# Resol

## Pàgina 63

### Determinants d'ordre 2

■ **Resol els sistemes següents i calcula el determinant de cada matriu de coeficients:**

**a)** $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ *Solució:* $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{matrix} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$ *Solució:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{matrix} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ *Solució:* $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{matrix} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *Sistema incompatible*

e) $\left.\begin{matrix} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$ *Solució:* $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{matrix} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$ *Solució:* $x = \frac{1402}{109}, \ y = \frac{886}{109}$

# 1 Determinants d'ordre dos

## Pàgina 64

**1 Sigui $A$ una matriu $2 \times 2$. Justifica si aquestes afirmacions són certes o falses:**

**a) Perquè $|A| = 0$ és necessari que els seus quatre elements siguin 0.**

**b) Si els dos elements de la segona columna de $A$ són 0, llavors $|A| = 0$.**

**c) Si les dues files de $A$ coincideixen, llavors $|A| = 0$.**

**d) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -15$, llavors $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 15$.**

**e) Si $\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 43$, llavors $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 430$.**

a) Fals, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) Cert, perquè en els dos sumands del determinant apareix algun element de la segona fila.

c) Cert, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \to |A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$

d) Cert, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(-15) = 15$

e) Cert, $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 70m - 30n = 10(7m - 3n) = 10\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 10 \cdot 43 = 430$

**2 Calcula el valor dels determinants següents i digues per què alguns són zero:**

**a)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$

**d)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, perquè té una columna de zeros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, perquè té les seves dues files iguals.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, perquè les seves files són proporcionals: (1a) · 7 = (2a)

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, perquè les seves dues columnes són proporcionals: (2a) · (–20) = (1a)

**3** **Siguin** $A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$ **i** $|A| = -13$. **Calcula:**

**a)** $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix}$ **c)** $|3A|$ **d)** $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 7 \cdot (-13) = -91$

c) $|3A| = \begin{vmatrix} 3l & 3m \\ 3n & 3p \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 9 \cdot (-13) = -117$

d) $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = (-1) \cdot 15 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = (-15) \cdot (-13) = 195$

# 2 Determinants d'ordre tres

## Pàgina 65

**4 Calcula els determinants següents:**

**a)** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

**5 Troba el valor d'aquests determinants:**

**a)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

## Pàgina 67

**6 Donats els determinants**

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 18 \end{vmatrix}$$

**justifica si les afirmacions següents són certes o falses:**

**a) $A = 0$ perquè la tercera columna és suma de les dues primeres.**

**b) $B = 0$ perquè la tercera columna és diferència de les dues primeres.**

**c) $C = 0$ perquè la tercera columna és producte de les dues primeres.**

a) Cert, per la propietat 9 dels determinants. Si una matriu té una línia que és combinació lineal de les altres paral·leles, llavors el seu determinant és zero.

b) Cert, per la mateixa propietat que l'apartat anterior.

c) Fals, perquè el producte de dues línies no és una combinació lineal d'aquestes.

**7 Justifica, sense desenvolupar, aquestes igualtats:**

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$

a) Té una fila de zeros (propietat 2).

b) La 3a fila és proporcional a la 1a:

$$(3a) = (-2) \cdot (1a) \quad \text{(propietat 6)}$$

c) La 3a fila és combinació lineal de les dues primeres:

$$(3a) = (1a) + 10 \cdot (2a) \quad \text{(propietat 9)}$$

**8** **Sabent que** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, **calcula sense desenvolupar els determinants següents:**

**a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

# 3 Determinants d'ordre qualsevol

## Pàgina 69

**9** **Cert o fals?**

**En una matriu $A$, $4 \times 4$, els 16 elements són nombres positius. Llavors:**

**a) En el desenvolupament de $|A|$ hi ha $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sumands, tots positius.**

**b) En el desenvolupament de $|A|$ hi ha 12 sumands positius i 12 negatius.**

**c) $|A|$ és, amb seguretat, un nombre positiu.**

**d) $|-A| = |A|$.**

a) Fals, hi ha sumands que corresponen a permutacions imparelles; per tant, són negatius.

b) Cert, perquè aconseguim totes les permutacions canviant una vegada per cada sumand dos elements entre si, és a dir, passant de permutació parella a imparella. Per tant, la meitat de les permutacions són parelles i la meitat imparelles; d'aquesta manera, hi ha 12 sumands positius i 12 negatius.

c) Fals, els sumands negatius poden sumar un nombre més gran que els sumands positius.

d) Cert, perquè fent servir la propietat 5: «Si multipliquem pel mateix nombre tots els elements d'una línia (fila o columna) d'una matriu quadrada, el seu determinant queda multiplicat per aquest nombre.»

$$|-A| = (-1)^4\,|A| = |A|$$

**10** **a) Quants sumands té el desenvolupament del determinant $|a_{ij}|$ d'ordre 5?**

**b) Comprova que el producte $a_{41} \cdot a_{32} \cdot a_{55} \cdot a_{24} \cdot a_{13}$ n'és un. Quin signe li correspon?**

a) Té $5! = 120$ sumands

b) És un dels sumands, perquè hi apareix un element de cada fila i un de cada columna.

