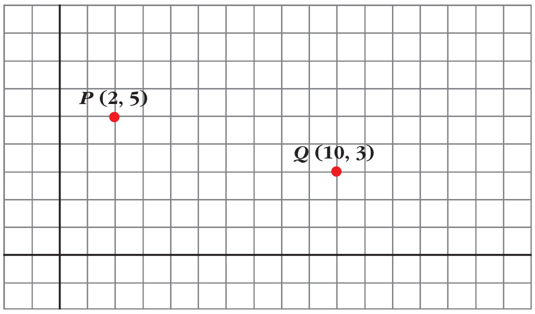
Pàgina 162

Punt mitjà d'un segment

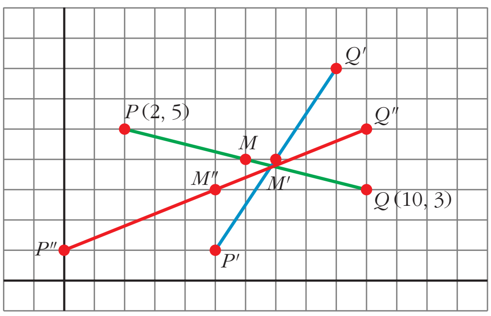
Pren els punts $P(2, 5)$, $Q(10, 3)$ i representa'ls en el pla:



Localitza gràficament el punt mitjà, M, del segment PQ i dóna'n les coordenades.
Trobes cap relació entre les coordenades de M i les de P i Q?
Fes el mateix amb els segments d'extrems:
a) $P'(5, 1)$, $Q'(9, 7)$
b) $P''(0, 1)$, $Q''(10, 5)$
Basant-te en els resultats anteriors, intenta donar un criteri per obtenir les coordenades del punt mitjà d'un segment a partir de les dels seus extrems.

$m(6, 4)$

$m\left(\frac{10+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$



a) $m'(7, 4)$
b) $m''(5, 3)$

Siguin $A\ (a_1, a_2)$ i $B\ (b_1, b_2)$ els extrems d'un segment.
El punt mitjà de AB serà $m\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

Equacions de la recta

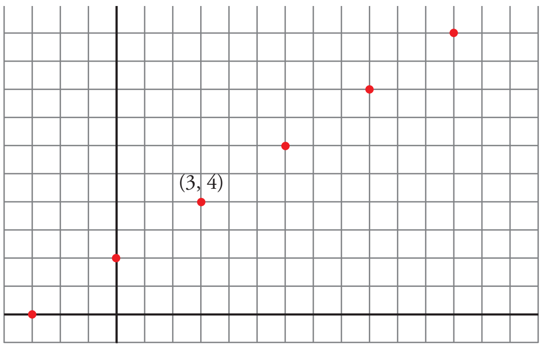
Observa les equacions següents:

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = \quad\ \ 2t \end{cases}$$

Es diuen *equacions paramètriques* perquè depenen d'un *paràmetre*, t, que pot prendre qualsevol valor.
Per exemple, si donem a t el valor 2:

$$t = 2 \begin{cases} x = -3 + 6 = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

obtenim el punt (3, 4).



Comprova que, si donem a t els valors 0, 1, 3, 4, 5, s'obtenen punts que estan tots en una recta. Per tant, les equacions paramètriques anteriors corresponen a una recta. Per trobar l'equació, sense paràmetre, eliminem la t entre les dues equacions:

(2a) $\rightarrow t = \frac{y}{2}$

Substituint en la (1a):

$$x = -3 + 3 \cdot \frac{y}{2} \rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$$

S'obté així l'expressió de la recta mitjançant un tipus d'equació que ja coneixem.

Comprova que les equacions: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$

corresponen també a una recta, trobant-ne alguns dels punts. (Dóna a t els valors –2, –1, 0, 1, 2, 3 i representa els punts corresponents; comprovaràs que tots són en la mateixa recta.)

Elimina el paràmetre procedint de la manera següent:

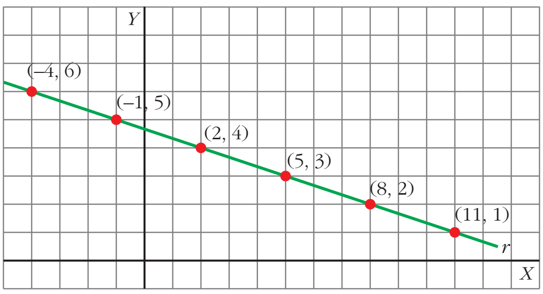
– Aïlla t en la primera equació.

– Substitueix-ne el valor en la segona.

– Reordena els termes de l'equació resultant.

Obtindràs, així, l'equació d'aquesta recta, en la forma habitual.

t	–2	–1	0	1	2	3
(x, y)	(–4, 6)	(–1, 5)	(2, 4)	(5, 3)	(8, 2)	(11, 1)



$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-2}{3} \\ t = 4 - y \end{array}\right\} \dfrac{x-2}{3} = 4 - y \Rightarrow$$

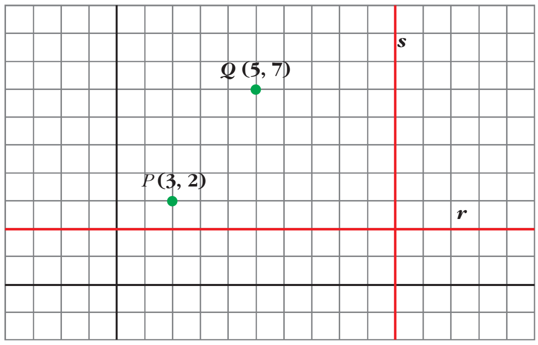
$$\Rightarrow x - 2 = 12 - 3y \Rightarrow y = \frac{-x + 14}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{14}{3}$$

Pàgina 163

Distàncies en el pla

Com en l'apartat inicial, pretenem trobar criteris generals per trobar distàncies en el pla a partir de coordenades de punts.



Troba la distància de P i de Q a r i a s.

$d(P, r) = 1$; $d(P, s) = 8$; $d(Q, r) = 5 = d(Q, s)$

Troba la distància entre els punts P i Q (fes servir el teorema de Pitàgores).

$d(P, Q) = \overline{PQ} \rightarrow \overline{PQ}^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \rightarrow$

$\rightarrow \overline{PQ} = 5$

Troba, també, la distància entre:

a) $P'(0, 5)$, $Q'(12, 0)$

b) $P''(3, 1)$, $Q''(7, 4)$

a) $d(P', Q') = \overline{P'Q'} \rightarrow \overline{P'Q'}^2 =$

$= 5^2 + 12^2 = 169 \rightarrow \overline{P'Q'} = 13$

b) $d(P'', Q'') = \overline{P''Q''} \rightarrow$

$\rightarrow \overline{P''Q''}^2 + 4^2 + 3^2 = 25 \rightarrow \overline{P''Q''} = 5$

Basant-te en els resultats anteriors, intenta donar un criteri per trobar la distància entre dos punts a partir de les seves coordenades.

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Pàgina 165

1. Troba les coordenades de $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{NM}$, essent $M(7, -5)$ i $N(-2, -11)$.

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

2. Esbrina si estan alineats els punts $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ i $R(10, 25)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (-3, -14)\\ \overrightarrow{QR} = (6, 28)\end{array}\right\} \longrightarrow \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$, B i C estan alineats.

3. Calcula el valor de k perquè els punts de les coordenades següents estiguin alineats $A(1, 7)$, $B(-3, 4)$, $C(k, 5)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-4, -3)\\ \overrightarrow{BC} = (k+3, 1)\end{array}\right\} \longrightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 = -3k - 9 \Rightarrow 3k = -5 \Rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

Pàgina 166

4. Donats els punts $P(3, 9)$ i $Q(8, -1)$:

a) Troba el punt mitjà de PQ.

b) Troba el simètric de P respecte de Q.

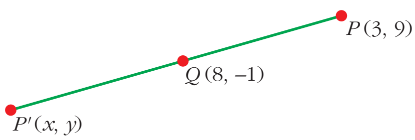
c) Troba el simètric de Q respecte de P.

d) Obtén un punt A de PQ tal que $\overline{PA}/\overline{AQ} = 2/3$.

e) Obtén un punt B de PQ tal que $\overline{PB}/\overline{PQ} = 1/5$.

a) $m\left(\dfrac{3+8}{2}, \dfrac{9-1}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{2}, 4\right)$

b)
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3+x'}{2} = 8 \Rightarrow x' = 13\\[2mm] \dfrac{9+y'}{2} = -1 \Rightarrow y' = -11\end{array}\right\} \longrightarrow P'(13, -11)$$



c)
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{8+x'}{2} = 3 \Rightarrow x' = -2\\[2mm] \dfrac{-1+y'}{2} = 9 \Rightarrow y' = 19\end{array}\right\} \longrightarrow Q'(-2, 19)$$

d) $\overrightarrow{PA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \Rightarrow \overrightarrow{PA} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{PQ} = \dfrac{2}{5}(5, -10) =$

$= (2, -4) \Rightarrow (a_1 - 3, a_2 - 9) =$

$= (2, -4) \Rightarrow A(a_1, a_2) = (5, 5)$

NOTA: Una vegada obtingut $\overrightarrow{PA} = (2, -4)$, podríem haver procedit d'aquesta manera:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (3, 9) + (2, -4) = (5, 5)$

NOTA: Una altra forma de resoldre'l és:

$\overrightarrow{PA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \Rightarrow (a_1 - 3, a_2 - 9) =$

$= \dfrac{2}{3}(8 - a_1, -1 - a_2) \Rightarrow a_1 - 3 =$

$= \dfrac{2}{3}(8 - a_1) \Rightarrow a_1 = 5$

$a_2 - 9 = \dfrac{2}{3}(-1 - a_2) \Rightarrow a_2 = 5$

$A(5, 5)$

e) $\overrightarrow{PB} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \dfrac{1}{5}(5, -10) = \left(\dfrac{5}{5}, -\dfrac{-10}{5}\right) =$

$= (1, -2)$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = (3, 9) + (1, -2) =$

$= (4, 7)$

Per tant, $B(4, 7)$

Pàgina 168

5. Escriu les equacions paramètriques de les rectes següents:

a) Passa per $A(-3, 7)$ i té una direcció paral·lela al vector $\vec{d}(4, -7)$.

b) Passa per $M(5, 2)$ i és paral·lela a $\vec{d}\,'(2, 2)$.

En ambdós casos, dóna valors al paràmetre i obtén uns altres cinc punts de la recta.

a) $\vec{OX} = \vec{OA} + t\vec{d} \Rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(d_1, d_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 7t \end{cases}$$

t	–2	–1	0	1	2	3
(x, y)	(11, 21)	(–7, 14)	(–3, 7)	(1, 0)	(5, –7)	(9, –14)

b) $\vec{OX} = \vec{OM} + t\vec{d_1} \Rightarrow (x, y) = (m_1, m_2) + t(d_1, d_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = m_1 + td_1 \\ y = m_2 + td_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

t	–2	–1	0	1	2	3
(x, y)	(1, –2)	(3, 0)	(5, 2)	(7, 4)	(9, 6)	(11, 8)

6. Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa per:
a) $P(5, -2)$ i $Q(0, 4)$; b) $M(3, 7)$ i $N(3, 0)$; c) $A\ (0, 0)$ i $B\ (7, 0)$; d) $R(1, 1)$ i $S(3, 3)$

a) El vector direcció és: $\vec{PQ} = (-5, 6) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$$

b) $\vec{d} = \vec{MN} = (0, -7) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 - 7t \end{cases}$

c) $\vec{d} = \vec{AB} = (7, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 0 \end{cases}$

d) El vector direcció és: $\vec{RS} = (2, 2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

7. Troba k perquè $S(-5, k)$ pertanyi a aquesta recta:

r: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} -5 = 1 + 3t \rightarrow t = -6/3 = -2 \\ k = 2 - 4t \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow k = 2 - 4(-2) = 10$

Pàgina 169

8. a) Troba l'angle que formen les rectes següents:

r_1: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ r_2: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

Els vectors directors de r_1 i r_2 són, respectivament, $\vec{d_1}\ (-2, 1)$ i $\vec{d_2}\ (-4, 3)$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{|\vec{d_1}| \cdot |\vec{d_2}|} = \frac{8 + 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}984 \rightarrow \alpha = 10° \ 18' \ 17{,}4''$$

9. Obtén per a les rectes de l'exercici anterior:
a) La paral·lela a r_1 que passi pel punt (5, 7).
b) Una perpendicular a r_2 que passi per (0, 0).

a) $\left.\begin{array}{l} r \parallel r_1 \\ P(5, 7) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{d} = \vec{d_1} \\ P \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r\text{:} \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l} r' \perp r_2 \Rightarrow \vec{d'} \perp \vec{d_2} \Rightarrow \vec{d'} = (3, 4) \\ P(0, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r'$: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}$

Pàgina 170

10. Troba la posició relativa de r_1 i r_2, r_2 i r_3, r_3 i r_4.

r_1: $\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ r_2: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

r_3: $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 6t \end{cases}$ r_4: $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -12 + 4t \end{cases}$

r_1 i r_2)

$$\left.\begin{array}{l} 7 + 5t = 2 + s \\ -2 - 3t = 1 - 2s \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 5t - s = -5 \\ -3t + 2s = 3 \end{array}\right\}$$

Per 2 la primera equació i se sumen:

$$\begin{array}{l} 10t - 2s = -10 \\ \underline{-3t + 2s = 3} \\ 7t \qquad = -7 \end{array}$$

$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow$ de la 1a equació: $s = 5 + 5(-1) = 0$

Com que té solució única, aleshores r_1 i r_2 es tallen en un punt $P(2, 1)$ (que s'obté substituint $t = -1$ en r_1 o $s = 0$ en r_2).

r_2 i r_3)

$$\left.\begin{array}{l} 2 + s = 5 + 3t \\ 1 - 2s = -5 - 6t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} s - 3t = 3 \\ -2s + 6t = -6 \end{array}\right\}$$

Les dues equacions són equivalents.

Aleshores el sistema té infinites solucions.

Per tant, $r_2 = r_3$ (són la mateixa recta).

r_3 i r_4)

$$\left.\begin{array}{l} 5 + 3t = 5 - 2s \\ -5 - 6t = -12 + 4s \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3t + 2s = 0 \\ -6t - 4s = -7 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ No tenen solució.

Perquè no tenen cap punt en comú. Per tant, són paral·leles.

És a dir, $r_3 \parallel r_4$.

