Resol

Pàgina 171

Descomposició d'una força

I. Una corda de 10 m de llarg penja de dos claus de ganxo, A i B, situats a la mateixa altura i a 8 m de distància entre ells. D'aquesta corda es penja una pesa de 50 kg de massa que roman en equilibri en un punt situat a 3 m de A i a 7 m de B.

Observa que descomponem el pes, P, que produeix la massa de 50 kg, en dues components, P_1 i P_2, cada una de les quals tira un dels trossos de corda. Estima, mesurant i tenint en compte l'escala, la magnitud de cada una de les dues components del pes.

II. Repeteix la construcció suposant que la massa es col·loca simètricament respecte als dos claus (5 m de corda a cada costat). Estima, mesurant, la tracció que ha de suportar cada tros de corda en aquest cas.

III. Torna a repetir la construcció per a una corda del doble de llarg en la qual es col·loca el pes simètricament.

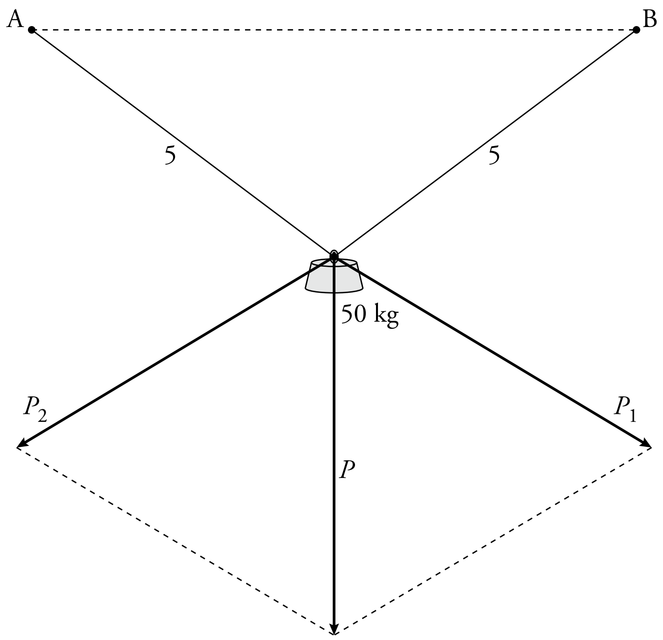
Si la corda fos dèbil i temessis que es pogués trencar amb traccions fortes, quina de les tres situacions I, II o III, et semblaria la més adequada per penjar el pes?

I. $P = 50$ kg

$P_1 = 48$ kg

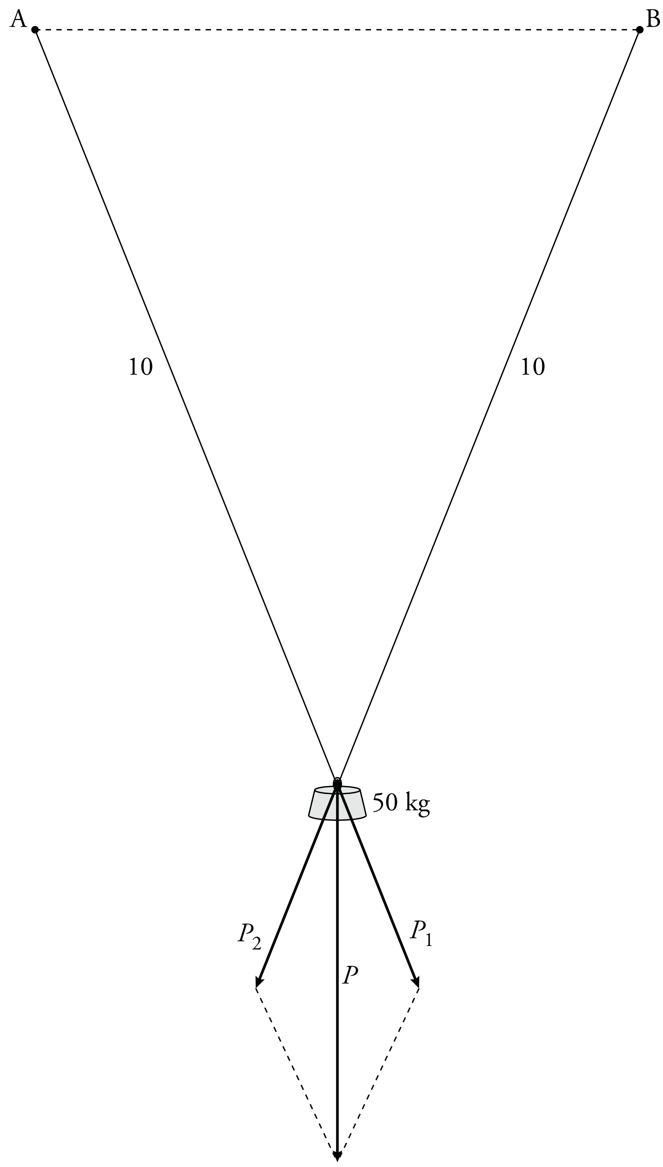
$P_2 = 27$ kg

II.



Cada component del pes és d'uns 42 kg.

III.



Cada component del pes és d'uns 27 kg.

Conclusions: Si la corda és dèbil, hem de penjar el pes en el centre i, com més llarga sigui la corda, millor.

2 Coordenades d'un vector

Pàgina 175

1 **Si $\vec{u}(-2, 5)$ i $\vec{v}(1, -4)$ són les coordenades de dos vectors respecte d'una base, troba les coordenades respecte de la mateixa base de:**

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ **b) $\vec{u} - \vec{v}$** **c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$** **d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$**

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

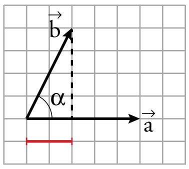
c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

3 Producte escalar de vectors

Pàgina 176

1 Cert o fals?

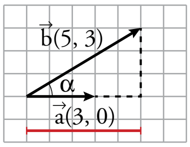


Demostrem que $\vec{a} \bullet \vec{b} = 10$:

$$\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{2}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{b}|\ cos\ \alpha = 2}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ cos\ \alpha = 5 \cdot 2 = 10}$$

Cert. Partim de la longitud de la projecció de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ i de la seva expressió en relació amb el producte escalar de dos vectors per calcular el producte escalar d'aquests vectors.

