Resol

Pàgina 187

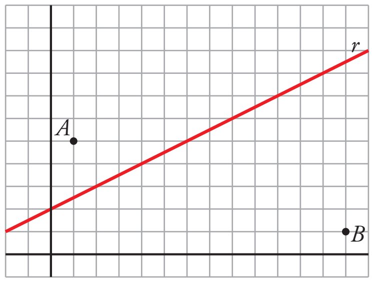
L'embarcador

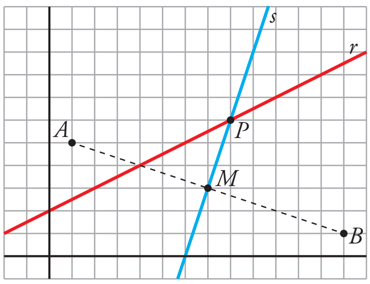
Tenim dos pobles, A i B, cada un a un costat d'un canal. Es vol construir un embarcador situat exactament a la mateixa distància dels dos pobles. On s'haurà de fer?

Per decidir-ho, col·loquem uns eixos de coordenades i raonem de la manera següent:

Els punts de la mediatriu del segment AB són a la mateixa distància dels extrems d'aquest. Per tant, el punt buscat, P, és la intersecció de la recta r (el canal) amb la recta s (perpendicular a AB en el punt mitjà).

Troba les coordenades de P.





Coordenades de $A = (1, 5)$

Coordenades de $B = (13, 1)$

Trobem les coordenades de M, punt mitjà entre A i B.

$$M = \left(\frac{1+13}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (7, 3)$$

Trobem el vector $\overrightarrow{AB} = (13, 1) - (1, 5) = (12, -4)$

La recta s passa per M i té vector de direcció $\vec{d} = (4, 12)$.

L'equació de s és: $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12}$

L'equació de r és $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

P és la solució del sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 2 \\ \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12} \end{cases} \rightarrow x = 8, \ y = 6$

Solució: $P = (8, 6)$

1 Punts i vectors en el pla

Pàgina 189

Fes-ho tu. Esbrina m perquè $P(1, 4)$, $Q(5, -2)$ i $R(m, 0)$ estiguin alineats.

$\overrightarrow{PQ} = (4, -6)$

$\overrightarrow{QR} = (m, 0) - (5, -2) = (m - 5, 2)$

$$\frac{4}{m-5} = \frac{-6}{2} \rightarrow m - 5 = \frac{-3}{4} \rightarrow m = \frac{17}{4} = 4,25$$

1 Troba les coordenades de $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{NM}$, sent $M(7, -5)$ i $N(-2, -11)$.

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

2 Esbrina si estan alineats els punts $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ i $R(10, 25)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (-3, -14)\\ \overrightarrow{QR} = (6, 28)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \rightarrow A,\ B \text{ i } C \text{ estan alineats.}$$

3 Calcula el valor de k perquè els punts de coordenades següents estiguin alineats:

$A(1, 7)$ $B(-3, 4)$ $C(k, 5)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-4, -3)\\ \overrightarrow{BC} = (k+3, 1)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \rightarrow -4 = -3k - 9 \rightarrow 3k = -5 \rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

Pàgina 190

4 Donats els punts $P(3, 9)$ i $Q(8, -1)$:

a) Troba el punt mitjà de PQ.

b) Troba el simètric de P respecte de Q.

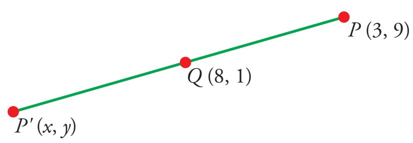
c) Troba el simètric de Q respecte de P.

d) Obtén un punt A de PQ tal que $\overrightarrow{PA} / \overrightarrow{AQ} = 2/3$.

e) Obtén un punt B de PQ tal que $\overrightarrow{PB} / \overrightarrow{PQ} = 1/5$.

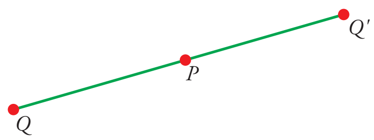
a) $M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l}\frac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13\\ \frac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11\end{array}\right\} P'(13, -11)$$



c) Anomenem $Q'(x', y')$ el simètric de Q respecte de P.

Així: $$\left.\begin{array}{l}\frac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2\\ \frac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19\end{array}\right\} Q'(-2, 19)$$



d) Anomenem $A(x, y)$ el punt que busquem. Ha de complir-se que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = \frac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5 \\ y-9 = \frac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5 \end{array}\right\} A(5, 5)$$

e) Anomenem $B(x, y)$ el punt que busquem.

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y-9 = -2 \rightarrow y = 7 \end{array}\right\} B(4, 7)$$

2 Equacions d'una recta

Pàgina 192

Fes-ho tu. Obtén les equacions paramètriques i l'equació contínua de la recta que passa pels punts $P(7, -4)$ i $Q(3, 2)$.

Vector de posició de P: $\vec{p} = (7, -4)$

Vector de direcció de la recta: $\vec{d} = (3, 2) - (7, -4) = (-4, 6)$

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = 7 - 4\lambda \\ y = -4 + 6\lambda \end{cases}$$

Equació en forma contínua:

$$\frac{x-7}{-4} = \frac{y+4}{6}$$

Fes-ho tu. Obtén les equacions paramètriques de la recta $\frac{x-5}{0} = \frac{y}{-7}$.

Vector de posició de P: $\vec{p} = (5, 0)$

Vector de direcció de la recta: $\vec{d} = (0, -7)$

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -7\lambda \end{cases}$$

Pàgina 194

Fes-ho tu. Obtén totes les formes possibles de l'equació de la recta que passa per $A(-2, 5)$ i $B(3, -5)$.

Vector de posició de A: $\overrightarrow{OA} = (-2, 5)$

Vector de direcció de la recta: $\vec{d} = (3, -5) - (-2, 5) = (5, -10) = 5(1, -2)$

Ara agafarem com a vector de direcció de la recta un vector proporcional a l'anterior: $\vec{d'} = (1, -2)$.

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

Equació en forma contínua:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-2}$$

Equació implícita:

$$-2(x+2) = y - 5 \to -2x - 4 = y - 5 \to -2x - y + 1 = 0$$

Equació explícita:

$$y = -2x + 1$$

Equació punt-pendent:

$$m = \frac{-2}{1}$$

$$y = -2(x + 2) + 5$$

Fes-ho tu. **Obtén l'equació implícita de** $r: \begin{cases} x = 5t \\ y = 4 - t \end{cases}$

$\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-4}{-1} \;\rightarrow\; -x = 5y - 20 \;\rightarrow\; -x - 5y + 20 = 0$

Pàgina 195

Fes-ho tu. **Dóna les equacions paramètriques de la recta** $y = -2x + 7$.

Trobem un punt A de la recta donant a x el valor 0: $x = 0 \;\rightarrow\; A = (0, 7)$

$m = -2 \;\rightarrow\; \vec{d} = (1, -2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \end{cases}$

Fes-ho tu. **Troba les equacions paramètriques i implícita de la recta** $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y+1}{2}$.

Punt de la recta: $A = (5, -1)$

$\vec{d} = (0, 2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

Equació implícita: $x = 5$

1 **Troba les equacions paramètriques, contínua, implícita i explícita de la recta que passa per** A **i** B**, en cada cas:**

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ **b)** $A(0, 4)$, $B(6, 0)$ **c)** $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$ **d)** $A(3, 5)$, $B(3, 2)$

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3) \;\rightarrow\; \overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramètriques: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$

Contínua: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$

Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$, $B(6, 0) \;\rightarrow\; \overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramètriques: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$

Contínua: $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$

Explícita: $y = \dfrac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5) \;\rightarrow\; \overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramètriques: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$

Contínua: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$

Explícita: $y = 5$

d) $A(3, 5)$, $B(3, 2) \;\rightarrow\; \overrightarrow{AB} = (0, -3)$

Paramètriques: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$

Contínua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-5}{-3}$

Implícita: $x - 3 = 0$

Explícita: No existeix, ja que es tracta d'una recta vertical d'equació $x = 3$.

2 **Obtén les equacions implícita, paramètriques i contínua de la recta $y = 2x + 3$.**

$y = 2x + 3$

- Busquem dos punts de la recta i el seu vector direcció:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x=0 \to y = 2\cdot 0+3=3 \to A(0,3) \\ \text{Si } x=1 \to y = 2\cdot 1+3=5 \to B(1,5) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

- Implícita: $2x - y + 3 = 0$
- Paramètriques:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

- Contínua:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-3}{2}$$

3 **a) Troba dos punts, P i Q, que pertanyin a la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$.**

b) Comprova que $\overrightarrow{PQ}$ és perpendicular a (2, –3).

c) Escriu les equacions paramètriques de r.

d) Escriu-ne l'equació explícita i comprova que el vector $(1, m)$ és paral·lel a $\overrightarrow{PQ}$ (m és el pendent de r).

a) r: $2x - 3y + 6 = 0$

Si $x = 0 \to 2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0 \to y = 2 \to P(0, 2)$

Si $x = -3 \to 2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0 \to y = 0 \to Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) r: $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Aïllem y en l'equació de r:

$2x - 3y + 6 = 0 \to 2x + 6 = 3y \to \frac{2}{3}x + 2 = y$

Explícita: $y = \frac{2}{3}x + 2$

$m = \frac{2}{3} \to (1, m) = \left(1, \frac{2}{3}\right)$

El vector $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ és paral·lel a $\overrightarrow{PQ}$ si les seves coordenades són proporcionals:

$(-3, -2) = \lambda\left(1, \frac{2}{3}\right) \to \lambda = -3$

Els vectors són proporcionals i, per tant, paral·lels.

3 Feix de rectes

Pàgina 196

1 Troba la recta del feix de centre $P(-3, 5)$ que passa per $(8, 4)$.

Hem de trobar la recta que passa per $P(-3, 5)$ i $Q(8, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (11, -1)$

$r: \dfrac{x+3}{11} = \dfrac{y-5}{-1}$

2 Els feixos de rectes els centres de les quals són $P(4, 0)$ i $Q(-6, 4)$ tenen una recta en comú. Quina és?

És la recta que passa per $P(4, 0)$ i $Q(-6, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-10, 4)$

$r: \dfrac{x-4}{-10} = \dfrac{y-0}{4}$

3 Les rectes següents:

$$r: 3x - 5y - 7 = 0 \qquad s: x + y + 4 = 0$$

formen part d'un mateix feix. Quina de les rectes d'aquest feix té pendent 4?

- El centre del feix és el punt de tall de r i s. L'anomenem:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y - 7 = 0 \\ x + \ \ y + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = -y - 4$$

$$3(-y-4) - 5y - 7 = 0 \rightarrow -8y - 19 = 0 \rightarrow y = -\frac{19}{8}$$

$$x = -y - 4 = \frac{19}{8} - 4 = -\frac{13}{8}$$

El centre del feix és el punt $P\left(-\dfrac{13}{8}, -\dfrac{19}{8}\right)$.

- Equació de la recta que passa per P i té pendent igual a 4:

$$y = \frac{19}{8} + 4\left(x + \frac{13}{8}\right) \rightarrow 32x - 8y + 7 = 0$$

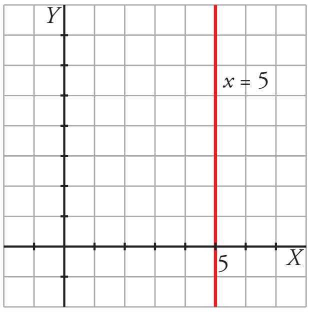
4 Reflexions sobre equacions amb «paràmetres» i sense

Pàgina 197

1 **Representa:**

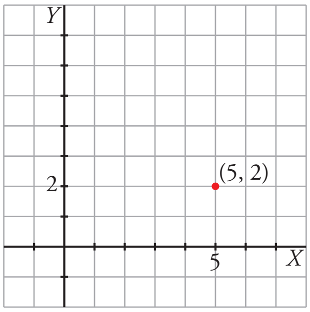
a) $x = 5$ **b)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = \lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ **d)** $y = 2$ **e)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$

a)

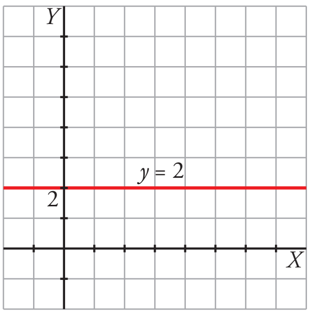


b) És la mateixa que la de l'apartat a).

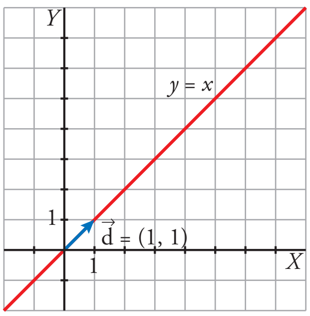
c) És un punt, el punt (5, 2).



d)



e) Passa per $O = (0, 0)$. Té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$.



f) Tenim qualsevol punt del pla, ja que no hi ha cap restricció.

5 Paral·lelisme i perpendicularitat

Pàgina 198

1 **Cert o fals? Cada una de les rectes següents és paral·lela a $\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{2}$:**

a) $2x+5y-4=0$ **b)** $5x+2y=0$ **c)** $2x-5y+1=0$

d) $y=\frac{5}{2}x+4$ **e)** $y=\frac{-5}{2}x+1$ **f)** $y=\frac{2}{5}x-3$

El vector de direcció de la recta $\frac{x-2}{5}=\frac{y-2}{2}$ és $\vec{d}=(5, 2)$.

a) Vector de direcció: $(-5, 2) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Fals.

b) Vector de direcció: $(-2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Fals.

c) Vector de direcció: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Cert.

d) $m=\frac{5}{2} \rightarrow$ Vector de direcció: $(2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Fals.

e) $m=-\frac{5}{2} \rightarrow$ Vector de direcció: $(2, -5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Fals.

f) $m=\frac{2}{5} \rightarrow$ Vector de direcció: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Cert.

2 **Cert o fals? Cada una de les rectes següents és perpendicular a $x-2y+4=0$:**

a) $\begin{cases} x=y+t \\ y=1-2t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases}$

d) $y=2x+1$ **e)** $y=-2x+3$ **f)** $y=\frac{x}{2}$

El vector perpendicular a la recta $x-2y+4=0$ és $(1, -2)$.

a) Vector de direcció: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Cert.

b) Vector de direcció: $(-2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Fals.

c) Vector de direcció: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Fals.

d) $m=2 \rightarrow$ Vector de direcció: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Fals

e) $m=-2 \rightarrow$ Vector de direcció: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Cert.

f) $m=\frac{1}{2} \rightarrow$ Vector de direcció: $(2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Fals.

Pàgina 199

Fes-ho tu. **Troba una paral·lela i una perpendicular a r: $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ que passin per $(7, -5)$.**

El vector de direcció de la recta $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ és $\vec{d}=(3, -2)$. Vector normal: $\vec{n}=(2, 3)$.

Recta paral·lela:

$$r_1: \begin{cases} x=\ \ 7+3\lambda \\ y=-5-2\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x=\ \ 7+2\lambda \\ y=-5+3\lambda \end{cases}$$

Fes-ho tu. Troba la recta $r_1 \,//\, r\colon 5x - y + 4 = 0$ que passi per (3, –5), i la recta $r_2 \perp r$ que passi per (0, 0).

El vector de direcció de la recta $r\colon 5x - y + 4 = 0$ és $\vec{d} = (-1, -5) = -(1, 5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, -1)$.

Recta paral·lela:

$$r_1\colon \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -5 + 5\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2\colon \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -5 - \lambda \end{cases}$$

Fes-ho tu. Donada la recta $r\colon \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$, troba:

a) les equacions paramètriques de $r_1 \perp r$ que passi per (–2, 0).

b) l'equació implícita de $r_2 \,//\, r$ que passi per (0, –3).

c) l'equació explícita de $r_3 \,//\, r$ que passi per (–3, 5).

El vector de direcció de la recta $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$ és $\vec{d} = (2, -5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, 2)$.

a) Recta perpendicular:

$$r_1\colon \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

b) Recta paral·lela:

$$r_2\colon \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-5} \rightarrow -5x = 2y + 6 \rightarrow -5x - 2y - 6 = 0$$

c) Recta paral·lela:

$$r_3\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-5} \rightarrow -5x - 15 = 2y - 10 \rightarrow -5x - 2y - 5 = 0 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

3 Escriu les equacions paramètriques de dues rectes que passin per $P(4, -3)$ i siguin paral·lela i perpendicular, respectivament, a $r\colon \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

$$r\colon \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \rightarrow \text{Vector de direcció de } r\colon \vec{v}_r = (-5, 2)$$

- Recta paral·lela a r que passa per P:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

  $$s\colon \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

- Recta perpendicular a r que passa per P:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_l = (2, 5)$

  $$l\colon \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$$

4 **Donada la recta r: $y = -2x + 5$, troba:**

a) les equacions paramètriques d'una recta r_1 paral·lela a r que passi per (0, –2).

b) l'equació explícita d'una recta r_2 paral·lela a r i d'una altra r_3 perpendicular a r, i que ambdues passin per (0, 1).

c) l'equació implícita d'una recta r_4, perpendicular a r i que passi per (–2, 5).

r: $y = -2x + 5$

Pendent $m = -2 \rightarrow$ Vector de direcció de la recta és $\vec{d} = (1, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 1)$.

a) r_1: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

b) r_2: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \rightarrow -2x = y - 1 \rightarrow y = -2x + 1$

r_3: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x = 2y - 2 \rightarrow x - 2y + 2 = 0 \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$

c) r_4: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{1} \rightarrow x + 2 = 2y - 10 \rightarrow x - 2y + 12 = 0$

5 **Donada s: $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$, troba:**

a) l'equació contínua d'una recta r_1 perpendicular a s que passi per $P_1(5, -3)$.

b) l'equació implícita de r_2 paral·lela a s que passi per $P_2(0, 4)$.

c) l'equació explícita de r_3 perpendicular a s que passi per $P_3(-3, 0)$.

s: $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow P(5, 0) \in s;\ \vec{v}_s = (-1, 3)$

a) El vector direcció de r_1 és $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$

r_1: $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+3}{1}$

b) El vector direcció de r_2 és el mateix que el de s: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$. $P_2(0, 4) \in r_2$

r_2: $\dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y-4}{3} \rightarrow 3x = -y + 4 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$

c) El vector direcció de r_3 és el mateix que el de r_1: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$. $P_3(-3, 0) \in r_3$

r_3: $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-0}{1} \rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + 1$

6 **Determina les equacions implícites de dues rectes que passin per $P(-3, 4)$ i siguin paral·lela i perpendicular, respectivament, a r: $5x - 2y + 3 = 0$.**

r: $5x - 2y + 3 = 0 \rightarrow 5x + 3 = 2y \rightarrow y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

El pendent de r és $m_r = \dfrac{5}{2}$

- Recta s paral·lela a r que passa per $P(-3, 4)$:

$m_s = m_r = \dfrac{5}{2}$

$s: y - 4 = \dfrac{5}{2}(x + 3) \rightarrow s: 5x - 2y + 23 = 0$

- Recta l perpendicular a r que passa per $P(-3, 4)$:

$m_l = -\dfrac{l}{m_r} = -\dfrac{2}{5}$

$l: y - 4 = -\dfrac{2}{5}(x + 3) \rightarrow l: 2x + 5y - 14 = 0$

6 Posicions relatives de dues rectes

Pàgina 200

Fes-ho tu. Determina la posició relativa i el punt de tall, si existeix, de les rectes:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 5t \end{cases} \quad \text{i} \quad r_2: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 6 - t \end{cases}$$

Vector de direcció de r_1: $\vec{d} = (2, -5)$

Vector de direcció de r_2: $\vec{d}' = (1, -1)$

No són proporcionals: les rectes es tallen.