Pàgina 171

11. Troba les equacions paramètriques de la recta que té per equació: $5x - 3y + 8 = 0$.

Sigui $x = t \Rightarrow 5t - 3y + 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8/3 + (5/3)t \end{cases}$$

NOTA – 2n MÈTODE

El vector $(5, -3)$ és perpendicular a r. Per tant, el vector $(3, 5)$ és paral·lel a r. Podem agafar-lo com a vector direcció:

$\vec{d} = (3, 5)$

Si $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{8}{3}$. Llavors $\left(0, \dfrac{8}{3}\right) \in r$

Així, les equacions paramètriques són:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 8/3 + 5t \end{cases}$$

(equivalent a l'obtinguda per l'altre mètode).

12. Troba l'equació implícita de la recta $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

Multipliquem la primera equació per 2 i la segona per 3, i les sumem:

$$\begin{array}{l} 2x = 10 - 6t \\ \underline{3y = -3 + 6t} \\ 2x + 3y = 7 \Rightarrow r\text{: } 2x + 3y - 7 = 0 \end{array}$$

NOTA – 2n MÈTODE:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 - 3t \rightarrow t = \dfrac{x-5}{-3} \\ y = -1 + 2t \rightarrow t = \dfrac{y+1}{2} \end{array}\right\}$$

$$\frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2}$$

$2x - 10 = -3y - 3$

r: $2x + 3y - 7 = 0$

Pàgina 173

13. Escriu l'equació de la recta de pendent 3 i l'ordenada en l'origen de la qual és –5.

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ P(0, -5) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r\text{: } y = -5 + 3(x - 0) \rightarrow$$

$\rightarrow r$: $y = 3x - 5 \rightarrow$ EQUACIÓ EXPLÍCITA

$\rightarrow r$: $3x - y - 5 = 0 \rightarrow$ EQUACIÓ IMPLÍCITA

14. Troba les equacions de les rectes que passen pels parells de punts següents:

a) (–7, 11), (1, 7); b) (3, –2), (1, 4)

c) (6, 1), (11, 1); d) (–2, 5), (–2, 8)

a) $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{7 - 11}{1 - (-7)} = \dfrac{-4}{8} = \dfrac{-1}{2}$

Prenent el punt (1, 7)

$y - 7 = \dfrac{-1}{2}(x - 1)$

$x + 2y - 15 = 0$

b) $m = \dfrac{4 + 2}{1 - 3} = \dfrac{6}{-2} = -3$

Prenent el punt (1, 4)

$y - 4 = -3\ (x - 1)$

$3x + y - 7 = 0$

c) $m = \dfrac{1 - 1}{11 - 6} = 0$

Prenent el punt (6, 1) $\Big\}\ y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$

d) $m = \dfrac{8 - 5}{-2 + 2}$ Impossible! Aleshores no té pendent.

No es pot posar de forma explícita. És la recta $x = -2$, paral·lela a l'eix Y.

15. Troba dos punts de la recta $y = -3x + 4$. Calcula'n a partir d'aquests el pendent i comprova que és el que correspon a aquesta equació.

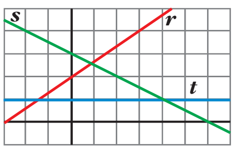
Si $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0, 4) \in r$

Si $x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow B\ (1, 1) \in r$

$m = \dfrac{1 - 4}{1 - 0} = \dfrac{-3}{1} = -3$

Efectivament, és la de la recta $y = -3x + 4$.

16. Escriu les equacions de les rectes representades.



$s: \begin{cases} m_s = -1/2 \\ P_s(0, 3) \end{cases} \Rightarrow$ Com que $s: y = mx + n \Rightarrow$

$\Rightarrow s: y = \dfrac{-1}{2}x + 3$

$r: \begin{cases} m_s = 2/3 \\ P_r(0, 2) \end{cases} \Rightarrow r: y = \dfrac{2}{3}x + 2$

$t: \begin{cases} m_t = 0 \\ P_t(0, 1) \end{cases} \Rightarrow t: y = 1$

Pàgina 175

17. Esbrina la posició relativa dels parells de rectes següents:

a) $\begin{cases} \mathbf{-x + 3y + 4 = 0} \\ \mathbf{3x - 9y - 12 = 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{5x + y + 3 = 0} \\ \mathbf{x - 2y + 16 = 0} \end{cases}$

Es pot resoldre el sistema o bé observar els coeficients i el terme independent d'ambdues equacions:

a) $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{-1}{3} = \dfrac{3}{-9} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{4}{-12} = \dfrac{C}{C'}$

És a dir: $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Són la mateixa recta.

b) $\dfrac{5}{1} \neq \dfrac{1}{-2} \Rightarrow \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'} \Rightarrow$ Les rectes es tallen en un punt.

Per calcular el punt de tall, bastarà resoldre el sistema.

Aïllant en la primera equació: $y = -3 - 5x$

Amb la qual cosa:

$x - 2(-3 - 5x) + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x + 6 + 10x + 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$

Amb la qual cosa:

$y = -3 - 5(-2) = 7 \rightarrow (x, y) = (-2, 7) \rightarrow$

Punt de tall

18. Quina és la posició relativa d'aquests dos parells de rectes?

a) $\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

a) $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Són paral·leles.

b) $\frac{2}{1} = \frac{1}{-1} \quad \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Les rectes es tallen en un punt.

Resolem el sistema per trobar el punt de tall: Aïllem en la segona equació: $x = y$

I substituïm en la primera equació:

$2y + y - 4 = 0$

$3y - 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Pàgina 176

19. Obtén la distància entre els parells de punts següents:

a) (3, –5), (1, 4); b) (0, 7), (–5, 7)

c) (–2, 5), (–3, –7); d) (8, 14), (3, 2)

a) $dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(1-3)^2 + (4+5)^2} =$

$= \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$

b) $dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| =$

$= \sqrt{(-5-0)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$

c) $dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3+2)^2 + (-7-5)^2} =$

$= \sqrt{1 + 144} = \sqrt{145}$

d) $dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-8)^2 + (2-14)^2} =$

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

20. Troba la distància de $Q(-3, 4)$ en les rectes següents:

a) $2x + 3y = 4$ **b)** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}$

c) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$ **d)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

a) $dist(r, Q) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot (4) - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}$

$2(y - 4) = 5(x - 1)$

$2y - 8 = 5x - 5$

$-5x + 2y - 3 = 0$

$dist(Q, r) = \frac{|-5 \cdot (-3) + 2 \cdot (4) - 3|}{\sqrt{(-5)^2 + (2^2)}} = \frac{20}{\sqrt{29}}$

c) $\begin{cases} x = 1 - 2t \text{ multipliquem per 6} \\ y = 3 - 6t \text{ multipliquem per 2} \end{cases}$

$\begin{cases} 6x = 6 - 12t \\ 2y = 6 - 12t \end{cases}$

Restem

$6x - 2y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow dist(Q, r) = \frac{|6 \cdot (-3) - 2 \cdot (4)|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}} = \frac{26}{\sqrt{40}}$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$

$dist(Q, r) = \frac{\left|\frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot (4) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{7}{6}}{\sqrt{\frac{13}{36}}}$

Pàgina 181

Per practicar

Equacions de la recta

21. Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa per $A(-3, 7)$ i té

una direcció paral·lela al vector $\vec{d}(4, -1)$. Dóna valors al paràmetre i obtén cinc punts més de la recta.

$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - t \end{cases}$

t	-2	-1	1	2	3
(x, y)	$(-11, 9)$	$(-7, 8)$	$(1, 6)$	$(5, 5)$	$(9, 4)$

22. Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa per:
a) $P(6, -2)$ i $Q(0, 5)$
b) $M(3, 2)$ i $N(3, 6)$
c) $A(0, 0)$ i $Q(8, 0)$
Troba, en tots els casos, l'equació implícita.

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases} \equiv$

(Usant el punt P)

$\equiv r: \begin{cases} x = -6t \\ y = 5 + 7t \end{cases} \Rightarrow$

(Usant Q)

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow t = \dfrac{x}{-6} \\ t = \dfrac{y-5}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{-6} = \dfrac{y-5}{7}$

$\Rightarrow 7x = -6y + 30 \Rightarrow r: 7x + 6y - 30 = 0$

b) $\overrightarrow{MN} = (0, 4) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 \rightarrow$ recta paral·lela a l'eix Y

c) $\overrightarrow{AQ} = (8, 0) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r: y = 0$

$\rightarrow$ eix X

23. Troba les equacions paramètriques de cadascuna de les rectes següents:
a) $2x - y = 0$; b) $x - 7 = 0$; c) $3y - 6 = 0$; d) $x + 3y = 0$

a) Si $x = t \Rightarrow 2t - y = 0 \Rightarrow y = 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = t \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = t \\ y = 6/3 = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$

24. Escriu les equacions paramètriques i implícites dels eixos de coordenades.
Ambdós eixos passen per l'origen de coordenades i els seus vectors directors són els vectors de la base.

Eix X: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eix } X \\ \vec{d}_X = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Eix X: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$

Eix Y: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eix } Y \\ \vec{d}_Y = (0, 1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Eix Y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = 0$

25. Donada la recta r $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$
escriu les equacions de les rectes següents:
a) Paral·lela a r que passa per $A(-1, -3)$.
b) Perpendicular a r i que passa per $B(-2, 5)$.

a) $\left.\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases} \begin{array}{l} r' \parallel r \\ A(-1, -3) \in r' \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{d}' = \vec{d} \\ A \in r' \end{array}\right\} \Rightarrow r': \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = -3 + t \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l} r'' \perp r \\ B(-2, 5) \in r'' \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{d}'' \perp \vec{d} \Rightarrow$

$\vec{d}'' = (1, 5) \Rightarrow r'': \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 + 5t \end{cases}$

26. Troba, en cada cas, l'equació de la recta que passa pel punt $P(1, -3)$ i és:
a) Paral·lela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.
b) Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.
c) Paral·lela a la recta $2y - 3 = 0$.

d) Perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.

a) $r(3, 2)$ $P(1, -3)$

$(x, y) = (1, -3) + t(3, 2)$

$\begin{cases} x = 1 + 3t & \text{multipliquem per 2} \\ y = -3 + 2t & \text{multipliquem per 3} \end{cases}$

$2x = 2 + 6t$

$3y = -9 + 6t$

$2x - 3y = 11$ Restem

L'equació implícita és $2x - 3y - 11 = 0$

b) $r\perp(1, 1)$ $P(1, -3)$

$(x, y) = (1, -3) + t(1, 1)$

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \end{cases}$

$x - y = 4$ Restem

L'equació implícita és $x - y - 4 = 0$

c) $r(-2, 0)$ $P(1, -3)$

$(x, y) = (1, -3) + t(-2, 0)$

$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 \end{cases}$

La recta paral·lela seria $y + 3 = 0$

d) $r\perp(1, 0)$ $P(1, -3)$

$(x, y) = (1, -3) + t(1, 0)$

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 \end{cases}$

La recta perpendicular és $y + 3 = 0$

27. Troba l'equació de la paral·lela a $2x - 3y = 0$ que té com a ordenada en l'origen -2.

La recta passa pel punt (0, −2).

r: $2x - 3y = 0$

$\left.\begin{array}{l} s \parallel r \Rightarrow \text{pendent de } s \text{ ha de ser igual al de } r \\ P(0, -2) \in s \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} m_s = m_r = 2/3 \\ P(0, -2) \in s \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}x - 2 \Rightarrow$

EQUACIÓ EXPLÍCITA

$\Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$

EQUACIÓ IMPLÍCITA

28. Donada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escriu l'equació de la recta perpendicular a aquesta en el punt de tall amb l'eix d'ordenades.

L'eix d'ordenades és el vertical: x = 0.

• Vegem primer quin és el punt de tall, $P(x, y)$, de la recta amb l'eix d'ordenades.

r: $\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ \text{Eix } Y\text{: } x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 4 - 0 + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$

Per tant $P(0, 2) \in r$ també ha de ser $P(0, 2) \in s$, en què $s \perp r$.

• Com que $s \perp r \Rightarrow$ els seus pendents han de complir:

$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_s = \dfrac{-1}{m_r} = \dfrac{-1}{-4/3} = \dfrac{3}{4}$

• Com que $P(0, 2) \in s$ i $m_s = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{3}{4}x + 2 \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

29. Escriu les equacions paramètriques de les rectes següents:

a) El seu vector de posició és $\vec{a}(-3, 1)$ i el seu vector de direcció $\vec{v}(2, 0)$.

b) Passa per $A(5, -2)$ i és paral·lela a:

$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Passa per $A(1, 3)$ i és perpendicular a la recta d'equació $2x - 3y + 6 = 0$.

d) És perpendicular al segment PQ en el seu punt mitjà en què $P(0, 4)$ i $Q(-6, 0)$.

a) L'equació vectorial serà:

$\overrightarrow{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \Rightarrow (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$

b) El vector direcció de la resta cercada ha de ser el mateix (o proporcional) al de la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (ja que li ha de ser paral·lela).

Per tant: $\vec{d}(-1, 2)$

Com que ha de passar per A(5, –2) ⇒

$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) El pendent de la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$ és:

$m_r = \dfrac{2}{3} \Rightarrow m_s = \dfrac{-3}{2}$

(ja que $m_r \cdot m_s = -1$ perquè $r \perp s$)

El vector director pot ser $\vec{s} = (2, -3)$.

A més, $A(1, 3) \in s$.

Per tant s: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

d) El punt mitjà de PQ és $m\left(\dfrac{-6}{2}, \dfrac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$\overrightarrow{PQ} = (-6, -4)$

$\Rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}(4, -6) \text{ és un vector director de } s, \\ \text{ja que } \vec{d} \perp \overrightarrow{PQ} \end{cases}$

Aleshores, s: $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

Coordenades de punts

30. El punt $P(5, -2)$ és el punt mitjà del segment AB, i coneixem $A(2, 3)$. Troba B.

Si $B = (x, y)$, $\left(\dfrac{x+2}{2}, \dfrac{y+3}{2}\right) = (5, -2)$

Si $B = (x, y)$
Com que P és punt mitjà de ⇒

$\Rightarrow \left(\dfrac{x+2}{2}, \dfrac{y+3}{2}\right) = (5, -2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 10 \rightarrow x = 8 \\ y + 3 = -4 \rightarrow y = -7 \end{cases} \Rightarrow B = (8, -7)$

31. Troba el punt simètric de $P(1, -2)$ respecte del punt $H(3, 0)$.

H és el punt mitjà entre P i el seu simètric.