Per veure el signe que li correspon, ordenem els cinc factors pels índexs de les seves files:

$a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41} \cdot a_{55}$

Els índexs de les columnes són (3, 4, 2, 1, 5), que és una permutació de (1, 2, 3, 4, 5).

Comptem les seves inversions:

3 està en inversió amb 2 i 1 4 està en inversió amb 2 i 1 2 està en inversió amb 1

En total hi ha 5 inversions, imparell. Li correspon el signe –.

**11** **Calcula el valor dels determinants següents:**

**a)** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{vmatrix} = 0$, perquè l'última columna és nou vegades la segona.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, perquè la tercera fila és $F_3 = 100F_4 + 10F_1 + F_2$.

c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

En cada fila i en cada columna només hi ha un element diferent de zero. Per tant, dels 4! = 24 sumands només un és diferent de zero (perquè en els altres hi ha algun factor 0):

$4 \cdot (-3) \cdot 8 \cdot 1 = -96$

Veiem quin signe li correspon. Es tracta del producte: $a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43}$

Els índexs de les columnes són (1, 4, 2, 3), que és una permutació de (1, 2, 3, 4). En comptar les seves inversions, veiem que 4 està en inversió amb 2 i 3.

En total hi ha 2 inversions, parell. Li correspon signe +, és a dir, manté el mateix valor.

$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -96$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

L'únic sumand que no té cap zero és: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} = -1$

Els índexs de les columnes són (1, 2, 3, 4), que té 0 inversions; per tant:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1$

e) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, perquè la primera fila és el doble de la quarta.

**12 Justifica que la regla de Sarrus per al càlcul de determinants d'ordre 3 s'ajusta a la definició general de determinant.**

Sí, perquè:

— En cada producte hi ha un factor de cada fila i un de cada columna.

— Hi són tots els possibles productes amb un factor de cada fila i un de cada columna.

— La meitat dels sumands tenen signe +, i l'altra meitat signe –.

Comprovem que els signes corresponen a la paritat de la permutació:

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ parell: signe +

$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ parell: signe +

$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ parell: signe +

$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ imparell: signe –

$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ imparell: signe –

$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$ imparell: signe –

# 4 Menor complementari i adjunt

### Pàgina 70

**13 Troba dos menors d'ordre 2 i altres dos menors d'ordre 3 de la matriu $M$.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menor d'ordre dos; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menor d'ordre tres; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

**14 Troba el menor complementari i l'adjunt dels elements $a_{12}$, $a_{33}$ i $a_{43}$.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{(1+2)} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{(3+3)} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{(4+3)} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

# 5 Desenvolupament d'un determinant pels elements d'una línia

## Pàgina 72

**15** **Calcula el determinant següent aplicant la regla de Sarrus i desenvolupant-lo per cada una de les files i cada una de les columnes:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

**Comprova que s'obté el mateix resultat en els set casos.**

Aplicant la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desenvolupant per la 1a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) = -120 + 518 + 58 = 456$$

Desenvolupant per la 2a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) = 180 + 42 + 234 = 456$$

Desenvolupant per la 3a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 = 396 - 104 + 164 = 456$$

Desenvolupant per la 1a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 = -120 + 180 + 396 = 456$$

Desenvolupant per la 2a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 518 + 42 - 104 = 456$$

Desenvolupant per la 3a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 = 58 + 234 + 164 = 456$$

**16** **Donada aquesta matriu:**

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

**a) Determina la suma dels productes de cada element de la primera fila pel corresponent adjunt de la tercera fila.**

**b) Troba la suma dels productes de cada element de la tercera columna per l'adjunt dels corresponents elements de la segona columna.**

**c) Justifica per què els dos resultats anteriors són zero.**

a) $a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot 44 - 7 \cdot 13 - 1 \cdot 41 = 132 - 91 - 41 = 0$

b) $a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} = -1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-74) + 6 \cdot 21 - 4 \cdot 13 = -74 + 126 - 52 = 0$

c) Per la propietat 12.

**17** **Calcula els determinants següents:**

**a)** $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desenvolupant per la 2a columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

També podríem haver observat que la 4a columna és igual a la suma de les altres tres; i, per tant, el determinant val zero.

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-12) - 4 \cdot (-2) = -36 + 8 = -28$

(1) Desenvolupant per la 1a fila.

d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 83$

(1) Desenvolupant per la 4a columna.