Punt de tall:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -4 + s \\ -5 - 5t = 6 - s \end{cases} \to s = 1, \ t = -2$$

Per a aquests valors dels paràmetres: $x = -4 + 1 = -3$; $y = 6 - 1 = 5$

Punt de tall: $(-3, 5)$

Fes-ho tu. Troba la posició relativa de les rectes:

$$r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \quad \text{i} \quad r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 3 + 10t \end{cases}$$

Vector de direcció de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de direcció de r_2: $\vec{d}' = (4, 10)$

Són proporcionals, $(4, 10) = 2(2, 5)$: les rectes són paral·leles o coincidents.

Punt de r_1: $(0, 1)$

Substituïm en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4t \\ 1 = 3 + 10t \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4t \to t = -2 \\ 1 = 3 + 10t \to t = -\frac{1}{5} \end{cases} \to \text{No hi ha solució: les rectes són paral·leles.}$$

Fes-ho tu. Determina la posició relativa de $r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$ **i** $r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 21 + 10t \end{cases}$

Vector de direcció de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de direcció de r_2: $\vec{d}' = (4, 10)$

Són proporcionals, $(4, 10) = 2(2, 5)$: les rectes són paral·leles o coincidents.

Punt de r_1: $(0, 1)$

Substituïm en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4t \\ 1 = 21 + 10t \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4t \to t = -2 \\ 1 = 21 + 10t \to t = -2 \end{cases}$$

Per a $t = -2$, obtenim el punt $(0, 1)$, que és en les dues rectes.

Les rectes r_1 i r_2 tenen la mateixa direcció i un punt en comú: són coincidents.

Pàgina 201

1 Esbrina la posició relativa d'aquests parells de rectes:

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0,\ \ s: 6x + 10y + 4 = 0$

b) $r: 2x + y - 6 = 0,\ \ s: x - y = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases},\ \ s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

d) $r: 3x - 5y = 0,\ \ s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (3, 5)$

$s: 6x + 10y + 4 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_s = (6, 10)$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \ \rightarrow$ Les dues rectes són paral·leles.

b) $r: 2x + y - 6 = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (2, 1)$

$s: x - y = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \ \rightarrow$ Les dues rectes es tallen.

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_r = (5, -3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \ \rightarrow$ Les dues rectes es tallen.

d) $r: 3x - 5y = 0 \ \rightarrow\ \vec{n}_r = (3, -5) \ \rightarrow\ \vec{v}_r = (5, 3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \ \rightarrow\ \vec{v}_s = (5, 3),\ \ P_s = (2, 1)$

Com que $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ i $P_s \notin r$, les rectes són paral·leles.

7 Angle de dues rectes

Pàgina 202

1 Troba l'angle que formen els parells de rectes següents:

a) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

b) $r_1: x + 2y - 17 = 0$, $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

c) $r_1: y = 5x - 1$, $r_2: y = 4x + 3$

d) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1) \cdot (-4,3)|}{|(-2,1)|\,|(-4,3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5}) \cdot (5)} \approx 0{,}9838699101 \rightarrow \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}45''$$

b) Vector normal de r_1: $\vec{n}_1 = (1, 2)$

Vector normal de r_2: $\vec{n}_2 = (3, -5)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(1,2) \cdot (3,-5)|}{|(1,2)|\,|(3,-5)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \rightarrow \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

c) $m_{r_1} = 5$; $m_{r_2} = 4$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{4-5}{1+5 \cdot 4}\right| = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476190 \rightarrow \alpha = 2°\ 43'\ 34{,}72''$$

d) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1) \cdot (5,3)|}{|(-2,1)|\,|(5,3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \rightarrow \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

8 Càlcul de distàncies

Pàgina 203

Fes-ho tu. Troba l'àrea d'aquest mateix triangle prenent com a base BC i com a altura la distància de A a la recta BC.

Base: $c = \overline{BC} = \sqrt{(2-6)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{16} = 4$ u

La recta BC és: $y = 5$

L'altura és:

$$h_c = dist\,[A,\ BC] = \frac{|-5|}{\sqrt{1}} = 5 \text{ u}$$

Per tant:

$$\text{Àrea} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ u}^2$$

1 **$P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$**

r: $3x - 4y + 9 = 0$, s: $5x + 15 = 0$

Troba la distància entre els dos punts.

Troba també les distàncies de cada un dels punts a cada recta.

$P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$

r: $3x - 4y + 9 = 0$

s: $5x + 15 = 0$

$$dist\,(P,\ Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(15, 8)| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$dist\,(P,\ r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4(-3) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$dist\,(P,\ s) = \frac{|5 \cdot (-6) + 15|}{\sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$dist\,(Q,\ r) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 + 9|}{5} = \frac{16}{5}$$

$$dist\,(Q,\ s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

2 **a) Troba l'àrea del triangle de vèrtexs $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$ i $C(5, 2)$ amb la fórmula d'Heron.**

b) Troba-la, també, mitjançant l'aplicació de la fórmula habitual $S = \frac{b \cdot h_b}{2}$, sent b la mesura del costat AC. Hi ha cap altra manera més senzilla de trobar-la?

a) $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$

Fórmula d'Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left.\begin{array}{l} a = |\overrightarrow{BC}| = |(8, 0)| = 8 \\ b = |\overrightarrow{AC}| = |(8, -6)| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \\ c = |\overrightarrow{AB}| = |(0, -6)| = 6 \end{array}\right\} \ p = \frac{8 + 10 + 6}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{12(12-8)(12-10)(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ u}^2$$

b) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$

- $b = |\overrightarrow{AC}| = 10$ (de l'apartat anterior)
- Trobem l'equació de la recta que passa per $A(-3, 8)$ i $C(5, 2)$:

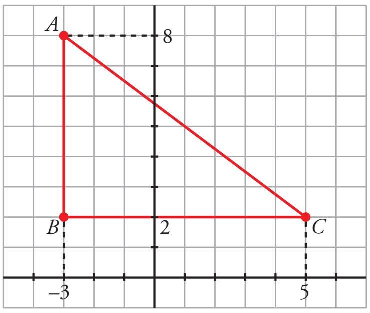
  Pendent: $m = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4} \rightarrow y = 2 - \dfrac{3}{4}(x-5) \rightarrow r: 3x + 4y - 23 = 0$

- $h_b = dist\,[B, r] = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{24}{5}$

  $S = \dfrac{10 \cdot (24/5)}{2} = 24 \text{ u}^2$

Hauria estat més senzill si haguéssim dibuixat el triangle.

Observa:



És clar que $\overline{AB} = 6$ i $\overline{BC} = 8$.

Com que el triangle és rectangle, $S = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ u}^2$.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 204

1. Punts i vectors en el pla

Fes-ho tu. **Fes els càlculs per arribar a la solució $D'(8, 3)$ d'aquest problema:**

$\overrightarrow{BC} = (5, 6) - (3, 6) = (2, 0)$

$\overrightarrow{AD} = (x, y) - (0, 3) = (x, y - 3)$

$\overrightarrow{AB} = (3, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (x, y) - (5, 6) = (x - 5, y - 6)$

Primera condició:

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD} \rightarrow y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$$

Segona condició:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \rightarrow \sqrt{18} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} \rightarrow 18 = (x-5)^2 + (y-6)^2 \rightarrow 18 = x^2 - 10x + y^2 - 12y + 61$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ 18 = x^2 - 10x + y^2 - 12y + 61 \end{cases} \rightarrow 18 = x^2 - 10x + (3)^2 - 12 \cdot 3 + 61 \rightarrow x = 8,\ x = 2$$

Si $x = 2$, obtenim un paral·lelogram; aleshores, $x = 8$, $y = 3$.

$D' = (8, 3)$

2. Simètric d'un punt respecte d'una recta

Fes-ho tu. **Troba el punt simètric de $A(2, 2)$ respecte de la recta $r: y = 6 - x$.**

Pendent de r: $m = -1$

Pendent de la recta s perpendicular a r: $m' = -\frac{1}{-1} = 1$

Vector de direcció de la recta s: $\vec{d}\,' = (1, 1)$

Equació de s: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 2 = y - 2 \rightarrow x - y = 0$

M és el punt d'intersecció de les rectes r i s:

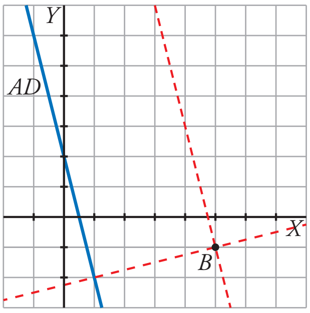
$$\begin{cases} y = 6 - x \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 3 \rightarrow M = (3, 3)$$

M és el punt mitjà entre A i $A' = (x, y)$

$$(3, 3) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{x+2}{2} \rightarrow x = 4 \\ 3 = \frac{y+2}{2} \rightarrow y = 4 \end{cases} \rightarrow A' = (4, 4)$$

3. Rectes paral·leles i perpendiculars a una de donada

Fes-ho tu. **Del quadrat $ABCD$ coneixem el vèrtex $B(5, -1)$ i l'equació del costat AD, $y = -4x + 2$. Troba l'equació dels costats BC i AB.**



El costat BC és paral·lel a AD i passa per $B = (5, -1)$:

Pendent de AD: $m = -4$

Pendent de BC: $m = -4$. Vector de direcció de BC: $\vec{d} = (1, -4)$

Equació de BC: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{-4}$

El costat AB és perpendicular a AD i passa per $B = (5, -1)$:

Pendent de AB: $m = \dfrac{1}{4}$. Vector de direcció de BC: $\vec{d}' = (4, 1)$

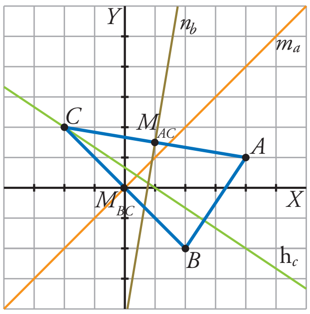
Equació de AB: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{4}$

Pàgina 205

4. Rectes notables en un triangle

Fes-ho tu. **En el triangle de vèrtexs $A(4, 1)$, $B(2, -2)$ i $C(-2, 2)$ calcula la mediatriu relativa al costat BC, l'altura que parteix de C i la mitjana relativa al costat AC.**

Fem servir la mateixa notació que en l'exercici resolt:



a) La mediatriu relativa al costat BC, m_a, és la perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que passa per M_{BC}.

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2) - (2, -2) = (-4, 4)$

$M_{BC} = \left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$: $\vec{d}' = (4, 4)$

Equació de m_a: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{4} \rightarrow x = y$

b) L'altura que parteix de C, h_C, és perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ i passa per C.

$\overrightarrow{AB} = (2, -2) - (4, 1) = (-2, 3)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$: $\vec{d}' = (3, 2)$

Equació de h_C: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{2}$

c) La mitjana relativa al costat AC, n_b, és perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ i passa per M_{AC}.

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2) - (4, 1) = (-6, 1)$

$M_{AC} = \left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{2+1}{2}\right) = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$: $\vec{d}' = (1, 6)$

Equació de n_b: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\frac{3}{2}}{6}$

5. Rectes paral·leles a una de donada a una distància determinada

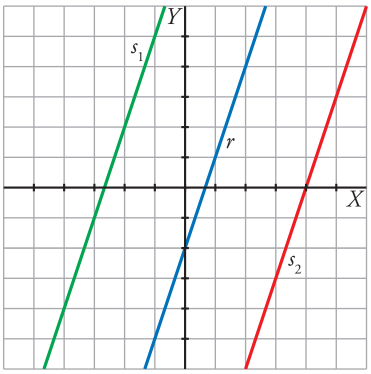
Fes-ho tu. Troba les equacions de les rectes que disten $\sqrt{10}$ unitats de r: $y = 3x - 2$.

s_k: $3x - y + k = 0$

Punt de r: $P = (0, -2)$

$$dist(P, s_k) = \sqrt{10} \rightarrow \frac{|3\cdot 0-(-2)+k|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \rightarrow |k+2| = 10 \rightarrow \begin{cases} k+2=10 \rightarrow k=8 \\ k+2=-10 \rightarrow k=-12 \end{cases}$$

Les rectes buscades són s_1: $3x - y + 8 = 0$ i s_2: $3x - y - 12 = 0$.



6. Distàncies i àrea en un triangle

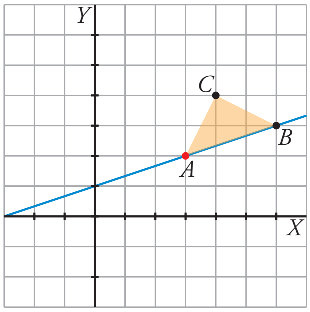
Fes-ho tu. Resol aquest mateix exercici per a r: $x - 3y + 3 = 0$, $B(6, 3)$ i $C(4, 4)$.

a) Substituïm les coordenades dels vèrtexs B i C en l'equació de r. Obtenim que $B \in r$ i $C \notin r$. Per tant, el costat desigual és AB: $dist(A, C) = dist(B, C) \neq dist(A, B)$.

Com que $A \in r$, les seves coordenades han de complir la seva equació; és a dir, $A = (3y - 3, y)$.

$dist(A, C) = dist(B, C) \rightarrow \sqrt{(4-(3y-3))^2+(4-y)^2} = \sqrt{4+1} \rightarrow 10y^2 - 50y + 65 = 5 \rightarrow y_1 = 3,\ y_2 = 2$

Obtenim dues solucions, $A(3, 2)$ i $A'(6, 3)$, però $A' = B$ no és vàlida.



b) Prenent com a base AB, Àrea $= \dfrac{1}{2}$ base · altura $= \dfrac{1}{2} \cdot dist\,(A, B) \cdot dist(C, r)$

$$dist\,(A, B) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}\ \text{u}$$

$$dist(C, r) = \frac{|4-12+3|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}\ \text{u}$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{u}^2$$

Pàgina 206

8. Recta que passa per un punt i forma un angle determinat amb una altra recta donada

Fes-ho tu. **Troba l'equació d'una recta que passi per l'origen de coordenades i formi un angle de 60° amb la recta $r: y = x + 3$.**

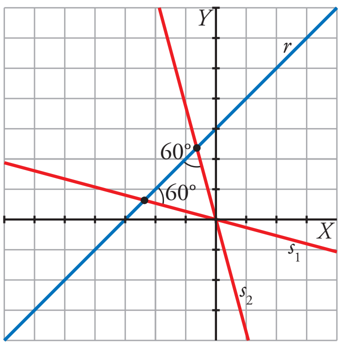
Pendent de r: $m_r = 1$

Pendent de s: m_s

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \begin{cases} \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = \sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\ \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = -\sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Com que passa per $O = (0, 0)$:

$$s_1 : y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x; \quad s_2 : y = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}x$$



Pàgina 207

9. Recta simètrica d'una altra respecte a una tercera recta donada

Fes-ho tu. Troba la recta t, simètrica de la recta r: $-2x + 3y + 2 = 0$ respecte a la recta s: $-5x + y + 18 = 0$.

Calculem A, el punt d'intersecció de r i t:

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \to A = (4, 2)$$

Ara, prenem un punt P de r: $P = (1, 0)$

Calculem la recta a perpendicular a s que passa per $P = (1, 0)$:

$$\vec{d}_s = (-1, -5) \to \vec{d}_a = (5, -1)$$

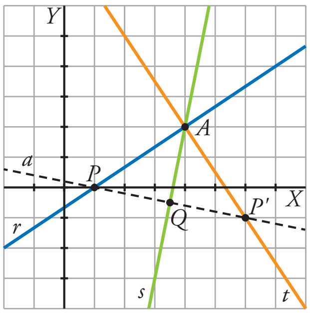
$$a: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-1} \to -x + 1 = 5y \to -x - 5y + 1 = 0$$

Determinem Q, punt de tall de a i s:

$$\begin{cases} -x - 5y + 1 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \to Q = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculem $P' = (x, y)$, simètric de P respecte a Q:

$$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \to P' = (6, -1)$$



La recta t passa per $A = (4, 2)$ i per P'.

$$\overrightarrow{AP'} = (6, -1) - (4, 2) = (2, 3)$$

$$t: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3}$$

10. Càlcul del circumcentre d'un triangle

Fes-ho tu. Troba el circumcentre del triangle de vèrtexs $A(3, 1)$, $B(4, 2)$ i $C(9, -3)$.

Calculem la mediatriu m_c del costat AB, que passa pel punt mitjà de AB:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \to \overrightarrow{d_{m_c}} = (1, -1)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$m_c: \frac{x - \frac{7}{2}}{1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-1} \to -x + \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \to -x - y + 5 = 0$$

Calculem m_b, mediatriu del costat AC que passa pel punt mitjà d'AC:

$$\overrightarrow{AC} = (6, -4) \rightarrow \overrightarrow{d_{m_b}} = (4, 6)$$

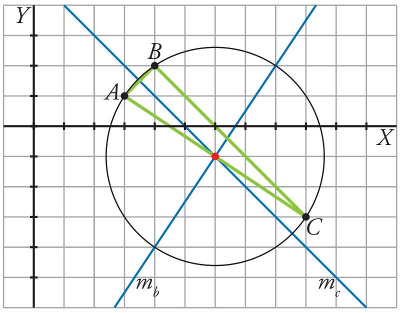
$$M_{AC} = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (6, -1)$$

$$m_b\colon \frac{x-6}{4} = \frac{y+1}{6} \rightarrow 6x - 36 = 4y + 4 \rightarrow 6x - 4y - 40 = 0$$

Trobem el circumcentre calculant el punt de tall de m_c i m_b:

$$\begin{cases} -x - y + 5 = 0 \\ 6x - 4y - 40 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6,\ y = -1$$

El circumcentre és el punt (6, –1).