Si $P'(x, y)$ és simètric de $P(1, -2)$ respecte de $H(3, 0) \Rightarrow H$ és el punt mitjà de $PP' \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y-2}{2}\right) = (3, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} x + 1 = 6 \rightarrow x = 5 \\ y - 2 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow P'(5, 2)$

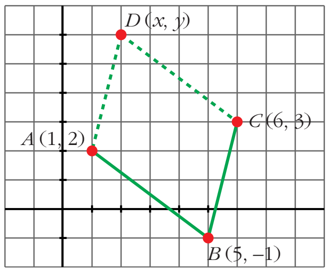
32. Troba les coordenades del vèrtex D del paral·lelogram $ABCD$, sabent que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ i $C(6, 3)$.

Sigui $D(x, y)$.

S'ha de complir: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(5 - 1, -1 - 2) = (6 - x, 3 - y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow D(2, 6)$



33. Dóna les coordenades del punt P que divideix el segment d'extrems $A(3, 4)$ i $B(0, -2)$ en dues parts de manera que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.

Sigui $P(x, y)$.

Substituïm en la condició que ens imposen:

$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \Rightarrow (x - 0, y - (-2)) =$

$= 2(3 - x, 4 - y) \Rightarrow \begin{cases} x = 2(3 - x) \\ y + 2 = 2(4 - y) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 2x \\ y + 2 = 8 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P(2, 2)$

34. Determina k perquè els punts $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ i $C(6, k)$ estiguin alineats.

Ha de passar que $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ siguin proporcionals.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5, -4)\\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1)\end{array}\right\} \to \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \to$$

$$\to 5k - 5 = -16 \to k = \frac{-11}{5}$$

Punts de rectes

35. Troba el punt de tall de les rectes r i s en cada cas:

a) r: $2x - y + 5 = 0$; s: $x + y + 4 = 0$

b) r: $x - 2y - 4 = 0$; s: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

c) r: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 3t \end{cases}$; s: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$

$$3x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9}{3} = -3$$

Substitueixo $x = -3$ en la segona equació:

$-3 + y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4 + 3 = -1$

El punt de tall és $(-3, -1)$

b) $x - 2y - 4 = 0$

$\begin{cases} x = 1 + t \text{ multipliquem per 3} \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

$3x = 3 + 3t$

$y = 2 - 3t$

$3x + y = 5$ Sumem

L'equació implícita és $3x + y - 5 = 0$

$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = +5 - 3x \end{cases}$

Substitueixo en la primera equació:

$x - 2(5 - 3x) - 4 = 0$

$x - 10 + 6x - 4 = 0$

$7x - 14 = 0$

$x = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Substitueixo en la segona equació:

$3 \cdot 2 + y - 5 = 0$

$6 + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -1$

El punt de tall és $(2, -1)$

c) $\begin{cases} 2 = 3 + 2s \\ 1 + 3t = s \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2s = 1 \\ 3t - s = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-2}$

$\Rightarrow 3t - \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$3t + \frac{1}{2} = -1$

$3t = -1 - \frac{1}{2}$

$t = -\frac{1}{2}$

Punt de tall $\begin{cases} x_0 = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \\ y_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

Pàgina 182

36. Comprova si el punt $P(13, -18)$ pertany a alguna de les rectes següents:

r_1: $2x - y + 5 = 0$ r_2: $\begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases}$

r_3: $3y + 54 = 0$ r_4: $\begin{cases} x = 13 \\ y = 10 - t \end{cases}$

r_1: $2x - y + 5 = 0$

$(2 \cdot 13) - y + 5 = 0$

$26 - y + 5 = 0 \Rightarrow -y = -5 - 26 = -31 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 31$

No hi pertany

r_2: $\begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases}$

$13 = 12 + t \Rightarrow t = 1$

$-18 = -5 + 13t \Rightarrow t = -1$

No hi pertany

r_3: $3y + 54 = 0$ Sí hi pertany

r_4: $\begin{cases} x = 13 \\ y = 10 - t \end{cases}$

Equació implícita $x = 13$; per tant $(13, -18)$ pertany a la recta r_4.

37. Troba, en cada cas, el valor de *k* perquè la recta $x + ky - 7 = 0$ contingui el punt donat:

a) (5, –2) b) (7, 3) c) (–3, 4)

a) (5, –2)

$5 + k(-2) - 7 = 0$

$-2k = +7 - 5$

$-2k = 2$

$k = -1$

b) (7, 3)

$7 + k \cdot 3 - 7 = 0$

$3k = 7 - 7$

$3k = 0$

$k = 0$

c) (–3, 4)

$-3 + k \cdot 4 - 7 = 0$

$4k = 7 + 3$

$k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Distàncies i àrees

38. Troba la distància entre els punts *P* i *Q* en cada cas:

a) *P*(1, 3) *Q*(5, 7) b) *P*(–2, 4) *Q*(3, –1)
c) *P*(–4, –5) *Q*(0, 7)

a) $P(1, 3)$ $Q(5, 7)$

$dis(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(5-1)^2 + (7-3)^2} =$

$= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$

b) $P(-2, 4)$ $Q(3, -1)$

$dis(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-1-4)^2} =$

$= \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

c) $P(-4, -5)$ $Q(0, 7)$

$dis(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(0-(-4))^2 + (7-(-5)^2} =$

$= \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160}$

39. Calcula *k* de manera que la distància entre els punts *A*(5, *k*) i *B*(3, –2) sigui igual a 2.

$A(5, k)$ $B(3, -2)$ $dis(P, Q) = 2$

$2 = \sqrt{(3-5)^2 + (-2-k)^2}$

$2 = \sqrt{4 + (4 + k^2 - 2(-2) \cdot k}$

$2 = \sqrt{4 + (4 + k^2 + 4k}$

$2 = \sqrt{4 + 4 + k^2 + 4k}$

$(2)^2 = (\sqrt{8 + k^2 + 4k})^2$

$4 = 8 + k^2 + 4k$

$k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow k = -2$

40. Troba el valor que ha de tenir *a* perquè la distància entre *A*(*a*, 2) i *B*(–3, 5) sigui igual a $\sqrt{13}$.

$A(a, 2)$ $B(-3, 5)$ $dis(A, B) = \sqrt{13}$

$\sqrt{13} = \sqrt{(-3-a)^2 + (5-2)^2}$

$\sqrt{13} = \sqrt{(9 + a^2 - 2\,(-3) \cdot a) + 9}$

$(\sqrt{13})^2 = (\sqrt{9 + a^2 + 6a + 9})^2$

$13 = 9 + a^2 + 6a + 9$

$a_2 + 6a + 5 = 0 \Rightarrow a_1 = -1 \quad a_2 = -5$

L'exercici té dues solucions possibles.

41. Troba la distància del punt *P*(2, –3) a les rectes següents:

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$**; b)** $y = \frac{9}{4}$**; c)** $2x + 5 = 0$

a) Vegem primer l'equació implícita de la recta:

$\begin{cases} t = x/2 \\ t = -y \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = -y \rightarrow x + 2y = 0$

Aleshores:

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2-6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b) $y = \frac{9}{4} \rightarrow y - \frac{9}{4} = 0$

Per tant:

$$dist(P, r) = \frac{|1(-3) - 9/4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - 9/4|}{\sqrt{1}} = \frac{21}{4}$$

c) $dist(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 0}} = \frac{9}{2}$

42. Calcula la distància de l'origen de coordenades a les rectes següents:
a) $3x - 4y + 12 = 0$; b) $2y - 9 = 0$; c) $x = 3$; d) $3x - 2y = 0$

a) $dist(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{5}$

b) $dist(0, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{9}{2}$

c) $dist(0, r) = \frac{|0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{3}{1} = 3$

d) $dist(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$

(és a dir, la recta $3x - 2y = 0$ passa per l'origen).

43. Troba la longitud del segment que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ en tallar els eixos de coordenades.

S'ha de calcular la distància entre els punts de tall de la recta amb els eixos de coordenades.

Calculem primer aquests punts:

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow -2y + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(0, \frac{5}{2}\right)$ és el punt de tall amb l'eix Y

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$

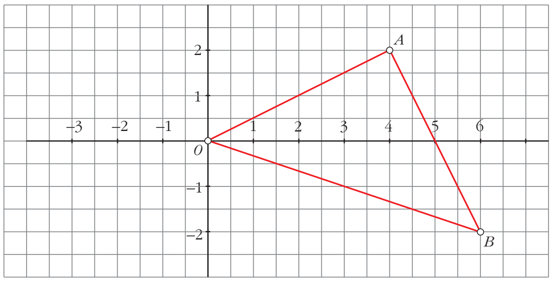
$\Rightarrow B\ (5, 0)$ és el punt de tall amb l'eix X

- Per tant $\overline{AB} = dist(A, B) =$

$$= \sqrt{(5-0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

44. En el triangle els vèrtexs del qual són l'origen de coordenades i els punts $A(4, 2)$ i $B(6, -2)$, calcula:
a) La longitud del costat $\overline{OB}$.
b) La distància de A al costat $\overline{OB}$.
c) L'àrea del triangle.



$A(4, 2) \quad B(6, -2) \quad 0(0, 0)$

a) $\overline{OB}$

$dis\ OB = \sqrt{(6-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{36 + 4} =$
$= \sqrt{40}$

b) $m = \frac{-2-0}{6-0} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$(6, -2) \rightarrow y = -2 + \left(-\frac{1}{3}\right)(x - 6)$

$y = -2 - \frac{1x}{3} - 2$

$y = -\frac{x}{3}$

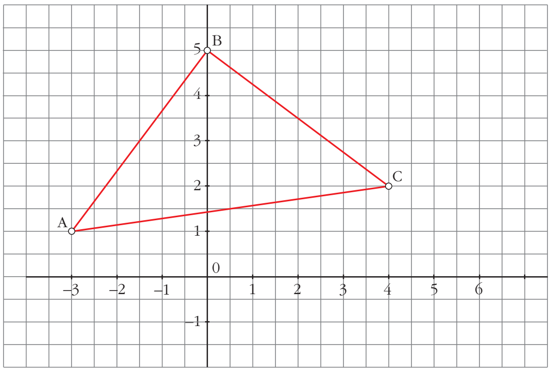
$3y = -x$

r: $x + 3y = 0$

$$dis(A, r) = \frac{|1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 0|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}}$$

c) $a = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{\sqrt{40} \cdot \dfrac{10}{\sqrt{10}}}{2} = 10$

45. Comprova que el triangle de vèrtexs *A*(–3, 1), *B*(0, 5) i *C*(4, 2) és rectangle i troba la seva àrea.



$A(-3,\ 1) \quad B(0,\ 5) \quad C(4,\ 2)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (-3,\ 1) - (0,\ 5) = (-3,\ -4) \\ \overrightarrow{BC} = (4,\ 2) - (0,\ 5) = (4,\ -3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Són perpendiculars; per tant, el triangle és rectangle.

$dis\ AC = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (2 - 1)^2} =$

$= \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$

Recta AC

$A(-3,\ 1)$

$\overrightarrow{AC} = (4,\ 2) - (-3,\ 1) = (7,\ 1)$

$(x,\ y) = (-3,\ 1) + t\,(7,\ 1)$

$\begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = 1 + t \end{cases}$ multipliquem per 7

$x = -3 + 7t$

$7y = 7 + 7t$

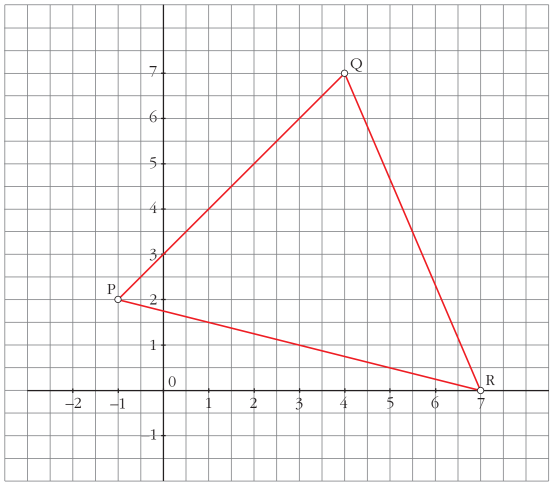
$x - 7y = -10$ Restem

Equació $= x - 7y + 10 = 0$

$dis(B,\ r) = \dfrac{|1 \cdot 0 + (-7) \cdot 5 + 10|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{50}}$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{\sqrt{50} \cdot \dfrac{25}{\sqrt{50}}}{2} = \dfrac{25}{2} = 12{,}5$

46. Troba l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són *P*(–1, 2), *Q*(4, 7), *R*(7, 0).



$P(-1,\ 2) \quad Q(4,\ 7) \quad R(7,\ 0)$

$dis\ PR = \sqrt{7 - (-1)^2 + (0 - 2)^2} =$

$= \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$

Recta PR

$\overrightarrow{PR} = (7,\ 0) - (-1,\ 2) = (8,\ -2)$

$(x,\ y) = (7,\ 0) + t(8,\ -2)$

$\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = -2t \end{cases}$ multipliquem per 4

$x = 7 + 8t$

$4y = -8t$

$x + 4y = 7$ Sumem

L'equació de la recta és: $x + 4y + 7 = 0$

$dis(Q,\ r) = \dfrac{|1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{17}}$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{\sqrt{68} \cdot \dfrac{25}{\sqrt{17}}}{2} = 25$

47. Troba la distància entre les rectes *r*: $x - 2y + 8 = 0$ i *r*′: $-2x + 4y - 7 = 0$. *Comprova que són paral·leles; pren un punt qualsevol de r i troba'n la distància a r*′.

Els seus pendents són $m_r = \dfrac{1}{2} = m_{r'} \Rightarrow$ Són paral·lels.

Aleshores, la distància entre r i r' serà:

$dist(P, r')$ en què $P \in r$

Sigui $x = 0$.

Substituint en $r \rightarrow y = \dfrac{-8}{-2} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(0, 4) \in r$

Així:

$$dist(r, r') = dist(P, r') = \frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{|16 - 7|}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

48. Determina c perquè la distància de la recta $x - 3y + c = 0$ al punt (6, 2) sigui de $\sqrt{10}$ unitats. (Hi ha dues solucions.)