2 

Observant el raonament de l'exercici anterior, calcula $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

$$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}|cos\ \alpha = 5 \rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\ \alpha = 3 \cdot 5 = 15$$

3 Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ compleixen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30°$. Calcula:

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ **b)** $\vec{v} \bullet \vec{u}$ **c)** $(-\vec{u}) \bullet \vec{v}$

d) $(3\vec{u}) \bullet (-5\vec{v})$ **e)** $\vec{u} \bullet \vec{u}$ **f)** $\vec{v} \bullet (-\vec{v})$

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot cos\ 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \bullet \vec{u} = \vec{u} \bullet \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \bullet \vec{v} = -(\vec{u} \bullet \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \bullet (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \bullet \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|^2\ cos\ 0° = 16$

f) $\vec{v} \bullet (-\vec{v}) = -\vec{v} \bullet \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

4 Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ i $\vec{u} \bullet \vec{v} = -2$, esbrina l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. (Fes servir la calculadora).

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 97°\ 39'\ 44'$$

5 Troba $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{u})$ i $\vec{v} \bullet (\vec{v} - \vec{u})$ sabent que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 120°$.

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\ 120° + |\vec{u}|\,|\vec{u}|\ cos\ 0° =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 3 = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v} \bullet (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \bullet \vec{v} - \vec{v} \bullet \vec{u} = 25 - \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{65}{2}$$

Pàgina 178

6 **Les coordenades dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ respecte a una base ortonormal són $\vec{u}(3, -4)$ i $\vec{v}$ (–1, 3). Troba:**

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ i $\vec{v} \bullet \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ i $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de *k* perquè (4, *k*) sigui perpendicular a $\vec{v}$.

d) Un vector unitari perpendicular a $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (3, -4) \bullet (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \bullet \vec{u} = (-1, 3) \bullet (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161°\ 33'\ 54''$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \bullet (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \dfrac{4}{3}$

Perquè (4, *k*) sigui perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \dfrac{4}{3}$.

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ és, per exemple, (4, 3).

Un vector unitari paral·lel a (4, 3) és $\dfrac{1}{|(4,3)|} \cdot (4, 3) = \dfrac{1}{5}(4,3) = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

Hi ha dos vectors unitaris perpendiculars a (3, –4); són $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ i $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 179

1. Producte escalar en bases no ortonormals

Fes-ho tu. **Calcula el producte escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sent $\vec{a}(0, 3)$ i $\vec{b}(-1, 1)$ les coordenades respecte a la base *B*.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\,|\vec{v}|^2 = -9 + 9 = 0$

Pàgina 180

4. Descompondre un vector

Fes-ho tu. **Resol aquest mateix problema si $\vec{a} = (-1, 4)$ i $\vec{b} = (2, 9)$.**

$$\begin{cases} \vec{u} = k\vec{a} \\ \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = \vec{u} + \vec{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = k(-1, 4) = (-k, 4k) \\ \vec{v} = h(4, 1) = (4h, h) \\ (2, 9) = (-k, 4k) + (4h, 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = -k + 4h \\ 9 = 4k + h \end{cases} \rightarrow k = 2, \; h = 1$$

Els vectors buscats són $\vec{u} = (-2, 8)$ i $\vec{v} = (4, 1)$.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 181

1. Obtenció de vectors paral·lels i perpendiculars a un de donat

Donat el vector $\vec{v}(9, 12)$, calcula les coordenades dels vectors següents:

a) $\vec{u}$, unitari i de la mateixa direcció que el vector $\vec{v}$.

b) $\vec{w}$, ortogonal al vector $\vec{v}$ i del mateix mòdul.

c) $\vec{z}$, de mòdul 5 i ortogonal a $\vec{v}$.

a) $|\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{15}(9,12) = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Una altra solució: $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{w}_1 = (-12, 9)$

Una altra solució: $\vec{w}_2 = (12, -9)$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{144+81} = 15$

$$\vec{z}_1 = 5 \cdot \frac{1}{15}(-12, 9) = (-4, 3)$$

$$\vec{z}_2 = 5 \cdot \frac{1}{15}(12, -9) = (4, -3)$$

2. Càlcul dels mòduls de la suma i de la diferència de dos vectors

Dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ en coneixem els mòduls, 1 i $\sqrt{2}$, respectivament, i sabem que formen un angle de 45°.

Troba $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° + 2 =$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 5$$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° + 2 =$$

$$= 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1$$

$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$

3. Determinació de paràmetres perquè un vector compleixi certes condicions

Siguin els vectors $\vec{a}\,(3, n)$ i $\vec{b}\,(-2, m)$. Calcula el valor dels paràmetres n i m en cada un dels casos següents, perquè es compleixi:

a) $|\vec{a}| = 5$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ***y*** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

c) $\vec{a}$ ***forma un angle de 45° amb el vector*** $\vec{u} = (1, 1)$.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{9+n^2} = 5 \;\rightarrow\; 9 + n^2 = 25 \;\rightarrow\; n = -4,\; n = 4$

b) $\begin{cases} \vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ \sqrt{9+n^2} = \sqrt{4+m^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ 9 + n^2 = 4 + m^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{6}{n} \\ 9 + n^2 = 4 + \left(\dfrac{6}{n}\right)^2 \end{cases}$

Solucions: $n = -2,\; m = -3;\; n = 2,\; m = 3$

c) $\vec{a} \bullet \vec{v} = |\vec{a}|\,|\vec{v}|\,cos\,45° = |\vec{a}|\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = |\vec{a}| = \sqrt{9+n^2}$

$\vec{a} \bullet \vec{v} = (3, n) \bullet (1, 1) = 3 + n$

Aleshores, $\sqrt{9+n^2} = 3 + n \;\rightarrow\; n = 0$

4. Coordenades d'un vector en una base no ortonormal

En una base ortonormal es consideren els vectors $\vec{u}\,(3, 0)$, $\vec{v}\,(2, 1)$ i $\vec{w}\,(-1, -2)$.
Comprova que $B(\vec{u}, \vec{v})$ és també una base i calcula les coordenades de $\vec{w}$ en aquesta base.

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{0}{1}$; per tant, no tenen la mateixa direcció. Per tant, formen una base.

$\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \;\rightarrow\; (-1, -2) = m(3, 0) + n(2, 1) \;\rightarrow\; (-1, -2) = (3m + 2n, n)$

Igualant ambdues coordenades: $\begin{cases} -1 = 3m + 2n \\ -2 = n \end{cases}$

Solució: $m = 1,\; n = -2$

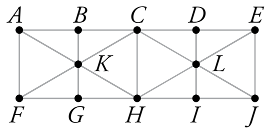
Exercicis i problemes proposats

Pàgina 182

Per practicar

Els vectors i les seves operacions

1 **Observa la figura següent:**



a) Compara el mòdul, la direcció i el sentit dels parells de vectors següents:

$\overrightarrow{AB}$ **e** $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{AH}$ **i** $\overrightarrow{LC}$.

b) Calcula $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}$ **i** $\overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{CL}$.

c) Completa les igualtats següents: $\overrightarrow{LC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{L...}$; $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{H...} = \overrightarrow{HC}$

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ tenen el mateix mòdul, direcció i sentit.