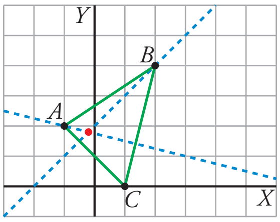


Exercicis i problemes guiats

Pàgina 208

1. Càlcul de l'ortocentre d'un triangle

Troba l'ortocentre del triangle de vèrtexs A(–1, 2), B(2, 4) i C(1, 0).



a) $\overrightarrow{BC} = (-1, -4)$

Altura h_A: Passa per $A = (-1, 2)$ i té vector de direcció $\overrightarrow{d_{h_A}} = (-4, 1)$.

h_A: $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x + 1 = -4y + 8 \rightarrow x + 4y - 7 = 0$

b) $\overrightarrow{AC} = (2, -2)$

Altura h_B: Passa per $B = (2, 4)$ i té vector de direcció $\overrightarrow{d_{h_B}} = (2, 2)$.

h_B: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{2} \rightarrow 2x - 4 = 2y - 8 \rightarrow 2x - 2y + 4 = 0$

L'ortocentre és el punt de tall de h_A i h_B:

$$\begin{cases} x + 4y - 7 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{5},\ y = \frac{9}{5}$$

Ortocentre: $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

2. Determinació d'un punt que equidista de dues rectes

Determina un punt P de l'eix d'ordenades que equidisti d'aquestes rectes:

r: 6x – 8y + 1 = 0

s: 4x + 3y – 3 = 0

a) $P \in OY \rightarrow P = (0, y)$

b) $P = (0, y)$

$$dist(P, r) = dist(P, s) \rightarrow \frac{|-8y+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|3y-3|}{\sqrt{16+9}} \rightarrow \frac{|-8y+1|}{10} = \frac{|3y-3|}{5} \rightarrow$$

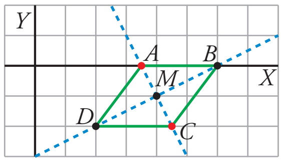
$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{-8y+1}{10} = \dfrac{3y-3}{5} \rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-8y+1}{10} = -\dfrac{3y-3}{5} \rightarrow y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Els punts solució són:

$P = \left(0, \dfrac{1}{2}\right),\ P' = \left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$

3. Vèrtexs d'un rombe

Un rombe ABCD té el vèrtex A en l'eix d'abscisses. Uns altres dos vèrtexs oposats són B(6, 0) i D(2, –2). Troba A i C.



$\overrightarrow{BD} = (-4, -2)$

$M_{BD} = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = (4, -1)$

d = diagonal AC perpendicular a BD

d passa per M_{BD} i té vector director (–2, 4).

$$d\colon \frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{4} \rightarrow 4x - 16 = -2y - 2 \rightarrow 4x + 2y - 14 = 0$$

A és la intersecció de d i l'eix OX:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 14 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{7}{2}, y = 0 \rightarrow A = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$C = (x, y)$ és el simètric de A respecte a M_{BD}:

$$(4, -1) = \left(\frac{x + \frac{7}{2}}{2}, \frac{y}{2}\right) \rightarrow C = \left(\frac{9}{2}, -2\right)$$

4. Vèrtexs d'un triangle conegudes algunes rectes notables

En un triangle ABC coneixem el vèrtex A(3, 5), l'equació de la mediatriu relativa al costat AB, m_c: $x - 2y + 2 = 0$ i l'altura que passa per B, h_B: $3x - y - 14 = 0$. A més, sabem que BC està sobre l'altura h_B.

Calcula els vèrtexs B i C.

a) El costat AC passa per $A = (3, 5)$ i és perpendicular a h_B.

Vector de direcció del costat AC: $\vec{d} = (3, -1)$

Equació del costat AC: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} \rightarrow -x + 3 = 3y - 15 \rightarrow -x - 3y + 18 = 0$

b) $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ -x - 3y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6, y = 4 \rightarrow C = (6, 4)$

c) El costat AB passa per $A = (3, 5)$ i és perpendicular a m_C.

Vector de direcció del costat AB: $\vec{d} = (1, -2)$

Equació de costat AB: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} \rightarrow -2x + 6 = y - 5 \rightarrow -2x - y + 11 = 0$

d) $\begin{cases} 3x - y - 14 = 0 \\ -2x - y + 11 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 5, y = 1 \rightarrow B = (5, 1)$

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 209

Per practicar

Coordenades de punts

1 **Troba les coordenades de $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, sent:**

a) $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$

b) $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (0, 0) = (-1, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (0, 0) - (-1, 2) = (1, -2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 5) - (2, 3) = (-4, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (2, 3) - (-2, 5) = (4, -2)$

2 **Determina si els punts $A(5, -2)$, $B(3, -2)$ i $C(-5, -2)$ estan alineats.**

$\overrightarrow{AB} = (3, -2) - (5, -2) = (-2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -2) - (3, -2) = (-8, 0)$

Les coordenades de $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ són proporcionals; per tant, A, B i C estan alineats.

3 **Determina k perquè els punts $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ i $C(6, k)$ estiguin alineats.**

Ha de passar que $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ siguin proporcionals.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5, -4)\\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1)\end{array}\right\} \to \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \to 5k - 5 = -16 \to k = \frac{-11}{5}$$

4 **Siguin $A(8, -2)$ i $B(-4, 2)$ dos punts. Calcula:**

a) M, **punt mitjà de A i B.**

b) S, **simètric de A respecte a B.**

c) P, **tal que A sigui el punt mitjà del segment BP.**

a) $M = \left(\frac{8-4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (2, 0)$

b) B és el punt mitjà entre A i $S = (x, y)$

$$(-4, 2) = \left(\frac{x+8}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \to \begin{cases} -4 = \dfrac{x+8}{2} \to x = -16 \\ 2 = \dfrac{y-2}{2} \to y = 6 \end{cases}$$

$S = (-16, 6)$

c) P és el simètric de B respecte de $A \to A$ és el punt mitjà entre B i P.

$P = (x, y)$

$$(8, -2) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \to \begin{cases} 8 = \dfrac{x-4}{2} \to x = 20 \\ -2 = \dfrac{y+2}{2} \to y = -6 \end{cases}$$

$P = (20, -6)$

5 **Dóna les coordenades del punt P que divideix el segment d'extrems $A(3, 4)$ i $B(0, -2)$ en dues parts tals que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.**

Sigui $P(x, y)$.

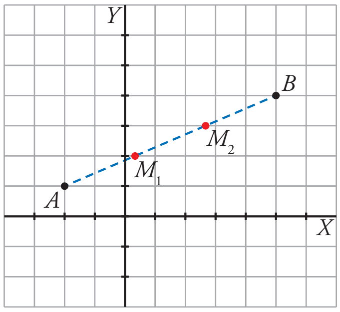
Substituïm en la condició que ens imposen:

$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \rightarrow (x - 0, y - (-2)) = 2(3 - x, 4 - y) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2(3 - x) \\ y + 2 = 2(4 - y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 - 2x \\ y + 2 = 8 - 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow P(2, 2)$$

6 **Determina els punts que divideixen el segment AB en tres parts iguals, sent $A(-2, 1)$ i $B(5, 4)$.**

Busquem les coordenades dels punts M_1 i M_2 de la figura:



$\overrightarrow{AB} = (7, 3)$

$M_1 = (x, y)$

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (7, 3) = 3(x + 2, y - 1) \rightarrow \begin{cases} 7 = 3x + 6 \rightarrow x = \dfrac{1}{3} \\ 3 = 3y - 3 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow M_1 = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$$

$M_2 = (x, y)$

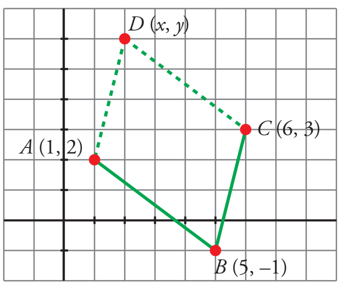
$$\overrightarrow{AM_2} = 2\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (x + 2, y - 1) = 2\left(\dfrac{1}{3} + 2, 2 - 1\right) \rightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{14}{3} \rightarrow x = \dfrac{8}{3} \\ y - 1 = 2 \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow M_2 = \left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$$

7 **Troba les coordenades del vèrtex D del paral·lelogram $ABCD$, sabent que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ i $C(6, 3)$.**

Sigui $D(x, y)$.

Ha de complir-se: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

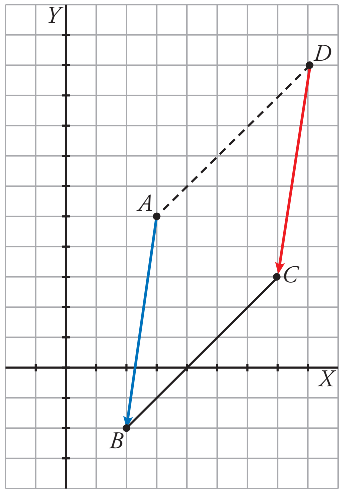
$$(5 - 1, -1 - 2) = (6 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$



8 **Coneixem tres vèrtexs d'un rombe $ABCD$, $A(3, 5)$, $B(2, –2)$ i $C(7, 3)$. Determina el vèrtex D.**

* ***Les diagonals d'un rombe es tallen en els seus punts mitjans i són perpendiculars.***

En un rombe, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



$\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$

$D = (x, y)$

$(-1, -7) = (7 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} -1 = 7 - x \rightarrow x = 8 \\ -7 = 3 - y \rightarrow y = 10 \end{cases} \rightarrow D = (8, 10)$

Equacions de rectes

9 **Escriu les equacions vectorials i paramètriques de la recta que passa per A i té direcció paral·lela al vector $\vec{d}$ en cada cas:**

a) $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$

b) $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

Obtén 2 punts més per a cada recta.

a) Equació vectorial: $(x, y) = (-3, 7) + k(4, -1)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Donant valors al paràmetre k, obtenim punts: $(1, 6)$, $(5, 5)$

b) Equació vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(0, 2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot k \\ y = 2k \end{cases}$

Punts: $(-1, 2)$, $(-1, 4)$

10 Escriu l'equació de la recta que passa per P i Q de totes les maneres possibles en cada cas:

a) $P(6, -2)$ **i** $Q(0, 5)$ **b)** $P(3, 2)$ **i** $Q(3, 6)$

c) $P(0, 0)$ **i** $Q(8, 0)$ **d)** $P(0, 0)$ **i** $Q(0, -2)$

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7)$

Equació vectorial: $(x, y) = (6, -2) + t(-6, 7)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x-6}{-6} = \dfrac{y+2}{7}$

Equació implícita: $7x + 6y - 30 = 0$

Equació explícita: $y = -\dfrac{7}{6}x + 5$

b) $\overrightarrow{PQ} = (0, 4)$

Equació vectorial: $(x, y) = (3, 2) + t(0, 4)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-2}{4}$

Equació implícita: $x - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{PQ} = (8, 0)$

Equació vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(8, 0)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x-0}{8} = \dfrac{y-0}{0}$

Equació implícita i explícita: $y = 0$

d) $\overrightarrow{PQ} = (0, -2)$

Equació vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(0, -2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-2}$

Equació implícita: $x = 0$

D'equació explícita no en té.

11 Escriu les equacions paramètriques i les implícites dels eixos de coordenades.

- Eix OX

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \end{cases}$ Equació implícita: $y = 0$

- Eix OY

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$ Equació implícita: $x = 0$

12 **Determina un vector normal i l'equació implícita de cada una de les rectes següents:**

a) $r\colon \dfrac{x+1}{-2} = y - 1$ **b)** $s\colon \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

a) $\vec{n} = (1, 2)$

Equació implícita: $x + 2y + k = 0$

Com que passa per $P = (-1, 0)$, substituïm les seves coordenades en l'equació de la recta per calcular k.

$-1 + 0 + k = 0 \to k = 1$

$r\colon x + 2y + 1 = 0$

b) $\vec{n} = (5, 1)$

Equació implícita: $5x + y + k = 0$

Com que passa per $P = (-1, 2)$, substituïm les seves coordenades en l'equació de la recta per calcular k.

$5(-1) + 2 + k = 0 \to k = 3$

$s\colon 5x + y + 3 = 0$

13 **Obtén, per a cada una de les rectes següents, un vector direcció, un vector normal i el pendent:**

a) $r_1\colon \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t \end{cases}$ **b)** $r_2\colon \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{4}$ **c)** $r_3\colon x + 3 = 0$ **d)** $r_4\colon y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

$\vec{d}$: vector de direcció; $\vec{n}$: vector normal; m = pendent.

a) $\vec{d} = (2, 5)$; $\vec{n} = (-5, 2)$; $m = \dfrac{5}{2}$

b) $\vec{d} = (2, 4)$; $\vec{n} = (-4, 2)$; $m = 2$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $\vec{n} = (1, 0)$; m no es pot calcular perquè és una recta vertical.

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $\vec{n} = (2, -3)$; $m = \dfrac{2}{3}$

14 **Determina un punt i un vector direcció de cada recta. Fes-los servir per formular les equacions contínues i les paramètriques.**

a) $3x - 2y + 1 = 0$ **b)** $y = 2(x - 1) + 7$ **c)** $x - 3 = 0$ **d)** $y = \dfrac{2}{3}x + 1$

$\vec{d}$: vector de direcció

a) $\vec{d} = (2, 3)$; $P = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} + 3\lambda \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{3}$

b) $\vec{d} = (1, 2)$; $P = (0, 5)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 5}{2}$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $P = (3, 0)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x - 3}{0} = \dfrac{y}{1}$

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $P = (0, 1)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Equació contínua: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 1}{2}$

15 **Comprova si el punt $P(5, -7)$ pertany a alguna de les rectes següents:**

a) $r: \begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases}$ **b)** $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5}$

a) Substituïm les coordenades de P en l'equació de la recta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases} \to \begin{cases} 5 = 5 \\ -7 = 13 - 2t \end{cases} \to t = 10$$

Hi ha solució; per tant, $P \in r$.

b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} \to \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{-7-3}{5} \to \dfrac{4}{2} \neq \dfrac{-10}{5}$; per tant, $P \notin s$.

16 **Troba el valor de k perquè la recta $x + ky - 7 = 0$ contingui el punt $A(5, -2)$.**

$(5, -2) \to 5 + k(-2) - 7 = 0 \to -2k = 2 \to k = -1$

Feix de rectes

17 **Considerem el feix de rectes de centre $(3, -2)$.**

a) Escriu l'equació d'aquest feix de rectes.

b) Quina recta d'aquest feix passa pel punt $(-1, 5)$?

c) Quina de les rectes del feix és paral·lela a $2x + y = 0$?

d) Troba una recta del feix que disti 3 de l'origen.

a) $a(x-3) + b(y+2) = 0$; o bé $y = -2 + m(x-3)$

b) Si passa per $(-1, 5)$, aleshores, substituint en $y = -2 + m(x-3)$, obtenim:

$5 = -2 + m(-1-3) \to 7 = -4m \to m = -\dfrac{7}{4}$; és a dir:

$y = -2 - \dfrac{7}{4}(x-3) \to 4y = -8 - 7x + 21 \to 7x + 4y - 13 = 0$

c) Si és paral·lela a $2x + y = 0$, tindrà pendent -2.

Per tant, serà:

$y = -2 - 2(x-3) \to y = -2 - 2x + 6 \to 2x + y - 4 = 0$

d) Una recta del feix té per equació:

$y = -2 + m(x-3) \to y = -2 + mx - 3m \to mx - y - 3m - 2 = 0$

La seva distància a l'origen ha de ser igual a 3:

$\dfrac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$; és a dir:

$|-3m-2| = 3\sqrt{m^2+1}$. Elevem al quadrat i operem:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2+1) = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \to m = \dfrac{5}{12}$

Per tant, serà:

$\dfrac{5}{12}x - y - \dfrac{5}{12} - 2 = 0 \to 5x - 12y - 39 = 0$

18 **Determina el centre d'aquest feix de rectes d'equació $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.**

Anomenem (x_0, y_0) el centre del feix. Ara escriurem l'equació que ens donen de la forma:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \rightarrow 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Les dues equacions han de ser iguals. Per tant:

$-3kx_0 = -3k \rightarrow x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \rightarrow y_0 = -2$

El centre del feix és el punt $(1, -2)$.

19 **Les rectes $r: y = 3$ i $s: y = 2x - 1$ formen part del mateix feix de rectes. Quina recta d'aquest feix té pendent -2?**

Si $r: y = 3$ i $s: y = 2x - 1$ estan en el mateix feix de rectes, el centre d'aquest feix és el punt de tall d'aquestes rectes: $P(2, 3)$.

Busquem la recta que passa per $P(2, 3)$ i té pendent $m = -2$:

$$y = -2(x - 2) + 3 \rightarrow y = -2x + 7$$

Paral·lelisme i perpendicularitat

20 **El vector direcció de r és $\vec{d}(2, -5)$. Troba, en cada cas, el vector direcció i el pendent de:**

a) Una recta paral·lela a r.

b) Una recta perpendicular a r.

a) Té el mateix vector de direcció $\vec{d} = (2, -5) \rightarrow m = \frac{-5}{2}$

b) Té vector de direcció $\vec{d} = (5, 2) \rightarrow m = \frac{2}{5}$

21 **Donada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, obtén en forma explícita les rectes següents:**

a) Paral·lela a r que passa per $A(-1, -3)$.

b) Perpendicular a r que passa per $B(-2, 5)$.

$r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 1)$

a) $\vec{v}_s = (-5, 1)$, $A(-1, -3) \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}(x + 1) - 3 \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$

b) $\vec{v}_s = (1, 5)$, $B(-2, 5) \rightarrow s: y = 5(x + 2) + 5 \rightarrow s: y = 5x + 15$

22 **D'una recta r en coneixem el pendent $m = \frac{2}{3}$. Troba la recta s en cada cas:**

a) s és paral·lela a r i passa per $(0, 0)$.

b) s és perpendicular a r i passa per $(1, 2)$.

a) En ser paral·lela, té el mateix pendent. A més, passa per $(0, 0)$. Per tant, $s: y = \frac{2}{3}x$.

b) En ser perpendicular, el seu pendent és $-\frac{1}{m} = \frac{-3}{2}$. Per tant, $y = \frac{-3}{2}(x - 1) + 2 \rightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Pàgina 210

23 Troba una recta que passi pel punt $P(0, 1)$ i que sigui perpendicular a la recta $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{1-y}{3}$.

r té vector de direcció $\vec{d} = (-3, 4)$ i passa per $P(0, 1)$.

$r: \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-1}{4}$

24 Troba, en cada cas, l'equació de la recta que passa pel punt $P(1, -3)$ i és:

a) paral·lela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.

b) perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.

c) paral·lela a la recta $2y - 3 = 0$.

d) perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.

a) r té vector de direcció $\vec{d} = (3, 2)$ i passa per $P(1, -3)$ $\rightarrow$ $r: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}$

b) r té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $P(1, -3)$ $\rightarrow$ $r: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}$

c) És paral·lela a l'eix OY i passa per $P(1, -3)$ $\rightarrow$ $r: y = -3$

d) És paral·lela a l'eix OX i passa per $P(1, -3)$ $\rightarrow$ $r: x = 1$

25 El vector normal de la recta r és $\vec{n}(2, -3)$. Obtén, en cada cas, l'equació de la recta s.

a) s és paral·lela a r i conté el punt $P(2, -3)$.

b) s és perpendicular a r i passa per $Q(0, 1)$.

a) s té vector de direcció $\vec{d} = (3, 2)$ i passa per $P(2, -3)$.

