \dfrac{5}{7}$; $d = -\dfrac{1}{7}$

Potències

44. Troba sense calculadora:

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 =$$

$= -4 + 4 = 0$

45. Simplifica, fent servir les propietats de les potències:

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ b) $\dfrac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\dfrac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ d) $\dfrac{a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c^7}{a^{-5} \cdot b^2 \cdot c^{-1}}$

Mira, en Exercicis i problemes resolts, el núm. 2 a).

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \dfrac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8} = 2^{-8} = \dfrac{1}{256}$

d) $\dfrac{c^7\, a^5\, c}{a^3\, b^4\, b^2} = \dfrac{a^2\, c^8}{b^6}$

46. Expressa els radicals següents, per mitjà de potències d'exponent fraccionari, i simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

47. Resol, sense utilitzar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0{,}25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0{,}001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$; b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$; c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$; e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$;

f) $\sqrt[3]{0{,}1^3} = 0{,}1$

48. Expressa com a potència de base 2:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $(-32)^{1/5}$ **c)** $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$; b) $(-2^5)^{1/5} = -2$; c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

49. Calcula fent servir potències de base 2, 3 i 5:

a) $4 \cdot \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{(-5)^3(-8)^3(-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ **d)** $\dfrac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(-3)^3}{2^3} = \dfrac{-3^2}{2} = \dfrac{-9}{2}$

b) $\dfrac{1}{2^4} \cdot \dfrac{3^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{3^2}{2^8} = \dfrac{9}{256}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \dfrac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} =$

$= \dfrac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \dfrac{18}{125}$

d) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\dfrac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \dfrac{-3}{400}$

50. Expressa en forma de potència, efectua les operacions i simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ **b)** $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\dfrac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} =$

$= 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

51. Justifica les igualtats que són vertaderes. Escriu el resultat correcte en les falses:

a) $\dfrac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$; **b)** $(3^{-2})^{-3}\left(\dfrac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\dfrac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \dfrac{8}{15}$; **d)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \dfrac{80}{9}$

a) Falsa. $\dfrac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \dfrac{a^4}{b^4}$

b) Vertadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\dfrac{1}{3^3}\right)^2 =$

$= 3^6 \cdot \dfrac{1}{3^6} = \dfrac{3^6}{3^6} = 1$

c) Vertadera. $\dfrac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \dfrac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} =$

$= \dfrac{(1/3 - 1/5)(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}$

d) Vertadera. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \dfrac{1}{(-3)^2} =$

$= 3^2 - \dfrac{1}{3^2} = 9 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{81 - 1}{9} = \dfrac{80}{9}$

52. Demostra, fent servir potències, que:

a) $(0,125)^{1/3} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = 2$

a) $(0,125)^{1/3} = \left(\frac{125}{1\,000}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{1/3} =$

$= \frac{1}{2} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1/2} =$

$= (2^2)^{1/2} = 2$

Pàgina 36

Radicals

53. Introdueix els factors dins de cada arrel i simplica:

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ **c)** $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

54. Treu de l'arrel el factor que puguis:

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1\,000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2 + 4}$ **i)** $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$; b) $4\sqrt[3]{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$; d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$;

f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$; g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$;

h) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$

i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

55. Simplifica:

a) $\sqrt[6]{0,027}$; **b)** $\sqrt[8]{0,0016}$; **c)** $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[6]{\frac{27}{1\,000}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3/6} =$

$= \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

b) $\sqrt[8]{\frac{16}{10\,000}} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt[8]{\left(\frac{2}{10}\right)^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4/8} =$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{4^2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2/4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} =$

$= \frac{\sqrt{5}}{2}$

56. Simplifica els radicals següents:

a) $\sqrt[3]{24}$; **b)** $\sqrt[6]{27}$; **c)** $\sqrt[3]{-108}$; **d)** $\sqrt[12]{64y^3}$;

e) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} =$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

57. Redueix a índex comú i ordena de menor a major:

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64}; \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16}; \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7\,776}, \sqrt[20]{10\,000}; \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{372\,348}, \sqrt[12]{6\,561}, \sqrt[12]{10\,000};$

$\sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{72}$

58. Realitza l'operació i simplifica, si és possible:

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$; **b)** $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$;

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$; **d)** $\left(\sqrt[3]{12}\right)^2$; **e)** $\left(\sqrt[6]{32}\right)^3$

f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} =$

$= 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

59. Efectua i simplifica, si és possible:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

En b) i c) pots expressar els radicals com a potències de bases a i 2, respectivament.

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$; b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$;

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

60. Expressa com una sola arrel:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$; **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$; **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}\right) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}$; b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

61. Racionalitza els denominadors i simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$; **b)** $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; **c)** $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$; **d)** $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$;

e) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$; c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$;

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} =$

$= \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2^3\cdot 3^2}+3\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{3\sqrt{8}+6\sqrt{8}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=$

$=\dfrac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=8$

62. Calcula i simplifica:

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$;

b) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$;

c) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}$;

d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-21\sqrt[3]{2}=-20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5}+3\sqrt{6}-3\sqrt{5}-2\sqrt{6}=2\sqrt{5}+\sqrt{6}$

d) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+$

$+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

63. Simplifica al màxim les expressions següents:

a) $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{18}{125}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}+\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4}-2\sqrt[3]{2\cdot 5^3}+5\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-4\sqrt[3]{2}=$

$=6\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}+15\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2^3}{3^2\cdot 5}}=$

$=\sqrt{\dfrac{2}{5}}-\dfrac{12}{5}\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\dfrac{2}{9}\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{-53}{45}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4\cdot a}-2\sqrt[3]{3a^4}+\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}=$

$=21\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}+\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\dfrac{106}{5}-2a\right)\sqrt[3]{3a}$

64. Efectua i simplifica:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})\,2\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$

d) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$

e) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot$

$\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2})=$

$=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12}+2\sqrt{10}=4\sqrt{3}+2\sqrt{10}$

c) $5-6=-1$

d) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

e) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

65. Racionalitza i simplifica:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$ **d)** $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\dfrac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=$

$= \dfrac{\sqrt{6} - 1}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{6 + \sqrt{6}}{6} = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\dfrac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2(3 - 5)} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{-4} = -\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$

d) $\dfrac{3(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \dfrac{3(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} =$

$= 3\ (\sqrt{5} + 2) = 3\sqrt{5} + 6$

e) $\dfrac{11(2\sqrt{5} - 3)}{(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)} = \dfrac{11(2\sqrt{5} - 3)}{20 - 9} =$

$= \dfrac{11(2\sqrt{5} - 3)}{11} = 2\sqrt{5} - 3$

f) $\dfrac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} =$

$= \dfrac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} =$

$= \dfrac{9\sqrt{2 \cdot 3^2} - 4\sqrt{2}}{23} = \dfrac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} =$