# 6 Mètode per calcular determinants d'ordre qualsevol

## Pàgina 73

**18 Calcula els determinants següents:**

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \textbf{d)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{COLUMNES} \\ \text{(1a)} - 3 \cdot \text{(2a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} - 4 \cdot \text{(2a)} \\ \text{(4a)} \end{array} \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 17 & -5 & 23 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 17 & 23 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 145 = 290$$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{COLUMNES} \\ \text{(1a)} - 5 \cdot \text{(2a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} \\ \text{(4a)} - 6 \cdot \text{(2a)} \end{array} \begin{vmatrix} 28 & -5 & 2 & 32 \\ -31 & 7 & 8 & -15 \\ -24 & 5 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 28 & 2 & 32 \\ -31 & 8 & -15 \\ -24 & 3 & -18 \end{vmatrix} = 0$$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} + \text{(2a)} \\ \text{(4a)} \\ \text{(5a)} + \text{(2a)} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{FILES} \\ \text{(1a)} - 3 \cdot \text{(2a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} \\ \text{(4a)} + \text{(2a)} \end{array} - \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -16$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} \\ 4 \cdot \text{(3a)} + \text{(4a)} \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{COLUMNES} \\ \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ (-2) \cdot \text{(2a)} + \text{(3a)} \end{array} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 16 = 11$$

# 7 El rang d'una matriu a partir dels seus menors

## Pàgina 75

**19 Calcula el rang de les matrius següents:**

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1&4\\3&-1&0&1&1&2\\4&1&3&1&0&6\\7&0&3&2&1&8\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4&2&1&5&3\\2&3&2&6&5\\6&5&3&12&8\\12&10&6&23&16\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\5&1&-3&-7\\7&2&-3&-8\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1&4\\3&-1&0&1&1&2\\4&1&3&1&0&6\\7&0&3&2&1&8\end{pmatrix}$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}=-7\neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.
La 3a fila és la suma de les dues primeres, i la 4a fila és la suma de la 2a i la 3a $\to$ *ran* $(A)=2$.

$$B=\begin{pmatrix}4&2&1&5&3\\2&3&2&6&5\\6&5&3&12&8\\12&10&6&23&16\end{pmatrix}$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix}4&2\\2&3\end{vmatrix}=8\neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.

Agafem el menor d'ordre 3: $\begin{vmatrix}4&2&5\\2&3&6\\6&5&12\end{vmatrix}=8\neq 0\ \to$ Les 3 primeres files són linealment independents.

Agafem el menor d'ordre 4: $\begin{vmatrix}4&2&1&5\\2&3&2&6\\6&5&3&12\\12&10&6&23\end{vmatrix}=0$ i $\begin{vmatrix}4&2&5&3\\2&3&6&5\\6&5&12&8\\12&10&23&16\end{vmatrix}=0\ \to$ *ran* $(B)=3$.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix}0&1&-1\\2&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$, i $\begin{vmatrix}0&0&1&-1\\-1&2&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1&-1\\2&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$, llavors *ran* $(C)=4$.

$$D=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\5&1&-3&-7\\7&2&-3&-8\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix}=-3\neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix}2&1&0\\5&1&-3\\1&0&2\end{vmatrix}=-9\neq 0$ i la 3a fila és la suma de les dues primeres, llavors *ran* $(D)=3$.

# 8 Regla pràctica per calcular la inversa d'una matriu

**Pàgina 78**

**20 Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu $A$:

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix $A^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem la inversa de la matriu $B$:

$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow$ existeix $B^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

**21 Calcula la inversa d'aquestes matrius:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu $A$:

$|A| = -5 \neq 0 \rightarrow$ existeix $A^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ -5 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ -5 & -8 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem la inversa de la matriu $B$:

$|B| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existeix $B^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

# Exercicis i problemes resolts

**Pàgina 79**

## 1. Càlcul d'un determinant d'ordre 4

**Fes-ho tu. Calcula el valor d'aquest determinant en funció del paràmetre $a$:**

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sumem les files 2a, 3a i 4a a la 1a:

$$a^4 \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5a^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a) \\ (4a)-(1a) \end{array} = 5a^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5a^4$$

El valor de l'últim determinant és igual al producte dels elements de la diagonal principal, perquè correspon a una matriu triangular.

## 2. Propietats dels determinants

**Fes-ho tu. Si** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, **calcula, sense desenvolupar-los, el valor d'aquests determinants:**

**a)** $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a)-(2a) \end{array} = \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1a)-2\cdot(3a) \\ (2a) \\ (3a) \end{array} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 14$$

b) $$\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -b & c+b & a \\ -q & r+q & p \\ -y & z+y & x \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} b & c+b & a \\ q & r+q & p \\ y & z+y & x \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} -5 \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} \overset{(**)}{=} -5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -35$$

(*) 2a columna – 1a.

