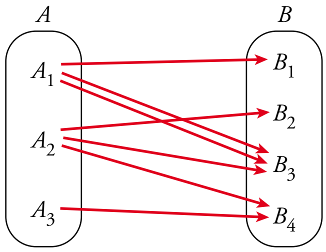
Resol

Pàgina 33

Vols internacionals

■ **En un país A hi ha tres aeroports internacionals, A_1, A_2, A_3, mentre que en un altre país B n'hi ha quatre, B_1, B_2, B_3, B_4.**

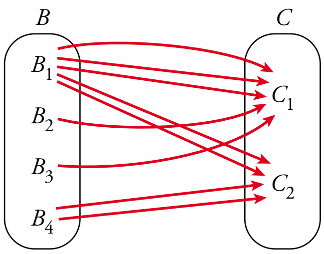
Una persona que vulgui anar un dilluns de A a B disposa dels vols següents:



La informació anterior pot ser representada per mitjà d'aquesta taula:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	2	0
A_2	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1

Aquí tens ara, representats per mitjà de fletxes, els vols que permeten viatjar un dimarts des del país B fins a un altre país C:



Representa, per mitjà d'una taula similar a la descrita anteriorment, la informació recopilada en el diagrama de vols entre els països B i C.

	B_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

1 Nomenclatura. Definicions

Pàgina 35

1 Escriu les matrius transposades de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

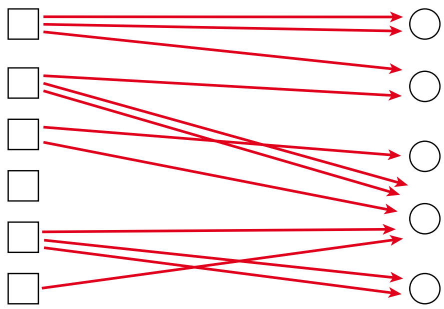
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}; \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 Escriu una matriu X tal que Xt = X; és a dir, que sigui simètrica.

Per exemple, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3 Escriu una matriu que descrigui això:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Operacions amb matrius

Pàgina 36

4 Donades les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Pàgina 39

5 Efectua tots els productes possibles entre les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

6 Intenta aconseguir una matriu I_3 de dimensió 3 × 3 que, multiplicada per qualsevol matriu quadrada A (3 × 3), la deixi igual.

És a dir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriu I_3 que verifica la igualtat anterior s'anomena *matriu unitat* d'ordre 3.

Una vegada que sàpigues quina és la seva fisonomia, sabràs obtenir la matriu unitat de qualsevol ordre.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Propietats de les operacions amb matrius

Pàgina 40

7 Comprova les propietats 2 i 3 del producte de nombres per matrius, prenent:

$$a = 3,\ b = 6 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

PROPIETAT 2:

$$\left.\begin{array}{l} 9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ 3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$9A = 3A + 6A$

PROPIETAT 3:

$$\left.\begin{array}{l} 3(A+B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ 3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$3(A + B) = 3A + 3B$

Pàgina 41

8 Comprova les propietats distributives per a aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$\left.\begin{array}{l} (B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

4 Matrius quadrades

Pàgina 43

9 **Calcula, fent servir el mètode de Gauss, la inversa de cada una de les matrius següents en el cas que en tinguin:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} - \text{(2a)} \\ \text{(2a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Així, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} \\ \text{(2a)} - 3 \cdot \text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} + \text{(2a)} \\ \text{(2a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} - \text{(2a)} \\ (-1/2) \cdot \text{(2a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$

Així, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} \\ \text{(2a)} + 2 \cdot \text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

En la part de l'esquerra, la 2a fila està composta per zeros.

Per tant, la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ no té inversa.

10 **Calcula la inversa de cada una de les matrius següents o esbrina que no en té:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} \\ \text{(2a)} - 4 \cdot \text{(1a)} \\ \text{(3a)} - 7 \cdot \text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} - 2 \cdot \text{(2a)}\end{array}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

En la part esquerra, la 3a fila està composta per zeros.

Per tant, la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no té inversa.

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} - \text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} - 3 \cdot \text{(3a)} \\ \text{(2a)} - 2 \cdot \text{(3a)} \\ \text{(3a)}\end{array}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} - 2 \cdot \text{(2a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Així, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} - \text{(1a)} \\ \text{(3a)} - 2 \cdot \text{(1a)} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} + 2 \cdot \text{(2a)} \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(1a)} \\ -5 \cdot \text{(2a)} + \text{(3a)} \\ -(1/10) \cdot \text{(3a)} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(1a)} - 3 \cdot \text{(3a)} \\ -(1/5) \cdot \text{(2a)} \\ \text{(3a)} \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(1a)} - \text{(2a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$

Així, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

Pàgina 45

11 **Per a les matrius:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **comprova:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

a) $\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $\left.\begin{array}{l} (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

12 **Siguin** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Troba X **que compleixi:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$.

$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$

13 **Troba dues matrius, A i B, de dimensió 2×2 que compleixin:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Sumant: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

14 **Troba dues matrius X i Y que verifiquin:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Sumant: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

15 **Esbrina com ha de ser una matriu X que compleixi la condició següent:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x + y \\ z & z + t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z & y + t \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = t \\ \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, on x i y són nombres reals qualssevol.

16 **Efectua les operacions següents amb les matrius donades:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$ **b)** $(A - B) \cdot C$ **c)** $A \cdot B \cdot C$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

17 **Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprova que $(A - I)^2 = 0$.**

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18 **Troba la inversa d'aquestes matrius:**

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7x+3z & 7y+3t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} 7x+3z=1 \\ 2x+z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ z=-2 \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} 7y+3t=0 \\ 2y+t=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-3 \\ t=7 \end{array}$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x-2z & 3y-2t \\ -8x+5z & -8y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} 3x-2z=1 \\ -8x+5z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-5 \\ z=-8 \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} 3y-2t=0 \\ -8y+5t=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-2 \\ t=-3 \end{array}$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ 2d = 0,\ 2e = 1,\ 2f = 0,\ g = 0,\ h = 0,\ i = 1$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} a+2d+3g=1 \\ d+2g=0 \\ d+g=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ d=0 \\ g=0 \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} b+2e+3h=0 \\ e+2h=1 \\ e+h=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=-1 \\ e=-1 \\ h=1 \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} c+2f+3i=0 \\ f+2i=0 \\ f+i=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=-1 \\ f=2 \\ g=-1 \end{array}$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

19 Resol aquestes equacions:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

b) $Y \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Anomenem $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$.

L'equació és $AX + B = C \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$.

Calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot(2a)+8\cdot(1a)]{(1a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2a)]{-1\cdot(1a)+2\cdot(2a)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2a)/(-1)]{(1a)/(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) L'equació és, amb les mateixes matrius A, B i C del apartat anterior:

$YA + B = C \Rightarrow Y = (C - B)A^{-1}$

$$Y = \left[\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 & -27 \\ 184 & 71 \end{pmatrix}$$

c) Anomenem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

L'equació és $AZ - B = C \Rightarrow Z = A^{-1}(C + B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)-2\cdot(2a)\\(2a)\\(3a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)-(3a)\\(2a)+2\cdot(3a)\\(3a)\end{smallmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a)\\(3a)/(-1)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 6 & 13 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -7 \\ 2 & -7 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

5 Complements teòrics per a l'estudi de matrius

Pàgina 46

20 Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elements de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}$.

Comprova les vuit propietats que s'enumeren més amunt.