$= \dfrac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

66. Efectua i simplifica:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} =$

$= \dfrac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} =$

$= \dfrac{(\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{5})}{7 - 5} -$

$- \dfrac{(\sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{7} - \sqrt{5})}{7 - 5} =$

$= \dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}$

Pàgina 37

67. Opera i simplifica:

$$\dfrac{1}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}}$$

$\dfrac{1}{\dfrac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} + \dfrac{1}{\dfrac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}} =$

$= 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$

Notació científica

68. Efectua i dóna el resultat en notació científica amb tres xifres significatives:

a) $\dfrac{(3{,}12 \cdot 10^{-5} + 7{,}03 \cdot 10^{-4})\ 8{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}32 \cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12{,}5 \cdot 10^{7} - 8 \cdot 10^{9})(3{,}5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9{,}2 \cdot 10^{6}}$

c) $\dfrac{\mathbf{5{,}431 \cdot 10^3 - 6{,}51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}}{\mathbf{8{,}2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}}$

a) $1{,}41 \cdot 10^2$; b) $-1{,}58 \cdot 10^5$; c) $-2{,}65 \cdot 10^6$.

69. Ordena de major a menor els nombres de cada apartat. Per a això, passa a notació científica els que no ho estiguin.

a) $\mathbf{3{,}27 \cdot 10^{13}}$**;** $\mathbf{85{,}7 \cdot 10^{12}}$**;** $\mathbf{453 \cdot 10^{11}}$**.**

b) $\mathbf{1{,}19 \cdot 10^{-9}}$**;** $\mathbf{0{,}05 \cdot 10^{-7}}$**;** $\mathbf{2\,000 \cdot 10^{-12}}$**.**

a) $8{,}57 \cdot 10^{13} > 4{,}53 \cdot 10^{13} > 3{,}27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1{,}19 \cdot 10^{-9}$

70. Efectua: $\dfrac{\mathbf{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}}{\mathbf{4 \cdot 10^6 + 10^5}}$

$-7{,}268 \cdot 10^{-12}$

71. Expressa en notació científica i calcula: $\dfrac{\mathbf{60\,000^3 \cdot 0{,}00002^4}}{\mathbf{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0{,}0002^5}}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7{,}2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

72. Considera els nombres:

$\boldsymbol{A = 3{,}2 \cdot 10^7}$**;** $\boldsymbol{B = 5{,}28 \cdot 10^4}$

i $\boldsymbol{C = 2{,}01 \cdot 10^5}$

Calcula $\boldsymbol{\dfrac{B + C}{A}}$

$0{,}00793125 = 7{,}93125 \cdot 10^{-3}$

73. Si $\boldsymbol{A = 3{,}24 \cdot 10^6}$**;** $\boldsymbol{B = 5{,}1 \cdot 10^{-5}}$**;** $\boldsymbol{C = 3{,}8 \cdot 10^{11}}$ **i** $\boldsymbol{D = 6{,}2 \cdot 10^{-6}}$**, calcula** $\boldsymbol{\left(\dfrac{A}{B} + C\right) \cdot D}$**.**

$2\,749\,882{,}353 \approx 2{,}7499 \cdot 10^6$

Intervals i valor absolut

74. Expressa com a desigualtat i com a interval, i representa'ls:

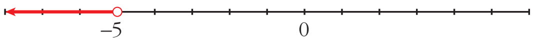
a) $\boldsymbol{x}$ **és menor que –5.**

b) 3 és menor o igual que $\boldsymbol{x}$**.**

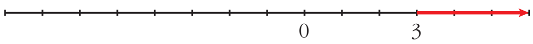
c) $\boldsymbol{x}$ **està comprès entre –5 i 1.**

d) $\boldsymbol{x}$ **està entre –2 i 0, ambdós inclosos.**

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$



b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

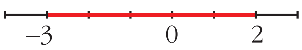
d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

75. Representa gràficament i expressa com a intervals aquestes desigualtats:

a) $\boldsymbol{-3 \le x \le 2}$**; b)** $\boldsymbol{5 < x}$**; c)** $\boldsymbol{x \le -2}$**;**

d) $\boldsymbol{-2 \le x < 3/2}$**; e)** $\boldsymbol{4 < x < 4{,}1}$**; f)** $\boldsymbol{-3 \le x}$**.**

a) $[-3, 2]$;



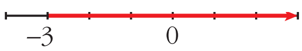
b) $(5, +\infty)$;

c) $[-2, +\infty)$;

d) $\left[-2, \dfrac{3}{2}\right)$;

e) $(4; 4{,}1)$;

f) $[-3, +\infty)$;



76. Escriu la desigualtat que verifica qualsevol nombre $\boldsymbol{x}$ **que pertany a aquests intervals:**

a) $\boldsymbol{[-2, 7]}$**; b)** $\boldsymbol{[13, +\infty)}$**; c)** $\boldsymbol{(-\infty, 0)}$**;**

d) $\boldsymbol{(-3, 0]}$**; e)** $\boldsymbol{[3/2, 6)}$**; f)** $\boldsymbol{(-\infty, +\infty)}$**;**

a) $-2 \le x \le 7$; b) $x \le 13$; c) $x < 0$;

d) $-3 < x \le 0$; e) $\dfrac{3}{2} \le x < 6$;

f) $-\infty < x < +8$

77. Expressa com a interval la part comuna de cada parell d'intervals ($A \cap B$) i ($I \cap J$):
a) $A = [-3, 2]$ $B = [0, 5]$
b) $I = [2, +\infty)$ $J = (0, 10)$
a) [0, 2]; b) [2, 10).

78. Escriu en forma d'intervals els nombres que verifiquen aquestes desigualtats:
a) $x < 3$ o $x \geq 5$; b) $x > 0$ i $x < 4$;
c) $x \leq -1$ o $x > 1$; d) $x < 3$ i $x \leq -2$
Representa'ls gràficament, i si són dos intervals separats, com en a), escriu:
$(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$.
a) $(-\infty, 3) \cup [5, \infty)$; b) (0, 4);
c) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$; d) $]-\infty, 3[$.

79. Expressa, en forma d'interval, els nombres que acompleixen cada una d'aquestes expressions:
a) $|x| < 7$; b) $|x| \geq 5$; c) $|2x| < 8$;
d) $|x - 1| \leq 6$; e) $|x + 2| > 9$; f) $|x - 5| \geq 1$
a) (–7, 7); b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$;
c) (–4, 4); d) [–5, 7]; e) (–11, 7);
f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$.

