

Resol

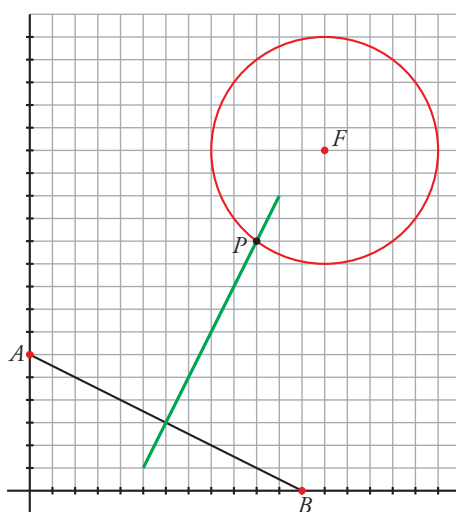
Pàgina 215

On se situarà el dipòsit?

Es vol instal·lar un gran dipòsit de propà per abastir una factoria industrial i dues urbanitzacions.

S'han de complir les condicions següents: convé que el dipòsit estigui el més a prop possible de la factoria, però, per raons de seguretat, no pot ser a menys de 500 m d'un forn que hi ha en aquesta. Per tant, s'haurà de situar, exactament, a 500 m del forn, F . A més, es desitja que estigui a la mateixa distància de A que de B .

Per resoldre-ho, portem les dades a uns eixos cartesianes (1 costat de quadrat = 100 m) i suposem que els punts F , A i B se situen on s'indica en el gràfic:



- La circumferència vermella és el conjunt de punts que són a 500 m del forn. Analíticament, són punts (x, y) la distància dels quals a $F(13, 15)$ és 5. Expressa-ho mitjançant una equació.
- La recta verda és el conjunt de punts que equidisten de A i de B . Analíticament, és una recta que passa per $(6, 3)$ i té pendent 2. Escriu-ne l'equació.
- El punt P on hem de situar el dipòsit de propà s'obté trobant la intersecció de les dues línies que acabem de descriure. Resol el sistema que formen les seves equacions per trobar les coordenades de P .

$$\bullet \sqrt{(x-13)^2 + (y-15)^2} = 5$$

$$\bullet \frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{2} \rightarrow 2x - y - 9 = 0$$

$$\bullet \begin{cases} \sqrt{(x-13)^2 + (y-15)^2} = 5 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{72}{5}, y = \frac{99}{5}; x = 10, y = 11$$

La solució és $P = (10, 11)$ perquè el dipòsit ha d'estar a prop de les urbanitzacions.

1 Llocs geomètrics

Pàgina 216

Fes-ho tu 1. Troba l'equació de la mediatriu del segment els extrems del qual són $A(0, 0)$ i $B(6, 4)$.

$X = (x, y)$ punt de la mediatriu.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 36 - 12x + y^2 + 16 - 8y$$

$$\text{Mediatriu: } -12x - 8y + 52 = 0 \rightarrow -3x - 2y + 13 = 0$$

Pàgina 217

Fes-ho tu 2. Troba l'equació de la bisectriu de l'angle format per les rectes:

$$r_1: 5x - 12y = 0$$

$$r_2: 12x + 5y = 0$$

$X = (x, y)$ punt de la bisectriu.

$$\frac{|5x - 12y|}{13} = \frac{|12x + 5y|}{13} \rightarrow |5x - 12y| = |12x + 5y| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x - 12y = 12x + 5y \\ 5x - 12y = -(12x + 5y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_1: -7x - 17y = 0 \\ B_2: 17x - 7y = 0 \end{cases}$$

Fes-ho tu 3. Troba el lloc geomètric dels punts que compleixen aquesta condició: la diferència dels quadrats de les distàncies d'aquests punts a $P(2, 5)$ i a $Q(4, -1)$ és 40; és a dir, $\overline{XP}^2 - \overline{XQ}^2 = 40$.

$X = (x, y)$ punt del lloc geomètric.

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}\right)^2 = 40 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 - ((x-4)^2 + (y+1)^2) = 40 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x - 12y + 12 = 40 \rightarrow 4x - 12y - 28 = 0 \text{ és una recta.}$$

1 Troba les equacions dels llocs geomètrics següents:

a) Mediatriu del segment d'extrems $A(-5, -3)$ i $B(7, 1)$. Comprova que és perpendicular al segment en el seu punt mitjà.

b) Circumferència de centre $O(-3, 4)$ i radi 5. Comprova que passa per l'origen de coordenades.

c) Bisectrius dels angles formats per les rectes:

$$r_1: 5x + y + 3 = 0$$

$$r_2: x - 2y + 16 = 0$$

Comprova que les bisectrius són dues rectes perpendiculars que es tallen en el mateix punt en què es tallen les rectes r_1 i r_2 .

a) Els punts $X(x, y)$ han de complir $\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$$

Elevem al quadrat i desenvolupem:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$10x + 14x + 6y + 2y + 34 - 50 = 0 \rightarrow 24x + 8y - 16 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0 \rightarrow y = -3x + 2$$

- El punt mitjà de AB és $M(1, -1)$ que, efectivament, és en la recta (ja que verifica l'equació).

- El pendent de la recta és $m_r = -3$, i la del segment és:

$$m_{AB} = \frac{1 - (-3)}{7 - (-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Compleixen que } m_r \cdot m_{AB} = (-3) \left(\frac{1}{3} \right) = -1 \rightarrow AB \perp r$$

- b) Els punts $X(x, y)$ són tals que:

$$\begin{aligned} \text{dist}(X, O) = 5 &\rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0 \end{aligned}$$

- c) Són els punts $X(x, y)$:

$$\text{dist}(X, r_1) = \text{dist}(X, r_2) \rightarrow \frac{|5x + y + 3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x - 2y + 16|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Es donen dos casos: } \sqrt{5}(5x + y + 3) = \sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

$$\sqrt{5}(5x + y + 3) = -\sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

$$\text{Són dues rectes: } b_1: (5\sqrt{5} - \sqrt{26})x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

$$b_2: (5\sqrt{5} + \sqrt{26})x + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$$

- Els seus pendents són:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{-(5\sqrt{5} - \sqrt{26})}{\sqrt{5} + 2\sqrt{26}} \\ m_2 &= \frac{-(5\sqrt{5} + \sqrt{26})}{\sqrt{5} - 2\sqrt{26}} \end{aligned} \right\} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \rightarrow b_1 \perp b_2$$

- Calculem el punt de tall de les rectes inicials i comprovem que també és en ambdues bisectrius:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} r_1: 5x + y + 3 &= 0 \rightarrow y = -5x - 3 \\ r_2: x - 2y + 16 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow x - 2(-5x - 3) + 16 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x + 10x + 6 + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Aleshores: } y = -5(-2) - 3 = 7$$

El punt de tall és $(-2, 7)$, que es pot comprovar fàcilment que és en b_1 i en b_2 substituint x per -2 i y per 7 en les equacions respectives d'aquestes rectes:

$$\begin{aligned} b_1: (5\sqrt{5} - \sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} &= \\ = -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2: (5\sqrt{5} + \sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} &= \\ = -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} &= 0 \end{aligned}$$

- Per tant, b_1 i b_2 són dues rectes perpendiculars que es tallen en el mateix punt que r_1 i r_2 .

2 Estudi de la circumferència

Pàgina 218

Fes-ho tu 1. Escriu l'equació de la circumferència de centre $(-5, 2)$ i radi 3.

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9 \rightarrow x^2 + 10x + y^2 - 4y + 29 = 9 \rightarrow x^2 + 10x + y^2 - 4y + 20 = 0$$

Pàgina 219

Fes-ho tu 2. Quines de les equacions següents corresponen a circumferències? Dóna'n el centre i el radi.

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x = 0$

b) $x^2 - y^2 + 7x - 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 3x + 4xy - 16 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 40 = 0$

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$

Els coeficients de x^2 i y^2 són 1. No hi ha terme en xy .

$$r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 2 > 0 \rightarrow \text{Sí, és circumferència de centre (4, 0) i radi } \sqrt{2}.$$

b) $x^2 + y^2 - 7x - 2 = 0$

Els coeficients de x^2 i y^2 són 1. No hi ha terme en xy .

$$r^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2 = \frac{57}{4} > 0 \rightarrow \text{Sí, és circumferència de centre } \left(\frac{7}{2}, 0\right) \text{ i radi } \frac{\sqrt{57}}{2}.$$

c) $x^2 + y^2 - 3x + 4xy - 16 = 0$

Hi ha terme en $xy \rightarrow$ No és circumferència.

d) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 40 = 0$

Els coeficients de x^2 i y^2 són 1. No hi ha terme en xy .

$$r^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 40 = -14 < 0 \rightarrow \text{No és circumferència.}$$

Fes-ho tu 3. Quin és el lloc geomètric dels punts P del pla que compleixen aquesta condició: el quocient de distàncies als punts $M(6, 0)$ i $N(-2, 0)$ és 3 (és a dir, $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$)?

$X = (x, y)$ punt del lloc geomètric.

$$\frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3 \rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-6)^2 + y^2 = 9[(x+2)^2 + y^2] \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 12x + y^2 + 36 = 9x^2 + 36x + 9y^2 + 36 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 + 48x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 6x = 0 \rightarrow \text{És una circumferència de centre } (-3, 0) \text{ i radi } r = \sqrt{9} = 3.$$

1 Troba l'equació de la circumferència de centre $(-5, 12)$ i radi 13.

Comprova que passa pel punt $(0, 0)$.

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169 \rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$$

Si substituïm $x = 0$, $y = 0$ en l'equació, aquesta es verifica. Per tant, la circumferència passa per $(0, 0)$.

- 2 Troba el lloc geomètric dels punts del pla que compleixen la condició següent: la suma de quadrats de distàncies als extrems del segment AB , $A(-3, 0)$ i $B(5, 0)$, és 50.**

$X = (x, y)$ punt del lloc geomètric.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 &= 50 \rightarrow (x+3)^2 + y^2 + (x-5)^2 + y^2 = 50 \rightarrow \\ &\rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 16 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \end{aligned}$$

És una circumferència de centre $(1, 0)$ i radi $r = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$.

Pàgina 220

Fes-ho tu. Troba la posició relativa de les rectes

$$r_1: y = x - 1 \quad r_2: y = x + 1 \quad r_3: y = 3$$

respecte de la circumferència $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

- Resolem el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \rightarrow x = 4, y = 3; \quad x = 0, y = -1$$

Hi ha dues solucions; es tallen en dos punts; per tant, són secants.

- Resolem el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow \text{No hi ha solució; per tant, són exteriors.}$$

- Resolem el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow x = 4, y = 3$$

Hi ha una solució; es tallen en un punt; per tant, són tangents.

- 3 Estudia la posició relativa de la circumferència**

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

respecte de les rectes següents:

$$s_1: 3x - 4y - 26 = 0 \quad s_2: 5x - 8y + 60 = 0$$

$$s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \quad s_4: x = 5$$

Troba'n els punts de tall i de tangència, si n'hi hagués.

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_1: 3x - 4y - 26 = 0 \end{cases} \rightarrow 3x = 4y + 26 \rightarrow x = \frac{4}{3}y + \frac{26}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{16}{9}y^2 + \frac{676}{9} + \frac{208}{9}y + y^2 - 8y - 52 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 676 + 208y + 9y^2 - 72y - 468 - 36y - 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2 + 100y + 100 = 0 \rightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \rightarrow (y + 2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -2 \text{ (solució única)}$$

$$x = \frac{4}{3}(-2) + \frac{26}{3} \rightarrow x = 6$$

C i s_1 són tangents en el punt $(6, -2)$.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left. \begin{aligned} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_2: 5x - 8y + 60 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 5x = 8y - 60 \rightarrow x = \frac{8}{5}y - 12 \\
 & \left(\frac{8}{5}y - 12 \right)^2 + y^2 - 6 \left(\frac{8}{5}y - 12 \right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow \frac{64}{25}y^2 + 144 - \frac{192}{5}y + y^2 - \frac{48}{5}y + 72 - 4y - 12 = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow 64y^2 + 3600 - 960y + 25y^2 - 240 + 1800 - 100y - 300 = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow 89y^2 - 1060y + 4860 = 0 \rightarrow \text{No té solució.}
 \end{aligned}$$

s_2 és exterior a la circumferència C .

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left. \begin{aligned} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 3x = 4y + 1 \rightarrow x = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3} \\
 & \left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3} \right)^2 + y^2 - 6 \left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3} \right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + \frac{1}{9} + \frac{8}{9}y + y^2 - 8y - 2 - 4y - 12 = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow 16y^2 + 1 + 8y + 9y^2 - 72y - 18 - 36y - 108 = 0 \rightarrow \\
 & \rightarrow 25y^2 - 100y - 125 = 0 \rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \begin{cases} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 7 \\ y_2 = -1 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

C i s_3 són secants en els punts $(7, 5)$ i $(-1, -1)$.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left. \begin{aligned} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_4: x = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow 25 + y^2 - 30 - 4y - 12 = 0 \rightarrow y^2 - 4y - 17 = 0 \\
 & y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-17)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{21}}{2} = 2 \pm \sqrt{21} \begin{cases} y_1 = 2 + \sqrt{21} \\ y_2 = 2 - \sqrt{21} \end{cases}
 \end{aligned}$$

C i s_4 es tallen en els punts $(5, 2 + \sqrt{21})$ i $(5, 2 - \sqrt{21})$.

4 Per a quins valors de b la recta $y = x + b$ és tangent a la circumferència $x^2 + y^2 = 9$?

La recta serà tangent a la circumferència si la distància del centre de la circumferència a la recta és igual al radi de la circumferència.

$$C: x^2 + y^2 = 9 \rightarrow O = (0, 0), R = 3$$

$$r: y = x + b \rightarrow x - y + b = 0$$

$$\text{dist}(O, r) = \frac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$

5 Troba la posició relativa de $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecte de les rectes següents:

$$r_1: x + y = 10$$

$$r_2: 4x + 3y + 20 = 0$$

$$r_3: 3x - 4y = 0$$

$$r_4: y = -2$$

$$C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \rightarrow O = (3, -4), r = 5$$

$$\bullet \text{dist}(O, r_1) = \frac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{1+1}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7,78 > 5 \rightarrow r_1 \text{ és exterior a } C.$$

$$\bullet \text{dist}(O, r_2) = \frac{|4 \cdot 3 + 3(-4) + 20|}{\sqrt{16+9}} = \frac{20}{5} = 4 < 5 \rightarrow r_2 \text{ i } C \text{ es tallen en dos punts.}$$

$$\bullet \text{dist}(O, r_3) = \frac{|3 \cdot 3 - 4(-4)|}{\sqrt{9+16}} = \frac{25}{5} = 5 \rightarrow r_3 \text{ i } C \text{ són tangents.}$$

$$\bullet \text{dist}(O, r_4) = \frac{|-4 + 2|}{\sqrt{0+1}} = \frac{2}{1} = 2 < 5 \rightarrow r_4 \text{ i } C \text{ es tallen en dos punts.}$$

Pàgina 221

6 Troba la potència de $P(-3, 8)$ respecte de les circumferències següents:

$$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0$$

$$C_2: O(4, -3), r = 20$$

Digues si P és interior o exterior a C_1 i a C_2 .

$$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0 \rightarrow O_1 = (7, 0), r_1 = \sqrt{49 - 20} = \sqrt{29}$$

$$C_2: O(4, -3), r = 20$$

$$P(-3, 8)$$

$$\mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = (7 + 3)^2 + (0 - 8)^2 - (\sqrt{29})^2 = 100 + 64 - 29 = 135 > 0 \rightarrow P \text{ és exterior a } C_1.$$

$$\mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = (4 + 3)^2 + (-3 - 8)^2 - (20)^2 = 49 + 121 - 400 = -230 < 0 \rightarrow P \text{ és interior a } C_2.$$

7 Troba l'eix radical d'aquestes circumferències:

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6y = 0$$

Comprova que és una recta perpendicular a la línia que uneix els seus centres.

Calculem les potències d'un punt genèric $P(x, y)$ a C_1 i a C_2 :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \\ \mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{array} \right\} \text{Igualem ambdues expressions:}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = x^2 + y^2 - 6y \rightarrow -4x + 18y - 11 = 0$$

$$\text{Equació de l'eix radical: } 4x - 18y + 11 = 0 \rightarrow m = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Centre de } C_1 \rightarrow O_1 = (2, -6) \\ \text{Centre de } C_2 \rightarrow O_2 = (0, 3) \end{array} \right\} \overrightarrow{O_1 O_2} = (-2, 9) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{El pendent de la recta que uneix } O_1 \text{ i } O_2 \text{ és } m' = -\frac{9}{2}.$$

Com que $m \cdot m' = \left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -1$, l'eix radical i la recta que uneix O_1 i O_2 són perpendiculars.

3 Les còniques com a llocs geomètrics

Pàgina 223

Fes-ho tu. Donats els punts $F_1(-3, 0)$ i $F_2(1, -2)$ i la recta $r: x + 2y - 5 = 0$, obtén les equacions de:

- a) l'el·lipse de focus F_1 i F_2 i constant 20.
- b) la hipèrbola de focus F_1 i F_2 i constant 2.
- c) la paràbola de focus F_1 i directriu r .

a) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 20$

b) $\left| \sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right| = 2$

c) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{1+4}}$

- 1** Troba l'equació de l'el·lipse de focus $F_1(4, 0)$ i $F_2(-4, 0)$ la constant de la qual és 10.