$\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{LC}$ tenen la mateixa direcció, el mateix sentit contrari i $|\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{LC}|$.

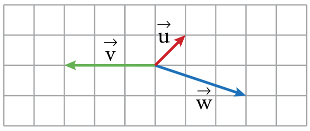
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{HJ}$

c) $\overrightarrow{LC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{LD}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HC}$

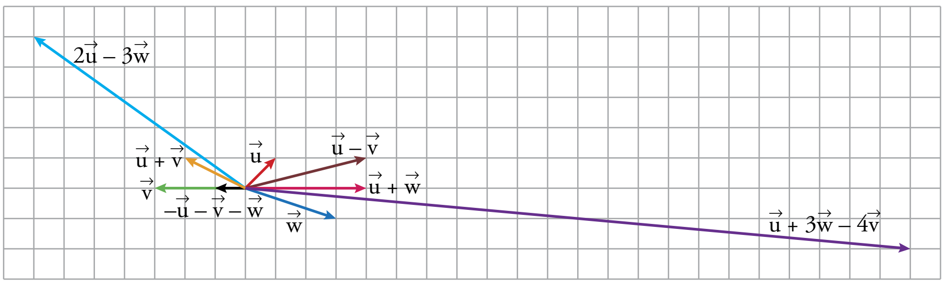
2 **Siguin** $\vec{u}$, $\vec{v}$ **i** $\vec{w}$ **els vectors següents:**



Calcula gràficament els vectors:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $\vec{u} + \vec{w}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{w}$ **e)** $\vec{u} + 3\vec{w} - 4\vec{v}$ **f)** $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$



3 **Observa el rombe de la figura i calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

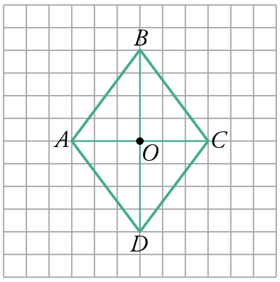
b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$

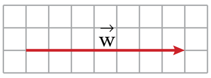


Expressa els resultats usant els vèrtexs del rombe.

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$

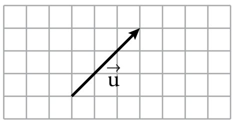
d) $\overrightarrow{AA} = 0$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $2\overrightarrow{DC}$

4 **Considera el vector $\vec{w}$:**

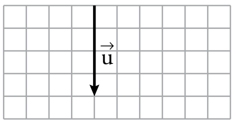


Dibuixa en cada un d'aquests casos un vector $\vec{v}$ que, sumat amb $\vec{u}$, doni com a resultat $\vec{w}$:

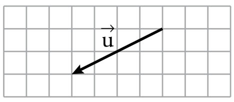
a)



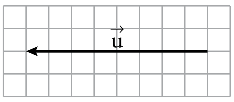
b)

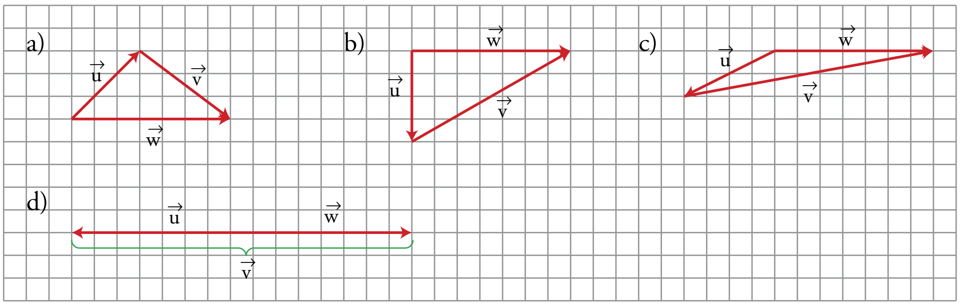


c)

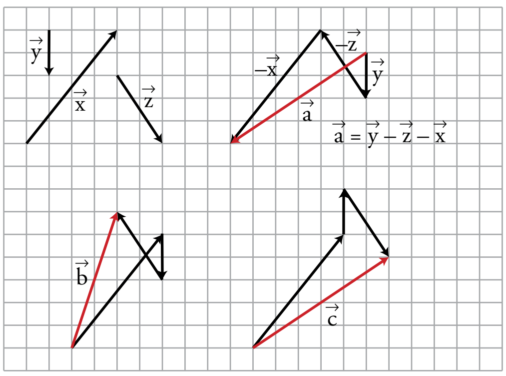


d)





5 **Hem obtingut els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ operant amb els vectors $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Quines operacions hem fet en cada cas?**



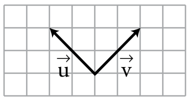
$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$ $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$

Bases i coordenades

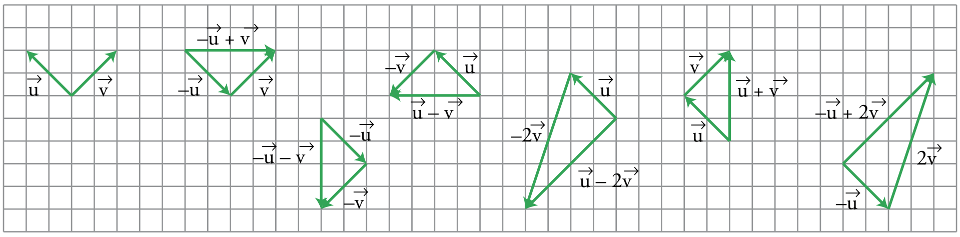
6 **Observa la figura i dibuixa els vectors següents:**

$$-\vec{u}+\vec{v} \qquad \vec{u}-\vec{v} \qquad \vec{u}+\vec{v}$$

$$-\vec{u}-\vec{v} \qquad -\vec{u}+2\vec{v} \qquad \vec{u}-2\vec{v}$$



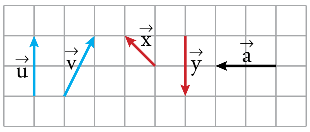
Si prenem com a base $B(\vec{u}, \vec{v})$, quines són les coordenades dels vectors que has dibuixat?



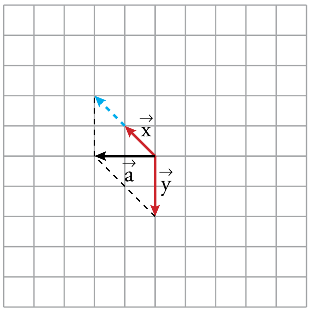
$-\vec{u}+\vec{v} = (-1, 1)$ $\quad$ $\vec{u}-\vec{v} = (1, -1)$ $\quad$ $\vec{u}+\vec{v} = (1, 1)$

$-\vec{u}-\vec{v} = (-1, -1)$ $\quad$ $-\vec{u}+2\vec{v} = (-1, 2)$ $\quad$ $\vec{u}-2\vec{v} = (1, -2)$

7 **Escriu el vector $\vec{a}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Escriu-lo també com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.**

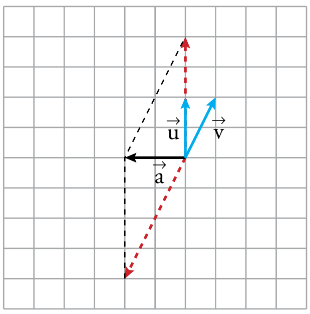


Quines són les coordenades de $\vec{a}$ respecte a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$? I respecte a la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$?