80. Esbrina quins valors de x acompleixen:
a) $|x - 2| = 5$; b) $|x - 4| \leq 7$
c) $|x + 3| \geq 6$
a) 7 i –3; b) $-3 \leq x \leq 11$; [–3, 11]
c) $x \leq -9$ i $x \geq 3$; $(-\infty, -9) \cup [3, \infty)$

81. Escriu, per mitjà d'intervals, els valors que pot tenir x perquè es pugui calcular l'arrel en cada cas:
a) $\sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{2x+1}$ c) $\sqrt{-x}$
d) $\sqrt{3-2x}$ e) $\sqrt{-x-1}$ f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$;
b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$; $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;
c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$;
d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$;
$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$
e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x$; $(-\infty, -1]$
f) $1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$;
$[-2, +\infty)$

82. Troba la distància entre les parelles de números següents:
a) 7 i 3 b) 5 i 11 c) –3 i –9
d) –3 i 4
a) $|7 - 3| = 4$ b) $|11 - 5| = 6$
c) $|-9 - (-3)| = |-9 + 3| = |-6| = 6$
d) $|4 - (-3)| = 7$

83. Expressa com un únic interval:
a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$
c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$
a) $(1, 6] \cup [2, 5) \Rightarrow 1 < x < 6$
b) $(-1, 3] \cup [0, 3) \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$
c) $(1, 6] \cap [2, 7) \Rightarrow 2 \leq x \leq 6$
d) $(-1, 3] \cap [0, 4) \Rightarrow 0 < x < 3$

Pàgina 38

84. Escriu en forma d'intervals els entorns següents:
a) Centre –1 i radi 2
b) Centre 2,5 i radi 2,01
c) Centre 2 i radi 1/3

a) $(-1 - 2; -1 + 2) = (-3; 1)$
b) $(2{,}5 - 2{,}01; 2{,}5 + 2{,}01) = (0{,}49; 4{,}51)$
c) $\left(2 - \frac{1}{3}; 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

85. Descriu com si fossin entorns els intervals següents:
a) (–1, 2) b) (1,3; 2,9)
c) (–2,2; 0,2) d) (–4; –2,8)

a) $a = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
Entorn de centre $\frac{1}{2}$ i radi $\frac{3}{2}$

b) $a = \frac{1{,}3 + 2{,}9}{2} = 2{,}1$; $R = 2{,}9 - 2{,}1 = 0{,}8$
Entorn de centre 2,1 i radi 0,8

c) $a = \frac{-2{,}2 + 0{,}2}{2} = -1$; $R = 0{,}2 - (-1) = 1{,}2$
Entorn de centre –1 i radi 1,2

d) $a = \frac{-4 + (-2{,}8)}{2} = -3{,}4$;
$R = -2{,}8 - (-3{,}4) = 0{,}6$
Entorn de centre –3,4 i radi 0,6

86. Comprova si és vertadera o falsa cada una de les expressions següents:
a) $|a| < b$ equival $a\ -b < a < b$
b) $|-a| = -|a|$ c) $|a + b| = |a| + |b|$
d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

a) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b \Leftrightarrow a \in (-b, b)$
Vertadera
b) $|-a| = -|a| \rightarrow |-a| = -a \rightarrow -|a| = -a$
Vertadera
c) $|a + b| = |a| + |b|$
Falsa. Per exemple $a = 3$ i $b = -2$
$|3 - 2| \neq |3| + |-2|$
d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Vertadera

Logaritmes

87. Calcula:
a) $log_2\ 1024$; b) $log\ 0{,}001$; c) $log_2 \frac{1}{64}$;
d) $log_{\sqrt{3}}\ 3$; e) $log_3 \sqrt{3}$; f) $log_2 \sqrt{8}$;
g) $log_{½} \frac{1}{\sqrt{2}}$; h) $log_\pi\ 1$

a) $log_2\ 2^{10} = 10$
b) $log\ 10^{-3} = -3$
c) $log_2\ 2^{-6} = -6$
d) $log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$
e) $log_3\ 3^{1/2} = \frac{1}{2}$
f) $log_2\ 2^{3/2} = \frac{3}{2}$
g) $log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}$
h) 0

88. Calcula, fent servir la definició de logaritme:
a) $log_2\ 64 + log_2 \frac{1}{4} - log_3\ 9 - log_2 \sqrt{2}$
b) $log_2 \frac{1}{32} + log_3 \frac{1}{27} - log_2\ 1$

a) $6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
b) $-5 - 3 - 0 = -8$

89. Calcula la base d'aquests logaritmes:
a) $log_x\ 125 = 3$ b) $log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $x^3 = 125$; $x = 5$; b) $x^{-2} = \frac{1}{9}$; $x = 3$

90. Calcula el valor de x en aquestes igualtats:
a) $log\ 3^x = 2$; b) $log\ x^2 = -2$; c) $7^x = 115$;
d) $5^{-x} = 3$

a) $x = \frac{2}{log\ 3} = 4{,}19$; b) $2\ log\ x = -2$; $x = \frac{1}{10}$;

c) $x = \frac{log\,115}{log\,7} = 2{,}438;$

d) $x = -\frac{log\,3}{log\,5} = -0{,}683.$

91. Troba amb la calculadora i comprova el resultat de la potenciació:

a) $log\sqrt{148}$ **b)** $ln\,(2{,}3 \cdot 10^{11})$
c) $ln\,(7{,}2 \cdot 10^{-5})$ **d)** $log_3\,42{,}9$
e) $log_5\,1{,}95$ **f)** $log_2\,0{,}034$

a) 1,085; b) 26,16; c) –9,50; d) 3,42; e) 0,41; f) –4,88.

92. Calcula'n la base en cada cas:

a) $log_x \frac{1}{4} = 2$ **b)** $log_x\,2 = \frac{1}{2}$;

c) $log_x\,0{,}04 = -2$ **d)** $log_x\,4 = -\frac{1}{2}$.

Aplica la definició de logaritme i les propietats de les potències per aïllar x.

En c), $x^{-2} = 0{,}04 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100}$.

a) $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$; b) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$;

c) $x^{-2} = 0{,}04 \rightarrow x = 5$; d) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$

93. Troba el valor de *x* en aquestes expressions, aplicant-hi les propietats dels logaritmes:

a) $ln\,x = ln\,17 + ln\,13$
b) $log\,x = log\,36 - log\,9$
c) $ln\,x = 3\,ln\,5$
d) $log\,x = log\,12 + log\,25 - 2\,log\,6$
e) $ln\,x = 4\,ln\,2 - \frac{1}{2}\,ln\,25$

Per logaritme d'un producte: ln x = ln (17 · 13).