Una vegada escrita l'equació inicial, passa'n una arrel al segon membre, eleva-la al quadrat (atenció amb el doble producte!), simplifica-la, aïlla'n l'arrel, torna-la a elevar al quadrat i simplifica-la fins a arribar a l'equació $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Si $P(x, y)$ és un punt de l'el·lipse, aleshores:

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$\text{Elevem al quadrat: } (x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$\text{Operem: } x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$$

$$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$$

$$\text{Elevem al quadrat: } 25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$$

Simplifiquem:

$$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$$

- 2** Troba l'equació de la hipèrbola de focus $F_1(5, 0)$ i $F_2(-5, 0)$ la constant de la qual és 6. Simplifica-la com en l'exercici 1 fins a arribar a l'expressió $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Si $P(x, y)$ és un punt de la hipèrbola, aleshores:

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 6$$

$$\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2) = \pm 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Elevem al quadrat:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$$

$$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$$

Elevem al quadrat: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

3 Troba l'equació de la paràbola de focus $F(-1, 0)$ i directriu $r: x = 1$. Simplifica-la fins a arribar a l'expressió $y^2 = -4x$.

Si $P(x, y)$ és un punt de la paràbola, aleshores:

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x-1|$$

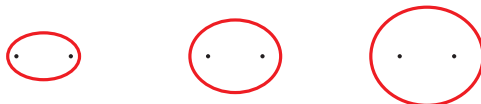
Elevem al quadrat: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplifiquem: $y^2 = -4x$

4 Estudi de l'el·lipse

Pàgina 224

- 1** Cert o fals? Si diverses el·lipses tenen la mateixa distància focal, com més gran sigui la constant $k = 2a$, més gran és l'excentricitat.



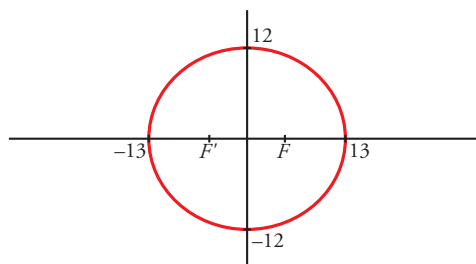
Fals. Al contrari; com que $e = \frac{c}{a}$, si el numerador c és constant, com més gran sigui el denominador a , més petit serà el quocient, que és l'excentricitat.

Pàgina 225

- 2** Una el·lipse té els focus en els punts $F(5, 0)$ i $F'(-5, 0)$ i la seva constant és $k = 26$.

Troba'n els elements característics i l'equació reduïda. Representa-la.

- Semieix major: $k = 26 \rightarrow 2a = 26 \rightarrow a = 13$
- Semidistància focal: $\overline{FF'} = 10 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5$
- Semieix menor: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$
- Excentricitat: $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} \approx 0,38 \rightarrow exc \approx 0,38$
- Equació reduïda: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$



Pàgina 226

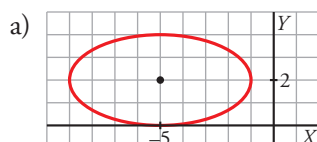
- 3** Representa i digue'n l'excentricitat:

a) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b) $9x^2 + 16y^2 = 144$

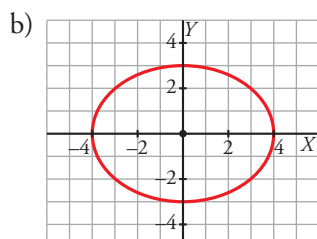
c) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$

d) $x^2 + 4(y-3)^2 = 4$



$$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

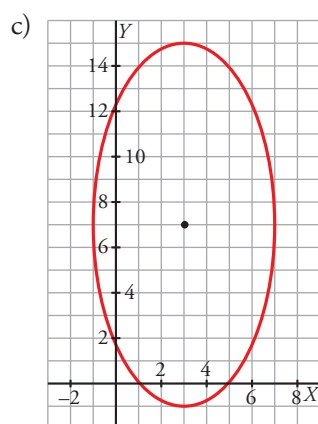
$$exc = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$$



$$9x^2 + 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow$$

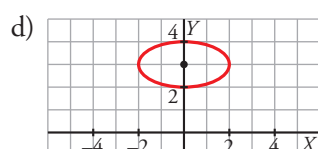
$$\rightarrow 16 = a^2, 9 = b^2 \rightarrow c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$exc = \frac{\sqrt{7}}{4}$$



$$c = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$$

$$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0,87$$



$$x^2 + 4(y - 3)^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} + (y - 3)^2 = 1 \rightarrow 4 = a^2, 1 = b^2$$

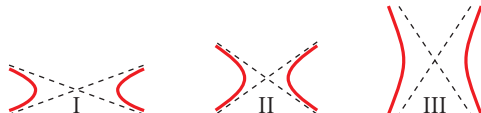
$$a = 2, b = 1; c = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$exc = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5 Estudi de la hipèrbola

Pàgina 228

1 Cert o fals?



a) La hipèrbola III és la més excèntrica.

b) La hipèrbola I és la menys excèntrica.

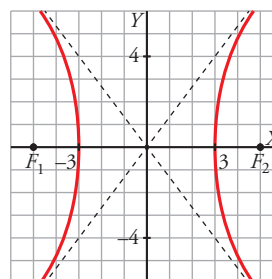
a) Cert, perquè el valor absolut del pendent de les asímptotes, $m = \left| \frac{b}{a} \right|$, és molt gran; per tant, l'excentricitat, $e = \frac{c}{a}$, serà més gran, ja que $c > b$.

b) Cert, perquè les asímptotes $y = \frac{b}{a}x$ tenen poc pendent en valor absolut; per tant, l'excentricitat, $e = \frac{c}{a} < \left| \frac{b}{a} \right|$, serà més petita.

2 Una hipèrbola té els focus en els punts $F_1(5, 0)$ i $F_2(-5, 0)$ i la seva constant és $k = 6$.

Troba'n els elements característics i l'equació reduïda. Després, representa-la.

- Semieix: $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistància focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Càlcul de b : $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricitat: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1,67$
- Asímptotes: $y = \frac{4}{3}x$; $y = -\frac{4}{3}x$
- Equació reduïda: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



Pàgina 229

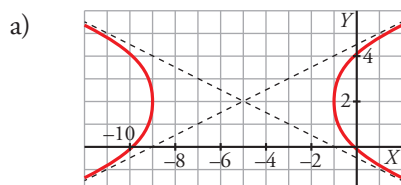
3 Representa:

a) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

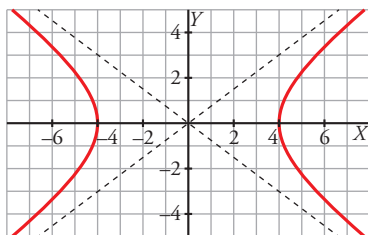
b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

c) $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

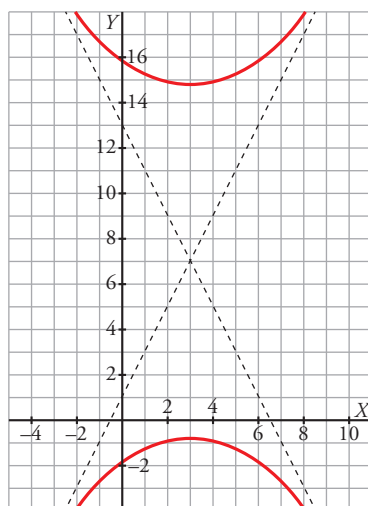
d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4$



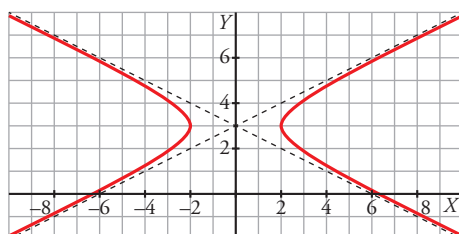
$$b) 9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



c)



$$d) x^2 - 4(y-3)^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$



6 Estudi de la paràbola

Pàgina 230

1 Troba l'equació reduïda de la paràbola de focus $F(1,5; 0)$ i directriu $x = -1,5$.

Si $P(x, y)$ és un punt de la paràbola: $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$, on d és la directriu i F el focus.

$$\sqrt{(x-1,5)^2 + y^2} = |x+1,5|$$

$$x^2 - 3x + 2,25 + y^2 = x^2 + 3x + 2,25 \rightarrow y^2 = 6x$$

- D'una altra manera:

Distància del focus a la directriu: $p = 3$

Equació reduïda: $y^2 = 6x$

2 Troba l'equació reduïda de la paràbola de focus $F(0, 2)$ i directriu $y = -2$.

Si $P(x, y)$ és un punt de la paràbola: $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$, on d és la directriu i F el focus.

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+2|$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y$$

- D'una altra manera:

Distància del focus a la directriu: $p = 4$

Equació reduïda: $x^2 = 8y$

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 232

1. Determinació d'una circumferència coneguts tres punts pels quals passa

Fes-ho tu. Obtén el centre, el radi i l'equació de la circumferència que passa per $P(-1, -3)$, $Q(2, -2)$ i $R(3, 0)$.

r : mediatriu de PQ

$$\overrightarrow{PQ} = (2, -2) - (-1, -3) = (3, 1)$$

r : té vector de direcció $\vec{d} = (-1, 3)$ i passa per $M_{PQ} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$$r: \frac{x - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{y + \frac{5}{2}}{3} \rightarrow 3x + y + 1 = 0$$

s : mediatriu de PR

$$\overrightarrow{PR} = (2, -2) - (3, 0) = (-1, -2)$$

s : té vector de direcció $\vec{d} = (2, 1)$ i passa per $M_{PR} = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$

$$s: \frac{x - \frac{5}{2}}{2} = \frac{y + 1}{1} \rightarrow 2x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{Centre} \rightarrow \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \rightarrow C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Radi} = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{L'equació de la circumferència és: } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

2. Identificació d'un lloc geomètric

Fes-ho tu. Resol aquest mateix exercici pel punt $A(0, 2)$ i la recta $r: y = -2$.

$X(x, y)$ és un punt genèric del lloc geomètric buscat.

$$P = (x_0, -2) \in r$$

$\overrightarrow{PX} = (x_0 - x, -2 - y)$ ha de ser perpendicular a la recta r ; és a dir, paral·lel a l'eix Y o, el que és el mateix, la seva primera coordenada ha de valer 0. Per tant, $x = x_0$.

En ser X el centre de la circumferència, ha d'equidistar de A i de P :

$$\begin{aligned} \text{dist}(X, A) &= \text{dist}(X, P) \rightarrow \sqrt{(-x)^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{(-2 - y)^2} \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y \end{aligned}$$

Es tracta d'una paràbola el focus de la qual és $A(0, 2)$ i la directriu $r: y = -2$.

Pàgina 233

3. Descripció d'una cònica a partir de la seva equació

Fes-ho tu. Descriu les còniques següents, obtén-ne els elements i dibuixa-les:

a) $x^2 - 2y + 2 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9y^2 - 2x - 8 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

a) $x^2 - 2y + 2 = 0 \rightarrow$ Paràbola amb eix vertical.

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

$$x^2 = 2y - 2 = 2(y - 1) \rightarrow p = 1$$

$$\text{Focus: } F = \left(0, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Directriu: } y = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

És una hipèrbola perquè els coeficients de x^2 i y^2 tenen signe diferent.

Completem quadrats:

$$(x^2 - 2x + 1) - 4y^2 - 3 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 - 4y^2 = 4 \rightarrow \frac{(x - 1)^2}{4} - y^2 = 1$$

Centre: $O = (1, 0)$. Focus en l'eix X .

Semieixos: $a = 2$, $b = 1$

Semidistància focal: $c = \sqrt{5}$

Excentricitat: $exc = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Asíptotes: $y = \pm \frac{1}{2}(x - 1)$

c) $x^2 + 9y^2 = 2x - 8 = 0$

Els coeficients de x^2 i y^2 són diferents, però del mateix signe; és una el·lipse.

Completem quadrats:

$$(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 8 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + 9y^2 = 9 \rightarrow \frac{(x - 1)^2}{9} + y^2 = 1$$

És una el·lipse de centre $O(1, 0)$ i eix major paral·lel a l'eix X .

Semieixos: $a = 3$, $b = 1$

Semidistància focal: $c = \sqrt{8}$

Excentricitat: $exc = \frac{\sqrt{8}}{3}$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

Es tracta d'una circumferència perquè els coeficients de x^2 i y^2 són 1 i no hi ha terme en xy .

Completem quadrats:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 9 - 4 - 9 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

Circumferència de centre $O(-2, -3)$ i radi $r = 2$.

Pàgina 234

4. Determinació de l'equació d'una el·lipse no centrada en l'origen

Fes-ho tu. Obtén l'equació de l'el·lipse de focus $F'(3, -2)$ i $F(3, 6)$ i excentricitat $e = \frac{4}{5}$.

$$O = M_{FF'} = (3, 2)$$

$$\text{dist}(F', F) = 8 = 2c \rightarrow c = 4$$

$$e = \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \rightarrow a = 5$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$\text{L'equació demanada és: } \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

5. Determinació de l'equació d'una hipèrbola no centrada en l'origen

Fes-ho tu. Resol aquest mateix exercici si les asímptotes són $y = \pm 2(x - 1)$ i $|a - b| = 1/2$.

El centre és el punt d'intersecció d'ambdues asímptotes.

$$\begin{cases} y = 2(x - 1) \\ y = -2(x - 1) \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 0 \rightarrow O = (1, 0)$$

Per calcular a i b resollem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ |a - b| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que ens dona els dos sistemes següents:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ a - b = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 1$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ a - b = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1 \text{ El resultat no és vàlid.}$$

L'equació buscada és:

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = 1 \text{ o bé } \frac{y^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1, \text{ depenent de l'eix en què estiguin els focus.}$$

6. Determinació de l'equació d'una paràbola no centrada en l'origen

Fes-ho tu. Troba l'equació d'una paràbola de vèrtex $V(1, 1)$ i focus $F(1, 4)$.

$V = (1, 1)$ i F pertanyen a la recta $x = 1$, per la qual cosa la directriu té la forma $d: y = k$.

$$\text{dist}(V, F) = \text{dist}(V, d) = 3 \rightarrow d: y = -2$$

Equació de la paràbola:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d) &\rightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (4-y)^2} = |y+2| \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 - 2x - 12y + 13 = 0 \end{aligned}$$

$$(x-1)^2 = 12(y-1)$$

Pàgina 235

7. Càlcul de la recta tangent a una el·lipse des d'un punt exterior a aquesta

Fes-ho tu. Troba les rectes que passen per $P(0, 5)$ i són tangents a l'el·lipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Feix de rectes que passen per $P = (0, 5)$:

$y = mx + 5$, $m \in \mathbb{R}$, més la recta vertical $x = 0$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = mx + 5 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} &\rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{(mx+5)^2}{16} = 1 \rightarrow 16x^2 + 25(mx+5)^2 = 400 \rightarrow \\ &\rightarrow 25m^2x^2 + 250mx + 16x^2 + 625 = 400 \rightarrow (25m^2 + 16)x^2 + 250mx + 225 = 0 \end{aligned}$$

Si les rectes són tangents a l'el·lipse, el discriminant d'aquesta equació ha de ser 0.

$$\Delta = (250m)^2 - 4 \cdot (25m^2 + 16) \cdot 225 = 0 \rightarrow m = -\frac{3}{5}, m = \frac{3}{5}$$

Les rectes tangents són:

$$r: y = -\frac{3}{5}x + 5; \quad r': y = \frac{3}{5}x + 5$$

8. Càlcul de la recta tangent a una paràbola en un punt

Fes-ho tu. Troba la recta tangent a la paràbola $y^2 = -4x$ en el punt $A(-4, 4)$.