- *Associativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Commutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$

- *Vector nul*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

- *Vector oposat*: $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$

- *Associativa*: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = (8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$

  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$

- *Distributiva I*: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$

- *Distributiva II*: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$

- *Producte per 1*: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Pàgina 48

Comprova si els conjunts de *n*-uples següents són LI o LD.

21 (3, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 2, 1, 4)

Apliquem la propietat fonamental:

$$x(3, 0, 0, 0) + y(0, 2, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(3, 2, 1, 4) = (0, 0, 0, 0)$$

Aquesta igualtat dona lloc al sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + \qquad\quad 3t = 0 \\ 2y + \quad 2t = 0 \\ z + \ \ t = 0 \\ 4t = 0 \end{array}\right\} \text{ Les seves solucions són: } x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ t = 0$$

Per tant, els vectors són LI, perquè l'única combinació lineal d'aquests que dona lloc al vector zero és la que s'obté amb coeficients tots nuls.

22 **(3, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 2, 1, 0)**

Apliquem la propietat fonamental:

$$x(3, 0, 0, 0) + y(0, 2, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(3, 2, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Aquesta igualtat dona lloc al sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} 3x + \quad\quad 3t &= 0 \\ 2y + \quad 2t &= 0 \\ z + \quad t &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Les seves solucions són: $x = -\lambda, \; y = -\lambda, \; z = \lambda, \; t = \lambda$

Com que hi ha solucions diferents de la solució trivial, els vectors són LD.

23 **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

Apliquem la propietat fonamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Operant, arribem a:

$$(2x + y, -4x + z, \; 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Aquesta igualtat dona lloc al sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + \; y \quad\quad &= 0 \\ -4x + \quad\quad z &= 0 \\ 7x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Aquest sistema té com a solució única $x = 0, \; y = 0, \; z = 0$. Per tant, els vectors són linealment independents.

24 **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica per què si en un conjunt de vectors hi ha el vector zero, llavors són LD.

- Apliquem la propietat fonamental:

  $$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

  Si fem $x = 0$ i $y = 0$, z pot agafar qualsevol valor; per tant, els vectors són *linealment dependents*.

- Si en un conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ hi ha el vector zero, podem aconseguir una combinació lineal d'aquests:

  $$x_1 \vec{u}_1 = x_2 \vec{u}_2 + \ldots + x_{n-1} \vec{u}_{n-1} + x_n \vec{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

  en la qual $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ i $x_n \neq 0$. Com que no tots els coeficients són nuls, els vectors són linealment dependents.

6 Rang d'una matriu

Pàgina 50

25 **Calcula el rang de les matrius següents:**

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&3&2\\2&2&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&5\\1&10&-8\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\-1&3&1&4\\2&1&5&-1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\-1&1&3&2&0\\0&8&7&9&4\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&3&2\\2&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)}}\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&7&1\\0&-6&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\(3a)-2\cdot(2a)}}\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&7&1\\0&-20&0\end{pmatrix}\to ran(A)=3$$

$$B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&5\\1&10&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-(1a)}}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-7&7\\0&7&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\(3a)+(2a)}}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-7&7\\0&0&0\end{pmatrix}\to ran(B)=2$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\-1&3&1&4\\2&1&5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\0&1&1&1\\0&5&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\(3a)-5\cdot(2a)}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to ran(C)=2$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\-1&1&3&2&0\\0&8&7&9&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\(3a)+(1a)\\(4a)}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\0&1&5&3&-1\\0&8&7&9&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\-2\cdot(3a)+(2a)\\(4a)-4\cdot(2a)}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\0&0&-11&-5&4\\0&0&11&5&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\(3a)\\(4a)+(3a)}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\0&0&-11&-5&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to ran(D)=3$$

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 51

1. Matrius transposades

Fes-ho tu. Comprova que: $(A+B)^t\, C^t = A^t \cdot C^t + B^t \cdot C^t$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t=\left[\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}5&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}5&1\\-2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$C^t=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t\,C^t=\begin{pmatrix}5&1\\-2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-5&3\\-3&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&9\\-4&2&0\\3&-1&3\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}4&-2\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-4&-6\\1&0&3\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot C^t+B^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}5&-1&9\\-4&2&0\\3&-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&-4&-6\\1&0&3\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-5&3\\-3&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$$

Hem obtingut el mateix resultat; per tant, la igualtat és certa.

2. Càlcul dels elements d'una matriu

Fes-ho tu. Si la matriu $X=\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}$**, calcula a perquè** $X^2-X=\begin{pmatrix}12&-1\\0&20\end{pmatrix}$**.**

$$X^2-X=\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&1\\0&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(a-1)&-1\\0&a(a+1)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a(a-1)&-1\\0&a(a+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-1\\0&20\end{pmatrix}\to\left.\begin{array}{l}a(a-1)=12\\a(a+1)=20\end{array}\right\}\to a=4$$

3. Operacions amb matrius

Fes-ho tu. Troba els valors de a per als quals $X=\begin{pmatrix}a&0\\0&2\end{pmatrix}$ **verifica l'equació** $X^2-3X+2I=0$**.**

$$X^2=\begin{pmatrix}a&0\\0&2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

$$X^2-3X+2I=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}a&0\\0&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-3a+2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a^2-3a+2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\to a^2-3a+2=0\to a_1=2,\ \ a_2=1$$

Pàgina 52

5. Matrius conmutables

Fes-ho tu. **Donada la matriu següent:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina totes les matrius B que commuten amb aquesta.

La matriu $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha de verificar $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2c=a \\ b+2d=2a+b \\ c=c \\ d=2c+d \end{array}\right\}$$

De la 1a equació i de la 4a equació obtenim $c = 0$.

De la 2a equació obtenim $a = d$.

Per tant, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$.

Pàgina 53

6. Matriu inversa de si mateixa

Fes-ho tu. **Prova que si $A^2 = A + I$, llavors A és invertible (aquí invertible és sinònim de regular).**

$A^2 = A + I$

$A^2 - A = I \rightarrow A(A - I) = I \rightarrow A - I$ és la inversa de A, per tant A és invertible.

7. Equació amb matrius

Fes-ho tu. **Determina la matriu X que compleix $AXA = 2BA$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.**

Sigui $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En l'equació $AXA = 2BA$, multipliquem en els dos membres per A^{-1} a l'esquerra i a la dreta:

$AXA = 2BA \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2BA \cdot A^{-1} \rightarrow X = 2A^{-1}BI = 2A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Pàgina 54

9. Aïllar una matriu multiplicant per les inverses de dues més

Fes-ho tu. **Determina la matriu X que verifica $AXB = A + B$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.**

Multipliquem els dos membres de l'equació $AXB = A + B$ per A^{-1} a l'esquerra i per B^{-1} a la dreta:

$AXB = A + B \rightarrow X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \rightarrow X = B^{-1} + A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

10. Equació matricial: treure factor comú

Fes-ho tu. **Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, troba la matriu X que verifica:**

$$AX - A = B - C$$

$AX - A = B - C \rightarrow A(X - I) = B - C$

Multipliquem els dos membres per A^{-1} a l'esquerra:

$X - I = A^{-1}(B - C) \rightarrow X = I + A^{-1}(B - C)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pàgina 55

11. Potencia d'una matriu

Fes-ho tu. **Si la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}; \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

12. Rang d'una matriu

Fes-ho tu. **Estudia el rang de la matriu següent:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

segons els diferents valors de m.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1a) \\ (2a) - m \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & 2-2m \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1a) \\ (2a)/(1-m) \\ (3a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - m \cdot (2a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2-2m \end{pmatrix}$$

Si $m = -1 \rightarrow ran(M) = 2$ perquè les dues primeres files són LI i la tercera és una fila de zeros.