$\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}$

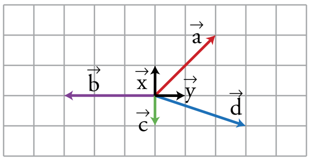
En la base $B(\vec{x}, \vec{y})$, les coordenades de $\vec{a}$ són $\vec{a} = (2, 1)$.



$\vec{a} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

En la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$, les coordenades de $\vec{a}$ són $\vec{a} = (2, -2)$.

8 **Escriu les coordenades dels vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ respecte a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.**



$\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (0, -3)$; $\vec{c} = (-1, 0)$; $\vec{d} = (-1, 3)$

9 **Quins dels parells de vectors següents formen una base?**

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$ **b)** $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tenen diferent direcció $(\vec{u} \neq k\vec{v}$ per a qualsevol $k)$. N'hi ha prou de representar-los gràficament per comprovar-ho.

b) No, ja que tenen la mateixa direcció $(\vec{u} = 3\vec{v})$.

10 **Considera el vector $\vec{u}(-1, -3)$. Dóna un vector $\vec{v}$ tal que $B(\vec{u}, \vec{v})$ sigui una base, i un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u}$ i $\vec{w}$ no formin una base.**

Perquè formin una base, les seves coordenades no poden ser proporcionals. Hi ha moltes solucions, però una d'aquestes és $\vec{v} = (1, 4)$.

Perquè no formin una base, les seves coordenades han de ser proporcionals. Hi ha moltes solucions, però una d'aquestes és $\vec{w} = (2, 6)$.

Pàgina 183

11 **Donats els vectors $\vec{u}(3, -5)$ i $\vec{v}(-2, 1)$, calcula:**

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ **b)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2\,(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) - (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) = \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

12 **Troba el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, sent $\vec{a}(-1, 3)$ i $\vec{c}(7, -2)$.**

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)\,b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)\,b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$\vec{b}\,(-20, 22)$

13 **Donats els vectors $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ i $\vec{c}(0, -5)$, calcula m i n de manera que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.**

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Aïllant en la primera equació, $n = 3m$, i substituint en la segona:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

14 **Expressa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ com a combinació lineal de $\vec{b}(3, -2)$ i $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.**

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolem el sistema per reducció (per exemple). A tal fi, multipliquem la segona equació per 8 (en els dos membres) i sumem membre a membre les dues equacions:

$$\begin{array}{r} -1 = 3m + 4n \\ \underline{-64 = -16m - 4n} \\ -65 = -13m \rightarrow m = \frac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Substituint en una de les dues equacions i aïllant n:

$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$

Així, podem dir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

15 **En una base ortonormal, les coordenades d'un vector són $\vec{v}(2, -5)$. Troba les coordenades de $\vec{v}$ en la base $B = ((1, -1), (0, -1))$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}(1, -1) \\ \vec{y}(0, -1) \\ \vec{v}(2, -5) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} \rightarrow (2, -5) = a(1, -1) + b(0, -1) = (a, -a) + (0, -b) = (a, -a - b) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{cases}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Les coordenades de $\vec{v}$ en la nova base són (2, 3).

Producte escalar. Mòdul i angle

16 **Donats els vectors $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:**

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z}$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = -6$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 12$

17 **Dels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ sabem que:**

$$\vec{u}(-1, 1);\ |\vec{v}| = 1;\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°;\ \vec{w} \perp \vec{v}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ i $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

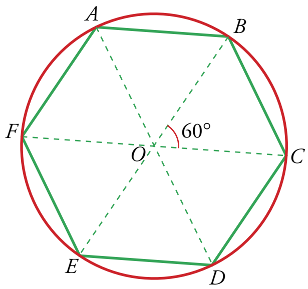
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, perquè $\cos 90° = 0$.

18 **En una circumferència de centre O i de radi 2 cm, s'hi inscriu un hexàgon regular de vèrtexs A, B, C, D, E i F. Calcula els productes:**

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ **b)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ **c)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$ **d)** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$



c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(*) OAB és un triangle equilàter; aleshores:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OA}| = 2$

Raonem igual per a $|\overrightarrow{ED}|$.

d) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EF}$ (mateix mòdul, mateixa direcció i sentit oposat)

Aleshores: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

19 **Donats $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ i $\vec{w}(5, 2)$, calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l}\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

20 **Si A, B i C són els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 1, calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC})$

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

d) $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}$

En un triangle equilàter, els costats mesuren 1 i formen un angle de 60°.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC}) = 2 \cdot (-3)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{6}{2} = 3$

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1^2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3|\overrightarrow{AC}|^2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

21 **Comprova si els parells de vectors següents són perpendiculars:**

a) $\vec{u}(0, 1)$, $\vec{v}(2, 4)$

b) $\vec{u}(0, 7)$, $\vec{v}(-5, 0)$

c) $\vec{u}(2, 5)$, $\vec{v}(5, 2)$

d) $\vec{u}(3, 6)$, $\vec{v}(-2, 1)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0,1) \cdot (2, 4) = 4 \neq 0 \rightarrow$ No són perpendiculars.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 7) \cdot (-5, 0) = 0 \rightarrow$ Sí són perpendiculars.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 5) \cdot (5, 2) = 20 \neq 0 \rightarrow$ No són perpendiculars.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 6) \cdot (-2, 1) = 0 \rightarrow$ Sí són perpendiculars.

22 **Obtén, en cada cas, un vector paral·lel i un altre de perpendicular al vector donat.**

a) $\vec{u}(0, 3)$ **b)** $\vec{u}(-5, 0)$ **c)** $\vec{u}(3, 8)$ **d)** $\vec{u}(-1, -1)$

	PARAL·LEL	PERPENDICULAR
a)	(0, 9)	(3, 0)
b)	(10, 0)	(0, –5)
c)	(30, 80)	(–8, 3)
d)	(2, 2)	(1, –1)

23 **Calcula k perquè el producte $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sigui igual a 0 en els casos següents:**

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$

b) $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$

c) $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$

d) $\vec{u}(k, -k)$, $\vec{v}(5, 5)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = \frac{1}{5}k - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = -2k - 15 = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (k, -k) \cdot (5, 5) = 0 \rightarrow$ Qualsevol $k \in \mathbb{R}$ és vàlid.