Feix de rectes que passen per $A = (-4, 4)$:

$y = m(x+4) + 4$, $m \in \mathbb{R}$, més la recta vertical $x = -4$

$$y^2 = -4x \begin{cases} y = m(x+4) + 4 \\ y^2 = -4x \end{cases} \rightarrow y = m\left(\frac{y^2}{-4} + 4\right) + 4 \rightarrow 4y = -my^2 + 16m + 16$$

$$my^2 + 4y - 16m - 16 = 0$$

Si les rectes són tangents a la paràbola, el discriminant d'aquesta equació ha de ser 0.

$$\Delta = 16 - 4 \cdot m \cdot (-16m - 16) = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

La recta tangent és:

$$y = -\frac{1}{2}(x+4) + 4$$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 236

1. Comprovació de que $y = 1/x$ és una hipèrbola

Comprova que la corba $y = \frac{1}{x}$, coneguda de cursos anteriors, és una hipèrbola de constant $k = 2\sqrt{2}$ i focus $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $F'(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

a) $|\text{dist}(P, F') - \text{dist}(P, F)| = 2\sqrt{2}$

$$\left| \sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2} - \sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2 + (-\sqrt{2}-y)^2} \right| = 2\sqrt{2}$$

b) $\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2 + (-\sqrt{2}-y)^2}$

$$\left(\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2} \right)^2 = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2 + (-\sqrt{2}-y)^2} \right)^2$$

$$(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2 = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4} + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + x^2 + y^2 + 12$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 - 2\sqrt{2}y + 4 = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4} + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + x^2 + y^2 + 12$$

$$-4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 8 = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4}$$

$$-4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4}$$

$$-x - y - \sqrt{2} = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4}$$

$$(-x - y - \sqrt{2})^2 = \left(\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4} \right)^2$$

$$x^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4$$

$$2xy = 2 \rightarrow xy = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x}$$

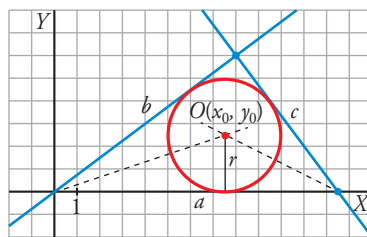
2. Circumferència inscrita en un triangle

Troba l'equació de la circumferència inscrita en el triangle de costats a , b i c , essent:

$a: y = 0$

$b: 3x - 4y = 0$

$c: 4x + 3y - 50 = 0$



• $\text{dist}(P, a) = \text{dist}(P, b) \rightarrow \left| \frac{y}{1} \right| = \left| \frac{3x-4y}{5} \right|$

$$5y = 3x - 4y$$

$$-5y = 3x - 4y \rightarrow \text{No val perquè la bisectriu de l'angle té pendent positiu.}$$

• $\text{dist}(P, a) = \text{dist}(P, c) \rightarrow \left| \frac{y}{1} \right| = \left| \frac{4x+3y-50}{5} \right|$

$$5y = 4x + 3y - 50 \rightarrow \text{No val perquè la bisectriu de l'angle té pendent negatiu.}$$

$$-5y = 4x + 3y - 50$$

• Incentre:

$$\begin{cases} 5y = 3x - 4y \\ -5y = 4x + 3y - 50 \end{cases} \rightarrow x = \frac{15}{2}, y = \frac{5}{2} \rightarrow O = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$\bullet r = \text{dist}(O, a) = \left| \frac{\frac{5}{2}}{1} \right| = \frac{5}{2}$$

• Equació de la circumferència inscrita:

$$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 15x + y^2 - 5y + \frac{125}{2} = \frac{25}{4} \rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$$

3. Rectes tangent i normal a una circumferència en un punt

Siguin r i s , respectivament, les rectes tangent i normal a una circumferència en un punt P :

$$r: x + y - 7 = 0 \quad s: x - y - 9 = 0$$

Calcular l'equació de la circumferència sabent que el seu radi és $r = 2\sqrt{2}$.

Punt de tangència:

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 8, y = -1 \rightarrow P = (8, -1)$$

Centre de la circumferència:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ \sqrt{(8-x)^2 + (1-y)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ (8-x)^2 + (-1-y)^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ x^2 - 16x + y^2 + 2y + 65 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 9 + y \\ (9+y)^2 - 16(9+y) + y^2 + 2y + 65 = 8 \end{cases} \rightarrow y = 1, y = -3 \\ &\begin{cases} y = 1 \rightarrow x = 10 \\ y = -3 \rightarrow x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} O = (10, 1) \\ O = (6, -3) \end{cases} \end{aligned}$$

Hi ha dues circumferències:

$$(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 8$$

$$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 8$$

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 237

Per practicar

Llocs geomètrics

1 Troba, en cada cas, la mediatriu del segment AB :

a) $A(5, -1)$ $B(-3, 1)$

b) $A(3, 6)$ $B(-1, 6)$

Comprova que és una recta perpendicular a AB .

$X = (x, y)$ punt genèric de la mediatriu.

a) $\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$

$$\sqrt{(5-x)^2 + (-1-y)^2} = \sqrt{(-3-x)^2 + (1-y)^2} \rightarrow x^2 - 10x + y^2 + 2y + 26 = x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$$

$$\text{Mediatriu: } -16x + 4y + 16 = 0 \rightarrow \vec{d} = (-4, -16)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-8, 2)$$

$$(-8, 2) \cdot (-4, -16) = 0 \rightarrow \text{Les rectes són perpendiculars.}$$

b) $\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$

$$\sqrt{(3-x)^2 + (6-y)^2} = \sqrt{(-1-x)^2 + (6-y)^2} \rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 12y + 45 = x^2 + 2x + y^2 - 12y + 37$$

$$\text{Mediatriu: } -8x + 8 = 0 \rightarrow \vec{d} = (0, 8)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 0)$$

$$(0, 8) \cdot (-4, 0) = 0 \rightarrow \text{Les rectes són perpendiculars.}$$

2 Troba el lloc geomètric dels punts $P(x, y)$ la diferència de quadrats de distàncies als punts $A(0, 0)$ i $B(6, 3)$ dels quals és 15. Quina figura obtens?

$X = (x, y)$ punt genèric del lloc geomètric.

$$|x^2 + y^2 - ((6-x)^2 + (3-y)^2)| = 15$$

$$|12x + 6y - 45| = 15$$

$$\begin{cases} 12x + 6y - 45 = 15 \\ 12x + 6y - 45 = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x + 6y - 60 = 0 \\ 12x + 6y - 30 = 0 \end{cases}$$

Són dues rectes paral·leles.

3 Troba el lloc geomètric dels punts la distància a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ dels quals és 6.

$$P(x, y) \text{ compleix que } \text{dist}(P, r) = 6 \rightarrow \frac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16 + 9}} = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow |4x - 3y + 11| = 30 \rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 11 = 30 \\ 4x - 3y + 11 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1: 4x - 3y - 19 = 0 \\ r_2: 4x - 3y + 41 = 0 \end{cases}$$

Són dues rectes paral·leles entre elles i paral·leles, alhora, a la recta donada.

4 Troba el lloc geomètric dels punts que equidisten de les rectes r i s . Interpreta'n el resultat.

$$r: 3x - 5y + 11 = 0 \quad s: 3x - 5y + 3 = 0$$

$$P(x, y) \text{ tals que } d(P, r) = d(P, s) \rightarrow \frac{|3x - 5y + 11|}{\sqrt{34}} = \frac{|3x - 5y + 3|}{\sqrt{34}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 5y + 11 = 3x - 5y + 3 \rightarrow 11 = 3 \text{ Impossible!} \\ 3x - 5y + 11 = -3x + 5y - 3 \rightarrow 6x - 10y + 14 = 0 \rightarrow r: 3x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

És una recta paral·lela a les dues rectes donades que, alhora, són paral·leles entre elles, com es pot veure pels seus coeficients, ja que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

5 Troba les equacions de les bisectrius dels angles que formen les rectes r i s :

$$r: 4x - 3y + 8 = 0 \quad s: 12x + 5y - 7 = 0$$

Són tots els punts $P(x, y)$ tals que $d(P, r) = d(P, s)$:

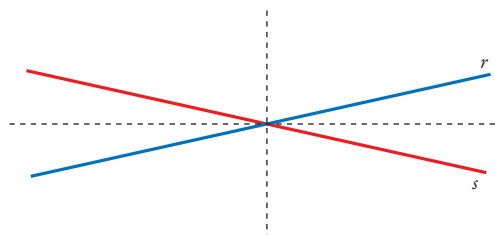
$$\frac{|4x - 3y + 8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{169}} = \frac{|4x - 3y + 8|}{5} = \frac{|12x + 5y - 7|}{13} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 13(4x - 3y + 8) = 5(12x + 5y - 7) \\ 13(4x - 3y + 8) = -5(12x + 5y - 7) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 52x - 39y + 104 = 60x + 25y - 35 \\ 52x - 39y + 104 = -60x - 25y + 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 64y - 139 = 0 \\ 112x - 14y + 69 = 0 \end{cases}$$

Hi ha dues solucions, bisectrius dels angles còncau i convex que formen les rectes r i s .

Ambdues bisectrius es tallen en el punt de tall de les rectes r i s , i són perpendiculars.

**Circumferències****6 Troba, en cada cas, el lloc geomètric dels punts del pla la distància al punt A dels quals és d .**

a) $A(0, 5)$ i $d = 2$

b) $A(0, 0)$ i $d = 1$

c) $A(-2, 0)$ i $d = \frac{1}{2}$

d) $A(-1, -5)$ i $d = \frac{3}{5}$

$X = (x, y)$ punt genèric del lloc geomètric.

a) $\text{dist}(X, A) = d$

$$\sqrt{x^2 + (y - 5)^2} = 2 \rightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 4 \rightarrow \text{Circumferència de centre } A = (0, 5) \text{ i radi } d = 2.$$

b) $\text{dist}(X, A) = d$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{Circumferència de centre } A = (0, 0) \text{ i radi } d = 1.$$

c) $\text{dist}(X, A) = d$

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \rightarrow (x+2)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \text{Circumferència de centre } A = (-2, 0) \text{ i radi } d = \frac{1}{2}.$$

d) $\text{dist}(X, A) = d$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2} = \frac{3}{5} \rightarrow (x+1)^2 + (y+5)^2 = \frac{9}{25} \rightarrow \text{Circumferència de centre } A = (-1, -5) \text{ i radi } d = \frac{3}{5}.$$

7 Troba el lloc geomètric dels punts el quocient de distàncies als punts $A(0, 6)$ i $B(0, 3)$ del qual és 2; és a dir:

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, B)} = 2$$

$X = (x, y)$ punt genèric del lloc geomètric.

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, B)} = \frac{\sqrt{x^2 + (y-6)^2}}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} = 2$$

$$x^2 + (y-6)^2 = 2(x^2 + (y-3)^2) \rightarrow x^2 + y^2 - 12y + 36 = 2x^2 + 2y^2 - 12y + 18 \rightarrow x^2 + y^2 = 18$$

Circumferència de centre $A = (0, 0)$ i radi $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

8 Dóna, en cada cas, l'equació de la circumferència que té centre C i radi r .

a) $C(0, 0)$ i $r = 1$

b) $C(2, -3)$ i $r = 2$

c) $C(-1, 0)$ i $r = \frac{2}{3}$

d) $C(0, 3)$ i $r = \frac{5}{4}$

$X = (x, y)$ punt genèric.

a) $\text{dist}(X, A) = r$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

b) $\text{dist}(X, A) = r$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 2 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$$

c) $\text{dist}(X, A) = r$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{2}{3} \rightarrow (x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

d) $\text{dist}(X, A) = r$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \frac{5}{4} \rightarrow x^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{16}$$

9 Esbrina quines de les expressions següents corresponen a circumferències i, d'aquestes, troba'n el centre i el radi:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

a) Els coeficients de x^2 i y^2 són 1. No hi ha terme en xy .

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0$$

És una circumferència de centre $(4, -1)$ i radi $\sqrt{7}$.

b) Els coeficients de x^2 i y^2 no són iguals. No és una circumferència.

c) Hi ha un terme xy . No és cap circumferència.

d) Els coeficients de x^2 i y^2 són iguals i no té terme en xy . Dividim entre 2 la igualtat:

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0.$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$$

És una circumferència de centre $(4, 0)$ i radi $\sqrt{4} = 2$.

10 Escriu l'equació de la circumferència que passa per $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ i té centre en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

$X = (x, y)$ punt genèric.

$$\text{dist}(X, A) = r$$

$$r = \text{dist}(P, Q)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{13}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow 36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y + 4 = 0 \rightarrow 9x^2 - 9x + 9y^2 - 6y + 1 = 0$$

11 Troba l'equació de la circumferència que té el centre en el punt $C(0, -5)$ i el diàmetre igual a 10.

$X = (x, y)$ punt genèric.

$$\text{dist}(X, C) = r$$

$$r = 5$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y + 5)^2} = 5 \rightarrow x^2 + (y + 5)^2 = 25$$

12 Escriu l'equació de la circumferència que passa per $A(1, -2)$ i per $B(2, -1)$ i té radi 1.

El centre de la circumferència és en la mediatriu de AB i $\text{dist}(O, A) = 1$.

Mediatriu:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1); M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$m: \frac{x - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{y + \frac{3}{2}}{1} \rightarrow 2x - 3 = -2y - 3 \rightarrow x = -y$$

$$\text{dist}(O, A) = 1 \rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = 1$$

O és solució de:

$$\begin{cases} x = -y \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = -1; x = 2, y = -2$$

Hi ha dues circumferències que verifiquen les condicions:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 \quad y \quad (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

13 Un dels diàmetres d'una circumferència té per extrems $A(3, -2)$ i $B(7, 0)$. Troba l'equació de la circumferència.

El centre és: $M_{AB} = (5, -1)$

$$r = \text{dist}(O, A) = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Equació: } (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

- 14** Determina l'equació de la circumferència que passa per $A(2, -4)$, $B(8, -10)$ i $C(4, -8)$.

* Mira l'exercici resolt 1 de la pàgina 232.

r : mediatriu de AB

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4) - (8, -10) = (6, -6) = 6(1, -1)$$

r : té vector de direcció $\vec{d} = (1, 1)$ i passa per $M_{AB} = (5, -7)$

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y+7}{1} \rightarrow x - y - 12 = 0$$

s : Mediatriu de PR

$$\overrightarrow{AC} = (2, -4) - (4, -8) = (-2, 4) = 2(-1, 2)$$

s : té vector de direcció $\vec{d} = (2, 1)$ i passa per $M_{AC} = (3, -6)$

$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{1} \rightarrow x - 2y - 15 = 0$$

$$\text{Centre} \rightarrow \begin{cases} x - y - 12 = 0 \\ x - 2y - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 9, y = -3 \rightarrow C = (9, -3)$$

$$\text{Radi} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-9)^2 + (-4+3)^2} = 5\sqrt{2}$$

L'equació de la circumferència és $(x-9)^2 + (y+3)^2 = 50$

- 15** Dóna l'equació de la circumferència que té per centre el punt $(2, -5)$ i és tangent a l'eix d'abscisses.

$$r = \text{dist}(O, \text{eix } OX) = 5$$

L'equació de la circumferència és $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25$.

- 16** Obtén l'equació de la circumferència el centre de la qual és en el punt $(3, -4)$ i és tangent a l'eix d'ordenades.

$$r = \text{dist}(O, \text{eix } OY) = 3$$

L'equació de la circumferència és $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$.

- 17** Determina l'equació de la circumferència que té el centre en l'origen de coordenades i és tangent a la recta $x + y - 3 = 0$.

$$r = \text{dist}(O, s) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

L'equació de la circumferència és $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$.

- 18** Determina les rectes tangent i normal a la circumferència $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 13$ en el punt $A(-2, 1)$.

$A \in$ circumferència.

La normal és la recta que uneix A amb el centre de la circumferència C .

$$C = (-4, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 1) - (-4, -2) = (2, 3)$$

$$n: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 2y + 8 = 0$$

La tangent és perpendicular a la normal i passa per A .

$$t: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} \rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$$

■ Posicions relatives de rectes i circumferències

- 19** Calcula la distància del centre de la circumferència $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta $r: 2x - y + 3 = 0$. Quina és la posició de r respecte de la circumferència?

El centre de la circumferència és $C(0, 1)$ i el seu radi és $R = \sqrt{2}$. La distància de C a r és:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|-1+3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89 < \sqrt{2} \approx 1,41$$

Aleshores, la circumferència i la recta són secants.

- 20** Estudia la posició relativa de la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecte de cada una de les rectes següents:

$$r_1: x + y - 1 = 0 \quad r_2: 3x - 4y + 9 = 0$$

Resolem el sistema format per les equacions de la circumferència i cada una de les rectes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

No hi ha solució $\rightarrow r_1$ i la circumferència són exteriors.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ 3x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{9}{5}, y = \frac{18}{5}$$

Hi ha una solució única $\rightarrow r_2$ i la circumferència són tangents.

- 21** Estudia la posició relativa de la circumferència d'equació $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ respecte de cada una de les rectes següents:

$$r_1: x - 2 = 0 \quad r_2: y = 0 \quad r_3: y = 2x + 1$$

Fes servir, en cada cas, els dos mètodes següents:

a) Resoldre els sistemes d'equacions formats per la circumferència i cada recta.

b) Comparar la mesura del radi amb la distància de cada recta al centre de la circumferència.

• $r_1: x - 2 = 0$

a) Resolem el sistema format per les equacions de la circumferència i la recta.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{No hi ha solució; per tant, són exteriors.}$$

b) $C = (-1, 2)$

$$\text{dist}(C, r_1) = \left| \frac{-1-2}{1} \right| = 3 \quad \left. \begin{matrix} \\ r = 2 \end{matrix} \right\} \text{dist}(C, r_1) > r$$

Com que la distància del centre de la circumferència a la recta és més gran que el radi, són exteriors.

• $r_2: y = 0$

a) Resolem el sistema format per les equacions de la circumferència i la recta.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -1, y = 0$$

Hi ha una única solució; per tant, són tangents.

b) $C = (-1, 2)$

$$\left. \begin{aligned} \text{dist}(C, r_2) &= \left| \frac{-2}{1} \right| = 2 \\ r &= 2 \end{aligned} \right\} \text{dist}(C, r_2) = r$$

Com que la distància del centre de la circumferència a la recta és igual que el radi, són tangents.

• $r_3: y = 2x + 1$

a) Resolem el sistema format per les equacions de la circumferència i la recta.

$$\left\{ \begin{aligned} (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 4 \\ y &= 2x+1 \end{aligned} \right. \rightarrow x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{11} + \frac{1}{5}, y_1 = \frac{2}{5}\sqrt{11} + \frac{7}{5}; x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{11}, y_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{11}$$

Hi ha dues solucions; per tant, són secants.

b) $C = (0, 0)$

$$\left. \begin{aligned} \text{dist}(C, r_3) &= \left| \frac{-2-2+1}{\sqrt{5}} \right| = \frac{3}{5}\sqrt{5} = 1,3416 \\ r &= 2 \end{aligned} \right\} \text{dist}(C, r_3) < r$$

Com que la distància del centre de la circumferència a la recta és menor que el radi, són secants.