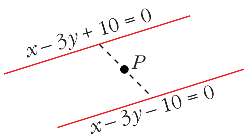
$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Hi ha dues solucions:

$$\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \Rightarrow c_2 = -10 \end{cases}$$

Les dues rectes solució seran dues rectes paral·leles:



49. Calcula el valor de a perquè la distància del punt $P(1, 2)$ a la recta $ax + 2y - 2 = 0$ sigui igual a $\sqrt{2}$.

$$dist(P, r) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|a \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \rightarrow a + 2 = \sqrt{2(a^2 + 4)} \\ \dfrac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = -\sqrt{2} \rightarrow a + 2 = -\sqrt{2(a^2 + 4)} \end{cases}$$

En elevar al quadrat obtenim la mateixa equació en ambdós casos.

$\Rightarrow (a + 2)^2 = 2(a^2 + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} =$

$= 2 = a$

Angles

50. Troba l'angle que formen els parells de rectes següents:

a) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 5y + 7 = 0 \\ 10x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases} \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} r\text{: } y = 2x + 5 \\ s\text{: } y = -3x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ els seus pendents són:

$\left.\begin{array}{l} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{array}\right\}$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r\, m_s}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| =$$

$= 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \alpha \equiv \widehat{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} = \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{|30 - 30|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

c) Els vectors directors d'aquestes rectes són:

$\vec{d}_1 = (-1, 2)$ i $\vec{d}_2 = (-3, 1)$

Aleshores:

$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{a_1} = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a_2} = (0, 2) \perp r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \equiv \widehat{r_1\ r_2} =$

$$= (\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}}) \Rightarrow cos\ \alpha = \frac{|\vec{a_1} \cdot \vec{a_2}|}{|\vec{a_1}||\vec{a_2}|} = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}4472 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 63°\ 26'\ 5{,}82''$$

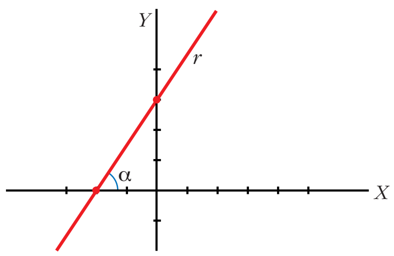
51. Quin angle forma la recta $3x - 2y + 6 = 0$ amb l'eix d'abscisses?

No cal que apliquis cap fórmula. Saps que el pendent de r és la tangent de l'angle que forma r amb l'eix d'abscisses. Troba l'angle amb el pendent de r.

El pendent de r és $m_r = \frac{3}{2}$.

El pendent de r és, a més, $tg\ \alpha$:

$$m_r = tg\ \alpha \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 56°\ 18'\ 35{,}8''$$



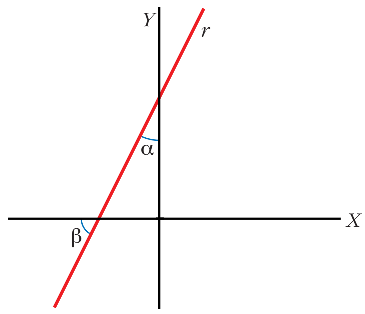
52. Quin angle forma la recta $2x - y + 5 = 0$ amb l'eix d'ordenades?

L'angle que es demana és el complementari de l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses.

L'angle demanat, α, és complementari de $\beta \Rightarrow tg\ \beta = \frac{1}{tg\ \alpha}$

Per altra part, $tg\ \beta = m_r = 2$:

$$tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54{,}2''$$

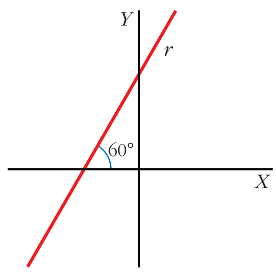


53. Calcula *n* de manera que la recta $3x + ny - 2 = 0$ formi un angle de 60° amb la *OX*.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\frac{3}{n} \end{array}\right\}$$

Com que $tg\ 60° = m_r$, tenim que:

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \rightarrow n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$



Per resoldre

54. Calcula *m* i *n* en les rectes d'equacions:

r: $mx - 2y + 5 = 0$

s: $nx + 6y - 8 = 0$

sabent que són perpendiculars i que *r* passa pel punt *P*(1, 4).

Les coordenades de P han de verificar l'equació de r. Així calcules m. Expressa

la perpendicularitat amb vectors o amb pendents i troba n.

• $P(1, 4) \in r \Rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 3$

• $\left.\begin{array}{l} (m, -2) \perp r \\ (n, 6) \perp s \Rightarrow \end{array}\right\} (m, -2) \perp (n, 6) \Rightarrow$

Com que han de ser $r \perp s$

$\Rightarrow (m, -2) \cdot (n, 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \cdot n + (-2) \cdot 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3n - 12 = 0 \Rightarrow n = 4$

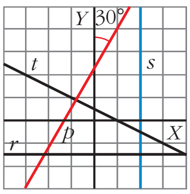
NOTA: Utilitzant els pendents $m_r = \frac{m}{2}$ i $m_s = \frac{-n}{6}$, per tal que $r \perp s$ ha de ser $m_r \cdot m_s = -1$, és a dir:

$\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{-n}{6}\right) = -1 \Rightarrow -mn = -12 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3n = -12 \Rightarrow n = 4$

Pàgina 183

55. Troba les equacions de les rectes *r*, *s*, *t* i *p*.



$$t: \begin{cases} (1, 0) \text{ i } (-3, 2) \\ ms = \frac{2-0}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ Pt = (-3, 2) \end{cases}$$

$\Rightarrow t: y = -\frac{1}{2}(x + 3) + 2$

$$s: \begin{cases} (2, 0) \text{ i } (2, 3) \\ ms = \frac{3-0}{2-2} = \frac{3}{0} \text{ No té pendent} \end{cases}$$

És una recta paral·lela a l'eix de les y: $x = 2$

$$p: \begin{cases} (0, 2) \text{ i } (1, 4) \\ ms = \frac{4-2}{1-0} = \frac{2}{1} = 2 \qquad y = 2x + 2 \\ Pp = (2, 0) \end{cases}$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} (0, -\frac{3}{2}) \text{ i } (-1, -\frac{3}{2}) \\ ms = \frac{-\frac{3}{2} - \left(\frac{-3}{2}\right)}{-1-0} = \frac{0}{-1} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow r: y = -\frac{3}{2}$

56. Donada la recta *r*: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + kt \end{cases}$, troba *k* de manera que *r* sigui paral·lela a la bisectriu del segon quadrant.

• La bisectriu del segon quadrant és $x = -y$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$ (en paramètriques)

El seu vector director és $\vec{d} = (-1, 1)$.

• El vector director de r és $\vec{r} = (3, k)$.

• Com que volem que r // bisectriu del segon quadrant, aleshores els seus vectors directors han de ser proporcionals:

$\frac{-1}{3} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = -3$

57. En el triangle de vèrtexs *A*(–2, 3), *B*(5, 1), *C*(3, –4), troba les equacions de:

a) L'altura que parteix de *B*.

b) La mitjana que parteix de *B*.

c) La mediatriu del costat $\overline{CA}$.

a) L'altura que parteix de B, h_B, és una recta perpendicular a AC que passa pel punt B.

$h_B \perp AC(5, -7) \Rightarrow$ el vector director de h_B és $\vec{h}_B(7, 5)$

$B(5, 1) \in h_B$

$\Rightarrow h_B: \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-5}{7} \\ t = \dfrac{y-1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h_B$: $5x - 7y - 18 = 0$

b) m_B (mitjana que parteix de B) passa per B i pel punt mitjà, m, de AC:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\dfrac{-2+3}{2}, \dfrac{3-4}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in m_B \\ B(5,\ 1) \in m_B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{m}_B\left(5 - \dfrac{1}{2}, 1 + \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ és vector director de m_B.

Per tant:

$$m_B: \begin{cases} x = 5 + \dfrac{9}{2}t \\ y = 1 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 10 + 9t \\ t = \dfrac{2y-2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x-10}{9} \\ t = \dfrac{2y-2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2x-10}{9} = \frac{2y-2}{3} \rightarrow$$

m_B: $6x - 18y - 12 = 0$

c) La mediatriu de CA, z, és perpendicular a CA pel punt mitjà del costat, m'. Així:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{CA} = (-5,\ 7) \perp z \Rightarrow \text{vector director de } z\text{:} \\ \vec{z}(7,\ 5) \\ m'\left(\dfrac{3-2}{2}, \dfrac{-4+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in z \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow z: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 7t \\ y = -\dfrac{1}{2} + 5t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x-1}{14} \\ t = \dfrac{2y+1}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{2x-1}{14} = \frac{2y+1}{10} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z$: $20x - 28y - 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z$: $5x - 7y - 6 = 0$

58. La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, en tallar els eixos de coordenades, un segment AB.

Troba l'equació de la mediatriu de AB.

Després de trobar els punts A i B, troba el pendent de la mediatriu, inversa i oposada a la de AB. Amb el punt mitjà i el pendent, pots escriure l'equació.

$A(6, -2)$ $B(-3, 4)$

$$m = \frac{4-(-2)}{-3-6} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

$$m' = \frac{3}{2}$$

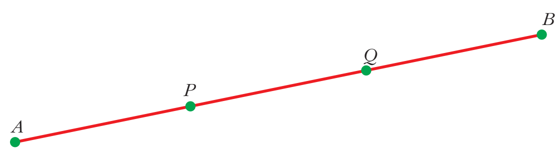
$$M\left(\frac{6-3}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$y = 1 + \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

59. Determina els punts que divideixen el segment AB, $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, en tres parts iguals.

Si P i Q són aquests punts, $\vec{AP} = \dfrac{1}{3}\vec{AB}$.

Escriu les coordenades de $\vec{AP}$ i de $\vec{AB}$ i obtén P. Q és el punt mitjà de $\overline{PB}$.



$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} \rightarrow (x + 2, y - 1) = \frac{1}{3}(7, 3) \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{7}{3} \rightarrow x = \dfrac{7}{3} - 2 = \dfrac{1}{3} \\ y - 1 = \dfrac{3}{3} \rightarrow y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

- Q és un punt mitjà de $PB \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{1/3 + 5}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) \rightarrow Q\left(\frac{8}{3}, 3\right)$$

60. Quines coordenades ha de tenir P perquè es verifiqui que $3\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{QR} = 0$, sent $Q(3, 2)$ i $R(-1, 5)$?

$3\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{QR} \rightarrow 3(3 - x, 2 - y) =$
$= 2(-4, 3)$

$$\rightarrow \begin{cases} 9 - 3x = -8 \\ 6 - 3y = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow P\left(\frac{17}{3}, 0\right)$$

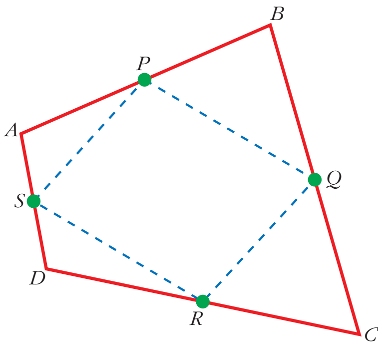
61. Els punts mitjans dels costats de qualsevol quadrilàter formen un paral·lelogram. Comprova-ho amb el quadrilàter de vèrtexs:
$A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$, $D(-1, 6)$

$$P\left(\frac{5 + 3}{2}, \frac{8 + 2}{2}\right) = (4, 5)$$

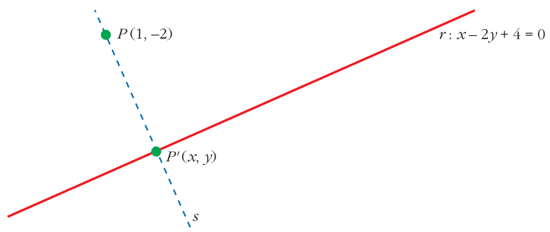
$Q(3, 1)$; $R(0, 3)$; $S(1, 7)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (3 - 4, 1 - 5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0 - 1, 3 - 7) = (-1, -4) \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = (4 - 1, 5 - 7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3 - 0, 1 - 3) = (3, -2) \end{array}\right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$$



62. Troba el peu de la perpendicular traçada des de $P(1, -2)$ a la recta r: $x - 2y + 4 = 0$.
Escriu la perpendicular a r des de P i troba el punt de tall amb r.



Sigui s la recta perpendicular a r des de P i $\vec{r} = (2, 1)$ vector director de r. Així, $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{r} \Rightarrow$ el vector director de s, $\vec{s}$, també és perpendicular a $\vec{r}(\vec{s} \perp \vec{r})$, per tant podem prendre $\vec{s}(1, -2)$. Com que $P(1, -2) \in s$:

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \rightarrow t = x - 1 \\ y = -2 -2t \rightarrow t = \dfrac{y + 2}{-2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 1 = \frac{y + 2}{-2} \rightarrow -2x + 2 = y + 2 \rightarrow$$

$\rightarrow s : 2x + y = 0$

El punt $P'(x, y)$ és tal que:

$$P' = s \cap r \begin{cases} s\text{: } = 2x + y = 0 \rightarrow y = -2x \\ r\text{: } x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

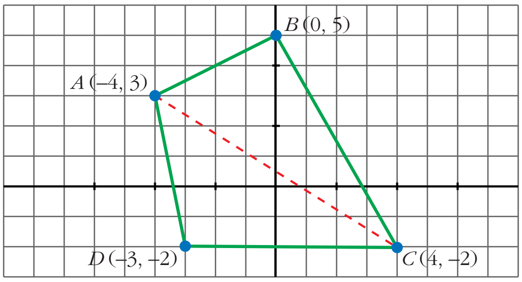
Substituint en la segona equació:

$x - 2(-2x) + 4 = 0 \rightarrow x + 4x + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-4}{5} \rightarrow y = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

Per tant: $P'\left(\dfrac{-4}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

63. Troba l'àrea del quadrilàter de vèrtexs: $A(-4, 3)$, $B(0, 5)$, $C(4, -2)$ i $D(-3, -2)$
Traça una diagonal per descompondre'l en dos triangles de la mateixa base.