24 **Troba el mòdul de cada un dels vectors següents:**

$\vec{u}(3, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$ $\vec{w}(5, 0)$

$|\vec{u}| = |(3, 2)| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = |(-2, 3)| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$|\vec{w}| = |(5, 0)| = \sqrt{25 + 0} = 5$

25 **Troba el valor de m perquè el mòdul del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sigui igual a 1.**

$|\vec{u}| = \left|\left(\frac{3}{5}, m\right)\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1 \rightarrow m = -\frac{4}{5},\ m = \frac{4}{5}$

26 **Donada la base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ on $\vec{u}(3, -4)$ i $\vec{v}(0, -8)$, determina, en cada cas, una base B' de vectors unitaris tals que:**

a) els vectors de B' siguin paral·lels als de B.

b) els vectors de B' siguin perpendiculars a $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

a) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5$; $|\vec{v}| = \sqrt{0+64} = 8$

$\vec{u}' = \frac{1}{5}\vec{u} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ $\qquad$ $\vec{v}' = \frac{1}{8}\vec{v} = \frac{1}{8}(0, -8) = (0, -1)$

b) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$\vec{u}' \perp \vec{u} \rightarrow \vec{u}' = (4, 3)$

$\vec{v}' \perp \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = (8, 0)$

27 **Donat el vector $\vec{u}(-5, k)$, calcula k de manera que:**

a) $\vec{u}$ sigui ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) el mòdul de $\vec{u}$ sigui igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

Hi ha, doncs, dues solucions.

28 **Donat el vector $\vec{u}(5, 12)$, determina:**

a) Els vectors unitaris paral·lels a $\vec{u}$.

b) Els vectors ortogonals a $\vec{u}$ que tinguin el mateix mòdul que $\vec{u}$.

c) Els vectors unitaris i perpendiculars a $\vec{u}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{25+144} = 13$

a) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(5, 12) = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(5, 12) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

b) $\vec{v}_1 = (-12, 5)$

$\vec{v}_2 = (12, -5)$

c) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(-12, 5) = \left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(-12, 5) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

29 **Troba un vector de mòdul 50 que sigui perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.**

$\vec{u}' = (6, -8)$ és perpendicular a $\vec{a}$.

$|\vec{u}'| = \sqrt{36+64} = 10$

Un vector amb aquesta direcció i de mòdul 1 és:

$\vec{u} = \frac{1}{10}(6, -8) = \left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

El vector que busquem és:

$\vec{v} = 50\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (30, -40)$

També és solució $\vec{v}' = (-30, 40)$.

30 **Troba l'angle que formen aquests parells de vectors:**

a) $\vec{u}(3, 2),\ \vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6),\ \vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6),\ \vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{\sqrt{9+4}\,\sqrt{1+25}} = -\dfrac{7}{26}\sqrt{2} \approx -0{,}38 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112°\ 20'\ 12''$

b) $cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 2}{\sqrt{16+36}\,\sqrt{9+4}} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$

c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 3}{\sqrt{1+36}\,\sqrt{\frac{1}{4}+9}} = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

31 **Donats** $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$ **i** $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, **calcula** k **perquè** $\vec{u}$ **i** $\vec{v}$ **formin un angle de 60°.**

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\,\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = cos\ 60° = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}+k^2} = 1 \rightarrow k = -\frac{1}{2}\sqrt{3};\ k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

32 **Calcula** x **de manera que el producte escalar de** $\vec{a}(3, -5)$ **i** $\vec{b}(x, 2)$ **sigui igual a 7. Quin angle formen els vectors** $\vec{a}$ **i** $\vec{b}$**?**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow x = \dfrac{17}{3}$

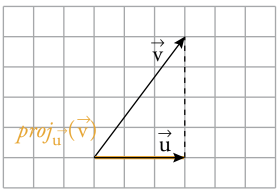
$$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{\sqrt{9+25}\,\sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2+4}} = \frac{21\sqrt{442}}{2\,210} \approx 0{,}2 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 79°\ 31'\ 17''$$

33 **Calcula la projecció de** $\vec{u}$ **sobre** $\vec{v}$**, la de** $\vec{v}$ **sobre** $\vec{u}$ **i representa gràficament cada situació.**

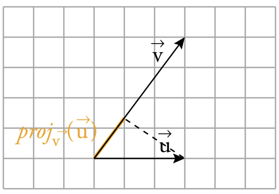
a) $\vec{u}(3, 0)$ **i** $\vec{v}(3, 4)$ **b)** $\vec{u}(1, 3)$ **i** $\vec{v}(-4, 2)$ **c)** $\vec{u}(-2, -5)$ **i** $\vec{v}(5, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+0} = 3;\ |\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5;\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{9}{3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$

$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3$

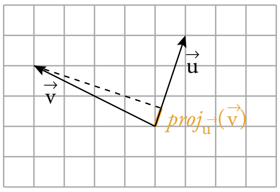


$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{5}$

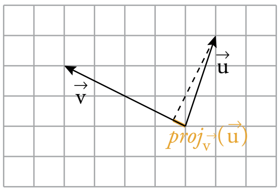


b) $|\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{-4 \cdot 6}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$



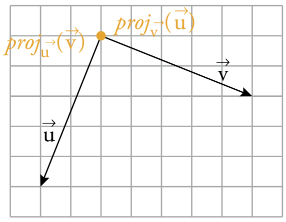
$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{10} \cdot \dfrac{1}{10}\sqrt{2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{5}$



c) $|\vec{u}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$; $|\vec{v}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$



Pàgina 184

Per resoldre

34 Assenyala si les afirmacions següents són certes o falses:

a) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, aleshores $B = (\vec{u}, \vec{v})$ és una base.

b) Dos vectors paral·lels poden tenir les coordenades no proporcionals.

c) Si dos vectors són perpendiculars, les coordenades no poden ser proporcionals.

d) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ tenen el mateix mòdul, però diferent direcció.

e) El mòdul de $-3\vec{v}$ és el triple que el mòdul de $\vec{v}$.

a) Certa, perquè els vectors són perpendiculars; per tant, no tenen la mateixa direcció.

b) Falsa. Si són paral·lels, les seves coordenades són proporcionals perquè $\vec{u} = k\vec{v}$.

c) Certa. Si les coordenades fossin proporcionals, serien paral·lels.

d) Falsa. Tenen el mateix mòdul i la mateixa direcció, però sentits contraris.