Si $m \neq -1 \rightarrow ran(M) = 3$.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 56

1. Matriu inversa igual a la transposada

Donada la matriu $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$***, calcula els valors de*** $\boldsymbol{a}$ ***i*** $\boldsymbol{b}$ ***perquè la matriu inversa de*** $\boldsymbol{A}$ ***coincideixi amb la seva transposada.***

$A^{-1} = A^t \rightarrow AA^{-1} = AA^t \rightarrow I = AA^t$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2 = 1 \\ ab = 0 \\ b^2+1 = 1 \end{array}\right\} a = \pm 1,\ b = 0$$

2. Equació amb matrius

Calcula $\boldsymbol{x, y, z}$ ***tals que:***

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+1 & x+yz \\ x+yz & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y^2+1=5 \\ x+yz=0 \\ x^2+z^2=5 \end{array}\right\} \rightarrow y = \pm 2$$

- Si $y = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=0 \\ x^2+z^2=5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ z = -1;\ x = -2,\ z = 1$$

- Si $y = -2$:

$$\left.\begin{array}{r} x-2z=0 \\ x^2+z^2=5 \end{array}\right\} \rightarrow x = -2,\ z = -1;\ x = 2,\ z = 1$$

Solucions: $x_1 = 2,\ y_1 = 2,\ z_1 = -1$

$x_2 = -2,\ y_2 = 2,\ z_2 = 1$

$x_3 = -2,\ y_3 = -2,\ z_3 = -1$

$x_4 = 2,\ y_4 = -2,\ z_4 = 1$

3. Equació matricial

Determina la matriu X que verifiqui $AXA - B = 0$, si:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i 0 és la matriu nul·la d'ordre 2.

$AXA - B = 0 \rightarrow AXA = B \rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$

Trobem la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot(2a)+2\cdot(1a)]{(1a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2a)]{(1a)+(2a)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-(2a)]{(1a)/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Rang d'una matriu

Estudia el rang de la matriu M segons els valors del paràmetre t.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 1 \\ 0 & 6-3t & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+3\cdot(2a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera fila és LD de les altres dues; per tant, el rang no és 3.

Las dues primeres files són LI, independentment del valor de t; per tant, $ran(M) = 2$ per a qualsevol valor de t.

5. Equació amb infinites solucions

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, troba una matriu X tal que $XAX{-1} = B$.

$XAX^{-1} = B \rightarrow XA = BX$

Anomenem $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} \\ BX = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Igualant obtenim un sistema d'equacions.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 8a - 9c \\ 2x = 6a - 7c \\ -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2a = 8a - 9c \\ 2c = 6a - 7c \end{array}\right\} \rightarrow c = \dfrac{2}{3}a \\ \left.\begin{array}{l} -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{array}\right\} \rightarrow b = d \end{array}$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ (2/3)a & b \end{pmatrix}$

De totes les possibles solucions, podem agafar $a = 3$ i $b = 1$, i obtenim $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 57

Per practicar

Operacions amb matrius. Matriu inversa

1 **Efectua, si és possible, aquestes operacions:**

$$\boldsymbol{A \cdot B \quad B \cdot D \quad 3B - 2C \quad B \cdot C \quad D \cdot D^t}$$

si: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A_{(3 \times 2)} \cdot B_{(2 \times 4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{(2 \times 4)} \cdot D_{(4 \times 1)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$3B - 2C = 3\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$B_{(2 \times 4)} \cdot C_{(2 \times 4)} \;\to$ No es poden multiplicar.

$$D_{(4 \times 1)} \cdot D^t{}_{(1 \times 4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 5 & 10 \\ -15 & 9 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 **Donades les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $\boldsymbol{A \cdot B}$ **b)** $\boldsymbol{B \cdot A}$ **c)** $\boldsymbol{B^{-1}}$ **d)** $\boldsymbol{(A + B)(A - B)}$

e) $\boldsymbol{A^2 - B^2}$ **f)** $\boldsymbol{(A + B)^2}$ **g)** $\boldsymbol{A^2 + B^2 + 2AB}$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a)}]{\text{(1a)} + (1/2) \cdot \text{(2a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a)} - 2 \cdot \text{(1a)}]{\text{(1a)}}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1/2) \cdot \text{(2a)}]{1/2 \cdot \text{(1a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Per tant, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $(A+B)(A-B) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$

f) $(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$

g) $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$

3 Donada la matriu quadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, comprova que $(A+I)^2 = \mathbf{0}$. Després, escriu A^2 com a combinació lineal de A i I.

$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $\quad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Expressem A^2 com a combinació lineal de A i I:

$(A+I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A+I) \cdot (A+I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow A^2 = -2A - I$

4 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, esbrina quina de les matrius següents és la seva inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. M no és inversa de A.

$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. N és la inversa de A.

5 Troba les matrius inverses de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $\quad |B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$; $\quad |C| = 1 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6 a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prova que A^3 és la matriu nul·la.

b) Demostra després que la matriu $I + A + A^2$ és la matriu inversa de $I - A$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Vegem que $I + A + A^2$ és la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I$$

Com que $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, llavors $I + A + A^2$ és la inversa de $I - A$.

7 **a) Comprova que $A^2 = 2A - I$, si $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ i I la matriu unitat d'ordre 3.**

b) Fes servir la igualtat anterior per calcular A^4.

a)

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

b) Calculem A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

8 **Donada la matriu següent: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prova que es verifica $A^3 + I = 0$ i fes-ho servir per obtenir A^{10}.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = -I$$

Per tant:

$A^4 = -I \cdot A = -A$

$A^5 = -A \cdot A = -A^2$

$A^6 = -A^2 \cdot A = -A^3 = I$

$A^7 = A$

$A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot (-I) = -A$

Pàgina 58

Rang d'una matriu

9 **Estudia el rang de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 12 \cdot (1a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(C) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 3 \cdot (1a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ 6 \cdot (3a) - 9 \cdot (2a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ -2 \cdot (3a) + (2a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(F) = 3$$

10 **Estudia el rang d'aquestes matrius i digues, en cada cas, el nombre de columnes que són LI:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + 2 \cdot (2a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 3$$

Hi ha 3 columnes linealment independents en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 3 \cdot (1a) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(B) = 2$$

Hi ha 2 columnes linealment independents en B.

$$C=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\1&5&3&3\\1&1&1&1\\3&7&5&5\end{pmatrix}\begin{matrix}(3a)\\(2a)\\(1a)\\(4a)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&5&3&3\\1&-3&-1&-1\\3&7&5&5\end{pmatrix}\begin{matrix}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-(1a)\\(4a)-3\cdot(1a)\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&2\\0&-4&-2&-2\\0&4&2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}(1a)\\(2a)\\(3a)+(2a)\\(4a)-(2a)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow ran(C)=2$$

Hi ha 2 columnes linealment independents en C.

$$D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-(1a)\\(4a)-(1a)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\rightarrow ran(D)=4$$

Les 4 columnes de D són linealment independents.