a) $ln\,x = ln\,17 + ln\,13$

$ln\,x = ln\,(17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $log\,x = log\,\frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $ln\,x = ln\,5^3 \Rightarrow x = 5^3 \Rightarrow x = 125$

d) $log\,x = log\,\frac{12 \cdot 25}{6^2} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

e) $ln\,x = ln\,2^4 - ln\,\sqrt{25}$

$ln\,x = ln\,16 - ln\,5$

$ln\,x = ln\,\frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

94. Sabent que *log* 3 = 0,477, calcula el logaritme decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.

$log\,30 = log\,(3 \cdot 10) = log\,3 + log\,10 =$
$= 0{,}477 + 1 = 1{,}477$
$log\,300 = log\,(3 \cdot 10^2) = log\,3 + 2\,log\,10 =$
$= 2{,}477$
$log\,3\,000 = 0{,}477 + 3 = 3{,}477$
$log\,0{,}3 = log\,(3 \cdot 10^{-1}) = 0{,}477 - 1 = -0{,}523$
$log\,0{,}03 = log\,(3 \cdot 10^{-2}) = 0{,}477 - 2 = -1{,}523$
$log\,0{,}003 = 0{,}477 - 3 = -2{,}523$

95. Sabent que *log k* = 14,4, calcula el valor de les expressions següents:

a) $log\,\frac{k}{100}$ **b)** $log\,0{,}1\,k^2$

c) $log\sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ **d)** $(log\,k)^{1/2}$

a) $log\,k - log\,100 = 14{,}4 - 2 = 12{,}4$
b) $log\,0{,}1 + 2\,log\,k = -1 + 2 \cdot 14{,}4 = 27{,}8$
c) $\frac{1}{3}(log\,1 - log\,k) = -\frac{1}{3} \cdot 14{,}4 = -4{,}8$
d) $(14{,}4)^{1/2} = \sqrt{14{,}4} = 3{,}79$

96. Sabent que *ln k* = 0,45, calcula el valor de:

a) $ln\,\frac{k}{e}$ **b)** $ln\sqrt[3]{k}$ **c)** $ln\,\frac{e^2}{k}$

a) $ln\ \frac{k}{e} = ln\ k - ln\ e = 0{,}45 - 1 - 0{,}55$

b) $ln\ \sqrt[3]{k} = \frac{1}{3}\ ln\ k = \frac{0{,}45}{3} = 0{,}15$

c) $ln\ \frac{e^2}{k} = ln\ e^2 - ln\ k = 2 - 0{,}45 = 1{,}55$

97. Calcula x perquè es s'acompleixi:
a) $x^{2,7} = 19$; b) $log_7\ 3x = 0{,}5$; c) $3^{2+x} = 172$

a) $log\ x^{2,7} = log\ 19 \Rightarrow 2{,}7\ log\ x = log\ 19 \Rightarrow$

$\Rightarrow log\ x = \frac{log\ 19}{2{,}7} = 0{,}47$

$x = 10^{0,47} = 2{,}98$

b) $7^{0,5} = 3x \Rightarrow x = \frac{7^{0,5}}{3} = 0{,}88$

c) $log\ 3^{2+x} = log\ 172 \Rightarrow (2 + x)\ log\ 3 =$

$= log\ 172 \Rightarrow 2 + x = \frac{log\ 172}{log\ 3}$

$x = \frac{log\ 172}{log\ 3} - 2 = 2{,}685$

98. Si $log\ k = x$, escriu en funció de x:

a) $log\ k^2$ b) $log\ \frac{k}{100}$ c) $log\ \sqrt{10k}$

a) $2\ log\ k = 2x$

b) $log\ k - log\ 100 = x - 2$

c) $\frac{1}{2} log\ 10k = \frac{1}{2}(1 + x)$

99. Comprova que $\frac{log\ (1/a) + log\sqrt{a}}{log\ a^3} =$ $= -\frac{1}{6}$ (sent $a \neq 1$).

$\frac{-log\ a + 1/2\ log\ a}{3\ log\ a} = \frac{-1/2\ log\ a}{3\ log\ a} = -\frac{1}{6}$

Ha de ser $a \neq 1$ per tal que $log\ a \neq 0$ i puguem simplificar.

Pàgina 39

Nombres complexos en forma binòmica

100. Calcula:
a) $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i)$
b) $3 + 2i\ (-1 + i) - (5 - 4i)$
c) $-2i - (4 - i)5i$
d) $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

a) $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i) =$
$6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 =$
$= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 =$
$= 9 + 6i$

b) $3 + 2i\ (-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i +$
$2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$

c) $-2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 =$
$= -22i - 5 = -5 - 22i$

d) $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2 =$
$= 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i =$
$= 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i$

101. Calcula en forma binòmica:

a) $\frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i}$; b) $\frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)}$;

c) $\frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i)$; d) $\frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i}$

a) $\frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i} = \frac{12 - 6i + 12i - 6i^2}{2 - 2i} =$

$= \frac{18 + 6i}{2 - 2i} = \frac{(18 + 6i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)\ (2 + 2i)} =$

$= \frac{36 + 36i + 12i - 12}{4 + 4} = \frac{24 + 48i}{8} = 3 + 6i$

b) $\frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)} = \frac{-2 + 3i}{-4 + 4i - 2i - 2} =$

$= \frac{-2 + 3i}{-6 + 2i} = \frac{(-2 + 3i)(-6 - 2i)}{(-6 + 2i)(-6 - 2i)} =$

$= \frac{12 + 4i - 18i + 6}{36 + 4} = \frac{18 - 14i}{40} = \frac{9 - 7i}{20} =$

$= \frac{9}{20} - \frac{7}{20}i$

c) $\frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i) = \frac{2 - 2i + 5i + 5}{3 - 2i} = \frac{7 + 3i}{3 - 2i} =$

$= \frac{(7 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{21 + 14i + 9i - 6}{9 + 4} =$

$= \frac{15 - 23i}{13} = \frac{15}{13} = + \frac{23}{13}i$

d) $\frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} +$

$+ \frac{(-3 - 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 + 1} +$

$+ \frac{-3 + 9i - 2i - 6}{1 + 9} = \frac{1 + 3i}{5} + \frac{-9 + 7i}{10} =$

$= \frac{2 + 6i - 9 + 7i}{10} = \frac{-7 + 13i}{10} = \frac{-7}{10} + \frac{13}{10}i$

102. Aquests nombres complexos són els resultats de les operacions que els segueixen.
Opera i digues qui correspon a qui:

$2i$, 20, $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$, -2, $\frac{1}{5} - \frac{17}{5}i$

a) $(1 - i)(4 - 2i)(1 + 3i)$

b) $\frac{1 + 2i}{2 - i}(2 + i) + \frac{1 - 2i}{2 + i}(2 - i)$

c) $\frac{2 - i}{3 - i} - \frac{1}{5}\left(\frac{1 + 8i}{1 + 3i}\right)$

d) $\frac{(2 + i)^2 + (1 - i)^2}{1 - (3/2)i}$; e) $\frac{2 - 2i}{i} + \frac{3 - 5i}{2 - i}$

a) $(1 - i)(4 - 2i)(1 + 3i) =$

$= (4 - 2i - 4i - 2)(1 + 3i) =$

$= (2 - 6i)(1 + 3i) = 2 + 6i - 6i + 18 = 20$

b) $\frac{1 + 2i}{2 - i}(2 + i) + \frac{1 - 2i}{2 + i}(2 - i) =$

$\frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)} + \frac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)} =$