$s: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}$

b) s té vector de direcció $\vec{d} = (2, -3)$ i passa per $Q(0, 1)$.

$s: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}$

26 Escriu les equacions de les rectes següents:

a) r_1, paral·lela a l'eix d'abscisses que passa per $A(-1, -2)$.

b) r_2, perpendicular a l'eix OX que conté $B(1, 0)$.

c) r_3, paral·lela a l'eix d'ordenades que passa per $C(3, 5)$.

d) r_4, perpendicular a l'eix OY que conté $D(-1, 7)$.

a) $r_1: y = -2$

b) $r_2: x = 1$

c) $r_3: x = 3$

d) $r_4: y = 7$

27 Troba l'equació de la paral·lela a $2x - 3y = 0$ l'ordenada en l'origen de la qual és -2.

$r: 2x - 3y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} s \parallel r \rightarrow \text{el pendent de } s \text{ ha de ser igual al de } r \\ P(0,-2)\in s \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_s = m_r = \dfrac{2}{3} \\ P(0,-2)\in s \end{array}\right.$$

Equació explícita: $y = \dfrac{2}{3}x - 2$

Equació implícita: $2x - 3y - 6 = 0$

28 **Donats els punts $A(0, 1)$ i $B(4, -3)$, troba l'equació implícita de la recta perpendicular al segment AB que passa pel punt mitjà.**

$\overrightarrow{AB} = (4, -3) - (0, 1) = (-4, 4)$

$M = \left(\frac{4}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (2, -1)$

s té vector de direcció $\vec{d} = (4, 4)$ i passa per $M = (2, -1)$.

$$s\!: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{4} \rightarrow x - 2 = y + 1 \rightarrow s\!: x - y - 3 = 0$$

29 **Donada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escriu l'equació de la recta perpendicular a aquesta en el punt de tall amb l'eix d'ordenades.**

Punt de tall amb l'eix d'ordenades P:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 2$$

s té vector de direcció $\vec{d} = (4, 3)$ i passa per $P = (0, 2)$.

$$s\!: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{3}$$

30 **Determina, en cada cas, una recta que passi pel punt $P(-2, -3)$ i que sigui:**

a) Paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

b) Perpendicular a la bisectriu del segon quadrant.

a) Bisectriu del primer quadrant: $y = x$

s té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $P = (-2, -3)$.

$$s\!: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$$

b) Bisectriu del segon quadrant: $y = -x$

s té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $P = (-2, 3)$.

$$s\!: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$$

És la mateixa recta que l'anterior.

31 **D'un triangle coneixem el vèrtex $A(1, 3)$ i la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$ que conté el costat BC. Troba l'altura relativa al vèrtex A.**

h_A és perpendicular a r i passa per $A = (1, 3)$.

h_A té vector de direcció $\vec{d} = (2, -3)$ i passa per $A = (1, 3)$.

$$h_A\!: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3}$$

32 **Calcula les equacions de les mediatrius del triangle de vèrtexs $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ i $C(3, 4)$.**

a) m_a és perpendicular a BC i passa per M_{BC}.

BC té vector de direcció $\overrightarrow{BC} = (0, 2)$.

$M_{BC} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (3, 3)$

m_a té vector de direcció $\vec{d} = (2, 0)$ i passa per $M_{BC} = (3, 3)$.

$m_a\!: y = 3$

b) m_b és perpendicular a AC i passa per M_{AC}.

AC té vector de direcció $\overrightarrow{AC} = (4, 6)$.

$$M_{AC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (1, 1)$$

m_b té vector de direcció $\vec{d} = (6, -4)$ i passa per $M_{BC} = (1, 1)$.

$$m_b: \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-4}$$

c) m_c és perpendicular a AB i passa per M_{AB}.

AB té vector de direcció $\overrightarrow{AB} = (4, 4) = 4(1, 1)$.

$$M_{AB} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (1, 0)$$

m_c té vector de direcció $\vec{d} = (1, -1)$ i passa per $M_{AB} = (1, 0)$.

$$m_c: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} \rightarrow -x + 1 = y$$

33 Troba, en cada cas, el valor de k perquè la recta $r: y = kx + 1$ sigui:

a) Paral·lela a l'eix OX. b) Perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.

Pendent de r: $m = k$

a) Pendent de l'eix OX: $m' = 0$; per tant, $m = m' = 0 \rightarrow k = 0$

b) Pendent de $2x + 3y + 7 = 0$: $m' = -\frac{2}{3}$; per tant, $m = -\frac{1}{m'} = \frac{3}{2} \rightarrow k = \frac{3}{2}$

34 Troba el punt simètric de $P(1, 1)$ respecte a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

* ***Mira el problema resolt número 2.***

Anomenem r la recta: $x - 2y - 4 = 0$.

s: Perpendicular a r que passa per $P = (1, 1)$

s té vector de direcció $\vec{d} = (1, -2)$

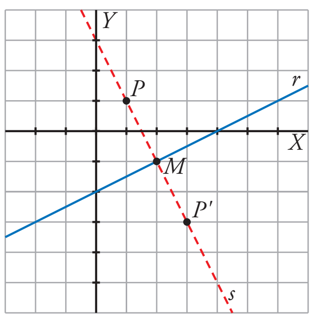
$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \rightarrow -2x + 2 = y - 1 \rightarrow -2x - y + 3 = 0$$

M = punt de tall de les rectes

$$\begin{cases} -2x - y + 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = -1 \rightarrow M = (2, -1)$$

M és el punt mitjà entre P i $P' = (x, y)$, el seu simètric respecte de r.

$$(2, -1) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{x+1}{2} \rightarrow x = 3 \\ -1 = \frac{y+1}{2} \rightarrow y = -2 \end{cases} \rightarrow P' = (3, -3)$$



Posició relativa de dues rectes

35 **Estudia la posició relativa dels parells de rectes següents. Calcula'n el punt de tall quan siguin secants.**

a) $r: 5x + y + 7 = 0$; $s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0$; $s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

d) $r: y = 2x + 1$; $s: y = \dfrac{-1}{2}x + 1$

a) Busquem un vector direcció de cada recta:

$r: 5x + y + 7 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (5, 1) \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 5)$

$s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (2, -10)$

Com que els vectors direcció són proporcionals $(\vec{v}_s = -2\vec{v}_r)$, les rectes o són paral·leles o són coincidents.

Com que $P(1, -3) \in s$ i $P \notin r$, les rectes són paral·leles.

b) Busquem un vector direcció de cada recta:

$r: 3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5) \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 3)$

$s: -3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (-3, 5) \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3)$

Com que els vectors direcció no són proporcionals, les rectes són secants.

Resolent el sistema format per les equacions de les dues rectes s'obté el punt de tall, (0, –2).

c) Busquem un vector direcció de cada recta

$r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (3, 1)$

$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, 2)$

Com que els vectors direcció no són proporcionals, les rectes són secants.

El punt de tall s'obté prenent $t = 1$ en la recta r i $t = 2$ en la recta s. És el punt (2, 4).

d) $m_r = 2$; $m = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Les rectes són perpendiculars.

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 1 \rightarrow$ Punt de tall $P = (0, 1)$.

36 **Calcula el valor dels paràmetres k i t perquè les rectes següents es tallin en el punt $A(1, 2)$:**

$r: kx - ty - 4 = 0$ $\qquad$ $s: 2tx + ky - 2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} A \in r \rightarrow k \cdot 1 - t \cdot 2 - 4 = 0 \\ A \in s \rightarrow 2t \cdot 1 + k \cdot 2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} k - 2t - 4 = 0 \\ 2k + 2t - 2 = 0 \end{array}\right\}$ Resolent el sistema: $k = 2,\ t = -1$

37 **Determina k perquè les rectes r i s siguin paral·leles.**

$r: \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y}{-2}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x + 5}{-6} = \dfrac{y - 1}{k}$

Perquè siguin paral·leles, els seus vectors direcció han de ser proporcionals; és a dir:

$\dfrac{3}{-6} = \dfrac{-2}{k} \rightarrow k = 4$

38 **Troba el valor de k perquè aquestes rectes siguin coincidents:**

r: $2x + 3y + 5 = 0$

$$s: \begin{cases} x = -6t + k \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

Expressem ambdues rectes en forma implícita:

r: $2x + 3y + 5 = 0$

s: $4x + 6y - 12 - 4k = 0$

Perquè $r = s$, aquestes equacions han de ser proporcionals i, per tant:

$$-12 - 4k = 10 \;\rightarrow\; k = \frac{22}{-4} = \frac{-11}{2}$$

39 **Calcula k perquè r i s siguin perpendiculars.**

r: $y = 2x + 1$

s: $3x + ky + 3 = 0$

$m_r = 2;\; m_s = -\dfrac{3}{k}$

Perquè siguin perpendiculars, $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Per tant, $2 = \dfrac{k}{3} \;\rightarrow\; k = 6$

Angles

40 **Troba l'angle que formen els parells de rectes següents:**

a) **r: $y = 2x + 5$; s: $y = -3x + 1$**

b) **r: $3x - 5y + 7 = 0$; s: $10x + 6y - 3 = 0$**

c) $r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$

d) **r: $2x - y = 0$; s: $2y + 3 = 0$**

a) $\left.\begin{array}{l} r\text{: } y = 2x + 5 \\ s\text{: } y = -3x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ els seus pendents són: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \rightarrow cos\,\alpha = \dfrac{|\vec{v} \bullet \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{|30 - 30|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 90°$

c) Els vectors de direcció d'aquestes rectes són $\vec{d}_1 = (-1, 2)$ i $\vec{d}_2 = (-3, 1)$.

Aleshores:

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{d}_1 \bullet \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a}_2 = (0, 2) \perp r_2 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2} \rightarrow$

$$\rightarrow cos\,\alpha = \frac{|\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}4472 \;\rightarrow\; \alpha = 63°\, 26'\, 5{,}82''$$

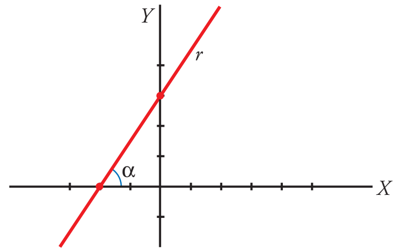
41 **Quin angle forma $3x - 2y + 6 = 0$ amb l'eix d'abscisses?**

* ***El pendent de la recta és la tangent de l'angle que forma amb l'eix d'abscisses. Troba l'angle amb el pendent de la recta.***

El pendent de r és $m_r = \frac{3}{2}$.

El pendent de r és, a més, $tg\,\alpha$:

$m_r = tg\,\alpha \rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha = 56°\ 18'\ 35{,}8''$

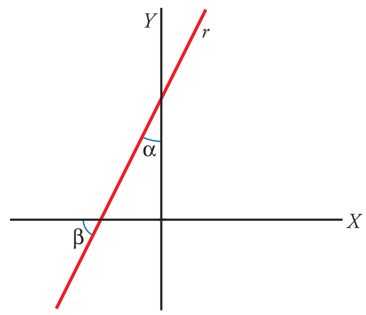


42 **Quin angle forma la recta $2x - y + 5 = 0$ amb l'eix d'ordenades?**

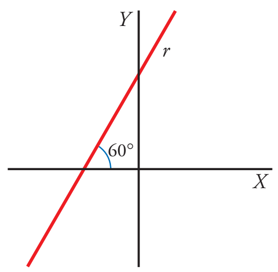
L'angle demanat, α, és complementari de $\beta \rightarrow tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\alpha}$

Per altra banda, $tg\,\beta = m_r = 2$:

$tg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54{,}2''$



43 **Calcula n de manera que la recta $3x + ny - 2 = 0$ formi un angle de 60° amb l'eix OX.**



$$\left.\begin{array}{l} tg\,60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\dfrac{3}{n} \end{array}\right\}\ \text{Com que } tg\,60° = m_r,\ \text{tenim que:}$$

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \rightarrow n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

44 **Calcula m i n en aquestes rectes sabent que r passa pel punt $P(1, 4)$ i que r i s formen un angle de 45°:**

r: $mx - 2y + 5 = 0$ $\qquad$ s: $nx + 6y - 8 = 0$

$P \in r \rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \rightarrow m = 3$

r: $3x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow m_r = \frac{3}{2}$

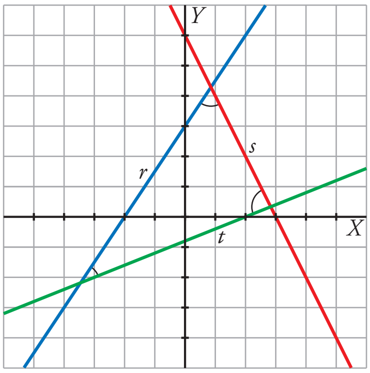
s: $nx + 6y - 8 = 0 \rightarrow y = -\frac{n}{6}x + \frac{8}{6} \rightarrow m_s = -\frac{n}{6}$

$$tg\,45° = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| = \left|\frac{-(n/6) - (3/2)}{1 - (n/6)(3/2)}\right| = \left|\frac{-2n - 18}{12 - 3n}\right| = 1$$

Hi ha dues possibilitats:

- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = 1 \rightarrow -2n - 18 = 12 - 3n \rightarrow n = 30$
- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = -1 \rightarrow -2n - 18 = -12 + 3n \rightarrow n = -\frac{6}{5}$

45 **Les rectes $r: 3x - 2y + 6 = 0$, $s: 2x + y - 6 = 0$ i $t: 2x - 5y - 4 = 0$ són els costats d'un triangle. Representa'l i troba'n els angles.**



$\vec{d}_r = (2, 3)$, $\vec{d}_s = (-1, 2)$, $\vec{d}_t = (5, 2)$

$$\cos(\widehat{r, s}) = \left| \frac{(2,3) \cdot (-1,2)}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{1+4}} \right| = 0{,}49 \to (\widehat{r, s}) = 60°\ 16'$$

$$\cos(\widehat{r, t}) = \left| \frac{(2,3) \cdot (5,2)}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{25+4}} \right| = 0{,}82 \to (\widehat{r, t}) = 34°\ 30'$$

$$\cos(\widehat{s, t}) = \left| \frac{(-1,2) \cdot (5,2)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{25+4}} \right| = 0{,}08 \to (\widehat{s, t}) = 85°\ 14'$$

Pàgina 211

Distàncies i àrees

46 **Calcula k de manera que la distància entre els punts $A(5, k)$ i $B(3, -2)$ sigui igual a 2.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2 - k)$

$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \to 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \to k^2 + 4k + 4 = 0 \to k = -2$

47 **Determina, en cada cas, si el triangle ABC és equilàter, isòsceles o escalè.**

a) $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$ **b)** $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 7)$ **c)** $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$

a) $dist(A, B) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2$

$dist(A, C) = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

$dist(B, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

Triangle equilàter.

b) $dist(A, B) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}$

$dist(A, C) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = 2\sqrt{5}$

$dist(B, C) = \sqrt{(3+1)^2 + (5-7)^2} = 2\sqrt{5}$

Triangle isòsceles.

c) $dist(A, B) = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

$dist(A, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

$dist(B, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

Triangle isòsceles.

48 **Troba la longitud del segment que és determinat per la recta $x - 2y + 5 = 0$ en tallar els eixos de coordenades.**

S'ha de calcular la distància entre els punts de tall de la recta amb els eixos de coordenades.

Calculem primer aquests punts:

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow -2y + 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5}{2} \rightarrow A\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ és el punt de tall amb l'eix Y.
- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow B(5, 0)$ és el punt de tall amb l'eix X.
- Aleshores $\overline{AB} = dist(A, B) = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0 - \dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

49 **Troba les distàncies de $O(0, 0)$ i $P(-1, 2)$ a aquestes rectes:**

a) $3x - 4y + 5 = 0$ **b)** $2x + 5 = 0$ **c)** $\begin{cases} x = 6t \\ y = 8t \end{cases}$ **d)** $(x, y) = \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right) + (2, 1)k$

a) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{9+16}} = 1$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{6}{5}$ u

b) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{5}{2}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{3}{2}$ u

c) $r\colon \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{8} \rightarrow 8x - 6y = 0$

$dist(O, r) = \dfrac{|0|}{\sqrt{64+36}} = 0$ u $\rightarrow O \in r$

$dist(P, r) = \dfrac{|8 \cdot (-1) - 6 \cdot 2|}{\sqrt{64+36}} = 2$ u

d) $r\colon \dfrac{x + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x + \dfrac{1}{2} = 2y - 2 \rightarrow x - 2y + \dfrac{3}{2} = 0 \rightarrow 2x - 4y + 3 = 0$

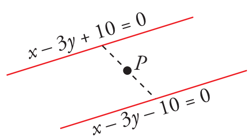
$dist(O, r) = \dfrac{|3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{3}{10}\sqrt{5}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{7}{10}\sqrt{5}$ u

50 **Determina c perquè la distància de $r\colon x - 3y + c = 0$ al punt $(6, 2)$ sigui de $\sqrt{10}$ unitats (hi ha dues solucions).**

$dist(P, r) = \dfrac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Hi ha dues solucions: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \rightarrow c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \rightarrow c_2 = -10 \end{cases}$



Les dues rectes solució seran dues rectes paral·leles.

51 **Troba la distància entre els parells de rectes següents:**

a) r: $3x + 5 = 0$; r': $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 4k \end{cases}$

b) r: $y = \dfrac{-2}{3}x + 1$; r': $\dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y+1}{2}$

a) $P' = (0, 0) \in r'$

$$dist(r, r') = dist(P', r) = \frac{|5|}{\sqrt{9+0}} = \frac{5}{3} \text{ u}$$

b) Les rectes són paral·leles.