11 **Estudia el rang de les matrius següents segons els valors del paràmetre m:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&1&-1\\2&1&m\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-4&-m\\4&10&m^2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}m&m+1\\2m&m-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&m&0\\2&0&m^2-1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&m&-m\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}m-2&0&0\\0&m&-1\\0&-1&m\end{pmatrix}$$

- $A\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&1&-1\\2&1&m\end{pmatrix}\begin{matrix}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&5&-5\\0&5&m-4\end{pmatrix}\begin{matrix}(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&5&-5\\0&0&m+1\end{pmatrix}$

  Si $m\neq-1\rightarrow ran(A)=3$

  Si $m=-1\rightarrow ran(A)=2$

- $B\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-4&-m\\4&10&m^2\end{pmatrix}\begin{matrix}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-4\cdot(1a)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-6&-m-2\\0&6&m^2-4\end{pmatrix}\begin{matrix}(1a)\\(2a)\\(3a)+(2a)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-6&-m-2\\0&0&m^2-m-6\end{pmatrix}$

  $m^2-m-6=0\rightarrow m=3,\ m=-2$

  Si $m\neq3$ i $m\neq-2\rightarrow ran(B)=3$

  Si $m=3$, la matriu transformada és $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-6&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow ran(B)=2$

  Si $m=-2$, la matriu transformada és $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-6&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow ran(B)=2$

- $C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2a) - 2 \cdot (1a)]{(1a)} \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 0 & -m-3 \end{pmatrix}$

Si $m = 0$, obtenim $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$

Si $m = -1$, obtenim $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 2$

Si $m = -3$, obtenim $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$

En qualsevol altre cas, $ran(C) = 2$.

És a dir: si $m = 0$ o $m = -3$, $ran(C) = 1$ i si $m \neq 0$ o $m \neq -3$, $ran(C) = 2$.

- $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a) + 2 \cdot (1a)}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$

La tercera fila mai és una fila de zeros.

Si $m \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

Si $m = 0 \rightarrow ran(D) = 2$

- $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \cdot (2a) - (1a)]{(1a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2m-1 & -2m+1 \end{pmatrix}$

Si $m \neq \dfrac{1}{2} \rightarrow ran(E) = 2$

Si $m = \dfrac{1}{2} \rightarrow ran(E) = 1$

- $F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a) + (1/m) \cdot (2a)}}$

Si $m \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m-\dfrac{1}{m} \end{pmatrix}$

Mirem les files.

Si $m = 2 \rightarrow ran(F) = 2$

$m - \dfrac{1}{m} = 0 \rightarrow m = -1,\ m = 1$

Si $m = 1 \rightarrow ran(F) = 2$

Si $m = -1 \rightarrow ran(F) = 2$

Si $m = 0$, obtenim $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(F) = 3$

Si $m \neq 2$, $m \neq 1$ i $m \neq -1 \rightarrow ran(F) = 3$

Equacions amb matrius

12 **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, si:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

13 **Resol aquest sistema donat en forma matricial:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Sumant:

$4x = -5 \rightarrow x = \dfrac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{-7}{4}$

Solució: $x = \dfrac{-5}{4}$; $y = \dfrac{-7}{4}$

14 **Troba dues matrius A i B tals que:**

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad -A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix}$$ Multipliquem per 2 la segona equació.

$$13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix}$$ Sumem membre a membre.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ Multipliquem per $\dfrac{1}{13}$.

Aïllem A en la segona equació:

$$A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

15 **Donades les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, troba dues matrius X i Y que verifiquin aquestes condicions:**

$X - 2M = 3N$

$M + N - Y = I$

$$X = 3N + 2M = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y = M + N - I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

16 **Calcula una matriu X que commuti amb la matriu A, això és, $A \cdot X = X \cdot A$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$A \cdot X = X \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow c = 0 \\ \rightarrow a = d \\ \rightarrow c = 0 \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

17 **Considera les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula B^{-1} pel mètode de Gauss.

b) Troba X tal que $BX - A = C^t$.

c) Determina la dimensió d'una matriu M per poder calcular AMC.

d) Quina ha de ser la dimensió de N perquè C^tN sigui una matriu quadrada?

a) $$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} - \text{(1a)} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)} - \text{(2a)} \\ \text{(2a)} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)/2} \\ \text{(2a)} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $BX - A = C^t \rightarrow BX = C^t + A \rightarrow X = B^{-1}(C^t + A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A_{(2 \times 3)} M_{(m \times n)} C_{(3 \times 2)}$

M ha de tenir dimensió 3×3.

d) $C^t{}_{(2 \times 3)} N_{(m \times n)} = M_{(2 \times 2)}$

N ha de tenir dimensió 3×2.

18 **Donada l'equació matricial $AX - B + C = 0$, en la qual**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^{-1} aplicant la definició. **b) Resol l'equació.**

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4a+c & 4b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a+c=1 \\ 4b+d=0 \\ -a=0 \\ -b=1 \end{array}\right\} \rightarrow a=0,\ b=-1,\ c=1,\ d=4 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $AX - B + C = \mathbf{0} \rightarrow AX = B - C \rightarrow X = A^{-1}(B - C)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

19 **Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Calcula A^{-1}.

b) Troba la matriu X que verifiqui $AX + 2A = I$.

a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-2\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+2\cdot(2a)\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)-(2a)\\(2a)\\(3a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $AX + 2A = I \rightarrow AX = I - 2A \rightarrow X = A^{-1}(I - 2A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

20 **Siguin $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.**

a) Aïlla la matriu X en l'equació $XA - B = XC$. **b) Calcula X.**

a) $XA - B = XC \rightarrow XA - XC = B \rightarrow X(A - C) = B \rightarrow X = B(A - C)^{-1}$

b) $$X = B(A-C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)+(2a)\\(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)/(-2)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

21 **Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}$:**

a) Calcula les matrius X i Y que verifiquin $2X-Y=A$ i $X-3Y=B$.

b) Troba la matriu Z tal que $B+ZA-B^t=3I$ on I és la matriu unitat d'ordre 2.

a) $\begin{cases}2X-\ \ Y=A\\ \ \ X-3Y=B\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2X-Y=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\\ X-3Y=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow[-2\cdot(2.^a)]{(1.^a)}\begin{cases}2X-Y=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\\ -2X+6Y=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 18 & -10\end{pmatrix}\end{cases}$

Sumem:

$5Y=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 18 & -10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\rightarrow 5Y=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 15 & -5\end{pmatrix}$

$Y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 5\\ 15 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

Aïllem X en la segona equació:

$X=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}+3Y=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Les matrius solució són $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

b) Aïllem Z de l'equació:

$ZA=3I+B^t-B$

Es podrà aïllar Z si A es pot invertir.

$det(A)=1\rightarrow$ existeix A^{-1}

$A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$Z=\left[\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -9\\ -4 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -4\\ -9 & 5\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 34 & 21\end{pmatrix}$

22 **Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & y\end{pmatrix}$.**

a) Calcula A^2.

b) Determina x i y perquè $A^2=\begin{pmatrix}x+1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

a) $A^2=\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-1 & -x-y\\ x+y & y^2-1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}x^2-1 & -x-y\\ x+y & y^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x^2-1=x+1\\ -x-y=-2\\ x+y=2\\ y^2-1=-1\end{array}\right\}\rightarrow y=0,\ x=2$

Per resoldre

23 **Donades les matrius** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ **i** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Per a quins valors de m existeix B^{-1}? Per a $m = 1$, calcula B^{-1}.

b) Per a $m = 1$, troba la matriu X tal que $X \cdot B + C = D$.

a) Calculem la inversa de B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Podem aconseguir I a l'esquerra només si $m \neq 0$; per tant, existeix B^{-1} si $m \neq 0$.