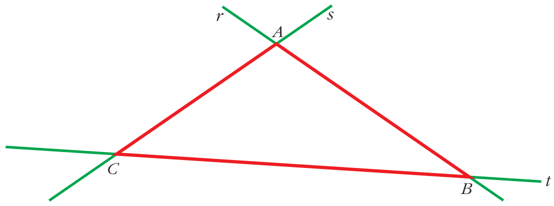


• La diagonal AC divideix el quadrilàter en dos triangles amb la mateixa base, la mesura de la qual és:
$|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$

• Siguin h_B i h_D les altures des de B i D, respectivament, a la base:
$h_B = dist(B, r)$ i $h_D = dist(D, r)$
en què r és la recta que conté el segment $\overrightarrow{AC}$.
Agafant com a vector director de r el vector $\overrightarrow{AC}$, l'equació d'aquesta resta és:
$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y - k = 0 \\ \text{Com que: } (-4, 3) \in r \end{array}\right\}$$
$-20 + 24 + k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow r\text{: } 5x + 8y - 4 = 0$
Aleshores:
$$h_B = dist(B, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$
$$h_D = dist(D, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

• Així:
$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} =$$
$$= \frac{b}{2}(h_B + h_D) = \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

64. Calcula l'àrea del triangle els costats del qual són sobre les rectes:
r: $x = 3$ $\quad s$: $2x + 3y - 6 = 0$
t: $x - y - 7 = 0$



• $A = r \cap s \begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 0$
Per tant: $A(3, 0)$

• $B = r \cap t \begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 - y - 7 = 0 \Rightarrow y = -4$
Per tant: $B(3, -4)$

• $C = s \cap t \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \rightarrow x = y + 7 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\ (y + 7) + 3y - 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2y + 14 + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 5y + 8 = 0 \Rightarrow$
$$y = \frac{-8}{5} \Rightarrow x = \frac{-8}{5} + 7 = \frac{27}{5}$$
Per tant: $C\left(\frac{27}{5}, \frac{-8}{5}\right)$

• Considerem el segment AB com a base:
$|\overrightarrow{AB}| = |(0, -4)| = \sqrt{16} = 4$

• L'altura des de C és $h_C = dist(C, r) =$
$$= \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot h_C}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{23}{5}$$

• Així:
$$\text{Àrea} = \frac{|(-8/5) - 3|}{2} = \frac{4 \cdot 23/5}{2} = \frac{46}{5}$$

65. En el triangle de vèrtexs $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ i $C(4, 1)$, troba les longituds de la mitjana i de l'altura que parteixen de B.

• *Mitjana*. És el segment BM en què M és el punt mitjà de AC.
$$M\left(\frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{3}{2} - 2, 0 - 4\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$$
La longitud de la mitjana és: $|\overrightarrow{BM}| =$

$= \sqrt{1/4 + 16} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

• *Altura.* És el segment BP en què P és el peu de la perpendicular a AC des de B.

$\overrightarrow{AC} = (5, 2) \Rightarrow$ la recta que conté aquest segment és:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x - 5y - 3 = 0$

$\vec{v} = (-2, 5) \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ la recta $s \perp r$ que passa per B:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5x + 2y - 18 = 0$

$$P = r \cap s \Rightarrow \begin{cases} r\text{: } 2x - 5y - 3 = 0 \\ s\text{: } 5x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$$

Multipliquem la primera per 2 i la segona per 5, i sumem:

$4x - 10y - 6 = 0$

$25x + 10y - 90 = 0$

$29x - 96 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{96}{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \dfrac{96}{29} - 5y - 3 = 0 \Rightarrow 5y = \dfrac{192}{29} - 3 =$

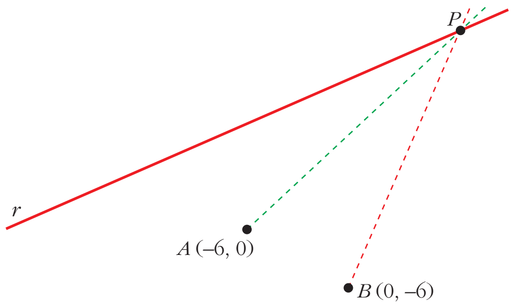
$= \dfrac{105}{29} \Rightarrow y = \dfrac{105}{29} : 5 = \dfrac{21}{29}$

Per tant: $P\left(\dfrac{96}{29}, \dfrac{21}{29}\right)$

Així: $h_B = |\overrightarrow{BP}| = \left|\left(\dfrac{38}{29}, -\dfrac{95}{29}\right)\right| =$

$= \sqrt{\dfrac{10\,469}{29^2}} = \sqrt{\dfrac{10\,469}{29}} = 3{,}528$

66. Troba el punt de la recta $3x - 4y + 8 = 0$ que equidista dels vèrtexs $A(-6, 0)$ i $B(0, -6)$.



$P(x, y)$ ha de verificar dues condicions:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ P(x, y) \in r \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0 \\ 2.\ dist(A, P) = dist(B, P) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+6)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4x + 8 = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 + 12y + 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4x + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 8 = y \Rightarrow P(8, 8)$

67. Determina un punt en la recta $y = 2x$ que estigui a una distància de tres unitats de la recta $3x - y + 8 = 0$.

$$\begin{cases} P(x, y) \in r\text{: } y = 2x \\ dist(P, r') = 3, \text{ on } r'\text{: } 3x - y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

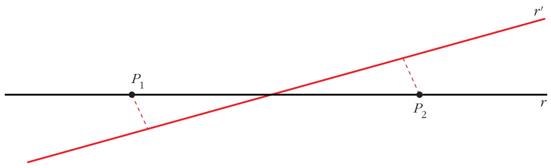
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \dfrac{|3x - y + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \Rightarrow \dfrac{|3x - 2x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{|x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \Rightarrow$ dues possibilitats:

$$\begin{cases} x + 8 = 3\sqrt{10} \rightarrow x_1 = 3\sqrt{10} - 8 \Rightarrow \\ x + 8 = -3\sqrt{10} \rightarrow x_2 = -3\sqrt{10} - 8 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Rightarrow y_1 = 6\sqrt{10} - 16 \\ \Rightarrow y_2 = -6\sqrt{10} - 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1(3\sqrt{10} - 8,\ 6\sqrt{10} - 16) \\ P_2(-3\sqrt{10} - 8,\ -6\sqrt{10},\ -16) \end{cases}$$



68. Troba els punts de la recta $y = -x + 2$ que equidistin de les rectes $x + 2y - 5 = 0$ i $4x - 2y + 1 = 0$.

Siguin r_1, r_2 i r_3 les tres rectes de l'exercici, respectivament.

Cerquem els punts $P(x, y)$ que compleixin:

$$\begin{cases} P \in r_1 \Rightarrow y = -x + 2 \\ dist(P, r_2) = dist(P, r_3) \Rightarrow \dfrac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \end{cases}$$

$$= \frac{|4x + 2y + 1|}{\sqrt{20}} \Rightarrow \frac{|x + 2(-x + 2) - 5|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{|4x - 2(-x + 2) + 1|}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-x - 1| = \frac{|6x - 3|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - 1 = \dfrac{6x - 3}{2}, \text{ o bé} \\ -x - 1 = \dfrac{-6x - 3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 2 = 6x - 3, \text{ o bé} \\ -2x - 2 = -6x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 1 \\ 4x = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/8 \\ x_2 = 5/4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{8} + 2 = \dfrac{15}{8} \\ y_2 = -\dfrac{5}{4} + 2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{15}{8}\right) \\ P_2\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

69. Calcula c perquè la distància entre les rectes $4x + 3y - 6 = 0$ i $4x + 3y + c = 0$ sigui igual a 3.

Sigui $P \in r_1$ on $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(0, 2) \in r_1$

Així, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) =$

$$= \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \Rightarrow \frac{|6 + c|}{5} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 + c = 15 \Rightarrow c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \Rightarrow c_2 = -21 \end{cases}$$

70. El costat desigual del triangle isòsceles ABC, té els extrems $A(1, -2)$ i $B(4, 3)$. El vèrtex C és a la recta $3x - y + 8 = 0$. Troba les coordenades de C i l'àrea del triangle.

• La recta del costat desigual (base) té com a vector director $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r$: $5x - 3y - 11 = 0$

• La recta que conté l'altura té per vector director $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ i passa pel punt mitjà del costat desigual AB, és a dir, per $m\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$:

$$h_c: \begin{cases} x = 5/2 - 5t \\ y = 1/2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \frac{2x - 5}{-10} = \frac{2y - 1}{6} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h_c$: $12x + 20y - 40 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_c$: $6x + 10y - 20 = 0$

• $C = s \cap h_c$ on s: $3x - y + 8 = 0$

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 2y - 16 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$12y - 36 = 0 \rightarrow \quad y = \frac{36}{12} = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x - 3 + 8 = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

Aleshores: $C\left(\dfrac{-5}{3}, 3\right)$

• Àrea $= \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{Cm}|}{2} \overset{(*)}{=}$

$= \dfrac{\sqrt{34} \cdot (\sqrt{850/6})}{2} \approx 14{,}17$

$$(*)\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,\ 5) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{Cm}\left(\dfrac{-25}{6},\ \dfrac{-5}{2}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{Cm}| = \dfrac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

71. Troba l'equació de la recta que passa pel punt d'intersecció de les rectes *r* i *s* i forma un angle de 45° amb la recta: $x + 5y - 6 = 0$.

***r*: $3x - y - 9 = 0$ *s*: $x - 3 = 0$**

$P = r \cap s: \begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - y - 9 = 0 \Rightarrow y = 0$

Aleshores: $P\ (3,\ 0)$

Com que la recta demanada i $x + 5y - 6 = 0$ formen un angle de 45°, aleshores si els seus pendents són, respectivament, m_1 i m_2, es verifica:

$tg\ 45° = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| \Rightarrow 1 =$

$= \left|\dfrac{(-1/5) - m_1}{1 + (-1/5) \cdot m_1}\right| \Rightarrow 1 = \left|\dfrac{-1 - 5 - m_1}{5 - m_1}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5 - m_1 = -1 - 5m_1, \text{ o bé} \\ -(5 - m_1) = -1 - 5m_1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4m_1 = -6 \Rightarrow m_1 = -6/4 \\ 6m_1 = 4 \Rightarrow m_1 = 4/6 \end{cases}$

Hi ha dues possibles solucions:

t_1: $y - 0 = \dfrac{-6}{4}(x - 3) \Rightarrow t_1$: $y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{9}{2}$

t_2: $y - 0 = \dfrac{4}{6}(x - 3) \Rightarrow t_2$: $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{6}{3}$

72. Donades les rectes:

***r*: $2x - y - 17 = 0$ i *s*: $3x - ky - 8 = 0$ calcula el valor de *k* perquè *r* i *s* es tallin formant un angle de 60°.**

Troba el pendent de r. El pendent de s és 3/k. N'obtindràs dues solucions.

r: $2x - y - 17 = 0$

s: $3x - ky - 8 = 0$

m_1: $\dfrac{2}{1} = 2$ $m_1 = tg\ \beta$

m_2: $\dfrac{3}{k}$ $m_2 = tg\ \alpha$

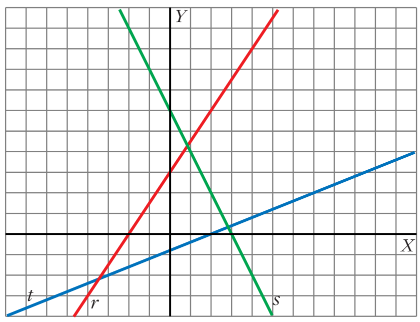
$tg\ \alpha = |\text{tg}(\alpha - \beta)| = \left|\dfrac{\dfrac{3}{k} - 2}{1 + \dfrac{3}{k} \cdot 2}\right| = tg\ 60°$

$\left|\dfrac{\dfrac{3 - 2k}{k}}{\dfrac{k + 6}{k}}\right| = tg\ 60°$

$\left|\dfrac{3 - 2k}{k + 6}\right| = tg\ 60°$

$k \begin{cases} k_1 = 50 \\ k_2 = -2 \end{cases}$

73. Les rectes *r*: $3x - 2y + 6 = 0$, *s*: $2x + y - 6 = 0$ i *t*: $2x - 5y - 4 = 0$ són els costats d'un triangle. Representa'l i troba'n els angles.



$m_r = \dfrac{3}{2}$

$m_s = -2$

$m_t = \dfrac{2}{5}$

$tg\ (\widehat{r, s}) = \left|\dfrac{3/2 - (-2)}{1 + 3/2 \cdot (-2)}\right| = \dfrac{7/2}{2} = \dfrac{7}{4}$

Per tant: $(\widehat{r, s}) = 60°\ 15'\ 18{,}4''$

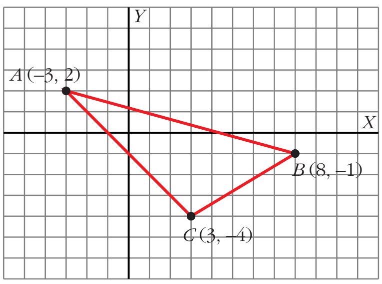
$tg\ (\widehat{r,\ t}) = \left|\dfrac{3/2 - 2/5}{1 + 3/2 \cdot 2/5}\right| = \left|\dfrac{15-4}{10+6}\right| = \dfrac{11}{16}$

Per tant: $(\widehat{r,\ t}) = 34°\ 30'\ 30{,}7''$

Per últim, $(\widehat{s,\ t}) = 180° - (\widehat{r,\ s}) - (\widehat{r,\ t}) =$
$= 85°\ 14'\ 11''$

74. Troba els angles d'un triangle els vèrtexs del qual són $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ i $C(3, -4)$.

Representa el triangle i observa si té algun angle obtús.



$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{BA}\ (-11, 3)$
$\overrightarrow{AC} = (6, -6)$; $\overrightarrow{CA}\ (-6, 6)$
$\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$; $\overrightarrow{CB}\ (5, 3)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{66 + 18}{\sqrt{130}\sqrt{72}} \approx 0{,}868$$

D'aquesta manera: $\hat{A} = 29°\ 44'\ 41{,}6''$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{55 - 9}{\sqrt{130}\sqrt{34}} \approx 0{,}692$$

Aleshores: $\hat{B} = 46°\ 13'\ 7{,}9''$

Així, $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 104°\ 2'\ 10{,}5''$

Pàgina 184

75. Troba l'equació de la recta que passa per $(0, 2)$ i forma un angle de 30° amb $x = 3$.

La recta que busquem forma un angle de 60° o de 120° amb l'eix OX.