$P' = (1, -1) \in r'$

r: $2x + 3y - 1 = 0$

$$dist(r, r') = dist(P', r) = \frac{|2-3-1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{13}\sqrt{13} \text{ u}$$

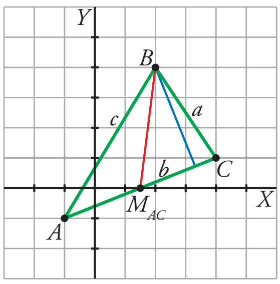
52 **Comprova que el triangle de vèrtexs $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ i $C(4, 2)$ és rectangle i troba'n l'àrea.**

Vegem si es compleix el teorema de Pitàgores:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{array}\right\} 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2 \rightarrow \text{Per tant, el triangle és rectangle.}$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5 \text{ u}^2$$

53 **En el triangle de vèrtexs $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ i $C(4, 1)$, troba les longituds de la mitjana i de l'altura que surten de B.**



a) Longitud de la mitjana = $dist(B, M_{AC})$

$$M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$dist\ (B, M_{AC}) = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (4-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

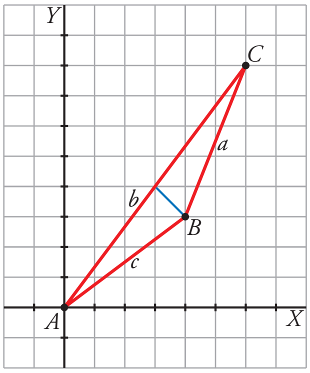
b) Longitud de l'altura = $dist(B$, costat $AC)$

$\overrightarrow{AC} = (5, 2)$

r: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+1}{2} \rightarrow 2x + 2 = 5y + 5 \rightarrow$ costat AC: $2x - 5y - 3 = 0$

$$dist(B, r) = \frac{|2 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{4+25}} = \frac{19}{29}\sqrt{29} \text{ u}$$

54 **Donat el triangle de vèrtexs $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ i $C(6, 8)$, calcula'n l'àrea.**



$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Base} = dist(A, C) = \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2} = 10 \text{ u}$$

$$\text{Altura} = dist(B, \text{costat } AC)$$

Costat AC:

$$\overrightarrow{AC} = (6, 8)$$

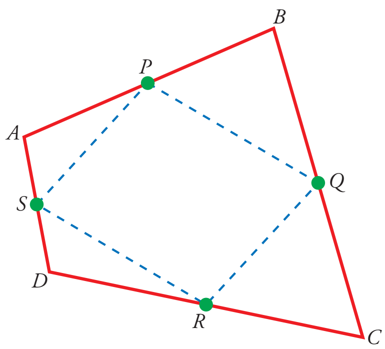
$$r\text{: } \frac{x}{6} = \frac{y}{8} \rightarrow 8x - 6y = 0 \rightarrow 4x - 3y = 0$$

$$dist(B, \text{costat } AC) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5} \text{ u}$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5} = 7 \text{ u}^2$$

Per resoldre

55 **Els punts mitjans dels costats de qualsevol quadrilàter formen un paral·lelogram. Comprova-ho en el quadrilàter de vèrtexs $A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$ i $D(-1, 6)$.**



$$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 5)$$

$Q(3, 1)$; $R(0, 3)$; $S(1, 7)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (3-4,\ 1-5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0-1,\ 3-7) = (-1, -4)\end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{SP} = (4-1,\ 5-7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3-0,\ 1-3) = (3, -2)\end{array}\right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$$

56 En un triangle equilàter coneixem dos vèrtexs, $A(\sqrt{3}/2, 0)$ i $B(-\sqrt{3}/2, 0)$. Troba el tercer vèrtex.

El vèrtex $C = (x, y)$ està en la mediatriu del segment AB i $dist(A, C) = dist(A, B)$.

r: Mediatriu de AB

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 0)$

Punt mitjà de AB:

$M_{AB} = (0, 0)$

$r: x = 0$

$$dist(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4}}$$

$$dist(A, B) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{3}$$

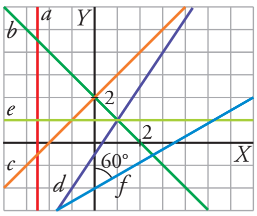
Les coordenades de C són la solució del sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3} \rightarrow y = -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$$

Hi ha dos triangles equilàters amb vèrtexs A i B:

$$C = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right),\ C' = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right)$$

57 Troba les equacions de les rectes *a*, *b*, *c*, *d*, *e* i *f*:



$a \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

$b \rightarrow \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{-1}$

$c \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y - 2}{1}$

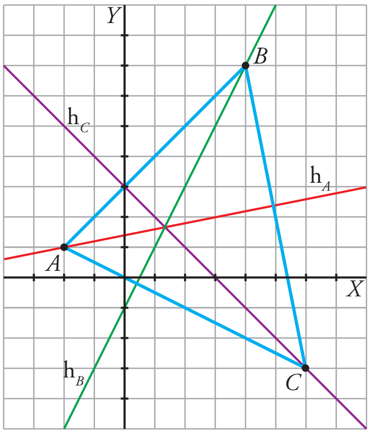
$d \rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{3}$

$e \rightarrow y = 1$

$f \rightarrow$ Si f forma un angle de 60° amb l'eix vertical, aleshores forma un angle de 30° amb l'eix horitzontal positiu.

Un vector el pendent del qual sigui de 30° té coordenades proporcionals a $(3, \sqrt{3})$; per tant, l'equació de la recta és: $\frac{x}{3} = \frac{y + 2}{\sqrt{3}}$

58 **Calcula les equacions de les altures del triangle de vèrtexs $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ i $C(6, -3)$. Després, troba'n l'ortocentre.**



- h_A és perpendicular a BC i passa per $A = (1, 3)$.

  $\overrightarrow{BC} = (2, -10) = 2(1, -5)$

  h_A té vector de direcció $\vec{d} = (5, 1)$ i passa per $A = (-2, 1)$.

  h_A: $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x + 2 = 5y - 5 \rightarrow x - 5y + 7 = 0$

- h_B és perpendicular a AC i passa per $B = (4, 7)$.

  $\overrightarrow{AC} = (8, -4) = 4(2, -1)$

  h_B té vector de direcció $\vec{d} = (1, 2)$ i passa per $B = (4, 7)$.

  h_B: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{2} \rightarrow 2x - 8 = y - 7 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$

- h_C és perpendicular a AB i passa per $C = (6, -3)$.

  $\overrightarrow{AB} = (6, 6) = 6(1, 1)$

  h_C té vector de direcció $\vec{d} = (-1, 1)$ i passa per $C = (6, -3)$.

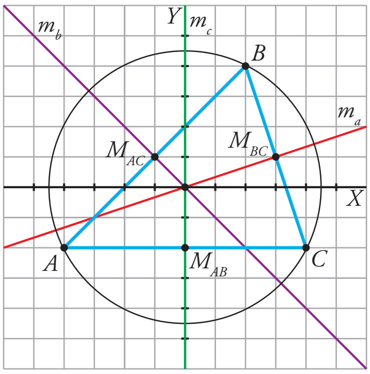
  h_C: $\dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y+3}{1} \rightarrow x - 6 = -y - 3 \rightarrow x + y - 3 = 0$

L'ortocentre és el punt d'intersecció de les altures. Com que les tres altures es tallen en el mateix punt, per calcular l'ortocentre n'hi ha prou de resoldre el sistema format per dues de les altures.

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$$

Les coordenades de l'ortocentre són $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

59 **Dóna les equacions de les mediatrius del triangle de vèrtexs $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ i $C(2, 4)$. Troba'n el circumcentre.**



- m_a és perpendicular a BC i passa per M_{BC}.

  BC té vector de direcció $\overrightarrow{BC} = (-2, 6) = 2(-1, 3)$.

  $M_{BC} = (3, 1)$

  m_a té vector de direcció $\vec{d} = (3, 1)$ i passa per $M_{BC} = (3, 1)$.

  $$m_a\colon \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} \rightarrow x - 3y = 0$$

- m_b és perpendicular a AC i passa per M_{AC}.

  AC té vector de direcció $\overrightarrow{AC} = (6, 6) = 6(1, 1)$.

  $M_{AC} = (-1, 1)$

  m_b té vector de direcció $\vec{d} = (1, -1)$ i passa per $M_{BC} = (-1, 1)$.

  $$m_b\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow x + y = 0$$

- m_c és perpendicular a AB i passa per M_{AB}.

  AB té vector de direcció $\overrightarrow{AB} = (8, 0) = 8(1, 0)$.

  $M_{AB} = (0, -2)$

  m_c té vector de direcció $\vec{d} = (0, 1)$ i passa per $M_{AB} = (0, -2)$.

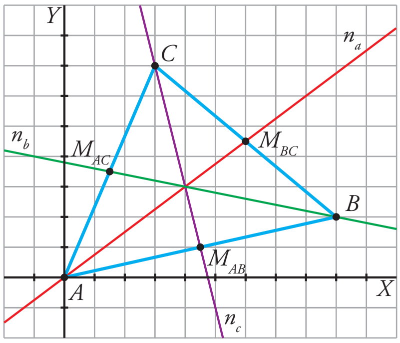
  $m_c\colon x = 0$

El circumcentre és el punt d'intersecció de les mediatrius. Com que les tres mediatrius es tallen en el mateix punt, per calcular el circumcentre n'hi ha prou de resoldre el sistema format per dues de les mediatrius.

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0,\ y = 0$$

Les coordenades del circumcentre són: (0, 0).

60 **En el triangle de vèrtexs $A(0, 0)$, $B(9, 2)$ i $C(3, 7)$, determina les equacions de les mitjanes i calcula'n el baricentre.**



- n_a passa per A i per M_{BC}.

  $M_{BC} = \left(\frac{12}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(6, \frac{9}{2}\right)$

  $\overrightarrow{AM_{BC}} = \left(6, \frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}(4, 3)$

  n_a té vector de direcció $\vec{d} = (4, 3)$ i passa per $A = (0, 0)$.

  n_a: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \rightarrow 3x - 4y = 0$

- n_b passa per B i per M_{AC}.

  $M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

  $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{-15}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-5, 1)$

  n_b té vector de direcció $\vec{d} = (-5, 1)$ i passa per $B = (9, 2)$.

  n_b: $\frac{x-9}{-5} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 9 = -5y + 10 \rightarrow x + 5y - 19 = 0$

- n_c passa per C i per M_{AB}.

  $M_{AB} = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

  $\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, -6\right) = \frac{3}{2}(1, -4)$

  n_c té vector de direcció $\vec{d} = (1, -4)$ i passa per $C = (3, 7)$.

  n_c: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-4} \rightarrow -4x + 12 = y - 7 \rightarrow -4x - y + 19 = 0$

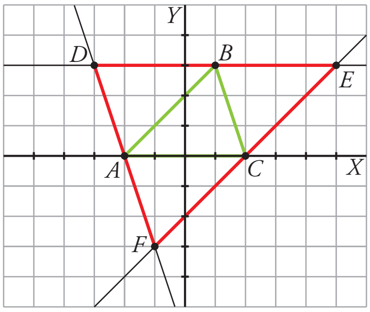
El baricentre és el punt d'intersecció de les mitjanes. Com que les tres mitjanes es tallen en el mateix punt, per calcular el baricentre n'hi ha prou de resoldre el sistema format per dues de les mitjanes.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -4x - y + 19 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 4,\ y = 3$$

Les coordenades del baricentre són: (4, 3).

61 **En un triangle de vèrtexs $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ i $C(2, 0)$, tracem en cada vèrtex una recta paral·lela al costat oposat. Troba els vèrtexs del triangle que determinen els punts de tall d'aquestes rectes i comprova que és semblant a ABC.**

* ***Per comprovar que dos triangles són semblants, només cal veure que els seus angles són iguals.***



$\overrightarrow{AB} = (3, 3) = 3(1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (4, 0) = 4(1, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

El costat EF:

- És paral·lel a AB i passa per C.
- Té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $C = (2, 0)$.
- $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} \rightarrow x - 2 = y \rightarrow x - y - 2 = 0$

El costat DE:

- És paral·lel a AC i passa per B.
- Té vector de direcció $\vec{d} = (1, 0)$ i passa per $B = (1, 3)$.
- $y = 3$

El costat DF:

- És paral·lel a BC i passa per A.
- Té vector de direcció $\vec{d} = (1, -3)$ i passa per $C = (-2, 0)$.
- $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} \rightarrow -3x - 6 = y \rightarrow -3x - y - 6 = 0$

Els punts de tall de cada parell de rectes són: $D(-3, 3)$, $E(5, 3)$ i $F(-1, -3)$.

$$\cos\widehat{D} = \cos\left(\widehat{(1,-3),(1,0)}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}\right) = \cos\widehat{C}$$

$$\cos\widehat{E} = \cos\left(\widehat{(1,1),(1,0)}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \cos\widehat{A}$$

Si tenen dos angles iguals, els triangles són semblants.

62 **La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, en tallar els eixos de coordenades, el segment AB. Troba l'equació de la mediatriu de AB.**

Equació de l'eix OX: $y = 0$. Equació de l'eix OY: $x = 0$.

Punts de tall de r amb els eixos:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 0 \rightarrow A = (3, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 2 \rightarrow B = (0, 2)$$

$\overrightarrow{AB} = (-3, 2)$; $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

La mediatriu de AB té vector de direcció $\vec{d} = (2, 3)$ i passa per $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

Mediatriu de AB: $\dfrac{x - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{3}$

63 **Troba el peu de la perpendicular traçada des de $P(1, -2)$ a la recta $r: x - 2y + 4 = 0$.**

* *Escriu la perpendicular a r des de P i troba el punt de tall amb r.*

Vector normal a r: $\vec{n} = (1, -2)$

La recta s, perpendicular a r que passa per P, té vector de direcció $\vec{d} = (1, -2)$ i passa per $P(1, -2)$.

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} \rightarrow -2x + 2 = y + 2 \rightarrow -2x - y = 0$$

El peu de la perpendicular Q és la intersecció de les dues rectes r i s.

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{4}{5}, y = \frac{8}{5} \rightarrow Q = \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

64 **D'un rombe $ABCD$ sabem que els vèrtexs B i D estan en la recta $r: y = 2x + 2$ i que $A(4, 0)$. Troba les coordenades de C.**

La diagonal BD és en la recta r.

Les diagonals d'un rombe són perpendiculars i es tallen en el punt mitjà; la perpendicular s traçada des de A a la recta r tallarà aquesta recta en el punt mitjà M entre A i $C = (x, y)$.

La recta s perpendicular a r té pendent $m = -\frac{1}{2}$ i passa per $A = (4, 0)$.

$$s: y = -\frac{1}{2}x + k$$

Substituïm les coordenades de A en l'equació per calcular k.

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + k \rightarrow k = 2 \rightarrow s: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$M = r \cap s$

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 2 \rightarrow M = (0, 2)$$

$$(0, 2) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{x+4}{2} \rightarrow x = -4 \\ 2 = \frac{y}{2} \rightarrow y = 4 \end{cases} \rightarrow C = (-4, 4)$$

65 **Calcula l'àrea del triangle els costats del qual són sobre les rectes $r: x = 3$; $s: 2x + 3y - 6 = 0$ i $t: x - y - 7 = 0$.**

Els vèrtexs són en la intersecció de les rectes.

$A = r \cap s$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 0 \rightarrow A = (3, 0)$$

$B = r \cap t$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = -4 \rightarrow B = (3, -4)$$

$C = s \cap t$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{27}{5}, y = -\frac{8}{5} \rightarrow C = \left(\frac{27}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Base} = dist(A,\, B) = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = 4 \text{ u}$$

$$\text{Altura} = dist(C,\, costat\ AB)$$

$$Costat\ AB = l;\ \ \overrightarrow{AB} = (0,\, 4) = 4(0,\, 1)$$

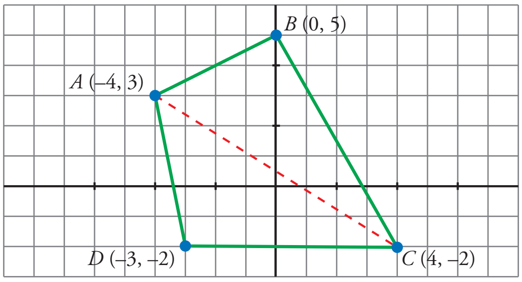
l té vector de direcció $\vec{d} = (0,\, 1)$ i passa per $A = (3,\, 0)$.

$$l\colon x = 3 \ \rightarrow\ x - 3 = 0$$

$$dist(C,\, costat\ AB) = \frac{\left|\frac{27}{5} - 3\right|}{1} = \frac{12}{5} \text{ u}$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5} \text{ u}^2$$

66 **Troba l'àrea del quadrilàter de vèrtexs $A(-4,\, 3)$, $B(0,\, 5)$, $C(4,\, -2)$ i $D(-3,\, -2)$.**



- La diagonal AC divideix el quadrilàter en dos triangles amb la mateixa base, la mida de la qual és:

  $$|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$$

- Siguin h_B i h_D les altures des de B i D, respectivament, a la base:

  $$h_B = dist(B,\, r) \ \text{ i } \ h_D = dist(D,\, r)$$

  on r és la recta que conté el segment $\overrightarrow{AC}$.

  Prenent com a vector direcció de r el vector $\overrightarrow{AC}$, l'equació d'aquesta recta és:

  $$5x + 8y + k = 0$$
  $$\text{Com que } (-4, 3) \in r \ \rightarrow\ -20 + 24 + k = 0 \ \rightarrow\ k = -4 \ \rightarrow\ r\colon 5x + 8y - 4 = 0$$

  Aleshores:

  $$h_B = dist(B,\, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

  $$h_D = dist(D,\, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

- Així:

  $$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) = \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

67 **El costat desigual del triangle isòsceles ABC té per extrems $A(1, -2)$ i $B(4, 3)$. El vèrtex C és en la recta $3x - y + 8 = 0$. Troba les coordenades de C i l'àrea del triangle.**

- La recta del costat desigual (base) té com a vector de direcció $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \rightarrow r: 5x - 3y - 11 = 0$$

- La recta que conté l'altura té per vector de direcció $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ i passa pel punt mitjà del costat desigual AB; és a dir, per $M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$h_c: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases} \rightarrow \frac{2x-5}{-10} = \frac{2y-1}{6} \rightarrow h_c: 12x + 20y - 40 = 0 \rightarrow h_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

- $C = s \cap h_c$ on $s: 3x - y + 8 = 0$.