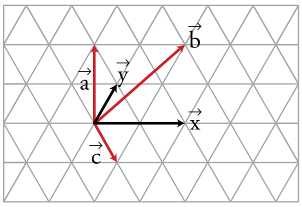
e) Certa: $|-3\vec{v}| = |-3|\,|\vec{v}| = 3|\vec{v}|$

35 **Com és l'angle format pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ en els casos següents?:**

a) $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$ **b)** $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0$ **c)** $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0$

a) $0° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 90°$ b) $90° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 180°$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$

36



Expressa els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ com a combinació lineal de $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

$\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$

37 **Siguin *A*, *B* i *C* els vèrtexs d'un triangle. Si $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$, $\overrightarrow{AC}(3, -1)$ i $\overrightarrow{BC}(4, -5)$, es pot tractar d'un triangle rectangle?**

$\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$; $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (4, -5)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 4) \cdot (3, -1) = -7$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 4) \cdot (4, -5) = -24$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -1) \cdot (4, -5) = 17$

Cap dels tres productes escalars no és zero; aleshores cap parell de vectors no és perpendicular.

Els costats no són perpendiculars. Per tant, el triangle no és rectangle.

38 **Siguin *A*, *B*, *C* i *D* els vèrtexs d'un quadrilàter. Assenyala, en cada cas, les condicions que han de complir els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{DA}$ perquè el quadrilàter *ABCD* sigui un:**

a) quadrat. **b) paral·lelogram.** **c) trapezi isòsceles.** **d) trapezi escalè.**

a) Costats iguals i perpendiculars:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

b) Costats iguals dos a dos:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

c) Dos costats paral·lels i els altres dos no paral·lels i amb el mateix mòdul:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$; $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$

d) Dos costats paral·lels i els altres dos no paral·lels i amb diferent mòdul:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$; $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{DA}|$

39 **Siguin $\vec{a}(-6, 8)$ i $\vec{b}(3, 4)$. Troba, en cada cas, un vector $\vec{c}(x, y)$ perpendicular a $\vec{b}$ tal que:**

a) $|\vec{c}| = |\vec{a}|$ **b)** $|\vec{c}| = 1$ **c)** $\vec{c} \cdot \vec{a} = 4$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{36 + 64} = 10$; $|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

Un vector $\vec{c} \perp \vec{b}$ és de la forma $\vec{c} = k \cdot (-4, 3)$.

$\vec{c} = k(-4, 3) = 10 \cdot \dfrac{1}{5}(-4, 3) = (-8, 6)$

b) $\vec{c} = \dfrac{1}{5}(-4, 3) = \left(\dfrac{-4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

c) $\vec{c} \cdot \vec{a} = k \cdot (-4, 3) \cdot (-6, 8) = 24k + 24k = 48k = 4 \rightarrow k = \dfrac{4}{48} = \dfrac{1}{12}$

$\vec{c} = \dfrac{1}{12}(-4, 3) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$

40 **Donats els vectors $\vec{u}(-1, a)$ i $\vec{v}(b, 15)$, troba a i b, en cada cas, de manera que:**

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ i $|\vec{u}| = \sqrt{10}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ i $|\vec{v}| = 17$

a) $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ |\vec{u}| = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 0 \\ \sqrt{1 + a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 0 \\ 1 + a^2 = 10 \end{cases}$

Solucions: $a_1 = -3$, $b_1 = -45$; $a_2 = 3$, $b_2 = 45$

b) $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \\ |\vec{v}| = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 7 \\ \sqrt{b^2 + 15^2} = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 7 \\ b^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases}$

Solucions: $a_1 = -\frac{1}{15}, b = -8$; $a_2 = 1$, $b_2 = 8$

41 **Donats els vectors $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ i $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, sent $\vec{u} = (2, 3)$ i $\vec{v} = (-3, 0)$, troba k de manera que $(\vec{a} + \vec{b})$ sigui ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.**

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} = -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$

Ara, com que el producte escalar d'ambdós vectors ha de ser 0, per ser ortogonals:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow k = \dfrac{-36 \pm \sqrt{1\,296 - 1152}}{18} = \dfrac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} = \dfrac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$

42 **Calcula la projecció de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sabent que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ i $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°$.**

Per ser $|\vec{u}| = |\vec{v}| \rightarrow cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{1}{2}\, cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 22°\ 30'$

$proj_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{|\vec{u} + \vec{v}|^2}\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})}\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) =$

$= \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2}\ cos\ 22°\ 30' = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4}\ cos\ 22°\ 30' =$

$= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \cdot 0{,}92 \approx 3{,}4$

43 **Dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sabem que $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 5$ i que formen un angle de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

Com que: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\,|\vec{v}|\ cos\ 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

Aleshores podem dir que:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$

$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cos\ 120° + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$

Aleshores: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

44 **Troba el valor que ha de tenir k perquè els vectors $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ siguin perpendiculars, sent $\vec{a}(3/2, 4)$ i $\vec{b}(5, 0)$.**

$|\vec{a}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 16 = \frac{73}{4}$

$|\vec{b}|^2 = 25$

$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = k^2\vec{a} \cdot \vec{a} - k\vec{a} \cdot \vec{b} + k\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = k^2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = k^2\,\frac{73}{4} - 25$

Aquest producte escalar ha de ser zero: per tant:

$k^2\,\frac{73}{4} - 25 = 0 \rightarrow k = \frac{10}{73}\sqrt{73};\ k = -\frac{10}{73}\sqrt{73}$

45 **Si $|\vec{u}| = 3$ i $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, troba $|\vec{v}|$.**

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$

Com que $|\vec{u}| = 3$, tenim que:

$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$

46 **Sabent que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ i $\vec{u} \perp \vec{v}$, troba $|\vec{u} + \vec{v}|$ i $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$

(*) $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$

47 **Sigui $B(\vec{x}, \vec{y})$ una base ortonormal. Calcula $|\vec{x} + \vec{y}|$ i $|\vec{x} - \vec{y}|$.**

$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| + 0 + |\vec{y}| = 2 \rightarrow |\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{2}$

$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| - 0 + |\vec{y}| = 2 \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{2}$

48 **Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ i $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$, quin angle formen $\vec{u}$ i $\vec{v}$?**

Raonant com en el problema guiat número 2, arribem a:

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$

Substituint els valors coneguts:

$5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 3^2$

$25 = 16 + 24\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 9$

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{25 - 25}{24} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$

49 **Calcula x perquè els vectors $\vec{a}(7, 1)$ i $\vec{b}(1, x)$ formin un angle de 45°.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos 45° \to 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \to$$

$$\to 14 + 2x = \sqrt{100(1+x^2)} \to \frac{14+2x}{10} = \sqrt{1+x^2} \to$$

$$\to \frac{7+x}{5} = \sqrt{1+x^2} \to \frac{49+x^2+14x}{25} = 1 + x^2 \to$$

$$\to 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \to 24x^2 - 14x - 24 = 0 \to$$

$$\to 12x^2 - 7x - 12 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

50 **Troba un vector unitari que formi un angle de 30° amb el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.**