22 Estudia la posició relativa de la recta $y = x + b$ i la circumferència $x^2 + y^2 = 1$ en funció del paràmetre b .

El centre de la circumferència és $C(0, 0)$ i el seu radi és $r = 1$.

Trobem la distància de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = \text{dist}(C, s) = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$

Perquè la recta sigui tangent a la circumferència, ha de ser $d = r$; és a dir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

23 Determina la posició relativa de la recta $y = 2x - 3$ i la circumferència $x^2 + y^2 = a$ en funció del valor del paràmetre a .

$C = (0, 0)$ és el centre de la circumferència i $R = \sqrt{a}$, el seu radi.

Anomenem r : $y = 2x - 3$

$$\left. \begin{aligned} \text{dist}(C, r) &= \left| \frac{-3}{\sqrt{5}} \right| = \frac{3}{5}\sqrt{5} \\ R &= \sqrt{a} \end{aligned} \right\} \frac{3}{5}\sqrt{5} = \sqrt{a} \rightarrow a = \frac{9}{5}$$

- Si $a < \frac{9}{5}$, la recta i la circumferència són exteriors.
- Si $a = \frac{9}{5}$, la recta i la circumferència són tangents.
- Si $a > \frac{9}{5}$, la recta i la circumferència són secants.

Pàgina 238

■ Potència d'un punt respecte a una circumferència

24 Calcula la potència dels punts $P(5, 2)$, $Q(2, 1)$ i $R(-1, 0)$ respecte de la circumferència:

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Estudia la posició relativa de P , Q i R respecte de C .

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \rightarrow O(3, 2), r = 2$$

$$P(5, 2) \rightarrow P = (5 - 3)^2 + (2 - 2)^2 - 4 = 0 = 0; \text{ per tant, } P \text{ pertany a } C.$$

$$Q(2, 1) \rightarrow P = (2 - 3)^2 + (1 - 2)^2 - 4 = -2 < 0; \text{ per tant, } Q \text{ és un punt interior a } C.$$

$$R(-1, 0) \rightarrow P = (-1 - 3)^2 + (0 - 2)^2 - 4 = 16 > 0; \text{ per tant, } R \text{ és un punt exterior a } C.$$

25 Troba i representa l'eix radical dels parells de circumferències següents:

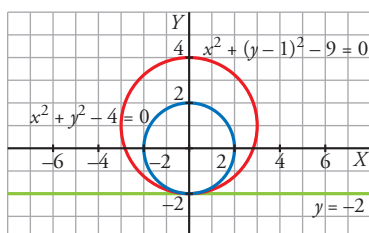
a) $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 5$ y $(x - 7)^2 + y^2 = 9$

c) $x^2 + (y - 3)^2 = 2$ y $(x - 5)^2 + y^2 = 1$

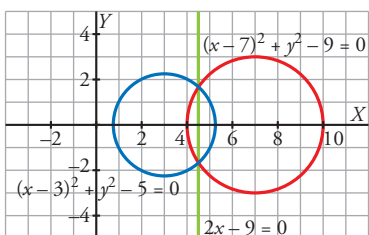
a) $x^2 + y^2 - 4 = x^2 + (y - 1)^2 - 9$

$$x^2 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 - 2y - 8 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2$$



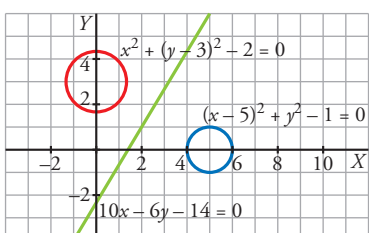
b) $(x - 3)^2 + y^2 - 5 = (x - 7)^2 + y^2 - 9$

$$x^2 - 6x + y^2 + 4 = x^2 - 14x + y^2 + 40 \rightarrow 8y - 36 = 0 \rightarrow 2x - 9 = 0$$



c) $x^2 + (y - 3)^2 - 2 = (x - 5)^2 + y^2 - 1$

$$x^2 + y^2 - 6y + 7 = x^2 - 10x + y^2 + 24 \rightarrow 10x - 6y - 14 = 0$$



26 Considera les circumferències $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ i $C_2: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 10$.

- Comprova que ambdues circumferències són secants i calcula'n els punts de tall, A i B .
- Troba les potències dels punts A i B a les circumferències C_1 i C_2 .
- Tenint en compte el resultat obtingut en l'apartat anterior, què podries dir de l'eix radical d'ambdues circumferències?
- Pots generalitzar aquest resultat per a un parell qualsevol de circumferències secants?

a) Calculem els punts de tall resolent el sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ (x-3)^2 + (y+3)^2 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 2 \\ x^2 - 6x + y^2 + 18 = 10 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0, y_1 = -2; x_2 = 2, y_2 = 0$$

Punts de tall: $A = (0, -2)$, $B = (2, 0)$; aleshores són secants.

b) $A \in C_1 \cap C_2 \rightarrow A$ verifica les equacions de C_1 i $C_2 \rightarrow P(A, C_1) = P(A, C_2) = 0$

$B \in C_1 \cap C_2 \rightarrow B$ verifica les equacions de C_1 i $C_2 \rightarrow P(B, C_1) = P(B, C_2) = 0$

c) L'eix radical és la recta que passa per A i per B .

d) Sí, ja que el raonament de l'apartat b) mostra que els punts de tall sempre tenen potència igual a zero respecte a les dues circumferències. Per tant, l'eix radical sempre passa per aquests.

El·lipses

27 Troba l'equació del lloc geomètric dels punts la suma de distàncies a $P(-4, 0)$ i $Q(4, 0)$ dels quals és 10.

Es una el·lipse de focus $P(-4, 0)$ i $Q(4, 0)$, i constant $k = 10$; és a dir, $2a = 10$ i $c = 4$.

Així: $a = 5$; $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

L'equació serà: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

28 D'una el·lipse en coneixem els focus $F(0, 1)$ i $F'(0, -1)$ i la constant $k = 4$. Determina'n l'equació.

Si $P(x, y)$ és un punt de l'el·lipse, aleshores:

$\text{dist}(P, F) + \text{dist}(P, F') = 2a$; és a dir:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -4y - 16 = -8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \rightarrow (4y + 16)^2 = 64[x^2 + (y+1)^2] \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 256 + 128y = 64x^2 + 64y^2 + 64 + 128y \rightarrow$$

$$\rightarrow 192 = 64x^2 + 48y^2 \rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

• D'una altra manera:

El centre de l'el·lipse és el punt mitjà del segment que uneix F amb F' ; és a dir: $(0, 0)$.

Per altra part:

$$2c = \text{dist}(F, F') = |\overrightarrow{FF'}| = |(0, 2)| = 2 \rightarrow c = 1$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow a^2 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

Per tant, l'equació és: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

29 Troba l'equació de l'el·lipse de focus $(-2, 0)$ i $(2, 0)$ sabent que la longitud de l'eix major és 10.

$$c = 2; 2a = 10 \rightarrow a = 5; b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

$$\text{Equació: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

30 Escriu l'equació de l'el·lipse els focus de la qual són $F(-3, 0)$ i $F'(3, 0)$ i l'excentricitat és 0,5.

$$c = 3; exc = \frac{c}{a} = 0,5 \rightarrow a = \frac{c}{0,5} = \frac{3}{0,5} = 6$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$$

$$\text{Equació: } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

31 Dóna l'equació de l'el·lipse que passa per $(3, 1)$ i té per focus $(4, 0)$ i $(-4, 0)$.

$$\text{L'equació és: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Com que passa per $(3, 1) \rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$
- Com que $a^2 = b^2 + c^2$ i sabem que $c = 4 \rightarrow a^2 = b^2 + 16$

Tenint en compte les dues condicions anteriors:

$$\frac{9}{b^2 + 16} + \frac{1}{b^2} = 1 \rightarrow 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \rightarrow b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ b^2 = -8 \text{ (No val)} \end{cases}$$

$$\text{Així: } a^2 = 2 + 16 = 18$$

$$\text{Per tant, l'equació de l'el·lipse serà: } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$$

32 D'una el·lipse, centrada en $(0, 0)$, se sap que l'eix major, que és igual a 10, és sobre l'eix X . A més, passa pel punt $(3, 3)$. Obtén-ne l'equació.

$$A = (3, 3)$$

$$\text{Eix major} = 10 \rightarrow a = 5$$

$$\text{Eix major} = OX \rightarrow \text{El centre és } O = (0, 0)$$

$$\text{L'equació de l'el·lipse serà: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(3, 3) \in \text{el·lipse} \rightarrow \frac{3^2}{25} + \frac{3^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow b = -\frac{15}{4}, b = \frac{15}{4}$$

$$\text{Com que } b \text{ és positiu} \rightarrow b = \frac{15}{4}$$

L'equació queda:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{16}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{225} = 1$$

33 Determina, en cada cas, l'equació de l'el·lipse, centrada en $(0, 0)$, que té aquestes característiques:

a) La seva excentricitat és $1/2$. El seu eix major està sobre l'eix Y i és igual a 2.

b) Els seus vèrtexs són: $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$ i $(0, 4)$.

a) Eix major = 2 $\rightarrow b = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1} = 1; e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{c}{1} = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

L'equació queda:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{3} + y^2 = 1$$

b) Eix major = OY

$$\text{Eix major} = 8 \rightarrow b = 4$$

$$a = 2$$

$$\text{L'equació queda: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

34 Troba els vèrtexs, els focus i l'excentricitat de les el·lipses següents. Després, representa-les.

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

c) $9x^2 + 25y^2 = 25$

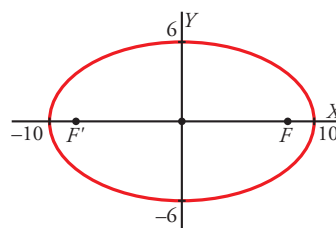
d) $9x^2 + 4y^2 = 3$

a) Vèrtexs: $(10, 0)$; $(-10, 0)$; $(0, 6)$ i $(0, -6)$

$$\text{Focus: } c = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$F(8, 0) \text{ i } F'(-8, 0)$$

$$\text{Excentricitat: } exc = \frac{8}{10} = 0,8$$

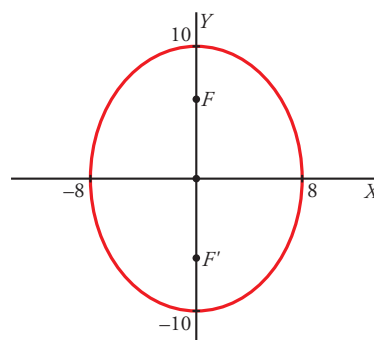


b) Vèrtexs: $(8, 0)$; $(-8, 0)$; $(0, 10)$ i $(0, -10)$

$$\text{Focus: } c = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

$$F(0, 6) \text{ i } F'(0, -6)$$

$$\text{Excentricitat: } exc = \frac{6}{10} = 0,6$$



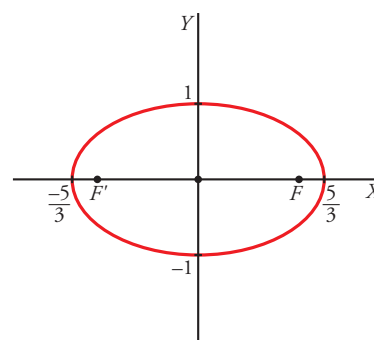
c) $9x^2 + 25y^2 = 25 \rightarrow \frac{x^2}{25/9} + \frac{y^2}{1} = 1$

$$\text{Vèrtexs: } \left(\frac{5}{3}, 0\right); \left(-\frac{5}{3}, 0\right); (0, 1) \text{ i } (0, -1)$$

$$\text{Focus: } c = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$F = \left(\frac{4}{3}, 0\right) \text{ i } F' = \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$\text{Excentricitat: } exc = \frac{4/3}{5/3} = \frac{4}{5} = 0,8$$



d) $9x^2 + 4y^2 = 3 \rightarrow \frac{x^2}{3/9} + \frac{y^2}{3/4} = 1$

L'el·lipse té eix major = OY i centre $O = (0, 0)$.

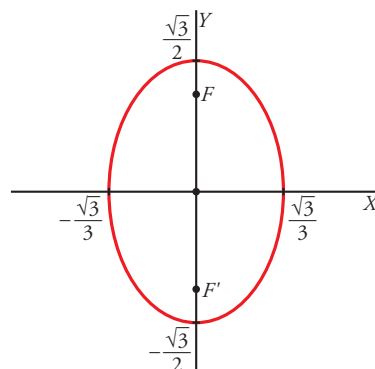
$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{9} = \frac{5}{12} \rightarrow c = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$\text{Vèrtexs: } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right); \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ i } \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Focus: } F = \left(0, \sqrt{\frac{5}{12}}\right) \text{ i } F' = \left(0, -\sqrt{\frac{5}{12}}\right)$$

$$\text{Excentricitat: } exc = \frac{\sqrt{\frac{5}{12}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$$



35 Troba els vèrtexs, els focus i l'excentricitat de les següents el·lipses no centrades en l'origen de coordenades. Després, representa-les.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ b) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

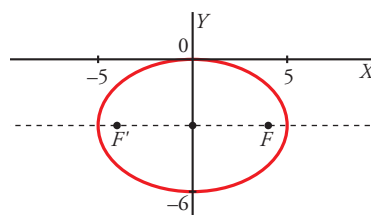
a) Centre: $O = (0, -3)$

$$c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$e = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vèrtexs: } (5, -3); (-5, -3); (0, 0), (0, -6)$$

$$\text{Focus: } F = (4, -3), F' = (-4, -3)$$



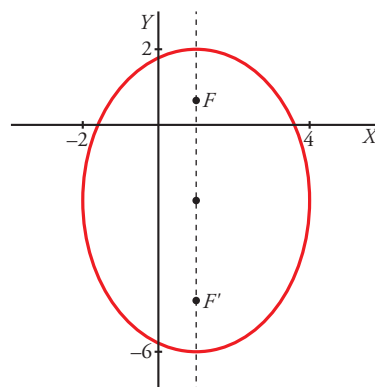
b) Centre: $O = (1, -2)$

$$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$e = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Vèrtexs: } (-2, -2); (4, -2); (1, 2); (1, -6)$$

$$\text{Focus: } F = (1, -2 + \sqrt{7}), F' = (1, -2 - \sqrt{7})$$



■ Hipèrboles

36 Troba el lloc geomètric dels punts la diferencia de distàncies a $F'(-4, 0)$ i $F(4, 0)$ dels quals és 6.

És una hipèrbola de focus F i F' i constant $2a = 6$.

$$\text{Per tant, } a = 3, c = 4, b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\text{L'equació és: } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

37 Troba l'equació de la hipèrbola de focus $(-4, 0)$ i $(4, 0)$ i distància entre vèrtexs 4.

$$c = 4; 2a = 4 \rightarrow a = 2; b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$\text{L'equació és: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

38 Obtén l'equació de la hipèrbola les asímptotes de la qual són $y = \pm \frac{1}{5}x$ i un dels vèrtexs és $(2, 0)$.

$$a = 2; \frac{b}{a} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{5} \rightarrow b = \frac{2}{5}$$

$$\text{Equació: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4/25} = 1, \text{ o bé, } \frac{x^2}{4} - \frac{25y^2}{4} = 1$$

39 Determina la hipèrbola que passa pel punt $(2, 1)$ i té per asímptotes $y = \pm 3x$.

$$\frac{b}{a} = 3 \rightarrow b = 3a \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9a^2} = 1$$

$$\text{Com que passa per } (2, 1) \rightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{1}{9a^2} = 1 \rightarrow 36 - 1 = 9a^2$$

$$35 = 9a^2 \rightarrow a^2 = \frac{35}{9} \rightarrow b^2 = 9a^2 = 35$$

$$\text{Equació: } \frac{x^2}{35/9} - \frac{y^2}{35} = 1, \text{ o bé, } \frac{9x^2}{35} - \frac{y^2}{35} = 1$$

40 Troba l'equació de la hipèrbola de focus $(-3, 0)$ i $(3, 0)$ que té excentricitat igual a 3.

$$c = 3, \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = 3 \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\text{Equació: } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$$

41 D'una hipèrbola sabem que passa pel punt $(8, 5\sqrt{3})$ i que els seus focus són $(-3, 0)$ i $(3, 0)$.
Calcula'n l'equació.