$= \frac{(1 + 2i)(2 + i)^2 + (1 - 2i)(2 - i)^2}{(2 - i)(2 + i)} =$

$= \frac{(1 + 2i)(4 - 1 + 4i) + (1 - 2i)(4 - 1 - 4i)}{4 + 1} =$

$= \frac{(1 + 2i)(3 + 4i) + (1 - 2i)(3 - 4i)}{5} =$

$= \frac{3 + 4i + 6i - 8 + 3 - 4i - 6i - 8}{5} = \frac{-10}{5} = -2$

c) $\frac{2 - i}{3 - i} - \frac{1}{5}\left(\frac{1 + 8i}{1 + 3i}\right) = \frac{(2 - i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} -$

$- \frac{1}{5}\left[\frac{(1 + 8i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)}\right] = \frac{6 + 2i - 3i + i}{9 + 1} -$

$- \frac{1}{5}\left[\frac{1 - 3i + 8i + 24}{1 + 9}\right] = \frac{7 - i}{10} - \frac{1}{5}\left(\frac{25 + 5i}{10}\right) =$

$= \frac{7 - i}{10} - \frac{5 + i}{10} = \frac{7 - i - 5 - i}{10} = \frac{2 - 2i}{10} =$

$= \frac{1 - i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$

d) $\frac{(2 + i)^2 + (1 - i)^2}{1 - (3/2)i} =$

$= \frac{4 - 1 + 4i + 1 - 1 - 2i}{(2 - 3i)/2} = \frac{3 + 2i}{(2 - 3i)/2} =$

$= \frac{6 + 4i}{2 - 3i} = \frac{(6 + 4i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} =$

$= \frac{12 + 18i + 8i - 12}{4 + 9} = \frac{26i}{13} = 2i$

e) $\frac{2 - 2i}{i} + \frac{3 - 5i}{2 - i} = \frac{(2 - 2i)(-i)}{i(-i)} +$

$+ \frac{(3 - 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2i - 2}{1} +$

$+ \frac{6 + 3i - 10i + 5}{4 + 1} = \frac{-2 - 2i}{1} + \frac{11 - 7i}{5} =$

$= \frac{-10 - 10i + 11 - 7i}{5} = \frac{1 - 17i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{17}{5}i$

103. Calcula:

a) i^{37}; b) i^{126}; c) i^{87}; d) i^{64}; e) i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$

b) $i^{126} = i^2 = -1$

c) $i^{87} = i^3 = -i$

d) $i^{64} = i^0 = 1$

e) $i^{-216} = \dfrac{1}{i^{216}} = \dfrac{1}{i^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

104. Donat el nombre complex $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, prova que:

a) $1 + z + z^2 = 0$

b) $\frac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i =$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{2}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \dfrac{1}{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = \dfrac{1}{-1 + \sqrt{3}i} =$

$= \dfrac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} = \dfrac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3} =$

$= \dfrac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{4} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (ho havíem calculat en a)

Per tant: $\dfrac{1}{z} = z^2$

Igualtat de nombres complexos

105. Calcula m i n perquè es verifiqui la igualtat $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2 + n) + (m + 5)i = 7 - 2i \Rightarrow$

$\left.\begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases}\right\} \begin{matrix} n = 5 \\ m = -7 \end{matrix}$

106. Determina k perquè el quocient $\frac{k + i}{1 + i}$ sigui igual a $2 - i$.

$\dfrac{k + i}{1 + i} = \dfrac{(k + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{k - ki + i + 1}{1 + 1} =$

$= \dfrac{(k + 1) + (1 - k)i}{2} = \left(\dfrac{k + 1}{2}\right) + \left(\dfrac{1 - k}{2}\right)i =$

$= 2 - i \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k + 1}{2} = 2 \Rightarrow k = 3 \\ \dfrac{1 - k}{2} = -1 \Rightarrow k = 3 \end{cases}$

Per tant, $k = 3$.

107. Calcula a i b de manera que es verifiqui: $(a + bi)^2 = 3 + 4i$.

Desenvolupa el quadrat; iguala la part real a 3, i la part imaginària a 4.

$(a + bi)^2 = 3 + 4i$

$a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$

$b = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a}$

$a^2 - \left(\dfrac{2}{a}\right)^2 = 3 \Rightarrow a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \Rightarrow$

$a^4 - 4 = 3a^2 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$a^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$

$a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$

$a^2 = -1$ (no val)

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

108. Donats els complexos $2 - ai$ i $3 - bi$, troba a i b perquè el seu producte sigui igual a $8 + 4i$.

$(2 - ai)(3 - bi) = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

$(6 - ab) + (-2b - 3a)\, i = 8 + 4i$

$$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4 + 3a}{-2}$$

$$6 - a\left(\frac{4 + 3a}{-2}\right) = 8 \Rightarrow 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$$

$$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \Rightarrow 4a + 3a^2 = 4 \Rightarrow$$

$3a^2 + 4a - 4 = 0$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \rightarrow b = -3 \\ a = \dfrac{-12}{6} = -2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

109. Calcula el valor de *a* i *b* perquè es verifiqui: $a - 3i = \dfrac{2 + bi}{5 - 3i}$

$$a - 3i = \frac{2 + bi}{5 - 3i}$$

$(a - 3i)\,(5 - 3i) = 2 + bi$

$5a - 3ai - 15i - 9 = 2 + bi$

$(5a - 9) + (-3a - 15)i = 2 + bi$

$$\left.\begin{array}{l} 5a - 9 = 2 \\ -3a - 15 = b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 11/5 \\ b = -108/5 \end{array}$$

110. Troba el valor de *b* perquè el producte $(3 - 6i)\,(4 + bi)$ sigui un nombre:

a) Imaginari pur.

b) Real.

$(3 - 6i)\,(4 + bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b =$

$= (12 + 6b) + (3b - 24)i$

a) $12 + 6b = 0 \Rightarrow b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \Rightarrow b = 8$

111. Determina *a* perquè $(a - 2i)^2$ sigui un nombre imaginari pur.

$(a - 2i)^2 = a^2 + 4i^2 - 4ai = (a^2 - 4) - 4ai$

Perquè sigui imaginari pur, ha de ser:

$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 2$

112. Calcula *x* perquè el resultat del producte $(x + 2 + ix)\,(x - i)$ sigui un nombre real.

Efectua el producte, iguala la part imaginària a 0 i resol l'equació.