Anomenem $\vec{u} = (x, y)$ el vector buscat:

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{u}, \vec{a})} = 30° \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \cos 30° = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1+3}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{3} = x + y\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Les solucions d'aquest sistema són: $x = 0, y = 1$; $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$

Per tant: $\vec{u}_1 = (0, 1)$; $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

51 **Determina x perquè els vectors $\vec{u}(x, 1)$ i $\vec{v}(x, 0)$ formin un angle de 30°.**

$$\cos 30° = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to 2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+1} \to 4x^2 = 3(x^2+1) \to x = \pm\sqrt{3}$$

52 **Troba un vector $\vec{a}$ que formi un angle de 60° amb el vector $\vec{b}(2, 2\sqrt{3})$ i tingui com a mòdul la meitat del mòdul de $\vec{b}$.**

$\vec{a} = (x, y)$

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60° \\ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2}|\vec{b}| \end{cases} \to \begin{cases} \cos 60° = \dfrac{2x + 2\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4+12}} \\ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{4+12} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x + 2\sqrt{3}y}{4\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 1 = \dfrac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 2 = x + \sqrt{3}y \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to x = -1, y = \sqrt{3};\; x = 2, y = 0$$

Solucions: $\vec{a}_1 = (-1, \sqrt{3})$; $\vec{a}_2 = (2, 0)$

53 **D'una base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ se sap que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ i $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En aquesta base, les coordenades de dos vectors són $\vec{x}(1, 2)$ i $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.**

* ***Mira el problema resolt número 1.***

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) =$$

$$= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = 4 - (-1) + 2 = 7$$

54 **Donats $\vec{a}(1, 2)$ i $\vec{b}(5, 5)$, expressa el vector $\vec{b}$ com a suma de dos vectors: un de la mateixa direcció que $\vec{a}$ i un altre d'ortogonal a $\vec{a}$.**

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, on:

- $\vec{x}$ té la mateixa direcció de $\vec{a} \rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{y} = h(-2, 1) = (-2h, h)$

Aleshores: $(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2h, h) = (k - 2h, 2k + h)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = k - 2h \\ 5 = 2k + h \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = 3 \\ h = -1 \end{array}$$

Els vectors demanats són $\vec{x}(3, 6)$ i $\vec{y}(2, -1)$.

55 **Se sap que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ són perpendiculars i que $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són unitaris. Quin és l'angle que formen $\vec{a}$ i $\vec{b}$?**

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \rightarrow 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

Com que $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són unitaris $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5\,|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\,|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\, cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

56 **Demostra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ és perpendicular al vector $\vec{c}$.**

S'ha de provar que el producte escalar d'ambdós vectors és igual a 0.

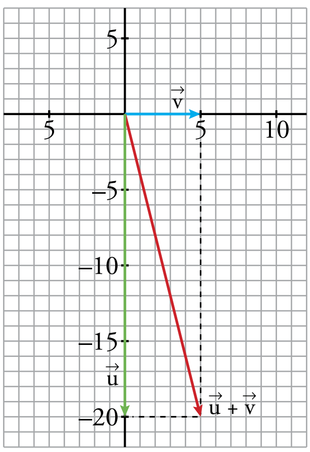
- Vegem primer quines són les coordenades del primer vector:

$$\begin{aligned} (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} &= (b_1c_1 + b_2c_2)\,(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)\,(b_1, b_2) = \\ &= ((b_1c_1 + b_2c_2)\,a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)\,a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2)\,b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)\,b_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \end{aligned}$$

- Calculem ara:

$$\begin{aligned} [(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}] \cdot \vec{c} &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\,c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\,c_2 = \\ &= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0 \end{aligned}$$

57 **Una barca es desplaça per un riu en direcció sud a una velocitat de 20 km/h. Si comença a bufar un vent en direcció est a 5 km/h, en quina direcció i a quina velocitat es mourà la barca?**



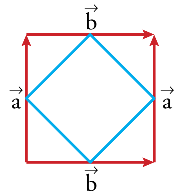
La velocitat és $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{400 + 25} = 5\sqrt{17}$

La direcció és $(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}})$. Calculem aquest angle:

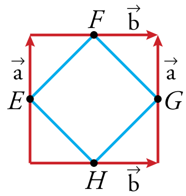
$$cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{20}{5\sqrt{17}} \approx 0{,}97 \rightarrow (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) \approx 14°\ 4'\ 11''$$

Es mou en direcció sud-est amb 14° 4' 11'' respecte de la direcció sud.

58 **Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ els vectors que defineixen un quadrat. Demostra que els punts mitjans dels costats defineixen un altre quadrat.**



* *Mira el problema resolt número 5.*



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\\ \overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\\ \overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$$

$$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{EH}|^2=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}-2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2\\ |\overrightarrow{EF}|^2=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2\end{array}\right\}\rightarrow |\overrightarrow{EH}|=|\overrightarrow{EF}|$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}=$$

$$=-\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2=0$$ perquè el polígon original era quadrat i, per tant, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Com que els altres dos costats són paral·lels a aquests, també són perpendiculars entre ells. Aleshores, els costats del polígon *EFGH* mesuren el mateix, els oposats són paral·lels i són perpendiculars dos a dos. Per tant, el polígon *EFGH* és un quadrat.

Pàgina 185

Qüestions teòriques

59 **Indica si el resultat de les operacions següents és un nombre o un vector:**

a) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ **b)** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ **c)** $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{c}$ **d)** $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

a) Nombre. b) Vector. c) Nombre. d) Nombre.

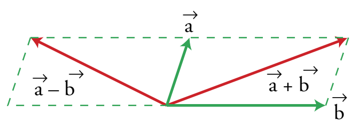
60 **Si $B(\vec{a},\vec{b})$ és una base dels vectors del pla, assenyala quins dels parells de vectors poden ser una altra base:**

a) $(3\vec{a},-2\vec{b})$ **b)** $(-\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b})$ **c)** $(\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b})$ **d)** $(\vec{a}-\vec{b},\ \vec{b}-\vec{a})$

a) Sí, ja que no tenen la mateixa direcció, ja que $3\vec{a}$ té la direcció de $\vec{a}$ i $-2\vec{b}$ té la direcció de $\vec{b}$ (que, per ser $B(\vec{a},\vec{b})$ base, no és la mateixa).

b) No, ja que $-\vec{a}-\vec{b}=-1(\vec{a}+\vec{b})$; aleshores els dos vectors tenen la mateixa direcció (i sentits oposats).

c) Sí, ja que tenen una direcció diferent.



d) No, ja que tenen la mateixa direcció en ser $\vec{a}-\vec{b}=-1(\vec{b}-\vec{a})$.