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)/m\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/m & 1/m \end{array}\right)$$

Calculem B^{-1} per a $m = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot B + C = D \rightarrow X \cdot B = D - C \rightarrow X = (D - C)\, B^{-1}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

24 **Donades les matrius** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ **i** I **(matriu unitat d'ordre 3):**

a) Calcula les matrius $(A - I)^2$ i $A(A - I)$.

b) Justifica que la matriu A és invertible.

c) Comprova que no existeix la matriu inversa de $A - I$.

d) Determina el valor del paràmetre real λ per tal que es verifiqui $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$.

a) $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) En l'apartat anterior hem vist que:

$A - I = A(A - I) \rightarrow A - I = A^2 - A \rightarrow -A^2 + 2A = I \rightarrow A(-A + 2I) = I$

Per tant, A és invertible i la seva inversa és $(-A + 2I)$.

c) Anomenem $B = A - I$.

$B^2 = \mathbf{0}$

Si B fos invertible, $B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \cdot B^{-1} = \mathbf{0}$

A més, qualsevol matriu compleix que $B^2 \cdot B^{-1} = B \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot I = B$

Tindríem llavors que $\left.\begin{matrix} B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \\ B^2 \cdot B^{-1} = B \end{matrix}\right\} \to B = \mathbf{0}$, la qual cosa és falsa.

Per tant, $B = A - I$ no és invertible.

d) Segons el resultat del apartat b), $A^{-1} = -(A - 2I)$.

Per tant, $\lambda = -1$.

25 **Donada la matriu** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, **troba la matriu** X **tal que** $XA + A^t = 2I$.

$XA + A^t = 2I \to XA = 2I - A^t \to X = (2I - A^t)A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{matrix}(1a)\\(2a)+(1a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pàgina 59

26 **Calcula** A^n **i** B^n **si:**

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1/7} & \mathbf{1/7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Així, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ho provem per inducció:

  Acabem de comprovar que per a $n = 2$ (primer cas rellevant), funciona.

  Suposem que és cert per a $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

  Per tant, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Ho provem per inducció:

  Igual que en el cas anterior, per a $n = 2$ es compleix.

  Suposem que és cert per a $n - 1$:

  $B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

27 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

28 Determina, si és possible, un valor de k perquè la matriu $(A - kI)^2$ sigui la matriu nul·la, si:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to k = 1$$

29 Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre k:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} - \text{(1a)} \\ \text{(3a)} - 2 \cdot \text{(1a)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \to ran(M) = 3 \text{ per a qualsevol valor de } k$$

$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)+(1a) \\ 2\cdot(3a)-(1a)}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \to 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$

- Si $k = -\frac{1}{2} \to ran(N) = 2$
- Si $k \neq -\frac{1}{2} \to ran(N) = 3$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (3a):4 \\ (2a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-2\cdot(1a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$

- Si $k = -2 \to ran(P) = 1$
- Si $k \neq -2 \to ran(P) = 2$

$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)+(1a) \\ (3a)+2\cdot(1a)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a)-3\cdot(2a)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$

- Si $k = 2 \to ran(Q) = 2$
- Si $k \neq 2 \to ran(Q) = 3$

30 **Calcula una matriu X que commuti amb la matriu A, això és, $A \cdot X = X \cdot A$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Després, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left. \begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array} \right\}$ Han de ser iguals.

$\left. \begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$

$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$

(Observem que la matriu que hem obtingut també és de les que commuten amb A).

31 **Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina la matriu X que verifica $AXA = 2BA$.**

$AXA = 2BA \to X = A^{-1}(2BA)A^{-1} \to X = 2A^{-1}B$

Calculem A^{-1}:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ 2\cdot(2a)-3\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)-(2a) \\ (2a)}}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)/2 \\ (-1)\cdot(2a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$

32 **Siguin A i B les matrius donades per:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Troba les condicions que han de complir els coeficients a, b, c perquè es verifiqui $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Per a $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Perquè $A \cdot B = B \cdot A$, ha de complir-se que:

$$\left.\begin{matrix} 5a+2c = 5a+2b \\ 5b+2c = 2a+5b \\ 2a+5c = 7c \\ 2b+5c = 7c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{matrix}\right\} a = b = c$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Així, $B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

33 **Una matriu quadrada s'anomena ortogonal quan la seva inversa coincideix amb la seva transposada. Calcula x i y perquè aquesta matriu A sigui ortogonal:**

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; llavors:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & (3/5)y - (3/5)x & 0 \\ (3/5)y - (3/5)x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{9}{25}+x^2=1 \\ \frac{3}{5}y-\frac{3}{5}x=0 \\ y^2+\frac{9}{25}=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2=\frac{16}{25} \\ y=x \\ y^2=\frac{16}{25} \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x=\pm\frac{4}{5} \\ y=x \end{array}\left.\right\}$$

Hi ha dues solucions: $x_1=\frac{4}{5},\ y_1=\frac{4}{5};\ x_2=-\frac{4}{5},\ y_2=-\frac{4}{5}$

34 **Troba totes les matrius $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ amb $a, b \in \mathbb{R}$, que satisfan l'equació matricial $X^2=2X$.**

$$X^2=2X \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2=2\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} a^2=2a \\ b(a+c)=2b \\ c^2=2c \end{array}\right\}$ En funció de les solucions d'aquest sistema, obtenim diferents matrius X solució:

$a=0,\ c=2 \rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

$a=2,\ c=0 \rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$a=0,\ c=0,\ b=0 \rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a=2,\ c=2,\ b=0 \rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

35 **Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, troba la matriu X que verifica la relació següent: $XC+A=C+A^2$**

$XC+A=C+A^2 \rightarrow X=(C+A^2-A)C^{-1}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A \rightarrow A^2-A=\mathbf{0}$$

$$X=(C+A^2-A)C^{-1}=CC^{-1}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36 **Troba la matriu X que verifica l'equació $AX+B=3X$, si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.**

$AX+B=3X \rightarrow AX-3X=-B \rightarrow (A-3I)X=-B \rightarrow X=(A-3I)^{-1}(-B)$

$$A-3I=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculem $(A-3I)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ 3\cdot\text{(2a)}+\text{(1a)} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} 10\cdot\text{(1a)}-\text{(2a)} \\ \text{(2a)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -30 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)}/(-30) \\ \text{(2a)}/(-10) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & -1/10 & -3/10 \end{array}\right) \rightarrow (A-3I)^{-1}=\begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$$X=(A-3I)^{-1}(-B)=\begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 7/5 \end{pmatrix}$$

37 **a) Aïlla la matriu X en la igualtat següent: $AXA + B = B(2A + I)$**

b) Determina la matriu X en el cas que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $AXA + B = B(2A + I) \rightarrow AXA = B \cdot 2A + B - B = 2BA \rightarrow$

$\rightarrow AX = 2BAA^{-1} = 2B \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B = 2A^{-1}B$

b) Calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1a)+(2a)\\(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

38 **Una empresa conservera elabora tres tipus de llaunes de cranc L_1, L_2 i L_3. Per fer-ho necessita llauna, cranc, oli i sal. Dos magatzems s'encarreguen de distribuir el producte a les botigues. Considera les matrius següents:**

A: Demanda dels magatzems

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix}$$

B: Quantitat de material grams per llauna

$$B = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix}$$

El cost, en euros, de cada gram de material és 0,01 la llauna; 0,05 el cranc; 0,04 l'oli i 0,001 la sal.