$P(0, 2) \quad \alpha = 30° \quad x = 3$

$$tg\ 60 = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|$$

$tg\ 60 = m_2 \to m_2 = 1{,}73$

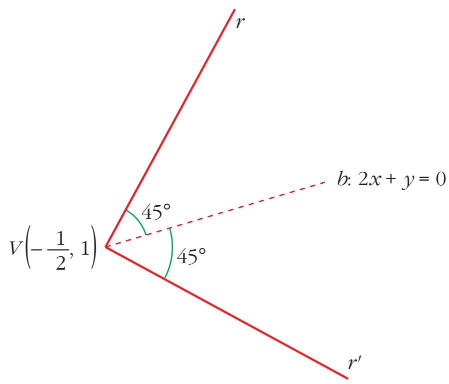
$y = 1{,}73x + 2$

76. La recta $2x + y = 0$ és la bisectriu d'un angle recte el vèrtex del qual és $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Troba les equacions dels costats de l'angle.

Els pendents de les rectes són:

$m_b = -2$, m_r, $m_{r'}$



$$tg\ 45° = \left|\frac{m_b - m_r}{1 + m_b m_r}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{-2 - m_r}{1 - 2m_r}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - 2m_r = -2 - m_r \to m_r = 3 \\ -1 + 2m_{r'} = -2 - m_{r'} \to m_{r'} = -1/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r:\ y - 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \to y = 3x + \dfrac{5}{2} \\ r':\ y - 1 = \dfrac{-1}{3}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \to y = \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

77. Troba un punt en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidisti dels eixos de coordenades.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eix } X:\ y = 0 \\ \text{Eix } Y:\ x = 0 \\ P\ (x, y) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow$$

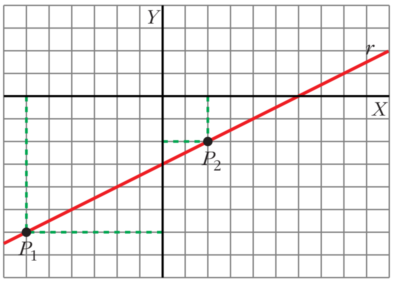
$$\Rightarrow \begin{cases} dist(P, \text{eix } X) = dist(P, \text{eix } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{0^2+1^2}} \Rightarrow$$

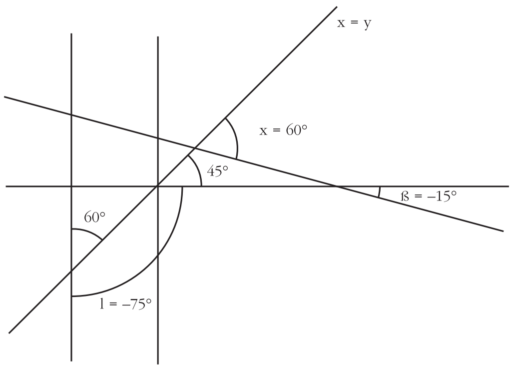
$$\Rightarrow \text{dos casos: } \left.\begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}\right\} \Rightarrow$$
$$x - 2y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 2y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \Rightarrow y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1(-6, -6) \\ P_2(2, -2) \end{cases}$$



78. Troba les equacions de les rectes que passen per $A(-2, 2)$ i formen un angle de 60° amb $x = y$.



$$tg\ \beta = tg\ -15^\circ = -0{,}27 = \frac{-27}{100}$$

$$tg\ \alpha = tg\ -75^\circ = -3{,}7 = \frac{-37}{10}$$

$$y = 2 + \frac{-27}{100}(x + 2) \text{ i}$$
$$y = 2 + \frac{-37}{10}(x + 2)$$

79. Escriu l'equació de la recta r que passa per $A(2, 3)$ i B $(5, 6)$ i troba l'equació d'una recta paral·lela a r, la qual es trobi a una distància de r igual a la distància entre A i B.

- r: $\begin{cases} \text{vector director } \overrightarrow{AB} = (3, 3) \\ \text{passa per } A(2, 3) \end{cases} \Rightarrow$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x - 3y + 3 = 0$$
$$\Rightarrow r\text{: } x - y + 1 = 0$$

- $s \,//\, r \Rightarrow m_s = m_r = 1 \Rightarrow y = x + c \Rightarrow$

s: $x - y + c = 0$

$dist(r, s) = dist(A, s) = dist(A, B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|2 - 3 + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = |\overrightarrow{AB}| \Rightarrow \frac{|1 + c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + c = 6 \Rightarrow c_1 = 6 + 1 = 7 \\ -1 + c = -6 \Rightarrow c_2 = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1\text{: } x - y + 7 = 0 \\ s_2\text{: } x - 5 = 0 \end{cases}$$

80. Troba el punt simètric de $P(1, 1)$ respecte a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

- $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}$ on P' és el simètric de P respecte a aquesta recta i $\vec{v}$ és el seu vector director.

$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (x - 1, y - 1) \cdot (2, 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(x - 1) + (y - 1) = 0 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$

- A més, el punt mitjà de PP', m, ha de pertànyer a la recta. Aleshores:

$$m\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \in r \Rightarrow$$

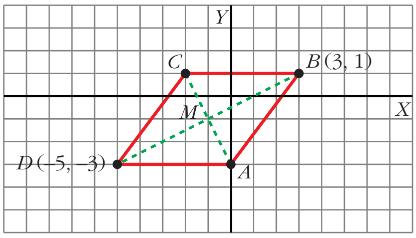
$$\Rightarrow \frac{x+1}{2} - 2\,\frac{y+1}{2} - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + 1 - 2y - 2 - 8 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 2y - 9 = 0$$

- Així, tenint en compte les dues condicions:

$\left.\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 + 2y \end{cases}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 18 + 4y + y - 3 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-15}{5} = -3$
$\Rightarrow x = 9 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$
Per tant: $P' = (3, -3)$

81. Un rombe *ABCD* té un vèrtex en l'eix de les coordenades; altres dos vèrtexs oposats són *B*(3, 1) i *D*(–5, –3). Troba les coordenades dels vèrtexs *A* i *C* i l'àrea del rombe.

Sigui $A \in$ eix $Y \Rightarrow A = (0, y_1)$ i sigui el punt $C = (x_2, y_2)$.
Com que estem treballant amb un rombe, les seves diagonals *AC* i *BD* es tallen en un punt mitjà, *M*.
A més, $AC \perp BD$.



• $M\left(\dfrac{3-5}{2}, \dfrac{1-3}{2}\right) = (-1, -1)$ és el punt mitjà de *BD* (i de *AC*).
• Sigui *d* la recta perpendicular a *BD* per *M* (serà, per tant, la que conté *AC*):
$\begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-8, -4) \Rightarrow \vec{d} = (4, -8) \text{ és vector director de } d \\ M(-1, -1) \in d \end{cases}$

$\begin{cases} \text{El pendent de } d \text{ és } m_d = \dfrac{-8}{4} = -2 \Rightarrow \\ M(-1, -1) \in d \end{cases}$
$\Rightarrow d\colon y + 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 3$
• Així:
$A = d \cap \text{eix } Y\colon \left.\begin{cases} y = -2x - 3 \\ x = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$
$\Rightarrow A(0, -3)$
• *M* és punt mitjà de $AC \Rightarrow (-1, -1) =$
$= \left(\dfrac{0 + x_2}{2}, \dfrac{-3 + y_2}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} -1 = \dfrac{x_2}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \\ -1 = \dfrac{-3 + y_2}{2} \Rightarrow y_2 = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow C(-2, 1)$

• $\text{Àrea} = \dfrac{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}{2}$

$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-2, 4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-8, -4)| = \sqrt{8} = 4\sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Àrea} = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 20$

82. En el triangle de vèrtexs *A*(–3, 2), *B*(1, 3) i *C*(4, 1), troba l'ortocentre i el circumcentre.

L'ortocentre és el punt d'intersecció de les altures. El circumcentre és el punt d'intersecció de les mediatrius.

ORTOCENTRE: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$ on h_A, h_B i h_C són les tres altures (des de *A*, *B* i *C*, respectivament).

• $h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, -2) \Rightarrow \vec{a} = (2, 3) \\ A \in h_A \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_A\colon \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x + 3}{2} = \dfrac{y - 2}{3} \Rightarrow h_A\colon 3x - 2y + 13 = 0$

• $h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (7, -1) \Rightarrow \vec{b} = (1, 7) \\ B \in h_B \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_B\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 7t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 = \dfrac{y - 3}{7} \Rightarrow h_B\colon 7x - y - 4 = 0$

• $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \Rightarrow \vec{c} = (1, -4) \\ C \in h_C \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h_C: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 4 = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow h_C\text{: } 4x + y - 17 = 0$$

Bastaria haver calculat dues de les tres altures i veure el punt d'intersecció:

$$h_B \cap h_C: \begin{cases} 7x - y - 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases} \text{Sumant:}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11x - 21 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{21}{11} \\ y = 7x - 4 = 7 \cdot \dfrac{21}{11} - 4 = \dfrac{147-44}{11} = \dfrac{103}{11} \end{array}\right\}$$

$$R\left(\frac{21}{11}, \frac{103}{11}\right)$$

NOTA: Es pot comprovar que l'ortocentre, R, està també a h_A. Basta substituir en la seva equació.

CIRCUMCENTRE: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, on m_A, m_B i m_C són les tres mediatrius (des de A, B i C, respectivament).

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punt mitjà de } BC\text{: } m\left(\dfrac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \Rightarrow \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punt mitjà de } AB\text{: } m\left(-1, \dfrac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y - \frac{5}{2} = -4\ (x + 1)\ .\ y = -4x - \frac{3}{2}$$

Així:

$$S = m_A \cap m_C: \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} \\ y = -4x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = -4x - \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 7 = -16x - 6 \Rightarrow 22x = 1 \Rightarrow$$

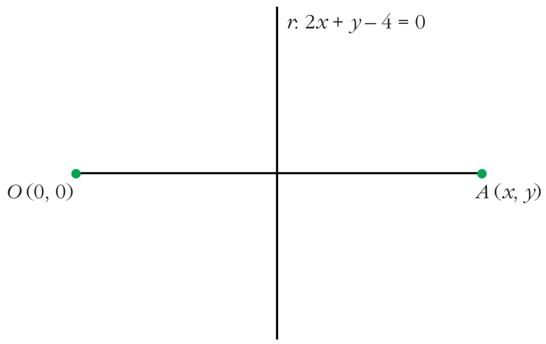
$$x = \frac{1}{22} \Rightarrow y = -4 \cdot \frac{1}{22} - \frac{3}{2} = \frac{-4-33}{22} = $$

$$= \frac{-37}{22}$$

Així, $S\left(\dfrac{1}{22}, \dfrac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Es podria calcular m_B i comprovar que S $S \in m_B$.

83. La recta $2x + y - 4 = 0$ és la mediatriu d'un segment que té un extrem en el punt (0, 0). Troba les coordenades de l'altre extrem.



Un vector director de la recta és el $\vec{v} = (1, -2)$.

- S'ha de verificar que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$

- A més, el punt mitjà de OA, M, pertany a la recta:

$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \Rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \Rightarrow 4y + y - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{8}{5} \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Aleshores: $A\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

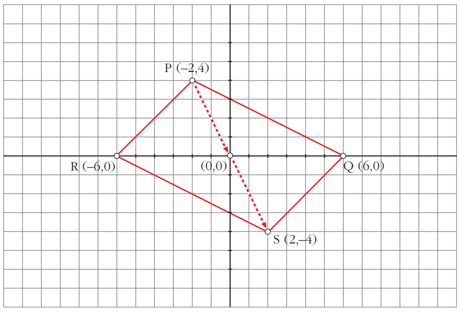
84. Els punts $P(-2, 4)$ i $Q(6, 0)$ són vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram que té el centre en l'origen de coordenades. Troba:

a) Els altres dos vèrtexs.

b) Els angles del paral·lelogram.

a) $R(-6,\ 0)$

$S(2,\ -4)$



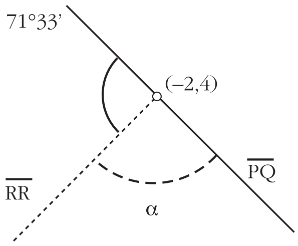
b) $\overline{PR}$ amb $\overline{PQ}$

m_{pr} de $\overline{PR} = \dfrac{4}{4} = 1$

m_{pq} de $\overline{PQ} = \dfrac{-1}{2}$

$tg\ \alpha = \left|\dfrac{1 + 1/2}{1 + 1(-1/2)}\right| = \left|\dfrac{3/2}{1/2}\right| = 3 \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 71^o\ 33'$



$\alpha = 180 - 71^o\ 33' = 108^o\ 26'$

85. Dos dels costats d'un paral·lelogram són sobre les rectes $x + y - 2 = 0$ i $x - 2y + 4 = 0$ i un dels seus vèrtexs és el punt (6, 0). Troba'n els altres vèrtexs.

• Com que les rectes no són paral·leles, el punt on es tallen serà un vèrtex:

$$\begin{matrix} r_1: \\ r_2: \end{matrix}\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$
$$3y - 6 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + 2 - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Aleshores un vèrtex és $A(0,\ 2)$.

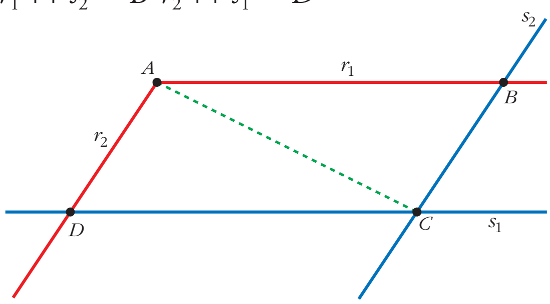
• El vèrtex que ens donen, $C(6,\ 0)$, no pertany a cap de les rectes anteriors (ja que no verifica les seves equacions, com podem comprovar fàcilment substituint els valors de x i y per les coordenades de C). Així doncs, el vèrtex C no és consecutiu de A.

Siguin $s_1//r_1$ una recta que passa per C i $s_2//r_2$ una recta que passa per C.

Es tracta de les rectes sobre les quals estan els altres costats.