• Trobem la constant de la hipèrbola: $|\text{dist}(P, F) - \text{dist}(P, F')| = 2a$

$$||\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}|| = 2a \rightarrow ||(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})|| = 2a$$

$$\sqrt{121 + 75} - \sqrt{25 + 75} = 2a \rightarrow 14 - 10 = 2a \rightarrow 4 = 2a \rightarrow a = 2$$

• Com que $a = 2$ i $c = 3$, aleshores $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

• L'equació és: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

42 Troba l'equació de la hipèrbola de focus $(-3, 0)$ i $(3, 0)$ i asímptotes $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$.

$$c = 3$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow b = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2 = \frac{9}{5}a^2 \rightarrow 9 = \frac{9}{5}a^2 \rightarrow a = \sqrt{5} \rightarrow b = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{5} = 2$$

$$\text{L'equació demanada és: } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

43 Troba els vèrtexs, els focus, les excentricitats i les asímptotes de les hipèrboles donades per les equacions següents. Després, dibuixa-les.

a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

b) $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

c) $x^2 - 4y^2 = 1$

d) $x^2 - 4y^2 = 4$

e) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$

f) $y^2 - 16x^2 = 16$

g) $9x^2 - 4y^2 = 36$

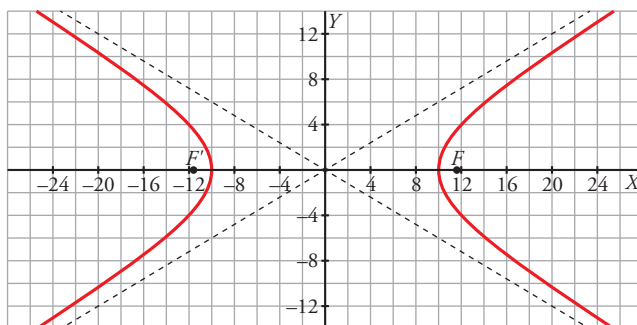
h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

$$a = 10, \quad b = 6, \quad c = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$$

Vèrtexs: $(10, 0); (-10, 0)$ Focus: $F = (\sqrt{136}, 0), \quad F' = (-\sqrt{136}, 0)$

$$e = \frac{\sqrt{136}}{10}$$

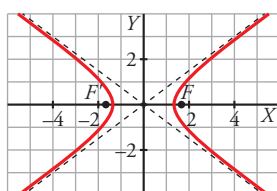
Asímtotes: $y = \pm \frac{3}{5}x$ 

b) $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

$$a = \frac{4}{3}, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{5}{3}$$

Vèrtexs: $\left(\frac{4}{3}, 0\right); \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ Focus: $F = \left(\frac{5}{3}, 0\right), \quad F' = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

$$e = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

Asímtotes: $y = \pm \frac{3}{4}x$ 

c) $x^2 - 4y^2 = 1$

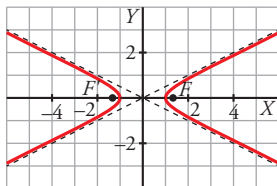
$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Vèrtexs: $(1, 0); (-1, 0)$

Focus: $F = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right); F' = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$

$$e = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Asímtotes: $y = \pm \frac{1}{2}x$



d) $x^2 - 4y^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

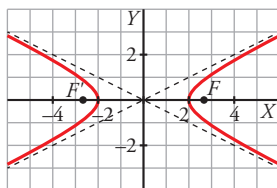
Vèrtexs: $(2, 0); (-2, 0)$

Focus: $F = (\sqrt{5}, 0)$

$$F' = (-\sqrt{5}, 0)$$

$$e = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Asímtotes: $y = \pm \frac{1}{2}x$



e) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$

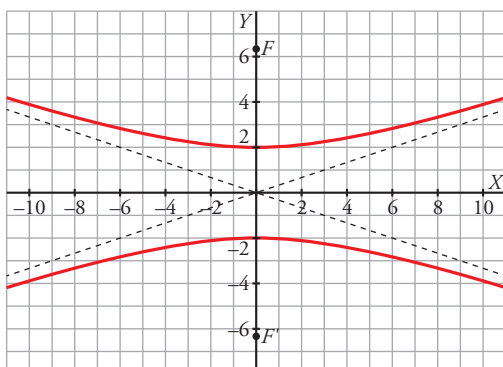
$$a = 2, \quad b = 6, \quad c = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

Vèrtexs: $(0, 2); (0, -2)$

Focus: $F = (0, \sqrt{40}); F' = (0, -\sqrt{40})$

$$e = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

Asímtotes: $y = \pm \frac{1}{3}x$



$$f) y^2 - 16x^2 = 16 \rightarrow \frac{y^2}{16} - x^2 = 1$$

$$a = 4, b = 1, c = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

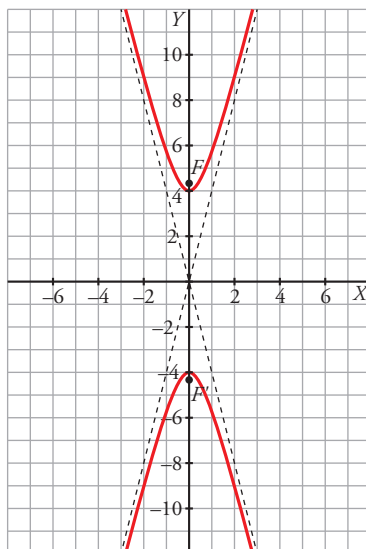
Vèrtexs: $(0, 4); (0, -4)$

Focus: $F = (0, \sqrt{17})$

$$F' = (0, -\sqrt{17})$$

$$e = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

Asíptotes: $y = \pm 4x$



$$g) 9x^2 - 4y^2 = 36 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

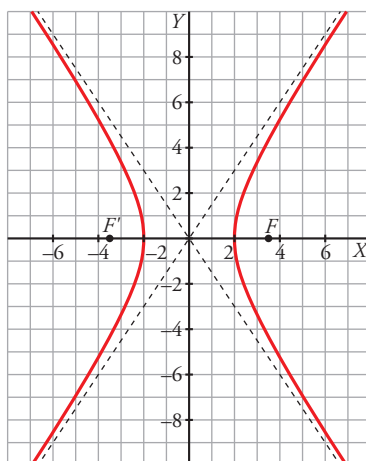
$$a = 2, b = 3, c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Vèrtexs: $(2, 0); (-2, 0)$

Focus: $F = (\sqrt{13}, 0); F' = (-\sqrt{13}, 0)$

$$e = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Asíptotes: $y = \pm \frac{3}{2}x$



$$h) 4x^2 - y^2 + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 4x^2 = 16 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$a = 4, b = 2, c = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

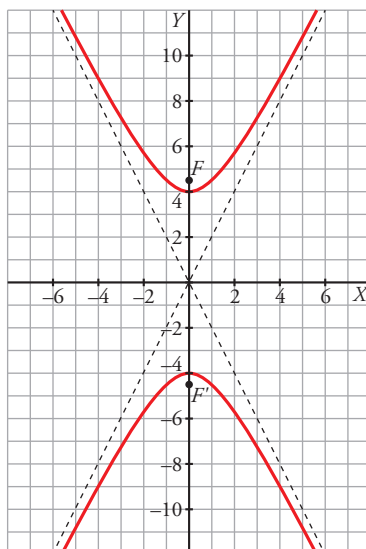
Vèrtexs: $(0, 4); (0, -4)$

Focus: $F = (0, \sqrt{20})$

$$F' = (0, -\sqrt{20})$$

$$e = \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Asíptotes: $y = \pm 2x$



44 Troba els vèrtexs, els focus, les excentricitats i les asímptotes de les següents hipèrboles no centrades en l'origen de coordenades. Dibuixa-les:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$ b) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

a) Centre: $O = (0, 1)$

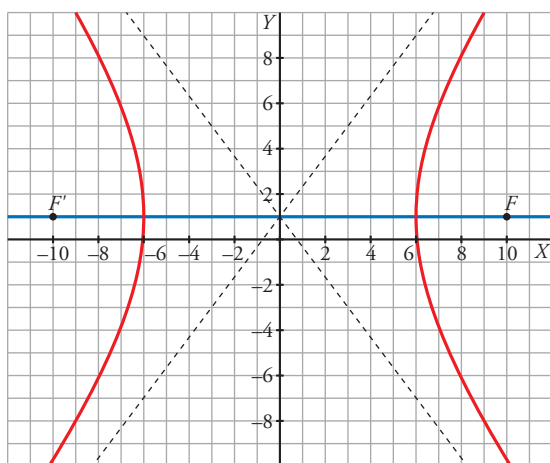
$$a = 6, \quad b = 8, \quad c = \sqrt{36 + 64} = 10$$

Vèrtexs: $(6, 1); (-6, 1)$

Focus: $F = (10, 1); F' = (-10, 1)$

$$e = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Asímptotes: $y - 1 = \pm \frac{8}{6}x$



b) Centre: $O = (1, 1)$

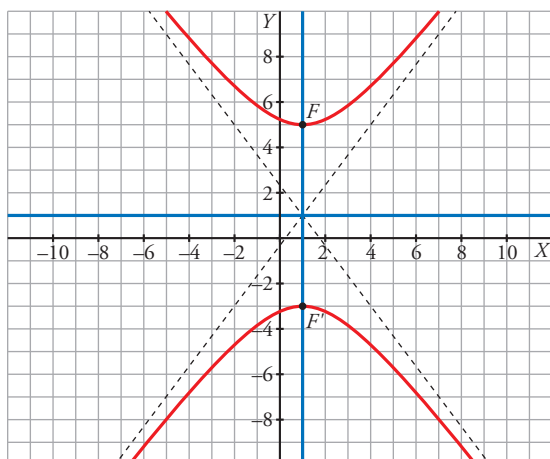
$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Vèrtexs: $(1, 3); (1, -1)$

Focus: $F = (1, 5); F' = (1, -3)$

$$e = \frac{5}{4}$$

Asímptotes: $y - 1 = \pm \frac{4}{3}(x - 1)$



Pàgina 239

■ Paràboles

45 Troba el lloc geomètric dels punts que equidisten del punt $(3, 0)$ i de la recta $y = -3$.

És una paràbola el focus de la qual és $F(3, 0)$ i la directriu de la qual és $d: y + 3 = 0$.

Si $P(x, y)$ és un punt de la paràbola, aleshores:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F) &= \text{dist}(P, d) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |y+3| \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = y^2 + 6y + 9 \rightarrow y = \frac{x^2}{6} - x \end{aligned}$$

O bé: $(x-3)^2 = 6\left(y + \frac{3}{2}\right)$

46 Troba, en cada cas, l'equació de la paràbola de focus F i directriu d :

a) $F(5, 0)$; $d: x = -5$

b) $F(-3, 0)$; $d: x = 3$

c) $F(0, 2,5)$; $d: y = -2,5$

d) $F(0, -4)$; $d: y = 4$

a) $\frac{p}{2} = 5 \rightarrow p = 10 \rightarrow 2p = 20$. Equació: $y^2 = 20x$

b) $\text{dist}(F, d) = 6 = p$

$$F \in OX$$

$$y^2 = -12x$$

c) $\text{dist}(F, d) = 5 = p$

$$F \in OY$$

$$y^2 = 10x$$

d) $\text{dist}(F, d) = 8 = p$

$$F \in OY$$

$$y^2 = -16x$$

47 Determina l'equació de la paràbola que té el vèrtex en l'origen de coordenades i la directriu de la qual és $y = 3$.

El focus serà $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ és un punt de la paràbola i $d: y - 3 = 0$ és la directriu, aleshores:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F) &= \text{dist}(P, d) \rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |y-3| \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \rightarrow x^2 = -12y \end{aligned}$$

48 Troba les equacions de les paràboles que, passant pel punt $(2, 3)$, tenen el vèrtex en l'origen de coordenades.

Hi ha dues possibilitats:

- *Eix horitzontal:* $y^2 = 2px$. Com que passa per $(2, 3)$, aleshores:

$$9 = 4p \rightarrow p = \frac{9}{4} \rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$$

- *Eix vertical:* $x^2 = 2py$. Com que passa per $(2, 3)$, aleshores:

$$4 = 6p \rightarrow p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow x^2 = \frac{4}{3}y$$

49 Troba els vèrtexs, els focus i les directrius de les paràboles següents. Després, representa-les.

a) $y^2 = 6x$

b) $y^2 = -6x$

c) $y = x^2$

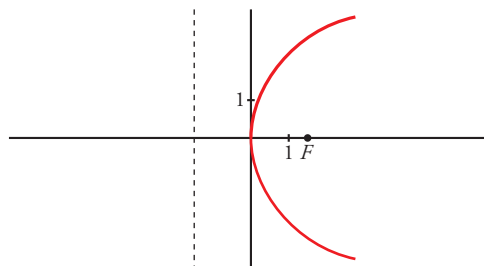
d) $y = \frac{x^2}{4}$

a) $\left. \begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{array} \right\} 2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$

Vèrtex: $(0, 0)$

Focus: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

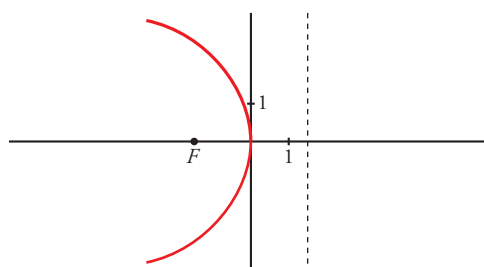
Directriu: $x = -\frac{3}{2}$



b) Vèrtex: $(0, 0)$

Focus: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

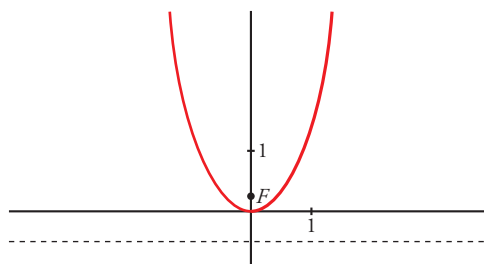
Directriu: $x = \frac{3}{2}$



c) Vèrtex: $(0, 0)$

Focus: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

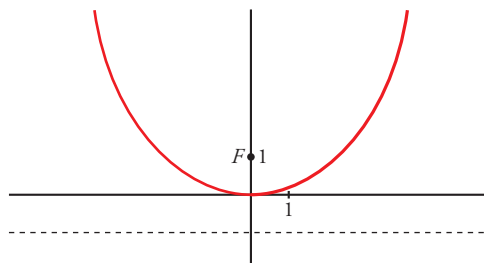
Directriu: $y = -\frac{1}{4}$



d) Vèrtex: $(0, 0)$

Focus: $(0, 1)$

Directriu: $y = -1$



Per resoldre

50 Identifica les còniques següents, calcula'n els elements característics i dibuixa-les:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

c) $9x^2 + 9y^2 = 25$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$

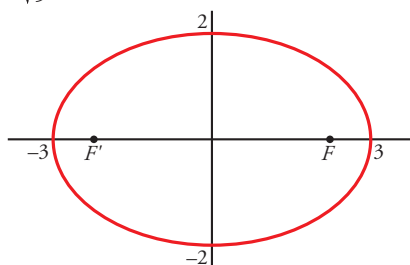
e) $y^2 = 14x$

f) $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

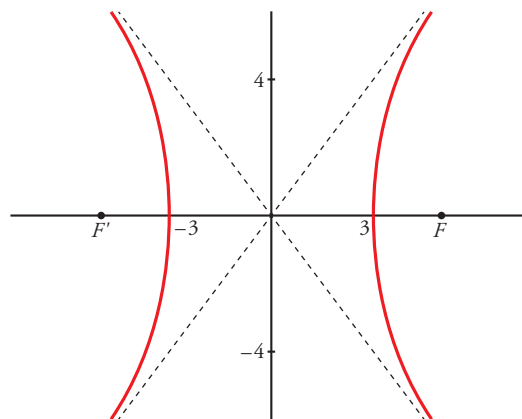
És una el·lipse $\rightarrow a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$

$exc = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75$



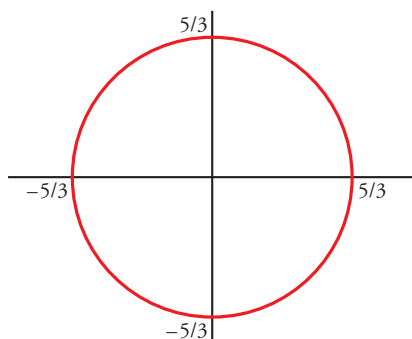
$$b) 16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\text{És una hipèrbola} \rightarrow \begin{cases} a=3, b=4, c=5; \text{exc} = \frac{5}{3} \approx 1,67 \\ \text{Asímptotes: } y = \frac{4}{3}x; y = -\frac{4}{3}x \end{cases}$$



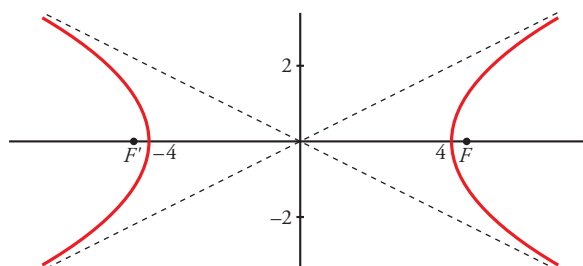
$$c) 9x^2 + 9y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$$

És una circumferència de centre $(0, 0)$ i radi $\frac{5}{3}$.



$$d) x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\text{És una hipèrbola} \rightarrow \begin{cases} a=4, b=2, c=2\sqrt{5}; \text{exc} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \\ \text{Asímptotes: } y = \frac{1}{2}x; y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

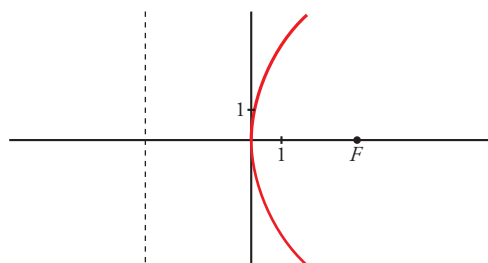


e) És una paràbola.