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + \ 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + \ \ 2y - 16 = 0 \\ \ \ \ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$12y - 36 = 0 \rightarrow y = \frac{36}{12} = 3 \rightarrow 3x - 3 + 8 = 0 \rightarrow 3x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

Aleshores: $C\left(\frac{-5}{3}, 3\right)$

- $\text{Àrea} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CM}|}{2} \overset{(*)}{=} \dfrac{\sqrt{34} \cdot \sqrt{\left(\frac{850}{6}\right)}}{2} \approx 14,17$

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{CM}\left(\frac{-25}{6}, \frac{-5}{2}\right) \rightarrow |\overrightarrow{CM}| = \frac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

68 **Calcula c perquè la distància entre les rectes d'equacions $4x + 3y - 6 = 0$ i $4x + 3y + c = 0$ sigui igual a 3.**

Sigui $P \in r_1$, on $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 2 \rightarrow P(0, 2) \in r_1$

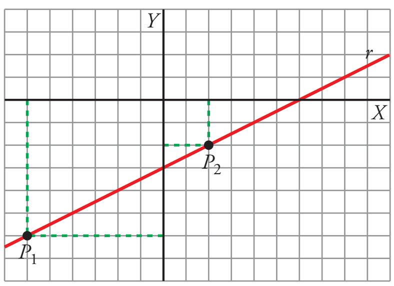
Així, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16+9}} = 3 \rightarrow \dfrac{|6+c|}{5} = 3 \rightarrow \begin{cases} 6 + c = 15 \rightarrow c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \rightarrow c_2 = -21 \end{cases}$

69 **Troba un punt en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidisti dels eixos de coordenades.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eix } X: y = 0 \\ \text{Eix } Y: x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} dist\,(P, \text{eix } X) = dist\,(P, \text{eix } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{0^2+1^2}} \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{dos casos: } \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y - 2y - 6 = 0 \rightarrow y_1 = -6 \rightarrow x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \rightarrow y_2 = -2 \rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1(-6, -6) \\ P_2(2, -2) \end{cases}$$



70 **Determina, en cada cas, un punt P de la recta $r: y = -x + 1$ tal que:**

a) la distància de P a $s: 3x - 4y + 2 = 0$ sigui 1.

b) P disti 3 unitats de l'eix OX.

c) la distància de P a l'eix OY sigui de 4 unitats.

d) P equidisti de les rectes $x - y + 5 = 0$ i $x + y + 1 = 0$.

a) $P = (x, y)$

$P \in r \rightarrow y = -x + 1$

$dist(P, r) = \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9+16}} = 1$

Les coordenades de P són la solució del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9+16}} = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{|3x - 4(-x+1) + 2|}{\sqrt{9+16}} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x - 4(-x+1) + 2}{\sqrt{9+16}} = 1 \rightarrow x = 1 \\ \dfrac{3x - 4(-x+1) + 2}{\sqrt{9+16}} = -1 \rightarrow x = -\dfrac{3}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 0 \\ x = -\dfrac{3}{7} \rightarrow y = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Solucions: $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(-\dfrac{3}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$

b) Eix OX: $y = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|y|}{1} = 3$

Les coordenades de P són la solució del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|y|}{1} = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{|-x+1|}{1} = 3 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x+1}{1} = 3 \rightarrow x = -2 \\ \dfrac{-x+1}{1} = -3 \rightarrow x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow y = 3 \\ x = 4 \rightarrow y = -3 \end{cases}$$

Solucions: $P_1 = (-2, 3)$, $P_2 = (4, -3)$

c) Eix OY: $x = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|x|}{1} = 4$

Les coordenades de P són la solució del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|x|}{1} = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1} = 4 \rightarrow x = 4 \\ \dfrac{x}{1} = -4 \rightarrow x = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = -3 \\ x = -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

Solucions: $P_1 = (4, -3)$, $P_2 = (-4, 5)$

d) $dist(P, r) = \dfrac{|x - y + 5|}{\sqrt{1+1}}$, $dist(P, r') = \dfrac{|x + y + 1|}{\sqrt{1+1}}$

Les coordenades de P són la solució del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|x - y + 5|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|x + y + 1|}{\sqrt{1+1}} \end{cases} \rightarrow |x - (-x+1) + 5| = |x + (-x+1) + 1| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - (-x+1) + 5 = x + (-x+1) + 1 \rightarrow x = -1 \\ x - (-x+1) + 5 = -(x + (-x+1) + 1) \rightarrow x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow y = 2 \\ x = -3 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Solucions: $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (-3, 4)$

Pàgina 212

71 **Troba un punt de l'eix d'abscisses que equidisti de les rectes $4x + 3y + 6 = 0$ i $3x + 4y - 9 = 0$.**

$P(x, 0)$ ha de verificar $dist(P, r) = dist(P, s)$:

$$\frac{|4x+3\cdot 0+6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4\cdot 0-9|}{\sqrt{25}} \to \begin{cases} 4x+6 = 3x-9 \to x_1 = -15 \\ 4x+6 = -(3x-9) \to x_2 = 3/7 \end{cases}$$

Solucions: $P_1(-15, 0)$, $P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$

72 **Troba l'equació de la recta que passa pel punt d'intersecció de les rectes r i s i forma un angle de 45° amb la recta $x + 5y - 6 = 0$.**

r: $3x - y - 9 = 0$ **s: $x - 3 = 0$**

Anomenem t la recta que busquem. t passa per $P = r \cap s$ i té pendent m.

$$tg\ 45° = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \to 1 = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \to \begin{cases} \dfrac{m-5}{1+5m} = 1 \to m = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{m-5}{1+5m} = -1 \to m = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \to x = 3, y = 0 \to P = (3, 0)$$

t_1 té pendent $m = -\frac{3}{2}$ i passa per $P = (3, 0)$.

t_1: $y = -\frac{3}{2}(x-3)$

t_2 té pendent $m = \frac{2}{3}$ i passa per $P = (3, 0)$.

t_2: $y = \frac{2}{3}(x-3)$

73 **Donades r: $2x - y - 17 = 0$ i s: $3x - ky - 8 = 0$, calcula k perquè r i s es tallin formant un angle de 60°.**

$$cos\ (\widehat{r, s}) = \left|\frac{(1,2)\cdot(k,3)}{\sqrt{1+4}\sqrt{k^2+9}}\right| \to cos\ 60° = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}}\right| \to \frac{1}{2} = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}} \to k = 24 - 15\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}} \to k = 24 + 15\sqrt{3} \end{cases}$$

Solucions: $k_1 = 24 - 15\sqrt{3}$; $k_2 = 24 + 15\sqrt{3}$

74 **Troba els angles del triangle els vèrtexs del qual són $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ i $C(3, -4)$.**

$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (6, -6) = 6(1, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$

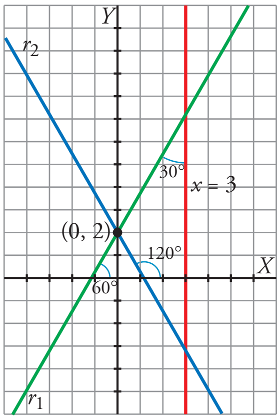
r conté el costat AB; s conté el costat AC; t conté el costat BC

$$cos\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{(11,-3)\cdot(1,-1)}{\sqrt{121+9}\sqrt{1+1}} = 0,87 \to (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 29°\ 45'$$

$$cos\ (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{(-11,3)\cdot(-5,-3)}{\sqrt{121+9}\sqrt{25+9}} = 0,69 \to (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = 46°\ 14'$$

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 180° - (29°\ 45' + 46°\ 14') = 104°\ 1'$$

75 **Troba l'equació de la recta que passa per (0, 2) i forma un angle de 30° amb $x = 3$.**



La recta r forma un angle de 60° o de 120° amb l'eix OX.

El seu pendent és:

$$\begin{cases} m_1 = tg\ 60° = \sqrt{3}, \text{ o bé} \\ m_2 = tg\ 120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Tenint en compte que ha de passar per $P(0, 2)$, les possibles solucions són aquestes:

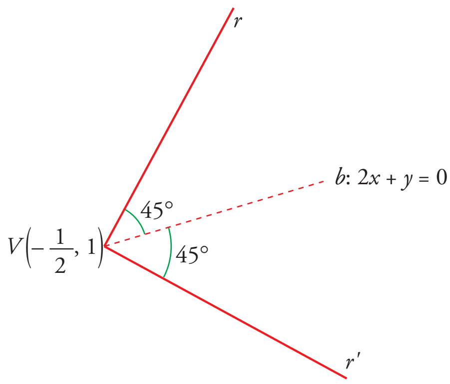
r_1: $y = \sqrt{3}x + 2$

r_2: $y = -\sqrt{3}x + 2$

76 **La recta $2x + y = 0$ és la bisectriu d'un angle recte el vèrtex del qual és $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.**

Troba les equacions dels seus costats.

Els pendents de les tres rectes són: $m_b = -2$, m_r, $m_{r'}$



$$tg\ 45° = \left|\frac{m_b - m_r}{1 + m_b m_r}\right| \rightarrow 1 = \left|\frac{-2 - m_r}{1 - 2m_r}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - 2m_r = -2 - m_r \rightarrow m_r = 3 \\ -1 + 2m_{r'} = -2 - m_{r'} \rightarrow m_{r'} = -1/3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r\text{: } y - 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = 3x + \frac{5}{2} \\ r'\text{: } y - 1 = \frac{-1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{6} \end{cases}$$

77 **Troba les equacions de les rectes que passen per $A(-2, 2)$ i formen un angle de 60° amb $x = y$.**

$b: x = y \rightarrow$ el seu pendent és $m_b = 1$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m}{1+1\cdot m}\right| \rightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{1-m}{1+m}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}+\sqrt{3}m = 1-m \rightarrow m_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \\ -\sqrt{3}-\sqrt{3}m = 1-m \rightarrow m_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

Tenint en compte que passen per $A(-2, 2)$:

$$r_1: y-2 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(x+2)$$

$$r_2: y-2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}(x+2)$$

78 **Donada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, troba l'equació de la recta simètrica de r respecte a l'eix d'abscisses.**

Calculem $P = r \cap OX$:

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{5}{2}, y = 0 \rightarrow P = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

Busquem un punt Q de r i trobem el seu simètric, Q', respecte de OX:

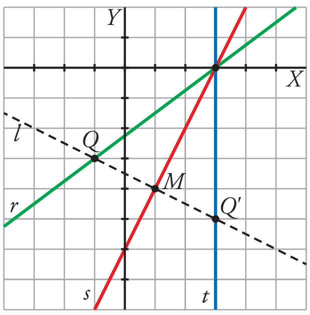
$$Q = \left(0, \frac{5}{3}\right) \rightarrow Q' = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

La recta r' passa per P i per Q':

$$\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{6}(3, -2)$$

$$r': \frac{x+\frac{5}{2}}{3} = \frac{y}{-2}$$

79 **Troba la recta t simètrica a $r: -3x + 4y + 9 = 0$ respecte a la recta $s: 2x - y - 6 = 0$.**



Calculem $P = r \cap s$:

$$\begin{cases} -3x+4y+9=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 0 \rightarrow P = (3, 0)$$

Busquem un punt $Q \neq P$ de r i trobem el seu simètric, Q', respecte de s.

$Q \in r \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -3$

$Q = (-1, -3)$

Simètric de Q respecte de s:

Calculem la recta l perpendicular a s que passa per Q:

l té vector de direcció $\vec{d} = (2, -1)$ i passa per $Q = (-1, -3)$.

l: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} \rightarrow -x-1 = 2y+6 \rightarrow -x-2y-7=0$

$M = s \cap l$

$\begin{cases} -x-2y-7=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \rightarrow x=1, y=-4 \rightarrow M=(1,-4)$

M és el punt mitjà entre Q i $Q' = (x, y)$.

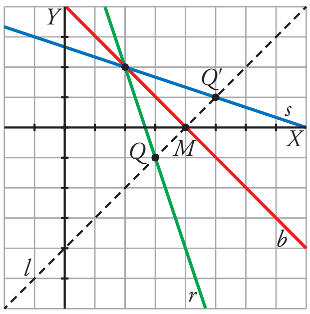
$(1,-4) = \left(\dfrac{x-1}{2}, \dfrac{y-3}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{x-1}{2} \rightarrow x = 3 \\ -4 = \dfrac{y-3}{2} \rightarrow y = -5 \end{cases} \rightarrow Q' = (3,-5)$

La recta t passa per P i per $Q' = (3, -5)$:

$\overrightarrow{PQ'} = (0, -5) = 5(0, 1)$

t: $x = 3$

80 **La recta b: $y = -x + 4$ és la bisectriu de l'angle format per les rectes r: $3x + y - 8 = 0$ i s. Troba l'equació de s.**



s es la simètrica de r respecte de b.

b té pendent $m = -1$. Calculem $P = r \cap b$:

$\begin{cases} 3x+y-8=0 \\ y=-x+4 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = 2 \rightarrow P = (2, 2)$

Busquem un punt $Q \neq P$ de r i trobem el seu simètric, Q', respecte de b.

$Q \in r \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1$

$Q = (3, -1)$

Per trobar el simètric de Q respecte de b, calculem la recta l perpendicular a b que passa per Q:

l té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $Q = (3, -1)$.

l: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{1} \rightarrow x-3 = y+1 \rightarrow x-y-4=0$

$M = b \cap l$

$\begin{cases} y=-x+4 \\ x-y-4=0 \end{cases} \rightarrow x = 4, y = 0 \rightarrow M = (4, 0)$

M és el punt mitjà entre Q i $Q' = (x, y)$:

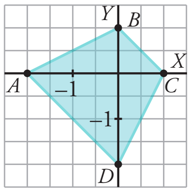
$$(4, 0) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 4 = \dfrac{x+3}{2} \rightarrow x = 5 \\ 0 = \dfrac{y-1}{2} \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow Q' = (5, 1)$$

La recta s passa per P i per $Q' = (5, 1)$

$\overrightarrow{PQ'} = (3, -1)$

$s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{-1}$

81 **Siguin A, B, C i D els punts de tall de les rectes $x - 2y + 2 = 0$ i $2x - y - 2 = 0$ amb els eixos de coordenades. Prova que el quadrilàter $ABCD$ és un trapezi isòsceles i troba'n l'àrea.**



Siguin: $A = r \cap \text{eix } OX: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2 \rightarrow A(-2, 0)$

$B = r \cap \text{eix } OY: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1 \rightarrow B(0, 1)$

$C = s \cap \text{eix } OX: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1 \rightarrow C(1, 0)$

$D = s \cap \text{eix } OY: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2 \rightarrow D(0, -2)$

Calculem els vectors de direcció dels costats:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Aleshores, efectivament, $ABCD$ és un trapezi isòsceles de bases BC i DA.

Per calcular l'àrea necessitem l'altura:

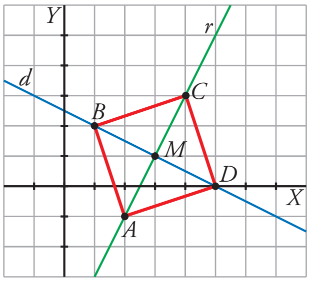
$$\text{Com que } \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \rightarrow y = -x - 2 \rightarrow AD: x + y + 2 = 0$$

$$\text{h} = dist(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Així:

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

82 **D'un quadrat en coneixem l'equació d'una de les diagonals, $d: x + 2y - 5 = 0$, i un vèrtex, $A(2, -1)$. Calcula'n la resta de vèrtexs i l'àrea.**



$A \notin d$; aleshores el vèrtex C és el simètric de A respecte de d.

r: perpendicular a d que passa per A.

r té vector de direcció $\vec{d} = (1, 2)$ i passa per $A = (2, -1)$.

$r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} \rightarrow 2x - y = 5$

$M = r \cap d$

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 1 \rightarrow M = (3, 1)$$

M és el punt mitjà entre A i $C = (x, y)$.

$$(3, 1) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 3 = \dfrac{x+2}{2} \rightarrow x = 4 \\ 1 = \dfrac{y-1}{2} \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow C = (4, 3)$$

El vèrtex $B = (x, y)$ verifica: $B \in d$ i $dist(M, A) = dist(M, B)$; aleshores B és solució del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 2; x = 5, y = 0$$

Aquestes són les coordenades dels vèrtexs que falten: $B = (1, 2)$, $D = (5, 0)$.

Tenim un quadrat de costat $\sqrt{10}$. La seva àrea és $10\ u^2$.

83 **La recta $x + y - 2 = 0$ i una recta paral·lela a aquesta que passa pel punt $(0, 5)$ determinen, juntament amb els eixos de coordenades, un trapezi isòsceles. Troba'n l'àrea.**

$$\left.\begin{matrix} s \mathbin{//} r: x + y - 2 = 0 \rightarrow x + y + k = 0 \\ P(0,5) \in s \end{matrix}\right\} \rightarrow 0 + 5 + k = 0 \rightarrow k = -5$$

Per tant $s: x + y - 5 = 0$

Siguin: $A = r \cap \text{eix } X: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2 \rightarrow A(2,0)$

$B = r \cap \text{eix } Y: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0,2)$

$C = s \cap \text{eix } X: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 5 \rightarrow C(5,0)$

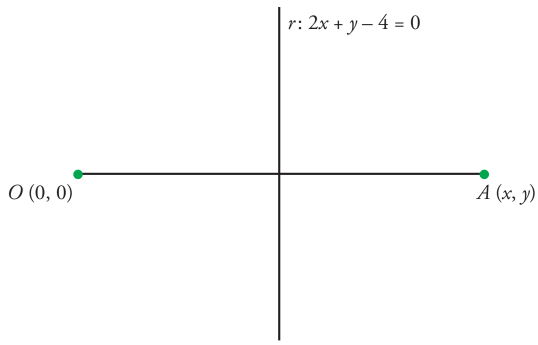
$D = s \cap \text{eix } Y: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 5 \rightarrow D(0,5)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Àrea} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot \text{h} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist\,(A, s) =$$

$$= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2}\ \text{u}^2$$

84 **La recta $2x + y - 4 = 0$ és la mediatriu d'un segment que té un extrem en el punt (0, 0). Troba les coordenades de l'altre extrem.**



Un vector de direcció de la recta és $\vec{v} = (1, -2)$.

- S'ha de verificar que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

  $(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \rightarrow x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$

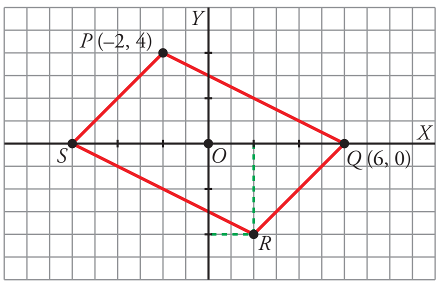
- A més, el punt mitjà de OA, M, pertany a la recta:

$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4y + y - 8 = 0 \rightarrow y = \frac{8}{5} \rightarrow x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Aleshores: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

85 **Els punts $P(-2, 4)$ i $Q(6, 0)$ són vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram $PQRS$ amb centre en el punt (0, 0). Troba els vèrtexs R i S i els angles del paral·lelogram.**



a) Com que les dues diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el seu punt mitjà, que és el centre, obtenim fàcilment els altres dos vèrtexs:

   $R(2, -4)$, $S(-6, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = (8, -4) \rightarrow \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS} = (-8, 4)$

   $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = (-4, -4) \rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ} = (4, 4)$

$$\cos \hat{P} = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PS}||\overrightarrow{PQ}|} = \frac{-32+16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = -0{,}31623 \rightarrow \hat{P} = 108°\ 26'\ 5{,}8'' = \hat{R}$$

$$\hat{S} = \frac{360° - (\widehat{P} + \widehat{R})}{2} = 71°\ 33'\ 54'' = \hat{Q}$$

NOTA: Podríem haver calculat $\hat{S}$ amb els vectors:

$$\cos \hat{S} = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{SP}||\overrightarrow{SR}|} = \frac{32-16}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{80}} = 0{,}31623 \rightarrow \hat{S} = 71°\ 33'\ 54''$$

86 **Dos dels costats d'un paral·lelogram estan sobre les rectes $x + y - 2 = 0$ i $x - 2y + 4 = 0$ i un dels vèrtexs és el punt (6, 0). Troba els altres vèrtexs.**

- Com que les rectes no són paral·leles, el punt on es tallaran serà un vèrtex:

$$\begin{matrix} r_1: \\ r_2: \end{matrix}\begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ \ x + \ \ y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow x + 2 - 2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Aleshores un vèrtex és $A(0, 2)$.

- El vèrtex que ens donen, $C(6, 0)$, no pertany a cap de les rectes anteriors (ja que no verifica les seves equacions, com comprovem fàcilment substituint els valors de x i y per les coordenades de C). Així, doncs, el vèrtex C no és consecutiu de A.