$(x + 2 + ix)\,(x - i) = x^2 - xi + 2x - 2i +$

$+ x^2 i - xi^2 = x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x =$

$= (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i$

Perquè sigui real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} =$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Nombres complexos en forma polar

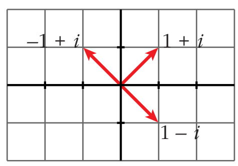
113. Representa aquets nombres complexos, els seus oposats i els seus conjugats. Expressa'ls en forma polar:

a) $1 - i$; b) $-1 + i$; c) $\sqrt{3} + i$; d) $-\sqrt{3} - i$; e) -4; f) $2i$; g) $-\dfrac{3}{4}i$; h) $2 + 2\sqrt{3}\,i$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{\,315^\circ}$

Oposat: $-1 + i = \sqrt{2}_{\,135^\circ}$

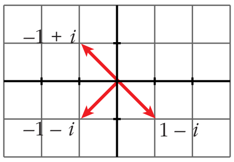
Conjugat: $1 + i = \sqrt{2}_{\,45^\circ}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{\,135°}$

Oposat: $1 - i = \sqrt{2}_{\,315°}$

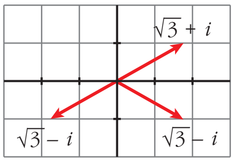
Conjugat: $-1 - i = \sqrt{2}_{\,225°}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Oposat: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

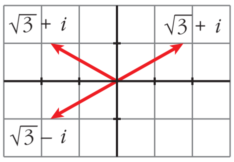
Conjugat: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

Oposat: $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

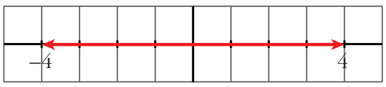
Conjugat: $-\sqrt{3} + i = 2_{150°}$



e) $-4 = 4_{180°}$

Oposat: $4 = 4_{0°}$

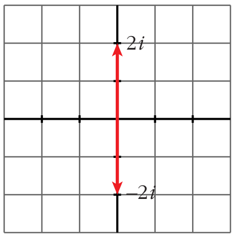
Conjugat: $-4 = 4_{180°}$



f) $2i = 2_{90°}$

Oposat: $-2i = 2_{270°}$

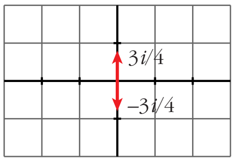
Conjugat: $-2i = 2_{270°}$



g) $-\dfrac{3}{4}\,i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{270°}$

Oposat: $\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{90°}$

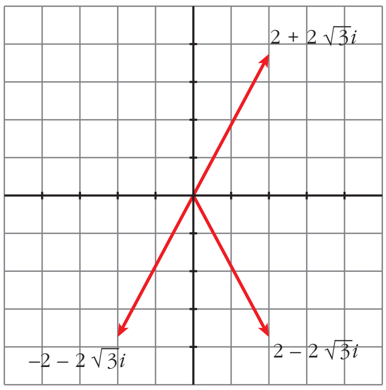
Conjugat: $\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{90°}$



h) $2 + 2\sqrt{3}\,i = \sqrt{14}_{\,60°}$

Oposat: $-2 - 2\sqrt{3}\,i = \sqrt{14}_{\,240°}$

Conjugat: $2 - 2\sqrt{3}\,i = \sqrt{14}_{\,300°}$



114. Escriu en forma binòmica els següents nombres complexos:
a) $2_{45°}$; b) $3_{(\pi/6)}$; c) $\sqrt{2}_{\,180°}$; d) $17_{0°}$; e) $1_{(\pi/2)}$; f) $5_{270°}$; g) $1_{150°}$; h) $4_{100°}$

a) $2_{45°} = 2(\cos 45° + i \sin 45°) =$

$2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180°} = \sqrt{2}(\cos 180° + i\sin 180°) =$

$= \sqrt{2}(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0°} = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270°} = -5i$

g) $1_{150°} = \cos 150° + i\sin 150° =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100°} = 4(\cos 100° + i\sin 100°) =$

$= 4(-0{,}17 + i \cdot 0{,}98) = -0{,}69 + 3{,}94i$

Equacions en $\mathbb{C}$

115. Resol les equacions següents i expressa les solucions en forma binòmica:
a) $z^2 + 4 = 0$; b) $z^2 + z + 4 = 0$
c) $z^2 + 3z + 7 = 0$; d) $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{4} = \pm 2i$

$z_1 = -2i,\ z_2 = 2i$

b) $z^2 + z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} =$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0 \Rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} =$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}i}{2}$

$z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i,\ z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i$

d) $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} =$

$= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

116. Resol les equacions següents en $\mathbb{C}$:
a) $z^2 + 4 = 0$ b) $z^2 - 2z + 5 = 0$
c) $2z^2 + 10 = 0$ d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{4} = \pm 2i$

$z_1 = -2i,\ z_2 = 2i$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4+20}}{2} =$

$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

$z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 1 + 2i$

c) $2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow$

$\rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm\sqrt{5}\,i$

$z_1 = -\sqrt{5}\,i,\ z_2 = \sqrt{5}\,i$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0 \rightarrow z^2 = y$

$y^2 + 13y + 36 = 0$

$y = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} =$

$= \frac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{2} =$

$= \frac{-13 \pm 5}{2}$ ⟨ $y_1 = \frac{-13+5}{2} = -4$; $y_2 = \frac{-13-5}{2} = -9$

$z_1^2 = y_1 = -4$ ⟨ $z_1 = +\sqrt{4}i$; $z_2 = -\sqrt{4}i$

$z_2^2 = y_2 = -9$ ⟨ $z_3 = +\sqrt{9}i$; $z_4 = -\sqrt{9}i$

Pàgina 40

Per resoldre

117. En 18 g d'aigua hi ha $6{,}02 \cdot 10^{23}$ molècules d'aquest compost. Quina és la massa, en grams, d'una molècula d'aigua?

$18 : (6{,}02 \cdot 10^{23}) = 2{,}99 \cdot 10^{-23}$ grams.