a) Escribe la matriu de costos C, de manera que puguis multiplicar-la per la matriu de materials.

b) Calcula i interpreta AB, BC i ABC.

a) $C = \begin{array}{l} \text{Lla.} \\ \text{Cra.} \\ \text{Oli} \\ \text{Sal} \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}05 \\ 0{,}04 \\ 0{,}001 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\,750 & 19\,000 & 34\,250 & 5\,500 \\ 46\,300 & 20\,100 & 36\,000 & 5\,950 \end{pmatrix}$

La matriu que hem obtingut, AB, expressa, per files, la quantitat, en grams, de cada un dels materials necessaris per fabricar totes les llaunes que demanen els magatzems.

$$BC = \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}05 \\ 0{,}04 \\ 0{,}001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}41 \\ 7{,}115 \\ 6{,}06 \end{pmatrix}$$

La matriu BC representa el cost dels materiales emprats en una unitat de cada tipus de llauna L_1, L_2, L_3.

$$ABC = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}05 \\ 0{,}04 \\ 0{,}001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,773 \\ 2\,913{,}95 \end{pmatrix}$$

Aquest últim producte de matrius, ABC, ens indica el cost, en materials de fabricació, de totes les llaunes que demana cada un dels dos magatzems.

39 **En un edifici residencial hi ha tres tipus de d'habitatges: H_3, H_4 i H_5. Els habitatges H_3 tenen 4 finestres petites i 3 finestres grans; els H_4 tenen 5 finestres petites i 4 grans, i els H_5, 6 petites i 5 grans. Cada finestra petita té 2 vidres i 4 frontisses, i les grans, 4 vidres i 6 frontisses.**

a) Escriu una matriu que descrigui el nombre i la mida de les finestres de cada habitatge i una altra que expressi el nombre de vidres i frontisses de cada tipus de finestra.

b) Calcula la matriu que expressa el nombre de vidres i de frontisses de cada tipus d'habitatge.

a) $\begin{array}{c} \\ H3 \\ H4 \\ H5 \end{array}\begin{array}{c} P \quad G \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array};\ \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} V \quad F \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c} \\ H3 \\ H4 \\ H5 \end{array}\begin{array}{c} P \quad G \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array};\ \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} V \quad F \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ H3 \\ H4 \\ H5 \end{array}\begin{array}{c} V \quad F \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

Pàgina 60

40 **La tabla adjunta mostra la quantitat de vitamines A, B i C que posseeix cadascun dels productes P, Q, R, S per unitat de pes:**

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{array}\begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{C} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Volem elaborar una dieta en què entrin tots els productes, de manera que contingui 20 unitats de vitamina A, 25 de vitamina B i 6 de C. És possible fer-ho? De quantes maneres?

b) Obtén, en funció de la quantitat de Q que entri en la dieta, les quantitats dels altres productes. Entre quins valors hauria d'estar la quantitat de producte Q?

a) Anomenem D la matriu que indica les quantitats que volem prendre de cada vitamina:

$$D = \begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Anomenem X les quantitats que hem de prendre de cada aliment:

$$X = \begin{array}{c} P \quad Q \quad R \quad S \\ \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \end{array}$$

Anomenem M la matriu que indica la quantitat de vitamines per producte:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El producte XM indica la quantitat de vitamines que hem pres; per tant, $XM = D$.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y+2z+t & 2x+z+t & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

Obtenim un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z+t=20 \\ 2x+z+t=25 \\ 2y+t=6 \end{array}\right\} x=11-\frac{1}{2}\lambda,\ y=3-\frac{1}{2}\lambda,\ z=3,\ t=\lambda$$

És un sistema compatible indeterminat; per tant, sí és possible resoldre'l i hi ha infinites maneres d'aconseguir-ho.

b) Si fem $y=\lambda$, obtenim: $x=\lambda,\ y=\lambda,\ z=3,\ t=6-2\lambda$.

Com que les quantitats no poden ser negatives, ha de ser $0\le\lambda\le 3$.

41 **a) Comprova que si A és una matriu quadrada tal que $A^2=2A-I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible. Quina és l'expressió de A^{-1}?**

b) Fes servir l'apartat anterior per calcular la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2=2A-I \rightarrow A^2-2A=-I \rightarrow -A^2+2A=I \rightarrow A(-A+2I)=I$

Per tant, A és invertible i $A^{-1}=-A+2I$.

b) Comprovem que $A^2=2A-I$:

$$A^2=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A-I=2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Com que $A^2=2A-I$, per l'apartat anterior, A és invertible i la seva inversa és:

$$A^{-1}=-A+2I=-\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

42 **Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, troba una matriu X que verifiqui l'equació $XA+A=A^{-1}$.**

$XA+A=A^{-1} \rightarrow XA=A^{-1}-A \rightarrow X=(A^{-1}-A)A^{-1}=(A^{-1})^2-I$

D'una altra manera:

$(X+I)A=A^{-1} \rightarrow (X+I)=(A^{-1})^2 \rightarrow X=(A^{-1})^2-I$

Calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+3\cdot(1a) \\ (3a)-5\cdot(1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a)+(2a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+(3a) \\ (3a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$X=(A^{-1})^2-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Qüestions teòriques

43 **Justifica per què no és certa la igualtat:**

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

quan A i B són dues matrius qualssevol.

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Perquè la igualtat fos certa, hauria de ser $AB = BA$; i, en general, no és cert per a dues matrius qualssevol.

44 **Sigui A una matriu de dimensió 2×3.**

a) Existeix una matriu B tal que $A \cdot B$ sigui una matriu d'una sola fila?

b) I per a $B \cdot A$?

Posa un exemple per a cada cas.

a) No; $A \cdot B$ tindrà 2 files necessàriament. Per exemple, agafant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenim que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Sí; si agafem una matriu de dimensió 1×2 (ha de tenir dues columnes per poder multiplicar $B \cdot A$), el resultat tindrà una sola fila. Per exemple:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = (1 \quad 2)$, llavors $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$.

45 **Siguin A i B dues matrius quadrades d'igual ordre. Si A i B són simètriques, ho és també el seu producte $A \cdot B$?**

Si la resposta és afirmativa, justifica-la, i si és negativa, posa'n un contraexemple.

Si A i B són dues matrius quadrades d'igual mida, simètriques, el seu producte, $A \cdot B$, no té per què ser una matriu simètrica. Per exemple:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no és simètrica.

46 **És possible trobar una matriu A no nul·la tal que A^2 sigui la matriu nul·la?**

En cas afirmatiu, posa'n un exemple.

Sí, per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

47 **Tenim la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Prova que es verifica $A^3 + I = 0$ i fes servir aquesta igualtat per obtenir A^{10}.**

* *Fes $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ i tingues en compte que $A^3 = -I$.*

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim A^{10} (tenint en compte que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

48 **Sigui A una matriu quadrada d'ordre 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A és una matriu diagonal). Prova que el producte de dues matrius diagonals és una matriu diagonal.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, el seu producte és $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$,

que també és una matriu diagonal.