61 **Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dos vectors no nuls. Indica quin angle formen en els casos següents:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **c)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ **d)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\,|\vec{a}||\vec{b}|$

a) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 1 \rightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0°$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 90°$

c) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 180°$

d) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0{,}5 \rightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60°$

62 **Busca alguns exemples amb què es vegi que:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ no implica que } \vec{b} = \vec{c}$$

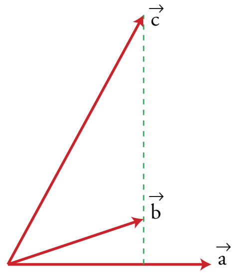
Considera els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ del dibuix de la dreta:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot proj_{\vec{a}}(\vec{b})$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot proj_{\vec{a}}(\vec{c})$

Com que ambdues projeccions coincideixen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

I, tanmateix: $\vec{b} \neq \vec{c}$



63 **Prova, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp \vec{c}$, aleshores:**

$$\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c}), \quad m, n \in \mathbb{R}$$

S'ha de provar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Vegem:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \text{Com que: } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \qquad\quad \vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

64 **Prova que, si $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$, aleshores es verifica que $\vec{a} \perp \vec{c}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

65 **Justifica per què $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.**

$|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})| = \left|\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leq 1$ perquè el cosinus d'un angle, en valor absolut, sempre és menor o igual que 1.

Aleshores, passant el denominador (que sempre és positiu) al segon membre:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

Per aprofundir

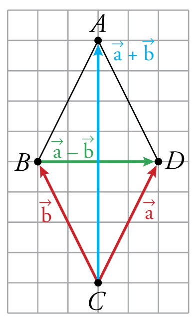
66 **Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ els vectors que defineixen els costats d'un rombe, partint d'un dels vèrtexs (cada vector determina un parell de costats paral·lels).**

a) Expressa les diagonals del rombe en funció dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

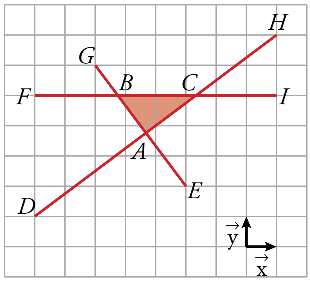
b) Demostra vectorialment que les diagonals del rombe són perpendiculars.

a) $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ perquè els costats d'un rombe tenen la mateixa longitud.



67 **Troba els angles interiors del triangle *ABC*.**



Observa que pots expressar aquests angles com a angles entre vectors. Les coordenades d'aquests vectors les obtindràs expressant-los com a combinació lineal de la base $B = (x, y)$.

$\overrightarrow{DH} = (8, 6)$; $\overrightarrow{EG} = (-3, 4)$

$\hat{A} = \left(\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}\right)$

$$\cos \hat{A} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}\right) = \frac{(8, 6) \cdot (-3, 4)}{|(8, 6)||(-3, 4)|} = 0 \rightarrow \hat{A} = 90°$$

$\overrightarrow{HD} = (-8, -6)$; $\overrightarrow{IF} = (-8, 0)$

$\hat{C} = \left(\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}\right)$

$$\cos \hat{C} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}\right) = \frac{(-8, -6) \cdot (-8\ 0)}{|(-8, -6)||(-8, 0)|} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$\hat{C} = 35°\ 52'\ 11''$

$\hat{B} = 90° - 35°\ 52'\ 11'' = 54°\ 7'\ 49''$

68 **Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, definim el vector projecció de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ com el vector $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Calcula analíticament i gràficament aquest vector si:**

a) $\vec{u}(3, 4)$ i $\vec{v}(3, -4)$ **b) $\vec{u}(8, 6)$ i $\vec{v}(2, -1)$**

Hi ha cap relació entre el sentit d'aquest vector i l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$?

a) $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

Aleshores, $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (0, 0)$

b) $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{5}\,\frac{(8, 6) \cdot (2, -1)}{10\sqrt{5}} = 1$

Aleshores, $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

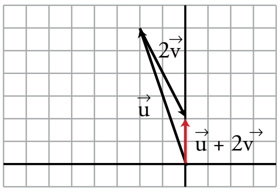
Si l'angle és agut, $proj_{\vec{u}}(\vec{v})$ té el mateix sentit que $\vec{u}$; si el triangle és obtús, té sentit contrari a $\vec{u}$

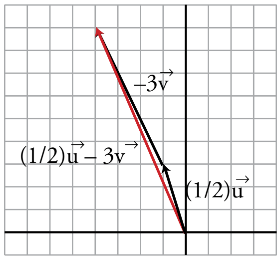
..

Autoavaluació

1 **Es consideren els vectors $\vec{u}(-2, 6)$ i $\vec{v}(1, -2)$.**

Calcula gràficament i usant coordenades, $\vec{u} + 2\vec{v}$ i $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$.





$\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 6) + 2(1, -2) = (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)$

$\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)$

2 **Siguin $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors unitaris que formen un angle de 60°. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$** **c) $proj_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v})$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$

c) $proj_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3 **Expressa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ com a combinació lineal dels vectors de la base ortonormal $B = ((-2, 3), (-1, 5))$.**

$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \rightarrow -9 = -7k + 5 \rightarrow k = 2 \end{array} \rightarrow s = 1 - 4 = -3$$

Per tant: $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5) \rightarrow \vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

4 **Considerem els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ les coordenades dels quals respecte a una base ortonormal, són $\vec{u}(0, 2)$ i $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:**

a) El seu producte escalar.

b) El mòdul d'ambdós vectors.

c) L'angle que formen.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

5 **Considera el vector $\vec{u}(3, -4)$. Calcula:**

a) Un vector paral·lel a $\vec{u}$ de mòdul 1. **b) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ de mòdul 2.**

a) $|\vec{u}| = 5$; $\vec{v} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{w} = 2 \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

6 **Sigui $\vec{u}(-3, k)$. Calcula k de manera que:**

a) $\vec{u}$ sigui ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El mòdul de $\vec{u}$ sigui igual a 5.

a) El producte escalar de dos vectors ortogonals és igual a 0.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$

7 **Determina les coordenades d'un vector $\vec{a}(x, y)$ que formi amb el vector $\vec{v}(-1, 0)$ un angle de 60° i el mòdul del qual sigui 2.**

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = \cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Hi ha dues solucions per al vector $\vec{a}$: $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

8 **Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ i el mòdul del qual sigui la meitat del de $\vec{v}$.**

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$

$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$

$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \rightarrow \frac{25}{16}y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \end{array}$$

$y = 4 \rightarrow x = -3$

$y = -4 \rightarrow x = 3$

Hi ha dues solucions: $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

9 **Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dos vectors unitaris que formen un angle de 120°. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$
$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$
$$= 1 - 1 + 1 = 1 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$
$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$