Vèrtex: $(0, 0)$

Focus: $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

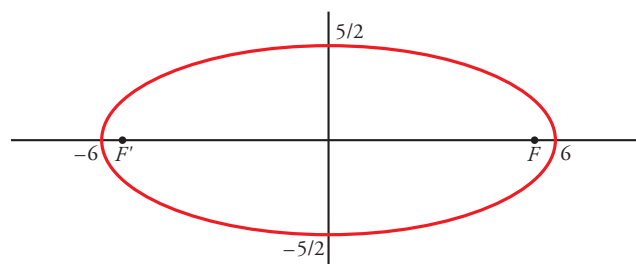
Directriu: $x = -\frac{7}{2}$



$$f) 25x^2 + 144y^2 = 900 \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25/4} = 1$$

$$\text{És una el·lipse} \rightarrow a = 6, b = \frac{5}{2}, c = \frac{\sqrt{119}}{2}$$

$$exc = \frac{\sqrt{119}}{12} \approx 0,91$$



51 Descriu les següents còniques no centrades en l'origen. Obtén-ne els elements i dibuixa-les.

$$a) \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

$$b) \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$c) (x+2)^2 = 4(y+5)$$

$$d) x^2 + y^2 - 2x + 4y = -4$$

a) És una el·lipse de centre $O = (1, 4)$

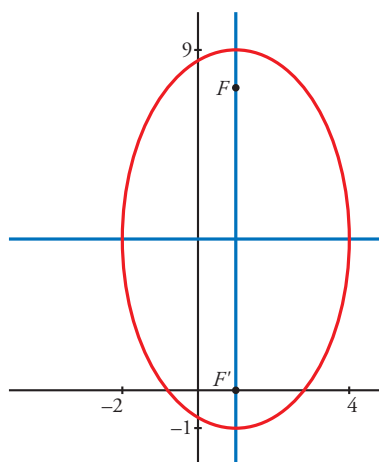
Eix major: OY

$$a = 3, b = 5, c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Vèrtexs: $(4, 4); (-2, 4); (1, 9); (1, -1)$

Focus: $F = (1, 8); F' = (1, 0)$

$$exc = \frac{4}{5}$$



b) És una hipèrbola de centre $O = (1, -1)$

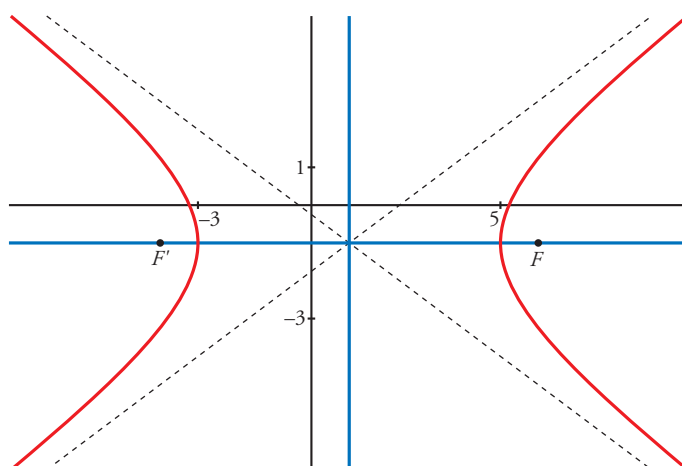
$$a = 4, b = 3, c = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Vèrtexs: $(5, -1); (-3, -1)$

Focus: $F = (6, -1); F' = (-4, -1)$

$$exc = \frac{5}{4}$$

$$\text{Asíntotes: } y + 1 = \pm \frac{3}{4}(x - 1)$$



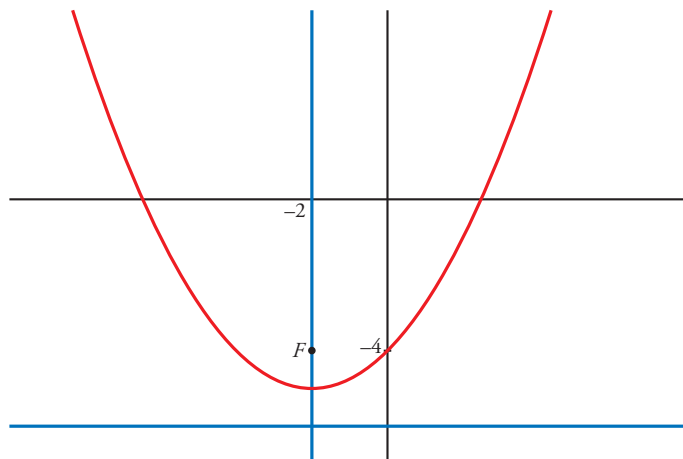
c) Es una paràbola.

Vèrtex: $(-2, -5)$

$$2p = 4 \rightarrow \text{dist}(F, d) = 2 \rightarrow \text{dist}(F, V) = 1 \text{ i } \text{dist}(V, d) = 1$$

$$d: y = -6$$

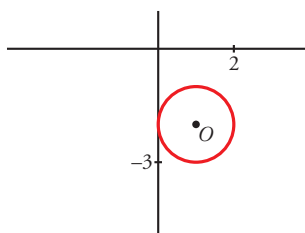
Focus: $F = (-2, -4)$



$$d) x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -4 + 1 + 4 \rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

És una circumferència de centre $O = (1, -2)$.

Radi: $r = 1$



52 a) Troba l'equació de la circumferència el centre de la qual és $C(-1, 1)$ i que és tangent a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.

b) De totes les rectes paral·leles a la bisectriu del primer quadrant, troba les que siguin tangents a la circumferència trobada en l'apartat anterior.

a) El radi, r , de la circumferència és la distància del centre $C(-1, 1)$ a la recta $s: 3x - 4y - 3 = 0$; és a dir:

$$r = \text{dist}(C, s) = \frac{|-3 - 4 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

L'equació serà: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, o bé, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Les rectes paral·leles a la bisectriu del primer quadrant són de la forma $y = x + k$; és a dir, $t: x - y + k = 0$. La recta t és tangent a la circumferència quan la distància del centre de la circumferència, $C(-1, 1)$, a la recta és igual al radi, 2. És a dir:

$$\text{dist}(C, t) = \frac{|-1 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow \frac{|k - 2|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow |k - 2| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k - 2 = 2\sqrt{2} \rightarrow k = 2 + 2\sqrt{2} \\ k - 2 = -2\sqrt{2} \rightarrow k = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hi ha dues rectes:
$$\begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

53 Troba l'equació de la circumferència que passa per $(-3, 2)$ i $(4, 1)$ i que és tangent a l'eix X .

El centre és en la mediatriu del segment AB .

$$A = (-3, 2), B = (4, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (7, -1) \rightarrow \vec{d} = (1, 7)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$m: \frac{x - (1/2)}{1} = \frac{y - (3/2)}{7} \rightarrow 7x - \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \rightarrow y = 7x + 2$$

$$\text{dist}(O, A) = \text{dist}(O, OX) = r$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = y$$

Les coordenades del centre són la solució del sistema següent:

$$\begin{cases} y = 7x + 2 \\ \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = y \end{cases} \rightarrow x_1 = 21, y_1 = 145; x_2 = 1, y_2 = 5$$

Hi ha dues circumferències que compleixen la condició:

$$C: (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$C': (x-21)^2 + (y-145)^2 = 145^2 = 21\,025$$

54 De la circumferència C se sap que té el centre en la recta $x - 3y = 0$ i que passa pels punts $(-1, 4)$ i $(3, 6)$. Obtén l'equació de C .

Si el centre és sobre la recta $x - 3y = 0$, és de la forma $C(3y, y)$.

El centre és a igual distància de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. A més, aquesta distància és el radi, r , de la circumferència:

$$r = \text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$$

$$28y = 28 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3y = 3$$

Per tant, el centre de la circumferència és en $O(3, 1)$ i el seu radi és:

$$r = |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

L'equació és: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$, o bé, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

55 Determina l'equació de la circumferència de radi 10 que, en el punt $(7, 2)$, és tangent a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.

Les coordenades del centre són la solució del sistema següent:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 13 = 0 \\ \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 10 \end{cases} \rightarrow x_1 = 15, y_1 = 8; x_2 = -1, y_2 = -4$$

Hi ha dues circumferències que compleixen aquesta condició:

$$C: (x-15)^2 + (y-8)^2 = 100$$

$$C': (x+1)^2 + (y+4)^2 = 100$$

- 56** Troba l'equació de la circumferència inscrita en el triangle de vèrtexs $A(3, 2)$, $B(1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ i $C(5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$\overrightarrow{AB} = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (-\sqrt{2} - 2, -\sqrt{2} - 2) = (-\sqrt{2} - 2)(1, 1)$$

$$\text{Costat } AB: x - 3 = y - 2 \rightarrow x - y - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (\sqrt{2} + 2, -\sqrt{2} - 2) = (\sqrt{2} + 2)(1, -1)$$

$$\text{Costat } AC: x - 3 = -y + 2 \rightarrow x + y - 5 = 0$$

$$\overrightarrow{BC} = (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}, 0) = (2\sqrt{2})(1, 0)$$

$$\text{Costat } BC: y = -\sqrt{2} \rightarrow y + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{Bisectriu de } \hat{A}: |x - y - 1| = |x + y - 5| \rightarrow y = 2, x = 3$$

Prenem $x = 3$, que és la recta interior al triangle.

Bisectriu de $\hat{C}$:

$$\left| \frac{x + y - 5}{\sqrt{2}} \right| = |y + \sqrt{2}| \rightarrow \begin{cases} \frac{x + y - 5}{\sqrt{2}} = y + \sqrt{2} \\ \frac{x + y - 5}{\sqrt{2}} = -(y + \sqrt{2}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 5 = \sqrt{2}y + 2 \\ x + y - 5 = -\sqrt{2}y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y - 7 = 0 \\ x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0 \end{cases}$$

Prenem $x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0$, que és la recta interior al triangle.

$$\text{L' incentre és la intersecció de les bisectrius: } \begin{cases} x = 3 \\ x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 0 \rightarrow P = (3, 0)$$

$$\text{radi} = \text{dist}(P, \text{costat } BC) = \sqrt{2}$$

$$\text{Circumferència inscrita: } C: (x - 3)^2 + y^2 = 2$$

- 57** Troba l'equació de la circumferència circumscrita al triangle determinat per la recta $y = -x + 4$ i els eixos de coordenades. Calcula l'equació de la recta tangent a aquesta circumferència en $(0, 0)$.

Vèrtexs del triangle:

$$A \rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A = (0, 4) \quad B \rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B = (4, 0) \quad C = (0, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 4(1, -1), M_{AB} = (2, 2)$$

$$m_c: x - 2 = -(y - 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, -4) = 4(0, -1), M_{AC} = (0, 2)$$

$$m_b: x - 2 = 0$$

$$\text{El circumcentre és la intersecció de les mediatrises: } \begin{cases} x - 2 = -(y - 2) \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = 2 \rightarrow P = (2, 2)$$

$$\text{radi} = \text{dist}(P, C) = \sqrt{8}$$

$$\text{Circumferència circumscrita, } C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

La recta tangent en $(0, 0)$ és de la forma $y = wx$.

Imposant que C i r es tallen en un sol punt, s'obté $y = -x$.

- 58** Troba l'equació de la circumferència inscrita en el quadrat de vèrtexs $A(-3, 3)$, $B(-1, 3)$, $C(-1, 1)$ i $D(-3, 1)$.

$$A = (-3, 3), B = (-1, 3), C = (-1, 1), D = (-3, 1)$$

$$\text{Diagonal } AC: y = -x$$

$$\text{Diagonal } BD: y = x + 4$$

$$\text{Centre: } \begin{cases} y = -x \\ y = x + 4 \end{cases} \rightarrow x = -2, y = 2 \rightarrow P = (-2, 2)$$

$$\text{Costat } AB: y = 3$$

$$\text{radi} = \text{dist}(P, \text{costat } AB) = 1$$

$$\text{Circumferència inscrita, } C: (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

- 59** Estudia la posició relativa del punt $P(0, 3)$ respecte de la circumferència $(x - m)^2 + y^2 = 25$ en funció dels valors del paràmetre m .

$$(x - m)^2 + y^2 = 25$$

$$\text{Centre: } O = (m, 0)$$

$$\text{Radi: } r = 5$$

$$\text{dist}(P, O) = \sqrt{m^2 + 9} = 5 \rightarrow m = -4, m = 4$$

$$\sqrt{m^2 + 9} < 5 \rightarrow m \in (-4, 4)$$

$$\sqrt{m^2 + 9} > 5 \rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

$$\text{Si } m \in (-4, 4) \rightarrow P \text{ és interior a la circumferència } C.$$

$$\text{Si } m = -4 \text{ o } m = 4 \rightarrow P \in C$$

$$\text{Si } m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty) \rightarrow P \text{ és exterior a } C.$$

- 60** Estudia la posició relativa de la recta $s: 4x + 3y + k = 0$ respecte de la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ en funció de k .

Depèn del nombre de solucions del sistema següent:

$$\begin{cases} 4x + 3y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3y - k}{4} \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{-3y - k}{4}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{-3y - k}{4}\right) - 6y + 6 = 0$$

$$k^2 + 6ky + 8k + 25y^2 - 72y + 96 = 0 \rightarrow 25y^2 + (6k - 72)y + 96 + 8k + k^2 = 0$$

El nombre de solucions depèn del signe del discriminant.

$$\Delta = (6k - 72)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (96 + 8k + k^2) = -64k^2 - 1664k - 4416$$

- Si $-64k^2 - 1664k - 4416 = 0 \rightarrow k = -3, k = -23 \rightarrow$ Solució única. $\rightarrow$ Són tangents.
- Si $-64k^2 - 1664k - 4416 < 0 \rightarrow k \in (-\infty, -23) \cup (-3, \infty) \rightarrow$ No hi ha solució. $\rightarrow$ Són exteriors.
- Si $-64k^2 - 1664k - 4416 > 0 \rightarrow k \in (-23, -3) \rightarrow$ Dues solucions. $\rightarrow$ Són secants.

- 61** Dues circumferències es tallen en els punts $(0, 0)$ i $(0, 8)$. Quin n'és l'eix radical? Justifica'n la resposta.

L'eix radical és la recta que passa per $(0, 0)$ i per $(0, 8)$, perquè els punts de tall sempre tenen potència zero respecte a les dues circumferències. Per tant, l'eix radical sempre passa per aquests punts.

$$\text{Eix radical: } x = 0$$

62 Troba els punts d'intersecció de cada parell de circumferències i digues quina n'és la posició relativa:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 - 6x - 16 = 0 \rightarrow -6x = 12 \rightarrow x = -2 \\ 4 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Les circumferències es tallen en el punt $(-2, 0)$.

La primera circumferència té centre en $(3, 0)$ i radi 5; la segona té centre en $(0, 0)$ i radi 2. La distància entre els seus centres és $d = 3$. Com que la diferència entre els seus radis és $5 - 2 = 3 = d$, les circumferències són tangents interiors.

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Restant la primera equació de la segona:} \\ 6y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

Les circumferències es tallen en el punt $(3, 0)$.

La primera circumferència té el seu centre en $(3, 2)$ i radi 2; la segona té el seu centre en $(3, -1)$ i radi 1. La distància entre els seus centres és $d = 3$, igual que la suma dels seus radis. Per tant, les circumferències són tangents exteriors.

63 Escriu l'equació d'una el·lipse amb centre en l'origen de coordenades i focus en l'eix d'abscisses, sabent que passa pel punt $P(8, -3)$ i que el seu eix major és igual al doble del menor.

L'eix major és igual al doble del menor; és a dir: $a = 2b$. A més, passa pel punt $P(8, -3)$. Per tant:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{64}{4b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{16}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{25}{b^2} = 1 \rightarrow 25 = b^2; a^2 = 4b^2 = 100$$

$$\text{L'equació és: } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

64 La paràbola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ té per focus el punt $(0, 2)$. Troba'n la directriu.

$$\begin{aligned} y^2 - 4y - 6x - 5 = 0 &\rightarrow y^2 - 4y + 4 - 6x - 5 - 4 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (y - 2)^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow (y - 2)^2 - 6\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vèrtex: } V = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\text{Focus: } F = (0, 2)$$

$$\text{Eix de la paràbola: } y = 2$$

$$\text{dist}(V, d) = \text{dist}(V, F) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Directriu: } x = k \rightarrow x - k = 0$$

$$\text{dist}(V, d) = \left| -\frac{3}{2} - k \right| = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} - k = \frac{3}{2} \rightarrow k = -3 \\ -\frac{3}{2} - k = -\frac{3}{2} \rightarrow k = 0 \end{cases}$$

Com que el focus és a la dreta del vèrtex, la directriu és $x = -3$.

65 Troba l'equació de la paràbola de vèrtex en el punt $(2, 3)$ i que passa pel punt $(4, 5)$.

* *Mira l'exercici resolt 6.*

$X = (x, y)$ punt genèric.

$$(y - 3)^2 - 2p(x - 2) = 0$$

$$(4, 5) \in \text{Paràbola} \rightarrow (5 - 3)^2 - 2p(4 - 2) = 0 \rightarrow 4 - 4p = 0 \rightarrow p = 1$$

$$\text{Paràbola: } (y - 3)^2 - 2(x - 2) = 0$$

66 Troba les equacions de les paràboles següents:

a) Focus $(0, 0)$; directriu $y = -2$.

b) Focus $(2, 0)$; directriu $x = -1$.

c) Focus $(2, 1)$; directriu $y + 3 = 0$.

d) Focus $(1, 1)$; vèrtex $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

a) $\text{dist}(F, d) = 2 = p$

Vèrtex: $V = (0, -1)$

Paràbola cap amunt.

$$x^2 = 4(y + 1)$$

b) $\text{dist}(F, d) = 3 = p$

Vèrtex: $V = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Paràbola cap a la dreta.

$$y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

c) $\text{dist}(F, d) = 4 = p$

Vèrtex: $V = (2, -1)$

Paràbola cap amunt.

$$(x - 2)^2 = 8(y + 1)$$

d) $\text{dist}(F, d) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = p$

Vèrtex: $V = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Directriu paral·lela a l'eix OX .