Així, els altres vèrtexs, B i D, seran els punts de tall de:

$r_1 \cap s_2 = B\ r_2 \cap s_1 = D$



$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \Rightarrow 6 + 0 + a = 0 \Rightarrow a = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow s_1\!: x + y - 6 = 0$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \Rightarrow 6 - 0 + b = 0 \Rightarrow b = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow s_2\!: x - 2y - 6 = 0$

• $B = r_1 \cap s_2\!: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Resolent el sistema:

De la primera equació $\rightarrow x = 2 - y \rightarrow$ en la segona $\rightarrow 2 - y - 2y - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{-4}{3} \rightarrow x = \dfrac{10}{3} \Rightarrow B\left(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{-4}{3}\right)$

• $D = r_2 \cap s_1\!: \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - y \end{cases}$

$\rightarrow 6 - y - 2y + 4 = 0 \rightarrow y = \dfrac{10}{3} \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{8}{3} \Rightarrow D\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$

86. Troba un punt de l'eix d'abscisses equidistant de les rectes: $4x + 3y + 6 = 0$ i $3x + 4y - 9 = 0$.

$P(x, 0)$ ha de verificar $dist(P, r) = dist(P, s)$:

$$\frac{|4x + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x + 4 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 6 = 3x - 9 \rightarrow x_1 = -15 \\ 4x + 6 = -(3x - 9) \rightarrow x_2 = 3/7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1(-15, 0),\ P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$$

87. Troba el punt de la recta $2x - 4y - 1 = 0$ que amb l'origen de coordenades i el punt $P(-4, 0)$ determina un triangle d'àrea 6.

Si prenem com a base $|\overrightarrow{PO}| = 4$, l'altura del triangle mesura 3. El punt que busquem es troba a tres unitats de PO i en la recta donada. Hi ha dues solucions.

Els vèrtexs són $O(0, 0)$, $P(-4, 0)$, $Q(x, y)$.

Si prenem com a base OP, aleshores:

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{OP}| \cdot h}{2} \Rightarrow 6 = \frac{4 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 3$$

El punt $Q(x, y) \in r \rightarrow 2x - 4y - 1 = 0$ i s'ha de verificar que $d(Q, OP) = 3$.

La recta sobre la qual es troba $\overrightarrow{OP}$ té per vector director $\overrightarrow{OP}(-4, 0)$ i passa per $(0, 0)$.

Aleshores és l'eix X: $y = 0$.

Així:

$$2x - 4y - 1 = 0$$

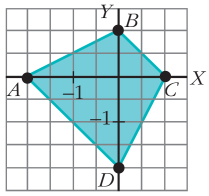
$$\frac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 4 \cdot 3 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{13}{2} \\ 2x - 4\,(-3) - 1 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-11}{2} \end{cases}$$

Doncs hi ha dos triangles, OPQ_1 i OPQ_2, en què:

$$Q_1\left(\frac{13}{2}, 3\right) \text{ i } Q_2\left(\frac{-11}{2}, -3\right)$$

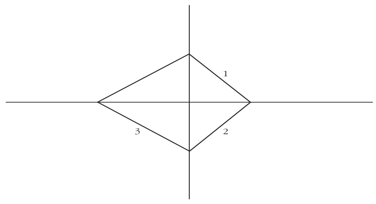
88. Siguin A, B, C, D els punts de tall de les rectes $x - 2y + 2 = 0$ i $2x - y - 2 = 0$ amb els eixos de coordenades. Demostra que el quadrilàter $ABCD$ és un trapezi isòsceles i troba'n l'àrea.



$$d(A, B) = \sqrt{(0 + 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

$$d(D, C) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{5}$$

Com que $d(A, B) = d(D, C)$, és un trapezi isòsceles.



$$\text{Àrea } 1 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Àrea } 2 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$\text{Àrea } 3 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$\text{Àrea total} = \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 + 2 = \frac{9}{2}$$

89. La recta $x + y - 2 = 0$ i una recta paral·lela a aquesta que passa pel punt (0, 5) determinen, juntament amb els eixos de coordenades, un trapezi isòsceles. Troba'n l'àrea.

$$\left.\begin{array}{l} s // r\text{: } x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 0 + 5 + k = 0 \rightarrow k = -5$

Aleshores s: $x + y - 5 = 0$

• Siguin: $A = r \cap \text{eix } X$: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$

$B = r \cap \text{eix } Y: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2)$

$C = s \cap \text{eix } X: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow x = 5 \Rightarrow C(5, 0)$

$D = s \cap \text{eix } Y: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = 5 \Rightarrow D(0, 5)$

• $\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$\text{Àrea} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot h =$

$= \dfrac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist(A, s) = \dfrac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot$

$\cdot \dfrac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2} \cdot$

$\cdot \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{21}{2}$

90. Un punt P, que és equidistant dels punts $A(3, 4)$ i $B(-5, 6)$, dista el doble de l'eix d'abscisses que de l'eix d'ordenades. Quines són les coordenades de P?

$d(P, A) = d(P, B)$

$d(P, OX) = 2 \cdot d(P, OY)$

$\sqrt{(x + 5)^2 + (y - 6)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$

$\dfrac{1 \cdot x}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2\dfrac{1 \cdot y}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 16x - 4y + 36 - 0 \\ x = 2y \end{cases}$

$x = \dfrac{-18}{7}$ i $y = \dfrac{-9}{7} \Rightarrow \left(\dfrac{-18}{7}, \dfrac{-9}{7}\right)$

91. De totes les rectes que passen pel punt $A(1, 2)$, troba el pendent d'aquella que dista 1 de l'origen.

L'equació $y = 2 + m(x - 1)$ representa totes aquestes rectes. Passa-la a forma general i aplica la condició $d(O, r) = 1$.

$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow$

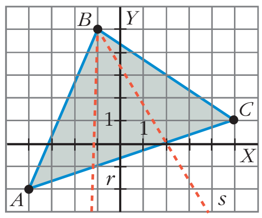
$\rightarrow -mx + y + m - 2 = 0$

$d(O, r) = \dfrac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$

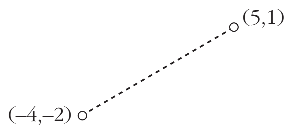
$= \dfrac{|-m \cdot 0 + 1 \cdot 0 + m - 2|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}} = 1$

$= \dfrac{m - 2}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

92. Donat el triangle de vèrtexs $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ i $C(5, 1)$, troba les equacions de les rectes r i s que parteixen de B i, tallant AC, divideixen el triangle en tres triangles de la mateixa àrea.



Com que $d(B, A) = d(B, C)$, dividim $\overline{AC}$ en 3 segments iguals.



$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{3} = \dfrac{(S + 4, 1 + 2)}{3} = (3, 1)$

$A + (3, 1) = (-1, 1)$ i

$A + 2(3, 1) = (2, 0)$

Per tant, amb el punt B i aquests punts obtenim les rectes:

r: $x = -1$

s: $5x + 3y - 10 = 0$

93. Donada la recta r: $2x - 3y + 5 = 0$, troba l'equació de la recta simètrica de r, respecte a l'eix OX.

r: $2x - 3y + 5 = 0$

$m = \frac{+3}{2} \rightarrow m_{sim} = \frac{-3}{2}$

Solució: $2x + 3y + 5 = 0$

Pàgina 185

Qüestions teòriques

94. Demostra que si les rectes $ax + by + c = 0$ i $a'x + b'y + c' = 0$ són perpendiculars, es verifica que $aa' + bb' = 0$.

$ax + by + c = 0$

$\vec{v}(-b, a)$

$\perp$

(a, b), on $\vec{v}\ (-b', a')$

Per tant, $a = -b'$ i $b = a'$

$a \cdot a' + b \cdot b' = 0$

$a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$

$ab - ab = 0$

95. Donada la recta $ax + by + c = 0$, demostra que el vector $\vec{v} = (a, b)$ és ortogonal a qualsevol vector determinat per dos punts de la recta.

Anomena $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ i fes $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$. Tingues en compte que A i B verifiquen l'equació de la recta.

$\vec{v} = (a, b)$

$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) =$

$= ax_1 - ax_2 + b\left(\frac{-c - ax_1}{b} - \frac{-c - ax_2}{b}\right)$

$= ax_1 - ax_2 - c - ax_1 + c + ax_2 = 0$

I, per tant, són ortogonals.

96. a) Què es pot dir d'una recta si en la seva equació general falta el terme independent?

b) I si falta el terme en x?

c) I si falta el terme en y?

a) La recta creua pel punt (0, 0).

b) És una recta paral·lela a l'eix OX.

c) És una recta paral·lela a l'eix OY.

97. Demostra que l'equació de la recta que passa per dos punts $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ es pot escriure de la forma:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Un vector director de la recta és $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ i un punt de la recta és $P(x_1, y_1)$.

Aleshores, les equacions paramètriques de la recta seran:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + (x_2 - x_1)\, t \rightarrow t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\, t \rightarrow t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

O, el que és el mateix:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

98. Demostra que si una recta talla els eixos en els punts $(a, 0)$ i $(0, b)$, la seva equació és:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Com que $A(a, 0)$ i $B(0, b)$ són dos punts de la recta, podem tractar com a vector director $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$.

El pendent de la recta serà:

$m = -\frac{b}{a}$

Així la seva equació és:

$y = -\frac{b}{a}x + b$ (equació implícita)

$bx + ay = ab$

Dividim entre $a \cdot b$ els dos membres de l'equació:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

99. Donada la recta *r*: $Ax + By + C = 0$ i un punt (x_0, y_0) que no pertany a *r*, estudia la posició d'aquestes rectes respecte a *r*:

s: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

t: $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$

• s: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$

Com que $\frac{A}{A} = \frac{B}{B} = 1$:

– Si $\frac{C}{-Ax_0 - By_0} = 1 \Rightarrow$ coincideixen r i s

– Si $\frac{C}{-Ax_0 - By_0} \neq 1 \Rightarrow$ són paral·leles $r \parallel s$

És a dir:

• Si $Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow$ coincideixen; però això significarà que $(x_0, y_0) \in r$, cosa que és falsa. Per tant, $r \neq s$.

• Si $Ax_0 + By_0 \neq -C \Rightarrow r \parallel s$. Ara bé, com que $(x_0, y_0) \notin r \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Ax_0 + By_0 \neq -C$

Per tant, $r \parallel s$.

• t: $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Bx - Ay + Ay_0 - Bx_0 = 0$

El vector director de t és $\vec{t} = (A, B)$ i el de r és $\vec{r} = (B, -A)$.

Aleshores $t \perp r$ (ja que $\vec{t} \cdot \vec{r} = 0$).

A més, $(x_0, y_0) \in t$, ja que es verifica la seva equació.

Per tant, t és la recta perpendicular a r que passa pel punt (x_0, y_0).

100. Com varia el pendent de la recta $Ax + By + C = 0$ si es duplica *A*? I si es duplica *B*? I si es duplica *C*?

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ t\text{: } 2Ax + By + C = 0 \Rightarrow m_t = \dfrac{-2A}{B} \\ r\text{: } Ax + By + C = 0 \Rightarrow m_r = \dfrac{-A}{B} \end{array}\right\}$$

$m_t = 2m_r$ (el pendent es duplica)

• s: $Ax + 2By + C = 0 \Rightarrow m_s = \frac{-A}{2B} \Rightarrow$

$m_s = \frac{m_r}{2}$ (el pendent es redueix a la meitat)

• n: $Ax + By + 2C = 0 \Rightarrow m_n = \frac{-A}{B} = m_r$ (el pendent no varia)

101. Demostra que les coordenades del baricentre del triangle amb vèrtexs $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ són:

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$; M és el punt mitjà de AC.

El baricentre (punt en què es tallen les mitjanes) verifica, per a qualsevol triangle de vèrtexs A, B, C i que $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM}$, en què G és el baricentre, $G(x, y)$, i M és el punt mitjà de AC.

Així:

$$(x - x_2, y - y_2) = 2\left(\frac{x_1 + x_3}{2} - x, \frac{y_1 + y_3}{2} - y\right).$$

$$\left\{\begin{array}{l} x - x_2 = 2 \cdot \dfrac{x_1 + x_3 - 2x}{2} \rightarrow \\ \quad \rightarrow x - x_2 = x_1 + x_3 - 2x \\ y - y_2 = 2 \cdot \dfrac{y_1 + y_3 - 2y}{2} \rightarrow \\ \quad \rightarrow y - y_2 = y_1 + y_3 - 2y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ 3y = y_1 + y_2 + y_3 \, . \, y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{array}\right.$$

Per tant:

$$G(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Per aprofundir

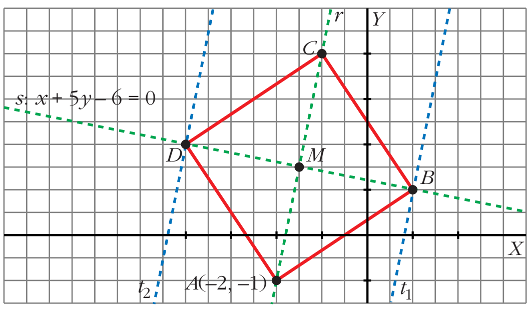
102. Un quadrat té una diagonal sobre la recta $x + 5y - 6 = 0$ i un dels seus vèrtexs és $A(-2, -1)$. Troba els altres vèrtexs i la longitud de la diagonal.

- Es comprova que $A \notin s$
- Aleshores l'altra diagonal en la qual hi ha A serà r de manera que $r \perp s$:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - y + G = 0 \\ \text{Com que } A \in r \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow -10 + 1 + G = 0 \rightarrow$

$\rightarrow G = 9 \rightarrow r\text{: } 5x - y + 9 = 0$



- $M = r \cap s$ serà el punt mitjà de les dues diagonals:

$$\left.\begin{cases} 5x - y + 9 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 5(6 - 5y) - y + 9 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 30 - 25y - y + 9 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{39}{26} = \dfrac{3}{2} \rightarrow x = 6 - 5 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{-3}{2}$

Aleshores: $M\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

- M és el punt mitjà de $AC \Rightarrow \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) =$

$= \left(\dfrac{-2 + C_1}{2}, \dfrac{-1 + C_2}{2}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} -3 = -2 + C_1 \rightarrow C_1 = -1 \\ 3 = -1 + C_2 \rightarrow C_2 = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow C(-1, 4)$$

- B i D estan a les rectes que equidisten de AC.

Aquestes rectes són tots els punts $P(x, y)$ de manera que:

$$d(P, r) = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

ja que, en ser un quadrat, les seves diagonals són iguals. És a dir:

$$d(P, r) = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{|(1, 5)|}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|5x - y + 9|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - y + 9 = 26/2 \\ 5x - y + 9 = -26/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1\text{: } 5x - y - 4 = 0 \\ t_2\text{: } 5x - y + 22 = 0 \end{cases}$$

Així:

$$B = t_1 \cap s\text{:} \begin{cases} 5x - y - 4 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - 5y \end{cases}$$

$\rightarrow 30 - 25y - y - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = 1 \rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 1)$

$$D = t_2 \cap s\text{:} \begin{cases} 5x - y + 22 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - 5y \end{cases}$$

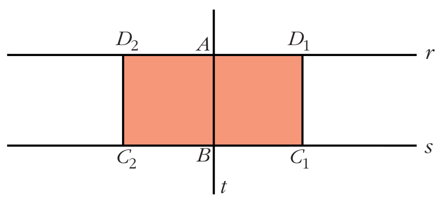
$\rightarrow 30 - 25y - y + 22 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = 2 \rightarrow x = -4 \Rightarrow D(-4, 2)$

- La longitud de la diagonal serà:

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{26}$

103. D'un quadrat en coneixem dos vèrtexs contigus $A(3, 1)$ i $B(4, 5)$. Calcula els altres vèrtexs. Quantes solucions hi ha?