118. Tenim un fil de coure de 3 mm de diàmetre. Quina longitud n'hem de prendre perquè la resistència sigui de 20 ohms? Resistibilitat del coure:
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$

La resistència ve donada per la fórmula $R = \dfrac{\rho l}{s}$, on l és la longitud i s és la secció del fil.

$$l = \frac{R \cdot s}{\rho} = \frac{20 \cdot \pi \cdot (0{,}0015)^2}{1{,}7 \cdot 10^{-8}} =$$

$= 8\,315{,}98$ metres

119. La velocitat mínima que ha de portar un cos perquè pugui fugir del camp gravitatori terrestre és $v = \sqrt{\dfrac{2\,GM}{R}}$ on G és la constant de gravitació universal, M la massa de la Terra i R el radi de la Terra. Calcula v, sabent que:
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2,
$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg i $R = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^{6}}} =$$

$= 11\,190{,}74$ m/s

120. Comprova que $\sqrt{6+\sqrt{27}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{27}}$ és un nombre enter.

$\sqrt{6+\sqrt{27}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{27}} =$

$= \sqrt{(6+\sqrt{27})(6-\sqrt{27})} = \sqrt{6^2-(\sqrt{27})^2} =$

$= \sqrt{36-27} = \sqrt{9} = 3$

121. Efectua les operacions següents i simplifica:

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $\dfrac{\sqrt{98}+\sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$

a) $a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = \sqrt{a}$

b) $\dfrac{7\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2^5 \cdot 3}} \cdot 30\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\sqrt{3}} = 30$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} =$

$= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

122. Efectua les operacions següents i simplifica:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$

$= \dfrac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2$

b) $\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} - \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} + \dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3} =$

$= \dfrac{7(3+\sqrt{2})}{7} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} =$

$= 3 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} = 5$

c) $\dfrac{5\sqrt{6}}{6} + \dfrac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{6-18} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6} +$

$$+\frac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{12}-\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{6}}{6}-$$

$$-\frac{(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{6}-\frac{4\sqrt{6}}{3}=$$

$$=\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{6}+3\sqrt{2}-8\sqrt{6})}{6-18}=\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Qüestions teòriques

123. Explica si aquestes frases són certes o falses:

a) Tots els nombres enters són racionals.
b) Hi ha nombres irracionals que són enters.
c) Tots els nombres irracionals són reals.
d) Alguns nombres enters són naturals.
e) Hi ha nombres decimals que no poden ser expressats com una fracció.
f) Tots els nombres decimals són racionals.
g) Entre dos nombres enters sempre hi ha un altre nombre enter.
h) Entre dos nombres racionals sempre hi ha infinits nombres racionals.
i) Entre dos nombres racionals hi ha infinits nombres irracionals.
j) Els nombres racionals omplen la recta.

a) C; b) F; c) C; d) C; e) C; f) F; g) F; h) C; i) C; j) F.

124. Si $x \in \mathbb{R}$, explica si és certa o falsa cada una d'aquestes afirmacions:

a) x^2 és sempre positiu o nul.
b) x^3 és sempre positiu o nul.
c) $\sqrt[3]{x}$ solament existeix si $x \geq 0$.
d) x^{-1} és negatiu si ho és x.

a) C; b) F; c) F; d) C.

125. Quina és la resposta correcta?

a) $(-27)^{\frac{1}{3}}$ $\begin{cases} 3 \\ -3 \\ -9 \end{cases}$; **b)** $4^{-\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} 1/\sqrt{2} \\ 2^{-1} \\ -2 \end{cases}$

a) -3; b) 2^{-1}

126. Entre quins nombres enters es troba el logaritme decimal de 348?

$10^2 < 348 < 10^3$. Pren-ne logaritmes.

Entre 2 i 3.

127. Si $log\ x = a$, quin és el valor de $log\ \frac{1}{x}$?

$log\ 1 - log\ x = -log\ x = -a$

128. Quines d'aquestes igualtats són certes? Explica per què.

a) $log\ m + log\ n = log\ (m + n)$
b) $log\ m + log\ n = log\ (m \cdot n)$
c) $log\ m - log\ n = \frac{log\ m}{log\ n}$
d) $log\ m - log\ n = log\left(\frac{m}{n}\right)$
e) $log\ x^2 = log\ x + log\ x$
f) $log\ (a^2 - b^2) = log\ (a + b) + log\ (a - b)$

a) Falsa: $log\ m + log\ n = log\ (m \cdot n) \neq log\ (m + n)$
b) Certa. Per una propietat dels logaritmes.
c) Falsa. $log\ m - log\ n = \left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{log\ m}{log\ n}$
d) Certa. Per una propietat dels logaritmes.
e) Certa. $log\ x^2 = log\ (x \cdot x) = log\ x + log\ x$
f) Certa. $log\ (a^2 - b^2) = log\ [(a + b) \cdot (a - b)] = log\ (a + b) + log\ (a - b)$

Pàgina 41

Per aprofundir

129. Si $n \neq 0$ és natural, determina per a quins valors de n els nombres següents pertanyen a $\mathbb{Z}$:

a) $\frac{n}{2}$; b) $\frac{3}{n}$; c) n – 5; d) n + $\frac{1}{2}$; e) $\sqrt{n}$

a) n parell.

b) $n = 1$ o $n = 3$.

c) n qualsevol natural.

d) Cap.

e) n quadrat perfet.

130. Si $\log a = 1 + \log b$, quina relació hi ha entre a i b?

$\log a - \log b = 1 \rightarrow \log \frac{a}{b} = 1 \rightarrow \frac{a}{b} = 10 \rightarrow a = 10b$

131. Si $\log a + \log b = 0$, quina relació hi ha entre a i b?

$\log(ab) = 0 \rightarrow ab = 1 \rightarrow a = \frac{1}{b}$

132. Siguin m i n dos nombres racionals. Què pots dir del signe de m i n en cada un dels casos següents?

a) $m \cdot n > 0$ i $m + n > 0$

b) $m \cdot n > 0$ i $m + n < 0$

c) $m \cdot n < 0$ i $m - n > 0$

d) $m \cdot n < 0$ i $m - n < 0$

a) $m > 0$, $n > 0$

b) $m < 0$, $n < 0$

c) $m > 0$, $n < 0$

d) $m < 0$, $n > 0$

133. Demostra que el logaritme d'un producte és igual a la suma dels logaritmes dels factors.

Per demostrar que $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$, fem:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a P = p \rightarrow P = a^p \\ \text{per definició de logaritme} \\ \log_a Q = q \rightarrow Q = a^q \end{array}\right\} \Rightarrow$$

multiplica aquestes igualtats

$\Rightarrow P \cdot Q = a^{p+q}$

Pren logaritmes de base a en aquesta igualtat i substitueix p i q.

$\log_a PQ = \log_a a^{p+q} \rightarrow \log_a PQ = p + q \rightarrow \log_a PQ = \log_a P + \log_a Q$

134. Demostra que el logaritme d'un quocient és igual al logaritme del dividend menys el logaritme del divisor. (Repeteix el procediment anterior dividint les igualtats.)

Hem de demostrar que $\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$. Fem.

$$\left.\begin{array}{l} \log_a P = p \rightarrow P = a^p \\ \log_a Q = q \rightarrow Q = a^q \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dividint} \rightarrow \frac{P}{Q} = a^{p-q} \\ \log_a \frac{P}{Q} = \log_a a^{p-q} \rightarrow \log_a \frac{P}{Q} = p - q \end{array}\right\}$$

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$$

135. Demostra que el logaritme d'una potència és igual a l'exponent multiplicat pel logaritme de la base.

Cal demostrar que $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$. Fes $\log_a P = p \rightarrow a^p = P$, eleva a n tots dos membres de la igualtat i pren $\log_a$.