Paràbola cap amunt.

$$(x - 1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

67 Troba els vèrtexs, els focus i les directrius de les següents paràboles amb vèrtexs diferents de l'origen de coordenades. Després, representa-les.

a) $y^2 = 4(x - 1)$

b) $(y - 2)^2 = 8x$

c) $(x - 1)^2 = -8(y + 1)$

d) $(y + 2)^2 = -4(x - 1)$

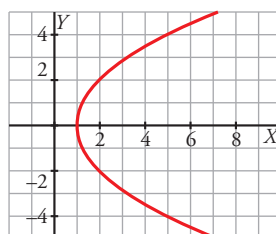
a) $y^2 = 4(x - 1)$

Paràbola cap a la dreta.

Vèrtex: $V = (1, 0)$

$$p = 2 \text{ dist}(F, V) = 1 \rightarrow F = (2, 0)$$

Directriu paral·lela a l'eix OY : $x = 0$



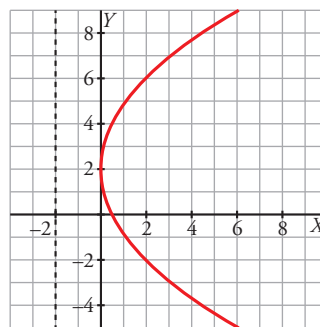
b) $(y - 2)^2 = 8x$

Paràbola cap a la dreta.

Vèrtex: $V = (0, 2)$

$p = 4$

$\text{dist}(F, V) = 2 \rightarrow F = (2, 2)$

Directriu paral·lela a l'eix OY : $x = -2$ 

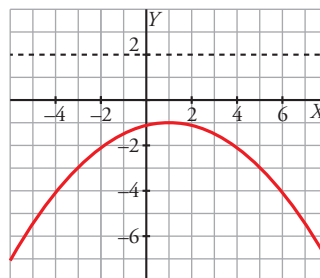
c) $(x - 1)^2 = -8(y + 1)$

Paràbola cap avall.

Vèrtex: $V = (1, -1)$

$p = 4$

$\text{dist}(F, V) = 2 \rightarrow F = (1, -3)$

Directriu paral·lela a l'eix OX : $y = 2$ 

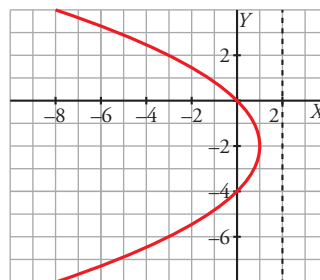
d) $(y + 2)^2 = -4(x - 1)$

Paràbola cap a l'esquerra.

Vèrtex: $V = (1, -2)$

$p = 2$

$\text{dist}(F, V) = 1 \rightarrow F = (0, -2)$

Directriu paral·lela a l'eix OY : $x = 2$ 

68 Troba l'equació de la hipèrbola centrada en $(4, 5)$, de focus $F(2, 5)$ i $F'(6, 5)$ i semieix menor $b = 1$.

Centre = $(4, 5)$ Eix paral·lel a OX

$c = \text{dist}(C, F) = 2$

$a^2 = 4 - 1 = 3$

Equació de la hipèrbola: $\frac{(x - 4)^2}{3} - \frac{(y - 5)^2}{1} = 1$

Pàgina 240

69 Troba l'equació de la hipèrbola següent:

- Té el centre en l'origen de coordenades.
- Té els focus en l'eix d'abscisses.
- Passa pel punt $P(\sqrt{5/2}, 1)$.
- Una de les seves asímptotes és la recta $y = 2x$.

Equació de la hipèrbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$

Passa per $P = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 1\right)$

$$\frac{5/2}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \rightarrow \frac{10-1}{4a^2} = 1 \rightarrow 4a^2 = 9 \rightarrow a^2 = \frac{9}{4}$$

L'equació demanada és: $\frac{x^2}{9/4} - \frac{y^2}{9} = 1$

- 70** S'anomena hipèrbola equilàtera aquella en què $a = b$. Troba l'equació de la hipèrbola equilàtera els focus de la qual són $(5, 0)$ i $(-5, 0)$.

Centre = $(0, 0)$

$$c = 5 = \sqrt{2a^2} \rightarrow a = \frac{5}{\sqrt{2}} \rightarrow a^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

L'equació demanada és:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{2}} - \frac{y^2}{\frac{25}{2}} = 1$$

- 71** Troba l'equació del lloc geomètric de tots els punts del pla tals que la seva distància al punt $(4, 0)$ sigui el doble de la seva distància a la recta $x = 1$.

Comprova que és una cònica i troba'n els focus.

$X = (x, y)$ punt qualsevol del lloc geomètric.

$P = (4, 0)$

$r: x = 1$

$\text{dist}(X, P) = 2 \text{dist}(X, r)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x-1| \rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2$$

$$x^2 - 8x + y^2 + 16 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow -3x^2 + y^2 + 12 = 0$$

És una hipèrbola d'eix OX :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$$

Centre: $C = (0, 0)$

Focus: $F = (-4, 0)$, $F' = (4, 0)$

- 72** Troba l'equació del lloc geomètric dels punts la distància al punt $(4, 0)$ dels quals sigui igual a la meitat de la distància a la recta $r: x - 16 = 0$. Representa la corba que obtens.

Sigui $P(x, y)$ un dels punts del lloc geomètric. La distància de P a $(4, 0)$ ha de ser igual a la meitat de la distància de P a la recta $x - 16 = 0$; és a dir:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x-16|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-16)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 32x + 256)$$

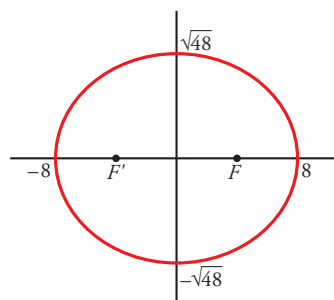
$$4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 = x^2 - 32x + 256$$

$$3x^2 + 4y^2 = 192 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

És una el·lipse en què $a = 8$ i $b = \sqrt{48} \approx 6,93$.

Els focus són $F(4, 0)$ i $F'(-4, 0)$.

L'excentricitat és: $\text{exc} = \frac{c}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$



73 Troba el lloc geomètric dels punts $P(x, y)$ tals que el producte dels pendents de les rectes traçades des de P fins als punts $A(-2, 1)$ i $B(2, -1)$ sigui igual a 1.

Quina figura obtens? Representa-la.

- El pendent de la recta que uneix P amb A és: $\frac{y-1}{x+2}$
- El pendent de la recta que uneix P amb B és: $\frac{y+1}{x-2}$
- El producte dels pendents ha de ser igual a 1; és a dir:

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{x-2}\right) = 1 \rightarrow \frac{y^2-1}{x^2-4} = 1 \rightarrow y^2-1 = x^2-4$$

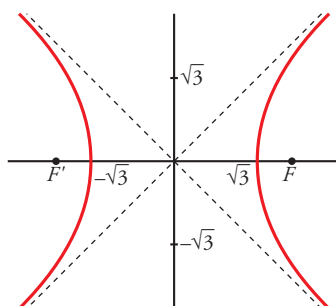
$$x^2 - y^2 = 3 \rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$$

És una hipèrbola en què $a = b = \sqrt{3}$ i $c = \sqrt{6}$.

Els focus són $F(\sqrt{6}, 0)$ i $F'(-\sqrt{6}, 0)$.

Les asímptotes són: $y = x$ i $y = -x$

L'excentricitat és: $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1,41$



74 Troba les rectes tangents a l'el·lipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ que passen per $A(5, 0)$.

Feix de rectes que passen per A més la recta $x = 5$.

La recta que busquem té només un punt en comú amb l'el·lipse; per tant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = m(x-5) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(m(x-5))^2}{4} = 1 \rightarrow 4x^2 + 9(m(x-5))^2 - 36 = 0$$

$$9m^2x^2 - 90m^2x + 225m^2 + 4x^2 - 36 = 0 \rightarrow (9m^2 + 4)x^2 - 90m^2x - 36 + 225m^2 = 0$$

Ha de tenir solució única; és a dir, el discriminant ha de ser igual a zero.

$$\Delta = (90m^2)^2 - 4 \cdot (9m^2 + 4) \cdot (-36 + 225m^2) = 576 - 2304m^2 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$$

Les rectes demanades són:

$$r: y = -\frac{1}{2}(x-5), \quad r': \frac{1}{2}(x-5)$$

- 75** Troba l'equació de la tangent a l'el·lipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ en el punt $P(2, 3)$. La tangent és la bisectriu exterior dels segments PF i PF' , on F i F' són els focus.

$$3x^2 + 4y^2 = 48 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$p = (2, 3)$$

$$c = \sqrt{4} = 2$$

$$F = (2, 0), F' = (-2, 0)$$

$$\overrightarrow{PF} = (0, -3); \overrightarrow{PF'} = (-4, -3)$$

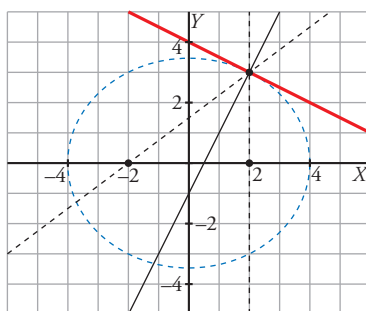
$$\text{Recta } PF: x = 2$$

$$\text{Recta } PF': \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{-3} \rightarrow -3x + 4y - 6 = 0$$

Bisectrius:

$$|x-2| = \left| \frac{-3x+4y-6}{5} \right| \rightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{-3x+4y-6}{5} \\ x-2 = -\frac{-3x+4y-6}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x-10 = -3x+4y-6 \\ 5x-10 = 3x-4y+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x-4y-4=0 \\ 2x+4y-16=0 \end{cases}$$

La recta demanada és: $8x - 4y - 4 = 0$



- 76** Troba l'equació de la tangent a la hipèrbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punt P , d'abscissa $x = 5$.

Tingues en compte que la tangent és la bisectriu dels segments PF i PF' , on F i F' són els focus de la hipèrbola (tria la bisectriu adequada).

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{25}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = -\frac{9}{4}, y = \frac{9}{4}$$

Hi ha dos punts en la hipèrbola amb abscissa 5.

Troblem la tangent en $P = \left(5, \frac{9}{4}\right)$; la tangent en $P = \left(5, -\frac{9}{4}\right)$ és la simètrica respecte de l'eix OX .

$$P = \left(5, \frac{9}{4}\right)$$

$$c = 5$$

$$PF = (5, 0); F' = (-5, 0)$$

$$\overrightarrow{PF} = \left(0, -\frac{9}{4}\right); \overrightarrow{PF'} = \left(-10, -\frac{9}{4}\right) = (40, 9)$$

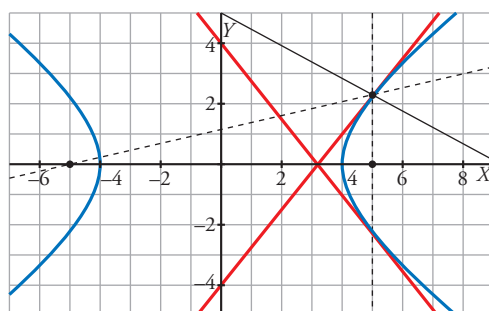
$$\text{Recta } PF: x = 5$$

$$\text{Recta } PF': \frac{x+5}{40} = \frac{y}{-9} \rightarrow -9x + 40y - 45 = 0$$

Bisectrius:

$$|x-5| = \left| \frac{-9x+40y-45}{\sqrt{81+1600}} \right| \rightarrow \begin{cases} x-5 = \frac{-9x+40y-45}{41} \\ x-5 = -\frac{-9x+40y-45}{41} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 41x-205 = -9x+40y-45 \\ -41x+205 = -9x+40y-45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x-4y-16=0 \\ 32x-40y-250=0 \end{cases}$$

La recta demanada és: $5x - 4y - 16 = 0$ La tangent en $P = \left(5, -\frac{9}{4}\right)$ és $y + \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}(x-5)$ 

77 Troba la tangent a la paràbola $y^2 = 12x$ en el punt $P(3, 6)$. Tingues en compte que la tangent és la bisectriu de l'angle format per PF , on F és el focus, i per la recta perpendicular a la directriu que passa per P .

$$y^2 = 12x$$

$$V = (0, 0)$$

$$p = 6$$

Paràbola cap a la dreta.

$$F = (3, 0)$$

$$d: x = -3$$

$$P = (3, 6)$$

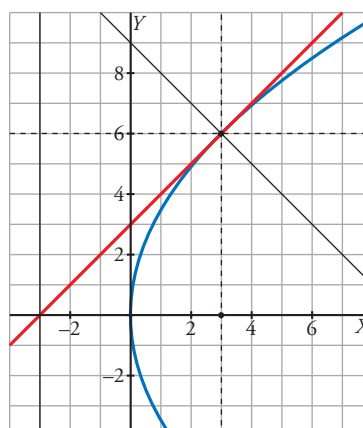
$$\overrightarrow{PF} = (0, -6) = -6(0, 1)$$

$$\text{Recta } PF: x = 3$$

$$\text{Recta perpendicular a } d \text{ que passa per } P: y = 6$$

Bisectrius:

$$|x-3| = |y-6| \rightarrow \begin{cases} x-3 = y-6 \\ x-3 = -y+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-9=0 \end{cases}$$

La recta demanada és $x - y + 3 = 0$.

- 78** El cometa Halley descriu una òrbita el·líptica d'excentricitat 0,96657, i el Sol és en un dels seus focus. Si la seva distància mínima al Sol (periheli) és de 0,6 UA, calcula quina és la màxima (afeli). Recorda que 1 UA (unitat astronòmica) és la distància mitjana entre la Terra i el Sol.

Focus: Sol, F

$$\text{dist}(\text{Halley}, \text{Sol}) + \text{dist}(\text{Halley}, F) = 2a$$

$$e = \frac{c}{a} = 0,96657 \rightarrow c = 0,96657a$$

Per tant, la distància mínima s'assoleix quan el cometa és en el vèrtex corresponent al focus del Sol i és:

$$a - c = 0,6$$

$$\begin{cases} a - c = 0,6 \\ c = 0,96657a \end{cases} \rightarrow a = 17,946, \quad c = 17,348$$

La distància màxima s'assoleix quan la Terra és en el vèrtex oposat al focus del Sol i és:

$$2a - 0,6 = 2 \cdot 17,948 - 0,6 = 35,296 \text{ UA}$$

- 79** La Terra descriu una òrbita el·líptica i el Sol és en un dels seus focus. En aquesta trajectòria, la distància mínima Terra-Sol és de 147 095 248 km, i la màxima és de 152 100 492 km. Calcula l'excentricitat de l'òrbita i interpreta el resultat obtingut.

Focus: Sol, F

$$\text{dist mínima} + \text{dist màxima} = 2a$$

$$\text{dist}(\text{Terra}, \text{Sol}) + \text{dist}(\text{Terra}, F) = 2a$$

$$147\,095\,248 + 152\,100\,492 = 2a \rightarrow a = 1,4960 \cdot 10^8$$

La distància mínima s'assoleix quan la Terra és en el vèrtex corresponent al focus del Sol i és:

$$a - c = 147\,095\,248$$

$$1,4960 \cdot 10^8 - c = 147\,095\,248 \rightarrow c = 2,5048 \cdot 10^6$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2,5048 \cdot 10^6}{1,4960 \cdot 10^8} = 1,6743 \cdot 10^{-2} = 0,0167$$

Com que l'excentricitat és molt petita, l'òrbita és gairebé una circumferència.