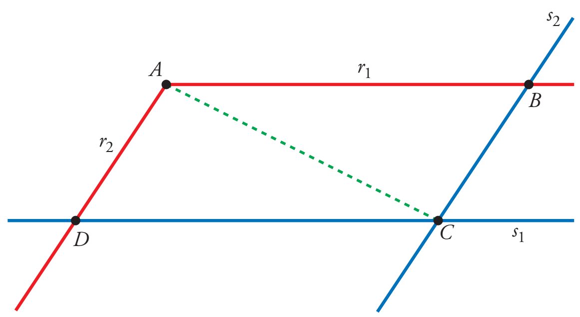
Siguin $s_1 \parallel r_1$ una recta que passa per C i $s_2 \parallel r_2$ una recta que passa per C.

Es tracta de les rectes sobre les quals hi ha els altres costats.

Així, els altres vèrtexs, B i D, seran els punts de tall de:

$r_1 \cap s_2 = B$

$r_2 \cap s_1 = D$



$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \rightarrow 6 + 0 + a = 0 \rightarrow a = -6 \end{cases} \rightarrow s_1: x + y - 6 = 0$$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \rightarrow 6 - 0 + b = 0 \rightarrow b = -6 \end{cases} \rightarrow s_2: x - 2y - 6 = 0$$

- $B = r_1 \cap s_2: \begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Resolent el sistema:

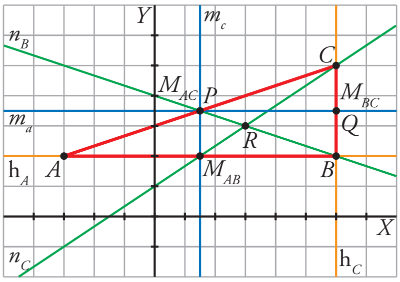
De la primera equació $\rightarrow x = 2 - y \rightarrow$ en la segona $\rightarrow 2 - y - 2y - 6 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{-4}{3} \rightarrow x = \frac{10}{3} \rightarrow B\left(\frac{10}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

- $D = r_2 \cap s_1: \left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + \ \ y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - y \end{cases}\right\} \rightarrow 6 - y - 2y + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{10}{3} \rightarrow x = \frac{8}{3} \rightarrow D\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

87 **En un triangle, baricentre, ortocentre i circumcentre estan alineats. La recta que els conté s'anomena recta d'Euler. Comprova-ho en el triangle de vèrtexs $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$ i $C(6, 5)$.**



- Circumcentre: P.

  Calculem dues mediatrius i la seva intersecció:

  m_a és perpendicular a BC i passa per M_{BC}.

  BC té vector de direcció $\overrightarrow{BC} = (6, 5) - (6, 2) = (0, 2) = 2(0, 1)$

  $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$

  m_a té vector de direcció $\vec{d} = (1, 0)$ i passa per $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$.

  $m_a\colon y = \frac{7}{2}$

  m_c és perpendicular a AB i passa per M_{AB}.

  AB té vector de direcció $\overrightarrow{AB} = (6, 2) - (-3, 2) = (9, 0) = 9(1, 0)$.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  m_c té vector de direcció $\vec{d} = (0, 1)$ i passa per $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

  $m_c\colon x = \frac{3}{2}$

  El circumcentre és el punt d'intersecció de les mediatrius:

  $$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

  Les coordenades del circumcentre són $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

- Baricentre: R.

  Calculem dues medianes i la seva intersecció:

  n_b passa per B i per M_{AC}.

  $M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

  $$\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) - (6, 2) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-3, 1)$$

  n_b té vector de direcció $\vec{d} = (-3, 1)$ i passa per $B = (6, 2)$.

  $$n_b\colon \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{1} \to x - 6 = -3y + 6 \to x + 3y - 12 = 0$$

  n_c passa per C i per M_{AB}.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  $$\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) - (6, 5) = \left(-\frac{9}{2}, -3\right) = -\frac{3}{2}(3, 2)$$

n_c té vector de direcció $\vec{d} = (3, 2)$ i passa per $C = (6, 5)$.

$$n_c: \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{2} \rightarrow 2x - 12 = 3y - 15 \rightarrow 2x - 3y + 3 = 0$$

El baricentre és el punt d'intersecció de les medianes. Com que les tres medianes es tallen en el mateix punt, per calcular el baricentre n'hi ha prou de resoldre el sistema format per dues de les medianes.

$$\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - 3y + \ \ 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 3$$

Les coordenades del baricentre són: $R = (3, 3)$.

- Ortocentre: Q.

Calculem dues altures i la seva intersecció:

h_A és perpendicular a BC i passa per $A = (-3, 2)$.

$\overrightarrow{BC} = (0, 2) = 2(0, 1)$

h_A té vector de direcció $\vec{d} = (1, 0)$ i passa per $A = (-3, 2)$.

h_A: $y = 2$

h_C és perpendicular a AB i passa per $C = (6, 5)$.

$\overrightarrow{AB} = 9(1, 0)$

h_C té vector de direcció $\vec{d} = (0, 1)$ i passa per $C = (6, 5)$.

h_C: $x = 6$

L'ortocentre és el punt d'intersecció de les altures:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Les coordenades de l'ortocentre són: $Q = (6, 2)$.

$P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$; $Q = (6, 2)$; $R = (3, 3)$

Per veure si estan alineats, calculem els vectors:

$$\overrightarrow{PQ} = (6, 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(3, -1)$$

$$\overrightarrow{QR} = (3, 3) - (6, 2) = (-3, 1) = (-1)\,(3, -1)$$

Així, els vectors són proporcionals i, per tant, els punts estan alineats.

88 D'un triangle, en coneixem dos vèrtexs, $A(0, 0)$ i $B(5, 0)$ i la longitud del costat AC, 3. A més, sabem que la tangent de l'angle format pels costats AB i AC és $\frac{4}{3}$.

a) Calcula l'equació del costat AC.

b) Determina el vèrtex C.

c) Troba la longitud de l'altura relativa a C.

d) Obtén l'àrea del triangle.

* ***Pots calcular l'altura usant raons trigonomètriques.***

a) La recta que conté el costat AC té pendent $\frac{4}{3}$ perquè el costat AB és en l'eix OX, i la tangent de l'angle que forma una recta amb l'eix horitzontal positiu és el seu pendent: $r: y = \frac{4}{3}x$.

b) C és en la recta $r: y = \frac{4}{3}x$ i $dist(A, C) = 3$; per tant, C és solució del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{9}{5}, y = -\frac{12}{5};\ x = \frac{9}{5}, y = \frac{12}{5}$$

Com que la tangent de l'angle és positiva, $C = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

c) $AB: y = 0$

Altura = $dist\,(C, AB) = \frac{12}{5}$ u

d) $dist\,(A, B) = 3$ u

Àrea = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$ u^2

89 **Els punts $A(-\sqrt{3}, -3)$, $B(\sqrt{3}, -3)$, $C(2\sqrt{3}, 0)$, $D(\sqrt{3}, 3)$, $E(-\sqrt{3}, 3)$ i $F(-2\sqrt{3}, 0)$ són els vèrtexs d'un hexàgon regular *ABCDEF*. Calcula:**

a) El centre de l'hexàgon, trobant la intersecció de les mediatrius de dos costats consecutius.

b) La longitud de l'apotema.

c) L'àrea del polígon.

a) $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, 0)$

$M_{AB} = (0, -3)$

$m_{AB}: x = 0$

$\overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, 3)$

$M_{BC} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2}\right)$

m_{BC} té vector director: $(-3, \sqrt{3})$

$$m_{BC}: \frac{x - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}}$$

Centre = $m_{AB} \cap m_{BC}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \dfrac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \end{cases} \rightarrow \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \rightarrow y = 0$$

Centre = (0, 0)

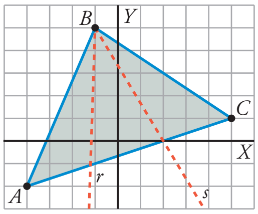
b) Apotema = $dist(M_{BC}, \text{Centre}) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{-3}{2} - 0\right)^2} = 3$ u

c) Àrea = $\frac{1}{2} \cdot$ Perímetre $\cdot$ Apotema

Costat = $dist(A, B) = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (0)^2} = 2\sqrt{3}$ u

Àrea = $\frac{1}{2} \cdot$ Perímetre $\cdot$ Apotema $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ u^2

90 **Donat el triangle de vèrtexs $A(-4,-2)$, $B(-1,5)$ i $C(5,1)$, troba les equacions de les rectes r i s que parteixen de B, tallen AC i divideixen el triangle en tres triangles de la mateixa àrea.**



- L'altura dels tres triangles és igual a la distància de B al costat AC. Per tant, tindran la mateixa àrea si tenen la mateixa base. Així, es tracta de trobar els punts P i Q que divideixen el costat AC en tres parts iguals.

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(-\frac{2}{3},-1\right);\quad \overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}}{3}=\left(\frac{8}{3},0\right)$$

- La recta r és la que passa per B i per P:

$$m=\frac{-1-5}{(-2/3)-(-1)}=\frac{-6}{(1/3)}=-18$$

$$y=5-18(x+1)\ \rightarrow\ r:\ 18x+y+13=0$$

- La recta s és la que passa per B i per Q:

$$m=\frac{5-0}{(-1)-(8/3)}=\frac{-5}{(-11/3)}=-\frac{15}{11}$$

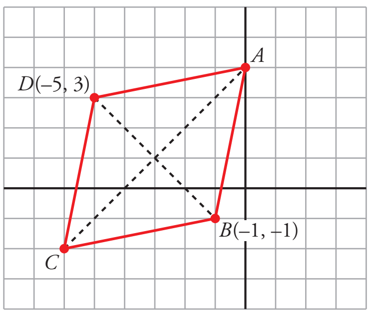
$$y=5-\frac{15}{11}(x+1)\ \rightarrow\ 11y=55-15x-15\ \rightarrow\ s:\ 15x+11y-40=0$$

91 **Un rombe $ABCD$ té un vèrtex en l'eix d'ordenades; uns altres dos vèrtexs oposats són $B(-1,-1)$ i $D(-5,3)$. Troba les coordenades dels vèrtexs A i C i l'àrea del rombe.**

Sigui $A\in$ eix $Y\rightarrow A=(0,y_1)$ i sigui el punt $C=(x_2,y_2)$.

Com que estem treballant amb un rombe, les seves diagonals AC i BD es tallen en el seu punt mitjà, M.

A més, $AC\perp BD$.



- $M\left(\frac{-1-5}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(-3,1)$ és el punt mitjà de BD (i de AC).

- Sigui d la recta perpendicular a BD per M (serà, per tant, la que conté AC):

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BD}=(-4,4)\ \rightarrow\ \vec{d}=(4,4)\text{ és vector director de } d\\ M(-3,1)\in d\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{El pendent de } d \text{ és } m_d=\frac{4}{4}=1\\ M(-3,1)\in d\end{array}\right.\rightarrow\ d:\ y-1=(x+3)\ \rightarrow\ d:\ y=x+4$$

- Així:

$$A = d \cap \text{eix } Y: \left.\begin{cases} y = x + 4 \\ x = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0, 4)$$

- M és el punt mitjà de $AC \rightarrow (-3, 1) = \left(\dfrac{0 + x_2}{2}, \dfrac{4 + y_2}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{cases} -3 = \dfrac{x_2}{2} \rightarrow x_2 = -6 \\ 1 = \dfrac{4 + y_2}{2} \rightarrow y_2 = -2 \end{cases}\right\} \rightarrow C(-6, -2)$

- Àrea $= \dfrac{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-6, -6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-4, 4)| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Àrea} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2$$

92 **Un punt P, que és equidistant dels punts $A(3, 4)$ i $B(-5, 6)$, dista el doble de l'eix d'abscisses que de l'eix d'ordenades. Quines són les coordenades de P?**

- $d(P, OX) = 2d(P, OY) \rightarrow |y| = 2|x| \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

- $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(-5-x)^2 + (6-y)^2} \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \rightarrow$$

$$\rightarrow -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \rightarrow 16x - 4y + 36 = 0 \rightarrow 4x - y + 9 = 0$$

- Com que han de complir-se les dues condicions, hi haurà dues solucions:

$$P_1: \begin{cases} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x - 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{2} \rightarrow y = -9$$

Aleshores: $P_1\left(\dfrac{-9}{2}, -9\right)$

$$P_2: \begin{cases} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x + 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2} \rightarrow y = 3$$

Per tant: $P_2\left(\dfrac{-3}{2}, 3\right)$

93 **De totes les rectes que passen pel punt $A(1, 2)$, troba el pendent d'aquella que disti 1 de l'origen.**

- Aquestes rectes tenen per equació:

$$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow mx - y + (2 - m) = 0$$

- $d(0, r) = 1 \rightarrow \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$

94 **Troba el punt de la recta $2x - 4y - 1 = 0$ que, junt amb l'origen de coordenades i el punt $P(-4, 0)$, determina un triangle d'àrea 6.**

$OP = (-4, 0)$. Costat OP: $y = 0$

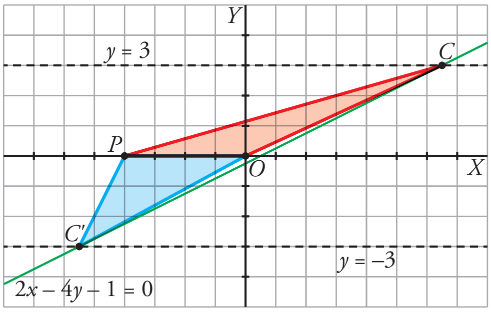
Base = 4 u

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = 6 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \text{altura} = 6 \rightarrow \text{altura} = 3$$

El punt $C = (x, y)$ verifica: $C \in r$ i $dist(C, \text{costat } OP) = 3$.

$$\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ |y| = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = \dfrac{13}{2} \\ y = -3 \rightarrow x = -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Hi ha dues solucions: $C = \left(\dfrac{13}{2}, 3\right)$ i $C' = \left(-\dfrac{11}{2}, -3\right)$



Pàgina 213

Qüestions teòriques

95 **Prova que si les rectes $ax + by + c = 0$ i $a'x + b'y + c' = 0$ són perpendiculars, es verifica que $aa' + bb' = 0$.**

- El vector (a, b) és perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.
- El vector (a', b') és perpendicular a la recta $a'x + b'y + c' = 0$.
- Si les dues rectes són perpendiculars, aleshores:

  $(a, b) \cdot (a', b') = 0$; és a dir, $aa' + bb' = 0$.

96 **Donada la recta d'equació $ax + by + c = 0$, prova que el vector $\vec{v} = (a, b)$ és ortogonal a qualsevol vector determinat per dos punts de la recta.**

* *Anomena $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dos punts genèrics de la recta, i fes $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$.*

- Si $A(x_1, y_1)$ pertany a la recta, aleshores $\quad ax_1 + by_1 + c = 0$
- Si $B(x_2, y_2)$ pertany a la recta, aleshores $\quad ax_2 + by_2 + c = 0$
- Restant les dues igualtats: $\quad a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

Aquesta última igualtat significa que:

$(a, b) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$; és a dir, que el vector (a, b) és perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$, essent A i B dos punts qualssevol de la recta.

97 **a) Què es pot dir d'una recta si en la seva equació general falta el terme independent?**

b) I si hi falta el terme en x?

c) I si hi falta el terme en y?

a) La recta passa per (0, 0).

b) És una recta horitzontal (paral·lela a l'eix OX).

c) És una recta vertical (paral·lela a l'eix OY).

98 **Demostra que les coordenades del baricentre del triangle de vèrtexs $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ són:**

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

* *Tingues en compte que $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$, on M és el punt mitjà de AC.*

$G = (x, y)$

$$M_{AC} = \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

$$2\overrightarrow{GM_{AC}} = \overrightarrow{BG}$$

$$2\left(\frac{x_1+x_3}{2} - x, \frac{y_1+y_3}{2} - y\right) = (x - x_2, y - y_2)$$

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x_1+x_3}{2} - x\right) = x - x_2 \\ 2\left(\dfrac{y_1+y_3}{2} - y\right) = y - y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x = x - x_2 \\ y_1 + y_3 - 2y = y - y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 = 3x \\ y_1 + y_3 + y_2 = 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_3+x_2}{3} \\ y = \dfrac{y_1+y_3+y_2}{3} \end{cases}$$

99 **Demostra que si una recta talla els eixos de coordenades en els punts $(a, 0)$ i $(0, b)$, per $a, b \neq 0$, aleshores l'equació es pot expressar en la forma canònica o segmentària:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$r: ax + by + c = 0$

r no passa per l'origen de coordenades perquè $a, b \neq 0$; per tant, $c \neq 0$.

Dividim l'equació entre $-c$:

$$r: \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = 0$$

Si talla en $(0, b)$:

$$x = 0 \rightarrow \frac{y}{b'} = 1 \rightarrow b' = b$$

Si talla en $(a, 0)$:

$$y = 0 \rightarrow \frac{x}{a'} = 1 \rightarrow x = a' = a$$

Aleshores l'equació de r és: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Per aprofundir

100 **Les rectes $x + y - 2 = 0$ i $9x - 3y - 4 = 0$ són dues altures del triangle ABC de vèrtex $A(2, 2)$. Troba les equacions que determinen els costats del triangle.**

A no pertany a cap de les dues altures; per tant, els costats del triangle estaran en les rectes que passen per $A = (2, 2)$ i són perpendiculars a les rectes donades.

$r: x + y - 2 = 0$ té vector de direcció $(-1, 1)$.

El *costat* AB té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $A = (2, 2)$.

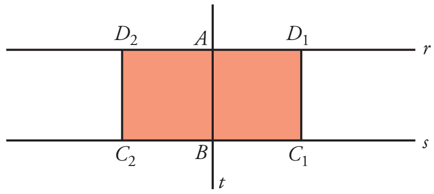
Costat AB: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x - 2 = y - 2 \rightarrow x - y = 0$

$s: 9x - 3y - 4 = 0$ té vector de direcció $\vec{d} = (-3, 9) = 3(-1, 3)$.

El *costat* AC té vector de direcció $\vec{d} = (3, 1)$ i passa per $A = (2, 2)$.