Hem de demostrar que $\log_a P^n = n \log_a P$. Fem:

$log_a\ P = p \rightarrow a^p = P$

Elevant a n:

$a^{np} = P^n \rightarrow log_a\ a^{np} = log_a\ P^n$

$np = log_a\ P^n \rightarrow n\ log_a\ P = log_a\ P^n \rightarrow log_a\ P^n = n\ log_a\ P$

136. Demostra que el logaritme d'una arrel és igual a logaritme del radicand dividit per l'índex de l'arrel.

Recorda que $\sqrt[n]{p} = p^{1/n}$ i repeteix el procés de l'exercici anterior.

Hem de provar que $log\ \sqrt[n]{P} = \frac{log\ P}{n}$. Fem:

$log\ \sqrt[n]{P} = log\ P^{1/n} \overset{(*)}{=} \frac{1}{n}\ log\ P = \frac{log\ P}{n}$

(*) Vegeu l'exercici anterior.

137. Demostra que

$log_a\ P = log\ P\ /\ log\ a$.

Fes $log_a\ P = p \rightarrow a^p = P$. Pren logaritmes decimals i després aïlla p.

$a^p = P \rightarrow log\ a^p = log\ P \rightarrow p\ log\ a = log\ P$

Així, $log_a\ P = \frac{log\ P}{log\ a}$

138. Si $x \in \mathbb{N}$ i $x > 1$, ordena aquests nombres:

$$\frac{1}{x+1} \qquad x \qquad \frac{1}{x} \qquad -\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{-x-1}$$

$x > \frac{1}{x} > \frac{1}{x+1} > \frac{1}{-x-1} > \frac{-1}{x}$

139. Ordena de més petits a més grans els nombres a, a^2, $1/a$ i $\sqrt{a}$ en aquests dos casos:

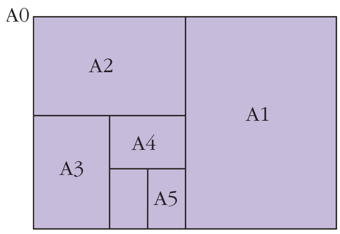
I) Si $a > 1$; II) Si $0 < a < 1$

I) $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$; II) $a^2 < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$

Per pensar una mica més

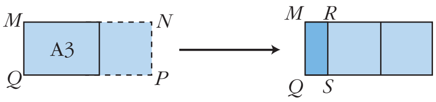
140. Les mides estàndard de paper es denominen A0, A1, A2, A3, A4, A5... Cada una d'aquestes dimensions és *la meitat de l'anterior i semblant a aquesta.*

I. Tenint en compte l'anterior, i sabent que la superfície de A0 és 1 m^2, calcula les dimensions d'un full A4 (que és el d'ús més freqüent) arrodonint fins als mil·límetres. Comprova el resultat mesurant un full A4 que tinguis a mà.

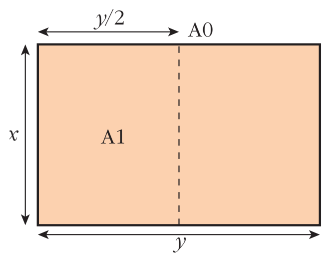


II. Demostra que qualsevol dels fulls anteriors compleix el següent:

Si hi afegim un quadrat, el rectangle que se n'obté, *MNPQ*, té la peculiaritat que, en suprimir-ne dos quadrats, dóna lloc a un altre rectangle, *MRSQ*, semblant a aquest (*MNPQ* semblant a *MRSQ*).



I)



La superfície de A0 és 1 m^2, és a dir:

$x\,y = 1\ \text{m}^2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$

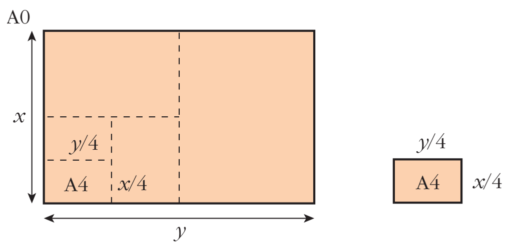
Per la semblança entre A0 i A1, tenim que:

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y/2} \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = x^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} = 2x^2 \Rightarrow 1 = 2x^4 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = x^4$

$x = \sqrt[4]{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};\ y = \sqrt[4]{2}$

Les dimensions de A0 són: *llarg* $= \sqrt[4]{2}$ m, *ample* $= \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m

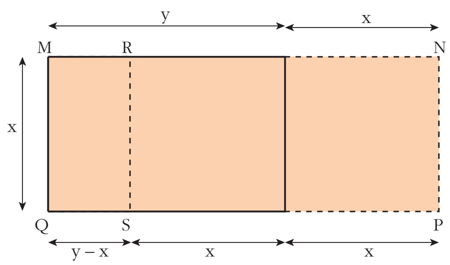


Les dimensions de A4 seran:

llarg $= \dfrac{\sqrt[4]{2}}{4} = 0{,}297$ m $= 29{,}7$ cm $= 297$ mm

ample $= \dfrac{1}{4\sqrt[4]{2}} = 0{,}210$ m $= 21$ cm $= 210$ mm

II)



La raó entre els costats del rectangle (A0, A1, …) és: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{1/\sqrt[4]{2}} = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$

(és la mateixa en A0, A1…, ja que tots ells són semblants).

La raó entre els costats del rectangle *MNPQ* és:

$\dfrac{y+x}{x} = \dfrac{y/x + x/x}{x/x} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2} + 1$

Volem provar que *MRQS* és semblant a *MNPQ*; i per això només caldrà veure que:

$\dfrac{\overline{MQ}}{\overline{MR}} = \sqrt{2} + 1$

Veiem-ho:

$\dfrac{x}{y-x} = \dfrac{x/x}{y/x - x/x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$

Com volíem provar.

141. Per numerar les pàgines d'un llibre, un tipògraf ha emprat 2 993 dígits. Quantes pàgines té el llibre? (El 0, l'1, el 2... són *dígits*. El nombre 525 s'escriu amb tres dígits.)

Les 9 primeres pàgines $\rightarrow$ 9 dígits

De la 10 a la 99 $\rightarrow 90 \cdot 2 = 180$ dígits

De la 100 a la 999 $\rightarrow 900 \cdot 3 = 2\,700$ dígits

Hem fet: $9 + 180 + 2\,700 = 2\,889$ dígits

Ens falten: $2\,993 - 2\,889 = 104$ dígits, que pertanyen a nombres de quatre xifres.

Per tant: $104 : 4 = 26$ pàgines més.

Així: $999 + 26 = 1\,025$ pàgines té el llibre.