49 **Definim la *traça* d'una matriu quadrada A d'ordre 2 com a $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Prova que si A i B són dues matrius quadrades d'ordre 2, llavors $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ llavors:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Per tant, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

50 **Cert o fals? Justifica la teva resposta i posa'n exemples.**

a) Si A és una matriu 2×2 amb rang 2, el seu rang no varia si li afegim una fila o una columna.

b) Si $X - AX = B$ llavors $X = (I - A)^{-1}B$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ llavors $(A + I)^2 = 6I$.

d) Si $AB = BA$ llavors $(AB)^t = (BA)^t$.

e) Si a una matriu de 3 files i 3 columnes amb rang 3 li traiem una fila i una columna, llavors el seu rang serà 2.

f) En una matriu antisimètrica ($A^t = -A$), els elements de la diagonal principal són tots 0.

g) El rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$ serà 3 quan $k = 0$.

h) Si A és una matriu regular i $(B - C)A = 0$ (matriu nul·la), podem assegurar que $B = C$.

a) Cert. No varia, perquè la matriu que obtenim té, com a màxim, dues files o dues columnes; per tant, el seu rang no pot ser més gran que dos. Per altra banda, com que la nova matriu conté A, el rang ha de ser ≥ 2, és a dir, el rang de la nova matriu és 2.

b) Cert. $X - AX = B \rightarrow (I - A)X = B$. Multiplicant per $(I - A)^{-1}$ a l'esquerra, tenim l'expressió final per calcular X.

c) Cert. $(A + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I$

d) Cert. $AB = BA$. Com que les dues matrius, AB i BA, són la mateixa, la seva transposada també serà igual.

e) Fals. Per exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ té rang 3. Si traiem l'última fila i l'última columna, obtenim $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que té rang 1.

f) Cert, perquè $a_{ii} = -a_{ii} \rightarrow 2a_{ii} = 0 \rightarrow a_{ii} = 0$.

g) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2a)-4\cdot(1a) \\ (3a)-5\cdot(1a)}]{(1a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 & k^2-21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2a) \\ (3a)-(2a)}]{(1a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-6 \end{pmatrix}$$

L'afirmació és falsa: perquè $ran(M) = 3$, ha de ser $k \neq \pm\sqrt{6}$.

h) Cert. Com que A és regular, podem multiplicar per A^{-1} a la dreta:

$(B-C)AA^{-1} = \mathbf{0}A^{-1} \rightarrow B - C = \mathbf{0} \rightarrow B = C$

Per aprofundir

51 **Siguin A i B dues matrius quadrades del mateix ordre. De la igualtat $A \cdot B = A \cdot C$ no pot deduir-se, en general, que $B = C$.**

a) Prova aquesta afirmació buscant dues matrius B i C diferents tals que $A \cdot B = A \cdot C$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Quina condició ha de complir la matriu A perquè de $A \cdot B = A \cdot C$ es pugui deduir que $B = C$?

a) Per exemple, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, llavors $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$, però $B \neq C$.

b) Ha d'existir A^{-1}.

52 **a) Si A és una matriu regular d'ordre n i hi ha una matriu B tal que $AB + BA = 0$, prova que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, troba una matriu $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multipliquem per A^{-1} per l'esquerra en la igualtat:

$AB + BA = \mathbf{0} \rightarrow A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \rightarrow B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ara multipliquem la igualtat obtinguda per A^{-1} per la dreta:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \rightarrow BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, llavors:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-2c & -3b-2d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+4b & -2a+3b \\ -3c+4d & -2c+3d \end{pmatrix}$$

Així:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a+4b-2c & -2a-2d \\ 4a+4d & 4b-2c+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a+4b-2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b-2c+6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a-2b+c = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \rightarrow 3a-2b+c = 0 \rightarrow c = -3a+2b \end{array}$$

Per tant: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a+2b & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ i $b \neq 0$

Per exemple, amb $a = 1$ i $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pàgina 61

53 **Aïlla la matriu X en la igualtat $(X + A)^2 = X^2 + XA + I_2$ i obtén X en el cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.**

$$(X + A)^2 = X^2 + XA + I \rightarrow (X + A)(X + A) = X^2 + XA + I \rightarrow$$
$$\rightarrow X^2 + XA + AX + A^2 = X^2 + XA + I \rightarrow$$
$$\rightarrow AX + A^2 = I \rightarrow AX = I - A^2 \rightarrow X = A^{-1}(I - A^2)$$

Calculem A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a) + (1a)}]{\text{(1a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a)}]{\text{(1a) – (2a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a)/2}]{\text{(1a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

54 **Demostra que si A és una matriu regular, en aïllar X en l'equació $XA^2 + BA = A^2$ s'obté $X = I - BA^{-1}$.**

$$XA^2 + BA = A^2 \rightarrow XA^2 - A^2 = -BA \rightarrow (X - I)A^2 = -BA$$

Multipliquem per A^{-1} a la dreta (A^{-1} existeix perquè A és regular):

$$(X - I)A = -B \rightarrow X - I = -BA^{-1} \rightarrow X = -BA^{-1} + I \rightarrow X = I - BA^{-1}$$

55 **Troba una matriu quadrada d'ordre 2, diferent de I i de $-I$, i tal que la seva inversa coincideixi amb la seva transposada.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^t \rightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \rightarrow I = A \cdot A^t$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Busquem matrius que verifiquin aquestes condicions. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vegem que $A^{-1} = A^t$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a)}]{\text{(1a) – (2a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a) + (1a)}]{\text{(1a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2a)}]{\text{(1a) – (2a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

56 **Obtén la forma general d'una matriu d'ordre 2 que sigui antisimètrica.**

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A és antisimètrica si $A^t = -A$.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases}$$

A ha de ser de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

57 **Una matriu quadrada és *màgica de suma* k quan la suma dels elements de cada fila, de cada columna i de les dues diagonals és, en tots els casos, igual a k. Quant val k si una matriu màgica és antisimètrica? Troba totes les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3.**

- Hem vist en l'exercici anterior que, en una *matriu antisimètrica*, els elements de la diagonal principal són zeros. Per tant, si la matriu és *antisimètrica*, $k = 0$.
- Busquem les matrius *màgiques antisimètriques d'ordre 3*: (sabem que, en aquest cas, la suma ha de ser zero).

  Vegem com és una *matriu antisimètrica d'ordre 3*:

  $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

  A serà *antisimètrica* si $A^t = -A$; és a dir:

  $$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

  Per tant, una matriu *antisimètrica d'ordre 3* és de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

  Perquè A sigui *màgica*, ha d'ocórrer que:

  $$\left.\begin{aligned} b + c &= 0 \\ -b + f &= 0 \\ -c - f &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -b + c &= 0 \\ b - f &= 0 \\ c + f &= 0 \end{aligned}\right\}, \text{ és a dir: } \begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$$

  Per tant, les *matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3* són de la forma:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ amb } b \in \mathbb{R}.$$

58 Obtén totes les matrius màgiques simètriques d'ordre 3 per a $k = 0$.

Una *matriu simètrica d'ordre 3* és de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ (ja que $A = A^t$).

Perquè sigui màgica amb $k = 0$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ b+d+e=0 \\ c+e+f=0 \\ a+d+f=0 \\ 2c+d=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&2&1&0&0&0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)-(1a) \\ (5a) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&-1&-1&1&0&1&0 \\ 0&0&2&1&0&0&0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)+(2a) \\ (5a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&-1&2&1&1&0 \\ 0&0&2&1&0&0&0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)+(3a) \\ (5a)-2\cdot(3a) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&2&2&2&0 \\ 0&0&0&1&-2&-2&0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)/2 \\ (5a)+(4a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&3&0&0&0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \to a=-b-c=-f \\ b+d+e=0 \to b=-e=f \\ c+e+f=0 \to c=0 \\ d+e+f=0 \to e=-f \\ 3d=0 \to d=0 \end{array}\right.$$

Per tant, una *matriu màgica simètrica d'ordre 3 amb $k = 0$,* és de la forma $A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}$, amb $f \in \mathbb{R}$.