80 Associa cada una de les equacions següents amb una de les gràfiques que hi ha a continuació:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $y^2 - 9x^2 = 9$

d) $2xy = 1$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

f) $\frac{x^2}{9} - y = 0$

g) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

h) $y^2 = 2(x - 1)$

i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$

j) $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

a) VII

b) III

c) V

d) X

e) IV

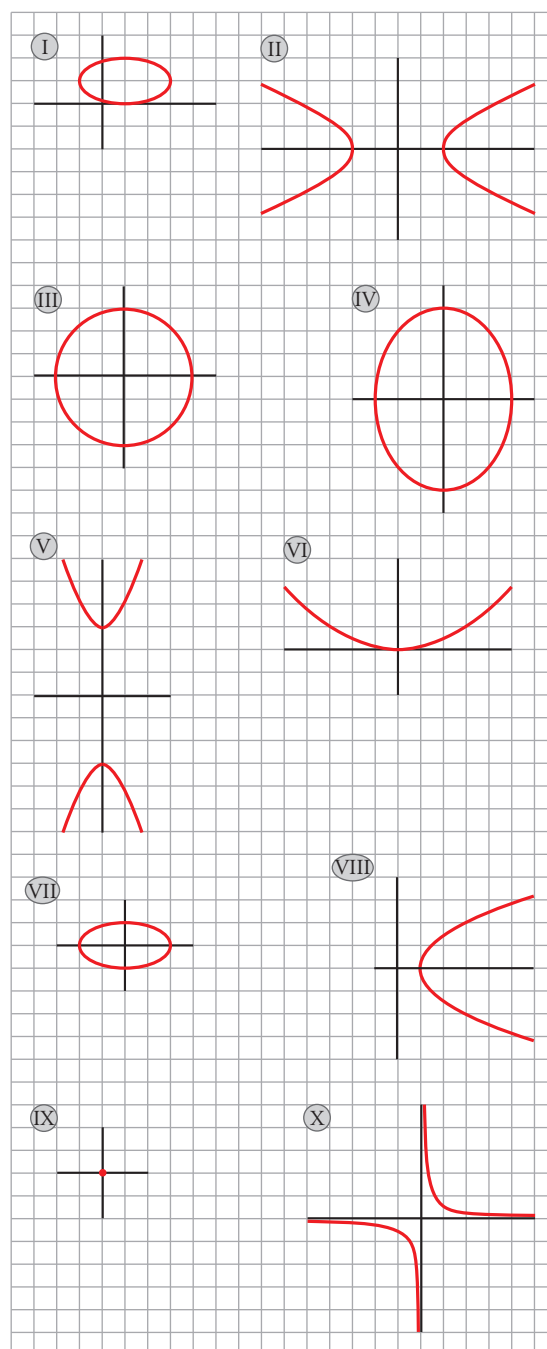
f) VI

g) II

h) VIII

i) IX

j) I



Pàgina 241

Qüestions teòriques

81 Què tenen en comú totes aquestes circumferències?

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$$

Totes són tangents als eixos de coordenades perquè les coordenades de O són iguals en valor absolut i aquest coincideix amb el valor del radi:

$$\text{dist}(O, OX) = \text{dist}(O, OY) = r$$

82 Determina si les equacions següents corresponen a còniques. Si és així, indica quina cònica és en cada cas:

a) $-\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} + 1$ b) $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} - 1$ c) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$ d) $y^2 + 2y = x$

a) No es cap cònica perquè $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$ no és possible. La suma de dos nombres positius no pot donar un resultat negatiu.

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$. Hipèrbola amb focus en l'eix OY .

c) Si fos alguna cònica, seria una circumferència, però

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

és impossible perquè un radi no pot ser negatiu; per tant, no és una cònica.

d) És una paràbola: $(y + 1)^2 = x + 1$

83 Les paràboles següents tenen el seu vèrtex en l'origen de coordenades. En quins quadrants tenen les branques?

a) $y^2 = -2x$ b) $y^2 = 2x$ c) $x^2 = -2y$ d) $x^2 = 2y$

a) Paràbola cap a l'esquerra. És en el 2n i 3r quadrants.

b) Paràbola cap a la dreta. És en el 1r i 4t quadrants.

c) Paràbola cap avall. És en el 3r i 4t quadrants.

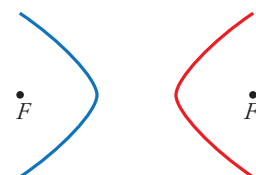
d) Paràbola cap amunt. És en el 1r i 2n quadrants.

84 Sabem que en una hipèrbola $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$.

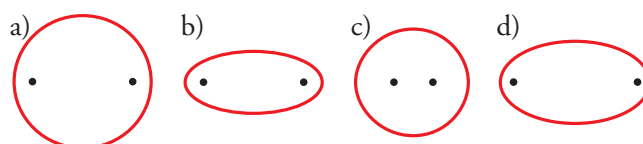
Quina branca correspon a $\overline{PF} - \overline{PF'} = 4$ i quina correspon a $\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$?

$\overline{PF} - \overline{PF'} = 4 \rightarrow$ Els punts estan més lluny de F ; per tant, és la branca vermella.

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \rightarrow$ Els punts estan més lluny de F' ; per tant, és la branca blava.



85 Tenint en compte la definició d'el·lipse i fent algunes mesures sobre el paper, digues quines d'aquestes el·lipses, amb els seus focus, estan mal dibuixades:



a) Està mal dibuixada perquè a i b són gairebé iguals; per tant, c ha de ser molt petit i, tanmateix, els focus estan molt separats, essent c la distància al centre del focus.

b) Mal dibuixada. a és la hipotenusa del triangle que uneix el centre, un focus i un vèrtex de l'eix OY , i no mesura igual que el semieix major.

c) Ben dibuixada. Dibuixem el triangle rectangle de vèrtexs: el centre de l'el·lipse, el vèrtex superior de l'el·lipse i un focus. La mida de la hipotenusa d'aquest triangle és similar a la mida del semieix horitzontal.

d) Ben dibuixada. Dibuixem el triangle rectangle de vèrtexs: el centre de l'el·lipse, el vèrtex superior de l'el·lipse i un focus. La mida de la hipotenusa d'aquest triangle és similiar a la mida del semieix horitzontal.

Per aprofundir

86 a) Troba el lloc geomètric dels punts $P(x, y)$ la suma de quadrats de distàncies als punts $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$ dels quals és 68. Pots comprovar que es tracta d'una circumferència de centre $O(0, 0)$. Quin n'és el radi?

b) Generalitza: troba el lloc geomètric dels punts la suma de quadrats de distàncies a $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$ dels quals és k (constant), i comprova que es tracta d'una circumferència de centre $O(0, 0)$. Digues el valor del seu radi en funció de a i de k . Quina relació han de complir a i k perquè realment sigui una circumferència?

a) $P = (x, y)$

$$(\text{dist}(P, A))^2 = (x + 3)^2 + y^2$$

$$(\text{dist}(P, B))^2 = (x - 3)^2 + y^2$$

$$(x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18 = 68 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 50 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Circumferència de centre $O = (0, 0)$ i radi $r = 5$

b) $(x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k \rightarrow 2a^2 + 2x^2 + 2y^2 = k \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - a^2$

Circumferència de centre $O = (0, 0)$ i radi $r = \sqrt{\frac{k}{2} - a^2}$

Perquè sigui una circumferència, $\frac{k}{2} > a^2 \rightarrow k > 2a^2$

87 a) Considera la circumferència $C: (x - 1)^2 + y^2 = 25$ i el punt $P(9, 6)$. Sigui r la recta que uneix P amb el centre de la circumferència. Troba A i B , punts de tall de r amb C . Comprova que la potència de P respecte de C coincideix amb $d(P, A) \cdot d(P, B)$.

b) Demuestra que l'apartat anterior és cert si substituïm r per qualsevol recta secant a C que passi per P .

* Fes-ne un dibuix i anomena A' i B' els punts de tall de C amb la nova recta. Aplica la semblança als triangles ABP i $A'PB'$.

a) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

$$O = (1, 0)$$

$$\overrightarrow{PO} = (8, 6) = 2(4, 3)$$

$$\text{Recta } PO: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} \rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$$

Punts d'intersecció:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow x_1 = -3, y_1 = -3; x_2 = 5, y_2 = 3 \rightarrow A = (-3, -3), B = (5, 3)$$

$$\mathcal{P}(P, C) = (9 - 1)^2 + 6^2 - 25 = 75$$

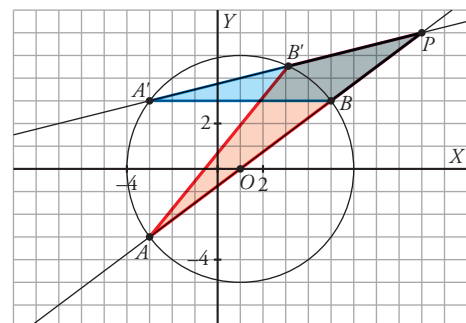
$$d(P, A) \cdot d(P, B) = \sqrt{144 + 81} \cdot \sqrt{16 + 9} = 15 \cdot 5 = 75$$

b) Siguin dues rectes que passen per P i són secants a C .

Els triangles PAB' i $PA'B$ són semblants perquè tenen un angle comú i un angle inscrit amb arc comú; per tant, els costats són proporcionals:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Aleshores, el resultat no depèn de la recta secant escollida.



88 Demostra que el lloc geomètric dels punts P (el quocient de distàncies a un punt fix F i a una recta fixa d dels quals és igual a k) és una cònica d'excentricitat k .

* Considera $F(c, 0)$, $d: x = a^2/c$ i $k = c/a$. Estudia els casos $k < 1$, $k > 1$ i $k = 1$. Quina cònica s'obté en cada cas?

$$P = (x, y)$$

$$F = (c, 0)$$

$$d: x = l$$

$$d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad d(P, d) = |x-l|$$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-l|} = k \rightarrow (x-c)^2 + y^2 = k^2(x-l)^2$$

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = k^2l^2 - k^2 2lx + k^2x^2 \rightarrow (1-k^2)x^2 + (k^2 2l - 2c)x + y^2 + c^2 = 0$$

És una cònica perquè és una equació de segon grau.

$$\text{Si } k = \frac{c}{a} \text{ i } l = \frac{a^2}{c}:$$

$$\left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 + \left(2\left(\frac{c}{a}\right)^2 \frac{a^2}{c} - 2c\right)x + y^2 + c^2 = 0 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 + y^2 + c^2 = 0$$

Perquè sigui una cònica, $\left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right) < 0$; d'altra manera, la suma de tres números positius donaria 0, que és impossible.

$$\text{Si } \left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right) < 0 \rightarrow k > 1 \rightarrow \text{És una hipèrbola.}$$

$$\text{Si } \left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right) \geq 0 \rightarrow k \leq 1 \rightarrow \text{No és l'equació de cap cònica.}$$

Autoavaluació

Pàgina 241

1 Troba l'equació de la bisectriu dels angles formats per les rectes següents:

$$r_1: x = 3$$

$$r_2: 3x - 4y + 1 = 0$$

Els punts $X(x, y)$ han de complir: $\text{dist}(X, r_1) = \text{dist}(X, r_2)$

$$\left. \begin{aligned} \text{dist}(X, r_1) &= |x - 3| \\ \text{dist}(X, r_2) &= \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \end{aligned} \right\} |x - 3| = \frac{|3x - 4y + 1|}{5}$$

Eliminant els valors absoluts obtenim dues equacions, les que corresponen a les dues bisectrius, que són perpendiculars entre elles:

$$5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

$$-5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 8x - 4y - 14 = 0 \rightarrow 4x - 2y - 7 = 0$$

2 Escriu l'equació de la circumferència el centre de la qual és el punt $C(1, -3)$ i passa pel punt $A(5, 0)$.

L'equació de la circumferència és de la forma $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = r^2$.

Per determinar r^2 , substituïm $A(5, 0)$ en l'equació:

$$(5 - 1)^2 + 3^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 25$$

L'equació de la circumferència és, per tant, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$. O, en la seva forma simplificada:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

3 Considerem la circumferència $x^2 + y^2 - 2x = 0$ i la recta $r: 3x - 4y + k = 0$. Calcula els valors que ha de prendre k perquè r sigui interior, tangent o exterior a la circumferència.

Troblem primer el centre, O_C , i el radi, R , de la circumferència:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow O_C = (1, 0) \text{ i } R = 1$$

Calculem la distància del centre de la circumferència, O_C , a la recta $r: 3x - 4y + k = 0$:

$$d = \text{dist}(O_C, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 + k|}{5}$$

- Perquè r sigui interior a la circumferència, ha de ser $d < R = 1$.

$$\frac{|3 + k|}{5} < 1 \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{3 + k}{5} < 1 &\rightarrow k < 2 \\ -\frac{3 + k}{5} < 1 &\rightarrow \frac{3 + k}{5} > -1 \rightarrow k > -8 \end{aligned} \right\} \text{ És a dir, } k \in (-8, 2).$$

- Perquè r sigui tangent a la circumferència, ha de ser $d = R = 1$.

$$\frac{|3 + k|}{5} = 1 \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{3 + k}{5} = 1 &\rightarrow k = 2 \\ -\frac{3 + k}{5} = 1 &\rightarrow k = -8 \end{aligned} \right.$$

- Perquè r sigui exterior a la circumferència, ha de ser $d > R = 1$.

$$\frac{|3 + k|}{5} > 1 \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{3 + k}{5} > 1 &\rightarrow k > 2 \\ -\frac{3 + k}{5} > 1 &\rightarrow \frac{3 + k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{aligned} \right\} \text{ És a dir, } k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty).$$

4 Donats els punts $F(3, 2)$ i $F'(1, -2)$ i la recta $r: x + y - 1 = 0$, obtén les equacions de:

- l'el·lipse de focus F i F' la constant de la qual és 6.
- la hipèrbola de focus F i F' la constant de la qual és 2.
- la paràbola de focus F i directriu r .

No cal que simplifiquis l'expressió de les equacions.

a) El·lipse de focus $F(3, 2)$ i $F'(1, -2)$ i constant $k = 6$.

- Semieix major, $a: k = 6 = 2a \rightarrow a = 3$
- Semidistància focal, $c = \frac{|FF'|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$
- Semieix menor, $b: b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow b = 2$

Per tant, l'equació de l'el·lipse és $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Hipèrbola de focus $F(3, 2)$ i $F'(1, -2)$ i constant $k = 2$.

- Semieix $a: k = 2 = 2a \rightarrow a = 1$
- Semidistància focal, $c = \frac{|FF'|}{2} = \sqrt{5}$
- $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4 \rightarrow b = 2$

Per tant, l'equació de la hipèrbola és $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

c) Paràbola de focus $F(3, 2)$ i recta directriu $r: x + y - 1 = 0$.

En una paràbola d'equació $y^2 = 2px$, $p = \text{dist}(F, r)$:

$$p = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Per tant, l'equació de la paràbola és $y = 4\sqrt{2}x$.

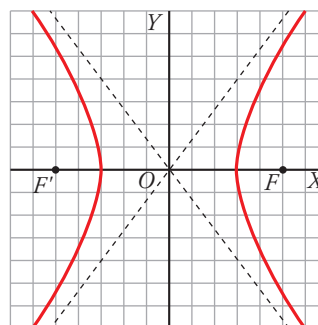
5 Descriu les còniques següents. Obtén-ne els elements i dibuixa-les:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

És una hipèrbola en què:

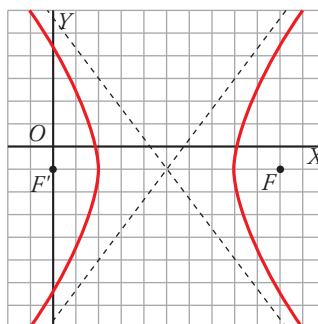
- $a = 3$, $b = 4$
- Asímtotes: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$
- Semidistància focal: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
- Focus: $F(5, 0)$ i $F'(-5, 0)$
- Vèrtexs: $V(3, 0)$ i $V'(-3, 0)$



b) $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

És una hipèrbola igual a la de l'apartat anterior, però centrada en el punt $(5, -1)$.

- $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$
- Asímtotes: $y = \frac{4}{3}x - \frac{23}{3}$; $y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$
- Focus: $F(10, -1)$, $F'(0, -1)$
- Vèrtexs: $V(8, -1)$, $V'(2, -1)$



6 Obtén l'equació de l'el·lipse de focus $F(-4, 0)$ i $F'(4, 0)$ i d'excentricitat 0,8.

$$F(-4, 0) \quad F'(4, 0) \quad exc = 0,8$$

$$c = \frac{|FF'|}{2} = 4$$

$$exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 0,8 \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$\text{L'equació de l'el·lipse és } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

7 Troba els focus, l'excentricitat i les asímptotes de la hipèrbola que té per equació $9y^2 - 16x^2 = 144$.

Dibuixa-la.

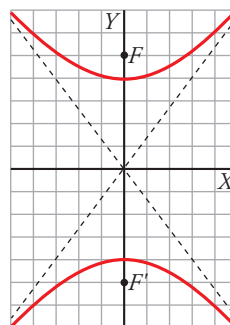
$$9y^2 - 16x^2 = 144 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4; \quad b^2 = 9 \rightarrow b = 3; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$$

Els focus són $F(0, 5)$ i $F'(0, -5)$.

$$\text{Excentricitat: } exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Asímptotes: } y = \frac{4}{3}x \text{ i } y = -\frac{4}{3}x$$

**8** Escriu l'equació de la paràbola que té per directriu la recta $x = 3$, i per vèrtex, l'origen de coordenades.

$$d: x = 3$$

En una paràbola $y^2 = 2px$, la recta directriu és $x = -\frac{p}{2}$.

$$\text{Per tant, } 3 = -\frac{p}{2} \rightarrow p = -6$$

L'equació de la paràbola és $y^2 = -12x$.

9 Troba l'eix radical d'aquestes circumferències:

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0$$

Representa les circumferències i l'eix radical.

Sigui $P(x, y)$ un punt de l'eix radical d'ambdues circumferències. Com que les potències de P a C_1 i de P a C_2 han de coincidir:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 \rightarrow 16y = 20 \rightarrow y = \frac{5}{4}$$

L'eix radical de les circumferències és $y = \frac{5}{4}$.

Per fer la representació, calculem el centre i el radi de cada circumferència:

$$C_1 \begin{cases} A = -4 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} O_{C_1} &= (2, 1) \\ r &= \sqrt{4 + 1 - 1} = 2 \end{aligned}$$

$$C_2 \begin{cases} A = -4 \\ B = -18 \\ C = 21 \end{cases} \quad \begin{aligned} O_{C_2} &= (2, 9) \\ r' &= \sqrt{4 + 81 - 21} = 8 \end{aligned}$$