Costat AC: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x - 2 = 3y - 6 \rightarrow x - 3y - 4 = 0$

101 **Els punts $A(3, 1)$ i $B(4, 5)$ són dos vèrtexs contigus d'un quadrat. Calcula'n els altres. Quantes solucions hi ha?**



C i D són punts de les rectes s i r perpendiculars a AB, les distàncies dels quals a B i A, són, respectivament, $|\overrightarrow{AB}|$:

- $\overrightarrow{AB} = (1, 4) \rightarrow s: x + 4y + k = 0$
  Com que $B \in s \rightarrow 4 + 20 + k = 0 \rightarrow k = -24 \rightarrow s: x + 4y - 24 = 0$

- $\overrightarrow{AB} = (1, 4) \rightarrow r: x + 4y + k' = 0$
  Com que $A \in r \rightarrow 3 + 4 + k' = 0 \rightarrow k' = -7 \rightarrow r: x + 4y - 7 = 0$

- $\overrightarrow{AB} = (1, 4) \rightarrow t: 4x - y + k'' = 0$
  Com que $A \in t \rightarrow 12 - 1 + k'' = 0 \rightarrow k'' = -11 \rightarrow t: 4x - y - 11 = 0$

- C i D són punts que estan en les rectes la distància de les quals a AB és $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.
  Siguin $P(x, y)$ tals que:

$$dist(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$\begin{cases} 4x - y - 11 = 17 \rightarrow \\ 4x - y - 11 = -17 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} t_1: 4x - y - 28 = 0 \\ t_2: 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

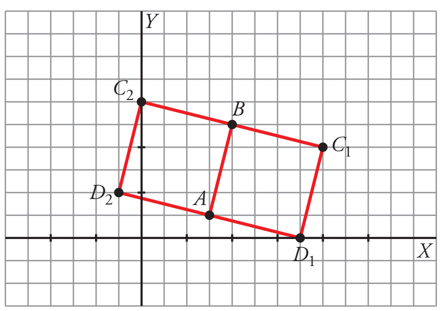
Són dues rectes paral·leles. Hi ha dues solucions. Així:

$$C_1 = t_1 \cap s \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \rightarrow x = 24 - 4y \end{cases} \rightarrow 96 - 16y - y - 28 = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 8 \rightarrow C_1(8, 4)$$

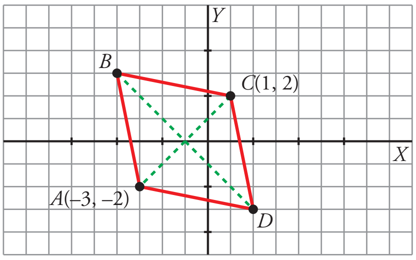
$$C_2 = t_2 \cap s \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \rightarrow x = 24 - 4y \end{cases} \rightarrow 96 - 16y - y + 6 = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 0 \rightarrow C_2(0, 6)$$

$$D_1 = t_1 \cap r \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \rightarrow x = 7 - 4y \end{cases} \rightarrow 28 - 16y - y - 28 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 7 \rightarrow D_1(7, 0)$$

$$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \rightarrow x = 7 - 4y \end{cases} \rightarrow 28 - 16y - y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -1 \rightarrow D_2(-1, 2)$$



102 **La diagonal menor d'un rombe mesura el mateix que el seu costat i té per extrems els punts $A(-3, -2)$ i $C(1, 2)$. Troba els vèrtexs B i D i el perímetre del rombe.**



- $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Com que aquesta diagonal mesura el mateix que el costat, aleshores el perímetre serà:

  Perímetre = $4\,|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$

- Els altres dos vèrtexs són en la perpendicular de $\overrightarrow{AC}$ que passa pel seu punt mitjà $M(-1, 0)$.

  La recta AC té per vector director $(1, 1) \rightarrow x - y + k = 0$

  Com que, a més, $A(-3, -2) \in$ recta $AC \rightarrow -3 + 2 + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow AC\colon x - y + 1 = 0$

  La recta s perpendicular a AC serà:

  $s: x + y + k' = 0$

  Com que $M(-1, 0) \in s \rightarrow -1 + k' = 0 \rightarrow k' = 1 \rightarrow s: x + y + 1 = 0$

  Els punts B i C seran els (x, y) que estiguin en s i la distància dels quals al vèrtex A sigui igual a la diagonal; és a dir, igual a $4\sqrt{2}$.

  $(x, y) \in s \rightarrow x + y + 1 = 0 \rightarrow x = -1 - y$

  $$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 = 32 \rightarrow$$

  $$\rightarrow (2-y)^2 + (y+2)^2 = 32 \rightarrow 4 + y^2 - 4y + y^2 + 4 + 4y = 32 \rightarrow 2y^2 = 24 \rightarrow$$

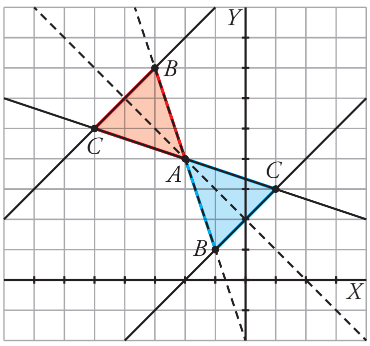
  $$\rightarrow y^2 = 12 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{3} \rightarrow x_1 = -1 - 2\sqrt{3} \\ y_2 = -2\sqrt{3} \rightarrow x_2 = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

  Per tant, els vèrtexs B i C són:

  $(-1 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ i $(-1 + 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

103 **En un triangle isòsceles ABC amb costat desigual BC, l'equació del costat AB és $3x + y + 2 = 0$ i la mediatriu del costat BC és $x + y - 2 = 0$.**

a) Calcula l'equació del costat AC. **b) Troba els seus vèrtexs si la seva àrea és 4 u^2.**



a) Com que el costat BC és el desigual, la mediatriu de BC passa per A.

$A \in$ *costat* AB; per tant, A és solució del sistema.

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2, y = 4 \rightarrow A = (-2, 4)$$

La mediatriu en aquest cas és la bisectriu de l'angle $\hat{A}$; per tant, el costat AC és la recta simètrica de AB respecte de la mediatriu s.

Busquem un punt $Q \neq A$ de $r =$ *costat* AB i trobem el seu simètric Q' respecte de s.

$Q \in r \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -2$

$Q = (0, -2)$

Per trobar el simètric de Q respecte de s, calculem la recta l perpendicular a s que passa per Q:

l té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $Q = (0, -2)$.

$$l: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} \rightarrow x = y + 2 \rightarrow x - y - 2 = 0$$

$M = s \cap l$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = 0 \rightarrow M = (2, 0)$$

M és el punt mitjà entre Q i $Q' = (x, y)$:

$$(2, 0) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{x}{2} \rightarrow x = 4 \\ 0 = \dfrac{y-2}{2} \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow Q' = (4, 2)$$

La recta t passa per A i per $Q' = (4, 2)$.

$$\overrightarrow{AQ'} = (6, -2) = 2(3, -1)$$

$$t: \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} \rightarrow -x - 2 = 3y - 12 \rightarrow -x - 3y + 10 = 0$$

Costat $AC = t: -x - 3y + 10 = 0$

b) *Costat* $BC = s'$ és perpendicular a la mediatriu $\rightarrow s: x + y - 2 = 0$

$s': x - y + k = 0$

$$\text{Altura} = dist(A, \textit{costat } BC) = \frac{|-2 - 4 + k|}{\sqrt{2}} = \frac{|-6 + k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k - 6|}{\sqrt{2}}$$

$B \in$ *costat* $AB \cap s'$

$$B \rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}k - \frac{1}{2} \rightarrow B = \left(-\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}k - \frac{1}{2}\right)$$

$C \in$ *costat* $AC \cap s'$

$$C \rightarrow \begin{cases} -x - 3y + 10 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}k, y = \frac{1}{4}k + \frac{5}{2} \rightarrow C = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}k, \frac{1}{4}k + \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}k - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}k, \frac{1}{4}k + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}k - 3, \frac{1}{2}k - 3\right)$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \frac{k-6}{\sqrt{2}} = \text{base}$$

$$\text{Àrea} = 4 = \frac{1}{2} \frac{|k-6|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k-6}{\sqrt{2}}$$

Hi ha dues possibilitats a causa del valor absolut:

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k-6}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \rightarrow 16 = (k-6)^2 \rightarrow k = 2,\ k = 0 \\ -4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k-6}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{No té solució.} \end{cases}$$

Hi ha dues solucions:

Si $k = 2 \rightarrow$ *costat* $BC: x - y + 2 = 0 \rightarrow B = (-1, 1);\ C = (1, 3)$

Si $k = 10 \rightarrow$ *costat* $BC: x - y + 10 = 0 \rightarrow B = (-3, 7);\ C = (-5, 5)$

104 **$A(1, 1)$ i $B(5, 1)$ són dos vèrtexs d'un trapezi rectangle i un dels costats està sobre la recta $y = x + 1$. Calcula els altres dos vèrtexs (hi ha dues solucions).**

Podem comprovar que $A, B \notin r$.

Com que un costat està sobre r, els altres dos vèrtexs estan en r i, per tant, A i B són vèrtexs consecutius.

A més, un vector director de r és $\vec{r} = (1, 1)$, que no és proporcional a $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$.

Per tant, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \rightarrow$ els costats AB i CD no són paral·lels; per tant, no són les bases del trapezi.

Podem construir dos trapezis:

a) ABC_1D_1, on AB és l'altura del trapezi:

C_1 i D_1 seran els punts de tall de r amb les rectes perpendiculars a AB que passen per B i A, respectivament.

- $t \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow 4x + k = 0$

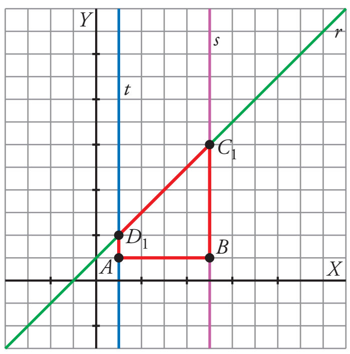
  Com que $A(1,1) \in t \rightarrow 4 + k = 0 \rightarrow k = -4 \rightarrow t: 4x - 4 = 0 \rightarrow t: x = 1$

  Així: $D_1 = t \cap r: \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow y = 2 \rightarrow D_1(1, 2)$

- $s \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow 4x + k = 0$

  Com que $B(5,1) \in s \rightarrow 4 \cdot 5 + k = 0 \rightarrow k = -20 \rightarrow s: 4x - 20 = 0 \rightarrow s: x = 5$

  Així: $C_1 = s \cap r: \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow y = 6 \rightarrow C_1(5, 6)$



b) ABC_2D_2, on C_2D_2 és l'altura del trapezi:

C_2 i D_2 seran els punts de tall de r amb les rectes perpendiculars a r que passen per B i C, respectivament (és a dir, C_2 i D_2 són els peus d'aquestes perpendiculars).

- $t \perp r \rightarrow y = -x + k$

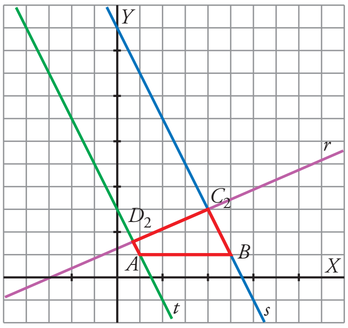
  Com que $A \in t \rightarrow 1 = -1 + k \rightarrow k = 2 \rightarrow t: y = -x + 2$

Així: $D_2 = t \cap r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow -x + 2 = x + 1 \rightarrow 1 = 2x \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \rightarrow y = \dfrac{3}{2} \rightarrow D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

- $s \perp r \rightarrow y = -x + k$

  Com que $B \in s \rightarrow 1 = -5 + k \rightarrow k = 6 \rightarrow s: y = -x + 6$

Així: $C_2 = s \cap r: \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow -x + 6 = x + 1 \rightarrow 5 = 2x \rightarrow x = \dfrac{5}{2} \rightarrow y = \dfrac{7}{2} \rightarrow C_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$



105 **Tota recta es pot expressar com a $x \cos\theta + y \sin\theta = d$, on θ és l'angle que forma la recta amb l'eix d'ordenades i d és la distància a l'origen de coordenades (aquesta es coneix com a equació de Hesse). Escriu en aquesta forma la recta $4x + 3y - 12 = 0$.**

$dist(O, r) = \dfrac{|-12|}{5}$

$d = \dfrac{|-12|}{5} = \dfrac{12}{5}$

Dividim entre 5 en l'equació de la recta i obtenim:

$\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y = \dfrac{12}{5} \rightarrow 0{,}8x + 0{,}6y = \dfrac{12}{5}$

$0{,}8 = \cos 36° \, 52'$

$0{,}6 = \sin 36° \, 52'$

Aleshores l'equació que busquem és: $x \cos 36° \, 52' + y \sin 36° \, 52' = \dfrac{12}{5}$

Pàgina 213

Autoavaluació

1 **Es consideren els punts $A(0, 1)$, $B(4, 9)$ i $C(-4, k)$.**

a) Calcula les coordenades d'un punt P que divideix el segment AB en dues parts tals que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$.

b) Determina k perquè el punt C sigui el simètric de B respecte de A.

a) $A(0, 1)$, $B(4, 9)$, $C(-4, k)$

Sigui $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \to (x, y-1) = \frac{1}{3}(4-x, 9-y) \to \begin{cases} 3x = 4 - x \to x = 1 \\ 3y - 3 = 9 - y \to y = 3 \end{cases} \to P(1, 3)$$

b) A ha de ser el punt mitjà de CB.

$$(0, 1) = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{9+k}{2}\right) \to 9 + k = 2 \to k = -7$$

2 **Calcula l'equació d'aquestes rectes:**

a) Passa per $A(3, 2)$ i per $B(-2, 1)$; fes-ho en forma paramètrica i en forma implícita.

b) Passa per $(0, 0)$ i té pendent $m = -\frac{1}{3}$; fes-ho en forma contínua i en forma explícita.

a) Vector de direcció $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = (5, 1)$. Vector de posició: $\vec{p}(3, 2)$

Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$t = y - 2$; $x = 3 + 5(y-2) = 3 + 5y - 10 \to x - 5y + 7 = 0$

Equació implícita: $x - 5y + 7 = 0$

b) $m = -\frac{1}{3} \to$ vector de direcció: $\vec{d}(3, -1)$

Equació contínua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

$3y = -x \to y = -\frac{x}{3}$

Equació explícita: $y = -\frac{x}{3}$

3 **Troba les equacions de les rectes següents:**

a) Passa per $P(2, -3)$ i és perpendicular a $y = \frac{-2}{5}x + 1$.

b) És paral·lela a $2x + 3y + 1 = 0$ i la seva ordenada en l'origen és 2.

a) Una recta perpendicular a la donada té pendent $m = \frac{5}{2}$. Com que ha de passar per $P(2, -3)$, la seva equació és:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x-2) \to 2y + 6 = 5x - 10 \to 5x - 2y - 16 = 0$$

b) Una recta paral·lela a $2x + 3y + 1 = 0$ és $2x + 3y + k = 0$.

Com que ha de passar per $(0, 2)$, ha de ser $k = -6$.

La recta buscada és $2x + 3y - 6 = 0$.

4 **Escriu l'equació del feix de rectes de centre (5, 1) i troba la recta d'aquest feix que passa per (0, 1).**

El feix de rectes que passa pel punt (5, 1) és $a(x-5)+b(y-1)=0$.

La recta del feix que passa per (0, 1) és la que passa per (5, 1) i per (0, 1). Per tant, la seva equació és:

$$\frac{x}{5}=\frac{y-1}{0} \rightarrow y=1$$

5 **Estudia la posició relativa de les rectes r i s i la de les rectes r i t, on:**

$$r: 3x+5y-34=0 \qquad s: y=\frac{5}{3}x \qquad t: \begin{cases} x=k \\ y=2 \end{cases}$$

- Posició relativa de r i s:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector director de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \\ \text{Vector director de } s,\ \vec{d}_s(3,5) \end{array}\right\} r \text{ i } s \text{ són perpendiculars.}$$

- Posició relativa de r i t:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector director de } t,\ \vec{d}_t(1,0) \\ \text{Vector director de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \end{array}\right\} r \text{ i } t \text{ són secants.}$$

6 **Calcula k perquè les rectes $r: y=3$ i $s: y=kx+1$ formin un angle de 60°.**

La recta $r: y=3$ és paral·lela a l'eix d'abscisses. Així, la tangent de l'angle que formen r i s coincideix amb el pendent de s, que és igual a k. És a dir:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=k \\ tg\,60°=\sqrt{3} \end{array}\right\} k=\sqrt{3}$$

7 **Considera els punts $A(0, k)$ i $B(8, 5)$ i la recta $r: 3x+4y+1=0$. Troba el valor de k perquè:**

a) la distància entre A i B sigui igual a 10.

b) la distància entre A i r sigui 1.

a) $dist(A, B)=\sqrt{8^2+(5-k)^2}=\sqrt{64+25+k^2-10k}=10 \rightarrow k^2-10k-11=0 \left\langle \begin{array}{l} k=11 \\ k=-1 \end{array}\right.$

b) $dist(A, r)=\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot k+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|4k+1|}{5}=1 \left\langle \begin{array}{l} 4k+1=5 \rightarrow k=1 \\ 4k+1=-5 \rightarrow k=-3/2 \end{array}\right.$

8 **En el triangle de vèrtexs $A(-3, 2)$, $B(1, 3)$ i $C(4, 1)$, troba l'ortocentre i el circumcentre.**

ORTOCENTRE: $R=h_A \cap h_B \cap h_C$, on h_A, h_B i h_C són les altures (des de A, B i C, respectivament).

- $h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC}=(3,-2) \rightarrow \vec{a}=(2,3) \\ A \in h_A \end{cases} \rightarrow h_A: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=2+3t \end{cases} \rightarrow \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{3} \rightarrow h_A: 3x-2y+13=0$

- $h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC}=(7,-1) \rightarrow \vec{b}=(1,7) \\ B \in h_B \end{cases} \rightarrow h_B: \begin{cases} x=1+t \\ y=3+7t \end{cases} \rightarrow x-1=\dfrac{y-3}{7} \rightarrow h_B: 7x-y-4=0$

- $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB}=(4,1) \rightarrow \vec{c}=(1,-4) \\ C \in h_C \end{cases} \rightarrow h_C: \begin{cases} x=4+t \\ y=1-4t \end{cases} \rightarrow x-4=\dfrac{y-1}{-4} \rightarrow h_C: 4x+y-17=0$

N'hi hauria prou amb haver calculat dues de les tres altures i veure el punt d'intersecció:

$$h_B \cap h_C: \begin{cases} 7x - y - 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases}$$

Sumant: $11x \quad - 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{21}{11}; \; y = 7x - 4 = 7 \cdot \dfrac{21}{11} - 4 = \dfrac{147 - 44}{11} = \dfrac{103}{11} \rightarrow R\left(\dfrac{21}{11}, \dfrac{103}{11}\right)$

NOTA: Pot comprovar-se que l'ortocentre, R, és també en h_A.
N'hi ha prou de substituir en la seva equació.

CIRCUMCENTRE: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, on m_A, m_B i m_C són les tres mediatrius (des de A, B i C, respectivament)

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punt mitjà de } BC\text{: } M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \rightarrow y - 2 = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4}$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \rightarrow \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punt mitjà de } AB\text{: } M'\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \rightarrow y - \dfrac{5}{2} = -4(x + 1) \rightarrow y = -4x - \dfrac{3}{2}$

Així:

$$S = m_A \cap m_C : \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} \\ y = -4x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = -4x - \frac{3}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x - 7 = -16x - 6 \rightarrow 22x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{22} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -4 \cdot \frac{1}{22} - \frac{3}{2} = \frac{-4 - 33}{22} = \frac{-37}{22}$$

Així, $S\left(\dfrac{1}{22}, \dfrac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Es podria calcular m_B i comprovar que $S \in m_B$.