59 Obtén totes les matrius màgiques simètriques d'ordre 3 per a $k = 3$.

Una matriu *simètrica* d'ordre 3 és de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

Perquè sigui *màgica* amb $k = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=3 \\ b+d+e=3 \\ c+e+f=3 \\ a+d+f=3 \\ 2c+d=3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&3 \\ 0&1&0&1&1&0&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ 1&0&0&1&0&1&3 \\ 0&0&2&1&0&0&3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)-(1a) \\ (5a) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&3 \\ 0&1&0&1&1&0&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ 0&-1&-1&1&0&1&0 \\ 0&0&2&1&0&0&3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)+(2a) \\ (5a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&3 \\ 0&1&0&1&1&0&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ 0&0&-1&2&1&1&3 \\ 0&0&2&1&0&0&3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)+(3a) \\ (5a)-2\cdot(3a) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&3 \\ 0&1&0&1&1&0&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ 0&0&0&2&2&2&6 \\ 0&0&0&1&-2&-2&-3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)/2 \\ (5a)+(4a) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&3 \\ 0&1&0&1&1&0&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ 0&0&0&1&1&1&3 \\ 0&0&0&3&0&0&3 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=3 \to a=3-b-c=3-f-1=2-f \\ b+d+e=3 \to b=3-d-e=3-1-2+f=f \\ c+e+f=3 \to c=3-e-f=3-2+f-f=1 \\ d+e+f=3 \to e=3-d-f=3-1-f=2-f \\ 3d=3 \to d=1 \end{array}\right.$$

Per tant, una *matriu màgica simètrica d'ordre 3 amb* $k = 3$ és de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ amb } f \in \mathbb{R}.$$

Per exemple, amb $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

60 **Sigui A una matriu quadrada que verifica la igualtat $A^2 - 2A = 3I$.**

a) Demostra que A és invertible i expressa A^{-1} en funció de A i I.

b) Expressa A^3 com a combinació lineal de A i I.

c) Troba totes les matrius simètriques d'ordre 2 que verifiquen $A^2 - 2A = 3I$.

a) $A^2 - 2A = 3I \rightarrow A(A-2I) = 3I \rightarrow A \cdot \frac{1}{3}(A-2I) = I$

Per tant, A és invertible i la seva inversa és $A^{-1} = \frac{1}{3}(A-2I)$.

b) $A^2 = 3I + 2A$

$A^3 = (3I + 2A)A = 3A + 2A^2 = 3A + 2(3I + 2A) = 7A + 6I$

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+b^2 & b(a+c-2) \\ b(a+c-2) & b^2+c^2-2c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=3 \\ b(a+c-2)=0 \\ b^2+c^2-2c=3 \end{cases}$$

- Si $b = 0$, obtenim $\begin{cases} a^2-2a=3 \\ c^2-2c=3 \end{cases}$ amb les solucions següents:

$a = 3,\ b = 0,\ c = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $a = -1,\ b = 0,\ c = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

$a = 3,\ b = 0,\ c = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $a = -1,\ b = 0,\ c = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Si $b \neq 0$, obtenim el sistema $\begin{cases} a^2-2a+b^2=3 \\ b(a+c-2)=0 \\ b^2+c^2-2c=3 \end{cases}$ amb les solucions:

$a = 2-c,\ b = \sqrt{-(c+1)(c-3)}$; $a = 2-c,\ b = -\sqrt{-(c+1)(c-3)}$

En aquests casos, ha de ser $-1 \le c \le 3$, i les matrius que verifiquen la condició demanada són:

$$A = \begin{pmatrix} 2-c & \sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ \sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2-c & -\sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ -\sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$$

61 **Estudia per a quins valors de x la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincideix amb la seva oposada.**

$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \rightarrow -A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$

Si $-A = A^{-1} \rightarrow A(-A) = I$

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-x^2 & 0 \\ 0 & 10-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 10-x^2=1 \\ x=\pm 3 \end{matrix}$$

Autoavaluació

Pàgina 61

1 **Estudia el rang de la matriu següent segons els valors del paràmetre a:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \to (3a) \\ (2a) \\ (3a) \to (1a) \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \\ (3a) + (1a) \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ 2 \cdot (3a) - (a+1) \cdot (2a) \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3-a \end{pmatrix}$$

Si $a = 3 \to ran(A) = 2$

Si $a \neq 3 \to ran(A) = 3$

2 **Si A és una matriu quadrada d'ordre 3, C una matriu de dimensió 3×2 i D una matriu quadrada d'ordre 2, quina dimensió ha de tenir la matriu B perquè l'equació matricial $AB = CD$ tingui sentit?**

$$A_{(3\times 3)}B_{(m\times n)} = C_{(3\times 2)}D_{(2\times 2)} = M_{(3\times 2)}$$

Per tant, B ha de ser una matriu de dimensió 3×2.

3 **Demostra que si A és una matriu quadrada d'ordre 2 llavors $(A^t)^2 = (A^2)^t$.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^t = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$$

Totes dues matrius, $(A^2)^t$ i $(A^t)^2$, coincideixen.

4 **Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

5 **Determina totes les matrius A tals que $AX = XA$, si $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b = a+c \\ a+b = b+d \\ c+d = a+c \\ c+d = b+d \end{array} \right\} \to a = d,\ b = c$$

Són totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

6 **Donada la matriu $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, troba dues matrius X i Y tals que verifiquin les equacions següents:**

$\boldsymbol{X + Y^{-1} = C}$

$\boldsymbol{X - Y^{-1} = C^t}$

$$\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$$

- Sumem les equacions:

$$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Restem les equacions:

$$2Y^{-1} = C - C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to Y^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara calculem la inversa de $Y^{-1} \to (Y^{-1})^{-1} = Y$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2a)]{(1a) + 2 \cdot (2a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2 \cdot (2a) - (1a)]{(1a)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2a)]{(1a) + (2a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2 \cdot (2a)]{(1a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrius buscades són $X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7 **a) Troba la inversa de la matriu següent:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Resol l'equació $2XA + B = A^t$, **si** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - 2 \cdot (1a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + 3 \cdot (2a) \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) - 2 \cdot (2a) \\ (2a) \\ (3a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) + (3a) \\ (2a) - (3a) \\ (3a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $2XA + B = A^t \rightarrow 2XA = A^t - B \rightarrow 2X = (A^t - B)A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(A^t - B)A^{-1}$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

8 **Raona si seria possible afegir una fila a aquesta matriu de manera que la nova matriu tingui rang 4:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - 2 \cdot (1a) \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - 3 \cdot (2a) \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(M) = 2$

Si s'afegeix una fila, pot tenir, com a màxim, rang 3; per tant, no és possible que la nova matriu tingui rang 4.

9 **Un industrial fabrica dos tipus de bombetes: opaques (O) i transparents (T). De cada tipus se'n fan quatre models: M_1, M_2, M_3 i M_4.**

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aquesta taula mostra la producció setmanal de bombetes de cada tipus i model.

El percentatge de bombetes defectuoses és el 2 % en el model M_1, el 5 % en el M_2, el 8 % en el M_3 i el 10 % en el M_4.

Determina la matriu que expressa el nombre de bombetes transparents i opaques, bones i defectuoses, que es fabriquen.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$