C i D són punts de les rectes s i r perpendiculars a AB, i les distàncies de les quals a B i A, respectivament, són $|\overrightarrow{AB}|$.

- $\overrightarrow{AB}$: $(1, 4) \Rightarrow s\text{: } x + 4y + k = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\text{: } (1, 4) \Rightarrow s\text{: } x + 4y + k = 0 \\ \text{Com que } B \in s \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 4 + 20 + k = 0 \Rightarrow k = -24 \Rightarrow$
$\Rightarrow s\text{: } x + 4y - 24 = 0$

• $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\text{: } (1, 4) \Rightarrow r\text{: } x + 4y + k' = 0 \\ \text{Com que } A \in r \end{array}\right\}$
$\Rightarrow 3 + 4 + k' = 0 \Rightarrow k' = -7 \Rightarrow$
$\Rightarrow r\text{: } x + 4y - 7 = 0$

• $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\text{: } (1, 4) \Rightarrow t\text{: } 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Com que } A \in t \end{array}\right\}$
$\Rightarrow 12 - 1 + k'' = 0 \Rightarrow k'' = -11 \Rightarrow$
$\Rightarrow t\text{: } 4x - y - 11 = 0$

• C i D són punts que estan en les rectes la distància de les quals a AB és $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

Siguin $P(x, y)$ de manera que:

$$d(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$\begin{cases} 4x - y - 11 = 17 \rightarrow \\ 4x - y - 11 = -17 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} t_1\text{: } 4x - y - 28 = 0 \\ t_2\text{: } 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

Són dues rectes paral·leles. Hi ha dues solucions. Així:

$$C_1 = t_1 \cap s \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$\rightarrow x = 24 - 4y \Rightarrow$
$\Rightarrow 96 - 16y - y - 28 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 8 \Rightarrow C_1(8, 4)$

$$C_2 = t_2 \cap s \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

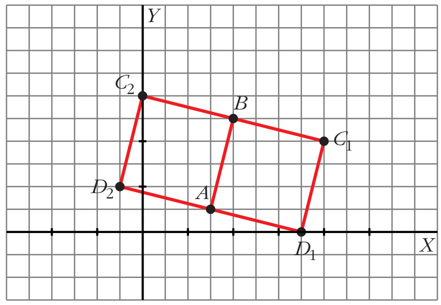
$\rightarrow x = 24 - 4y \Rightarrow$
$\Rightarrow 96 - 16y - y + 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow C_2(0, 6)$

$$D_1 = t_1 \cap r \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

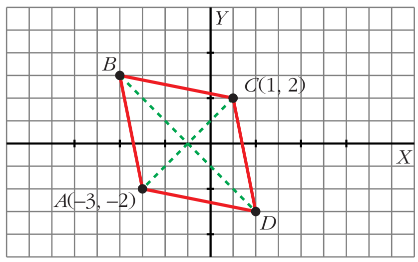
$\rightarrow x = 7 - 4y \Rightarrow$
$\Rightarrow 28 - 16y - y - 28 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 7 \Rightarrow D_1(7, 0)$

$$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$\rightarrow x = 7 - 4y \Rightarrow$
$\Rightarrow 28 - 16y - y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow D_2(-1, 2)$



104. La diagonal menor d'un rombe fa el mateix que el seu costat i té com a extrems els punts $A(-3, -2)$ i $C(1, 2)$. Troba els vèrtexs B i D i el perímetre del rombe.



• $|\overrightarrow{AC}| = (4, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Com que aquesta diagonal mesura el mateix que el costat, aleshores el perímetre serà:

Perímetre $= 4|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$

• Els altres dos vèrtexs estan en la perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ per ser el seu punt mitjà $M(-1, 0)$.

$\left.\begin{array}{l} \text{La recta } AC \text{ té per vector director } (1, 1) \rightarrow \\ \quad \rightarrow x - y + k = 0 \\ \text{Com que, a més, } A(-3, -2) \in \text{recta } AC \end{array}\right\}$
$\rightarrow -3 + 2 + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow$
$\rightarrow AC\text{: } x - y + 1 = 0$

La recta s perpendicular a AC serà:

$\left.\begin{array}{l} s\text{: } x + y + k' = 0 \\ \text{Com que } M(-1, 0) \in s \end{array}\right\}$
$\rightarrow -1 + k' = 0 \rightarrow k' = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow s: x + y + 1 = 0$

Els punts B i D seran els (x, y) que estiguin en s i la distància dels quals al vèrtex A sigui igual a la diagonal, és a dir, igual a $4\sqrt{2}$.

$(x, y) \in s \rightarrow x + y + 1 = 0 \rightarrow x = -1 - y$

$\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 2)^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow$

$\rightarrow (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 32$

$\rightarrow (2 - y)^2 + (y + 2)^2 = 32 \rightarrow$

$\rightarrow 4 + y^2 - 4y + y^2 + 4 + 4y = 32 \rightarrow$

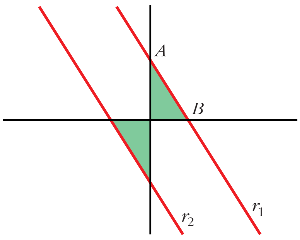
$\rightarrow 2y^2 = 24 \rightarrow$

$$\rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{3} \rightarrow x_1 = -1 - 2\sqrt{3} \\ y_2 = -2\sqrt{3} \rightarrow x_1 = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Aleshores, els vèrtexs B i D són:

$(-1 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ i $(-1 + 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

105. Determina l'equació d'una recta de pendent –2 que forma amb els eixos un triangle d'àrea igual a 81. Quantes solucions té?



• Les rectes de pendent –2 tenen per equació: $y = -2x + k$

• Els punts de tall amb els eixos, A i B, són:

Si $x = 0 \Rightarrow y = k \Rightarrow A(0, k)$

Si $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{k}{2} \Rightarrow B\left(\dfrac{k}{2}, 0\right)$

• Així:

$$\text{Àrea} = \frac{k/2 \cdot k}{2} = 81 \Rightarrow k^2 = 324 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 18 \\ k_2 = -18 \end{cases}$$

Dues solucions:

$r_1: y = -2x + 18$ i $r_2: y = -2x - 18$

106. Coneixem dos vèrtexs d'un trapezi rectangle $A(1, 1)$ i $B(5, 1)$ i sabem que un dels costats és damunt la recta $y = x + 1$. Calcula els altres dos vèrtexs. (Hi ha dues solucions).

Podem comprovar que $A, B \notin r$.

Com que un costat està sobre r, els altres dos vèrtexs estan a r i, per tant, A i B són vèrtexs consecutius.

A més, un vector director de r és $\vec{r} = (1, 1)$, que no és proporcional a $|\overrightarrow{AB}| = (4, 0)$.

Per tant, $\vec{r} \not\parallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ els costats AB i CD no són paral·lels, llavors no són les bases del trapezi.

Podem construir dos trapezis:

a) ABC_1D_1, en què AB és l'altura del trapezi:

C_1 i D_1 seran els punts de tall de r amb les rectes perpendiculars a AB que passen per B i A, respectivament.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ t \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow 4x + k = 0 \\ \text{Com que } A(1, 1) \in t \end{array}\right\}$$

$4 + k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow t: 4x - 4 = 0 \Rightarrow$
$t: x = 1$

$$\text{Així: } D_1 = t \cap r \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow D_1(1, 2)$

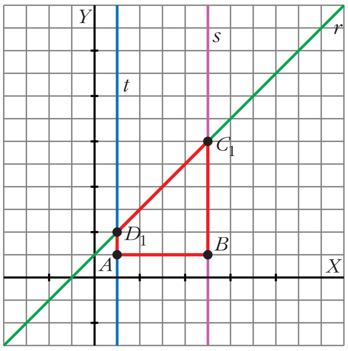
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ s \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow 4x + k = 0 \\ \text{Com que } B(5, 1) \in s \end{array}\right\}$$

$4 \cdot 5 + k = 0 \Rightarrow k = -20 \Rightarrow$

$\Rightarrow s: 4x - 20 = 0 \Rightarrow s: x = 5$

$$\text{Així: } C_1 = s \cap r: \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = 6 \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_1(5, 6)$



b) ABC_2D_2, en què C_2D_2 és l'altura del trapezi:

C_2 i D_2 seran els punts de tall de r amb les rectes perpendiculars a r que passen per B i C, respectivament (és a dir, C_2 i D_2 són els peus d'aquestes perpendiculars).

• $\left.\begin{array}{l} t \perp r \Rightarrow y = -x + k \\ \text{Com que } A \in t \end{array}\right\}$

$\Rightarrow 1 = -1 + k \Rightarrow k = 2 \Rightarrow t\text{: } y = -x + 2$

Així: $D_2 = t \cap r\text{:}\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow -x + 2 =$

$= x + 1 \Rightarrow 1 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

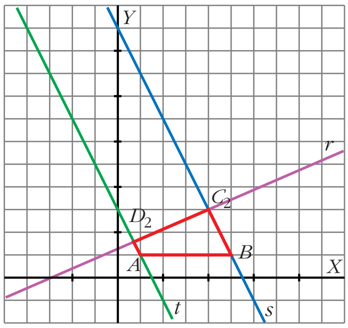
• $\left.\begin{array}{l} s \perp r \Rightarrow y = -x + k \\ \text{Com que } B \in s \end{array}\right\}$

$\Rightarrow 1 = -5 + k \Rightarrow k = 6 \Rightarrow s\text{: } y = -x + 6$

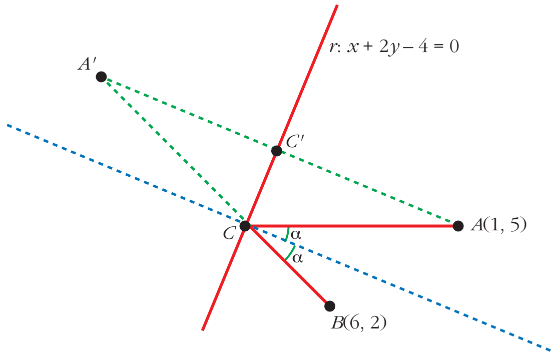
Així: $C_2 = s \cap r\text{:}\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x + 6 = x + 1 \Rightarrow 5 = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = \dfrac{7}{2} \Rightarrow C_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$



107. Suposem que la recta r: $x + 2y - 4 = 0$ és un mirall damunt del qual es reflecteix un raig de llum que surt del punt $A(1, 5)$ i arriba a $B(6, 2)$. En quin punt de la recta incideix el raig?



• Trobem el punt A' simètric de A respecte a la recta r:

$\begin{cases} \text{Com que } AA' \perp r \Rightarrow AA'\text{: } 2x - y + k = 0 \\ \text{Com que } A \in AA' \end{cases}$

$\Rightarrow 2 - 5 + k = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow AA'\text{: } 2x - y + 3 = 0$

$C' = r \cap AA'\text{:}\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \rightarrow \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

$\rightarrow x = 4 - 2y \Rightarrow 2(4 - 2y) - y + 3 = 0$

$\Rightarrow 8 - 4y - y + 3 = 0 \Rightarrow 5y = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{11}{5} \Rightarrow x = \dfrac{-2}{5} \Rightarrow C'\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$

C' És el punt mitjà de $AA' \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{11}{5}\right) = \left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y+5}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2}{5} = \dfrac{x+1}{2} \\ \dfrac{11}{5} = \dfrac{y+5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 = 5x + 5 \\ 22 = 5y + 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -9/5 \\ y = -3/5 \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{-9}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

• $\overrightarrow{A'B} = \left(6 + \dfrac{9}{5}, 2 + \dfrac{3}{5}\right) = \left(\dfrac{39}{5}, \dfrac{13}{5}\right) \Rightarrow$

el pendent és: $m_{A'B} = \dfrac{13}{39} = \dfrac{1}{3}$
A més, $B \Rightarrow A'B$.

$A'B$: $y - 2 = \dfrac{1}{3}(x - 6) \Rightarrow A'B$: $x - 3y = 0$

• Per últim, el punt C en què va incidir el raig de llum serà el punt de tall de r amb $A'B$:

$$C = r \cap A'B: \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \rightarrow x = 4 - 2y \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (4 - 2y) - 3y = 0 \Rightarrow 4 - 5y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = 4 - 2 \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{12}{5} \Rightarrow$

$C\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

Per pensar una mica més

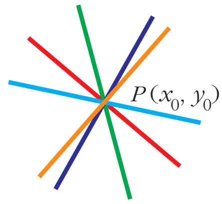
108. El conjunt de totes les rectes que passen per un punt $P(x_0, y_0)$ s'anomena *feix de rectes* de centre P i la seva expressió analítica és:

① $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ o bé

② $y = y_0 + m(x - x_0)$

Donant valors a a i b en ① s'obté una recta del feix, excepte el cas $a = 0$ i $b = 0$.

Donant valors a m en ② s'obté una recta del feix, tret de la paral·lela a l'eix OY.



a) Escriu l'equació del feix de rectes de centre (3, –2).

b) Troba l'equació de la recta d'aquest feix, que passa pel punt (–1, 5).

c) Quina de les rectes del feix és paral·lela a $2x + y = 0$?

d) Troba la recta del feix amb una distància a l'origen igual a 3.

a) $a(x - 3) + b(y + 2) = 0$

b) $y = -2 + \dfrac{7}{4}(x - 3)$

c) $m = \dfrac{-1}{2} \rightarrow y = -2 - \dfrac{1}{2}(x - 3)$

d) $-mx + y + 2 + 3m = 0$

$$\frac{|-m \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 + 3m|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}} = 3$$

$m = \dfrac{5}{12} \rightarrow y = -2 - \dfrac{5}{12}(x - 3)$

109. Determina el centre del feix de rectes d'equació $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.

$y = \dfrac{-3kx + 3k - 4}{2}$

$y = -2 - \dfrac{3k}{2}(x - 1)$, on el centre és $(1, -2)$.