(**) Permutem la 3a columna per la 2a i la 2a columna per la 1a.

## 3. Resoldre una equació

Fes-ho tu. **Comprova, sense calcular el valor del determinant, que l'equació següent té tres solucions:**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \boldsymbol{x^2} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} \\ \boldsymbol{x^3} & \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{64} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Aquesta equació és de grau 3, té com a màxim 3 solucions i té un nombre imparell de solucions reals.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{(1a)},\ \text{(2a)} - \text{(1a)},\ \text{(3a)} - \text{(1a)},\ \text{(4a)} - \text{(1a)}]{\text{COLUMNES}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & -3-x & 4-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ x^3 & 8-x^3 & 27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(4-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -3-x & 1 \\ x^2 & x+2 & 9-x^2 & x+4 \\ x^3 & x^2+2x+4 & 27-x^3 & x^2+4x+16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{(1a)},\ \text{(2a)},\ \text{(3a)},\ \text{(4a)} - \text{(2a)}]{\text{COLUMNES}} =$$

$$= (2-x)(4-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -3-x & 0 \\ x^2 & x+2 & 9-x^2 & 2 \\ x^3 & x^2+2x+4 & 27-x^3 & 2x+12 \end{vmatrix} = 0$$

Aquesta equació té almenys dues solucions; per tant, té tres solucions.

### Pàgina 80

## 4. Demostrar una igualtat

Fes-ho tu. **Demostra que existeix una matriu quadrada $A$, d'ordre 2, simètrica i amb $|A| = -7$ que verifica:**

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-c & 6b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{array}\right\} \to a = \frac{\lambda-7}{4},\ b = \frac{\lambda+1}{2},\ c = \lambda$$

$$|A| = \frac{\lambda-7}{4}\lambda - \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2 = -7 \to \lambda = 3 \to A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

## 5. Estudi del rang d'una matriu que depèn d'un paràmetre

**Fes-ho tu. Estudia el rang de les matrius següents segons els valors que agafi el paràmetre $k$:**

**a)** $M = \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$  **b)** $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & k \end{pmatrix}$

a) El menor format per les tres primeres columnes és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ k & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9k^2 - 36k + 36$$

$9k^2 - 36k + 36 = 0 \rightarrow k = 2$

- Si $k \neq 2 \rightarrow ran(M) = 3$
- Si $k = 2 \rightarrow ran(M) < 3$, perquè la 3a i la 4a columnes són proporcionals.

Per a $k = 2$: $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Totes les columnes són proporcionals; per tant, $ran(M) = 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(M) \geq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & k \end{vmatrix} = 20 - 2k$$

$20 - 2k = 0 \rightarrow k = 10$

- Si $k \neq 10 \rightarrow ran(M) = 4$
- Si $k = 10 \rightarrow ran(M) = 3$

**Pàgina 81**

## 6. Propietats dels determinants i rang d'una matriu

**Fes-ho tu. Si $A$ i $B$ són dues matrius quadrades d'ordre 2, tals que $ran(A) = 2$ i $ran(B) = 1$, quina d'aquestes afirmacions és sempre certa?**

**a)** $ran(A + B) = 3$

**b)** $ran(A + B) \leq 2$

**c)** $ran(A + B) > 1$

a) Falsa, perquè $A + B$ té dimensió $2 \times 2$, no té 3 files ni 3 columnes.

b) Certa, perquè $A + B$ té dimensió $2 \times 2$.

c) Falsa:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A) = 2$  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(B) = 1$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A + B) = 1$

## 7. Càlcul de la matriu inversa

Fes-ho tu. **Donada aquesta matriu:**

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-a} \end{pmatrix}$$

**a) Troba els valors de $a$ per als quals $A$ és regular.**

**b) Per a $a = 2$, troba la matriu inversa de $A$.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3$

$-a^2 + 4a - 3 = 0 \rightarrow a = 3,\ a = 1$

$A$ és regular per a $a \neq 3$ i $a \neq 1$.

b) $a = 2$:

$|A| = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

# Exercicis i problemes guiats

## Pàgina 82

### 1. Propietats dels determinants

***Si $c_1$, $c_2$ i $c_3$ són les columnes 1a, 2a i 3a d'una matriu quadrada d'ordre 3 tal que $|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3| = 7$, calcula:***

**a)** $|c_3 \ \ c_1 \ \ c_2|$ **b)** $|3c_1 \ \ c_2 + c_1 \ \ -c_3|$ **c)** $|c_1 + 2c_3 \ \ c_2 \ \ 2c_3 - c_1|$

a) $|c_3 \ \ c_1 \ \ c_2| = (-1)^2 |c_1 \ \ c_2 \ \ c_3| = 7$

b) $|3c_1 \ \ c_2 + c_1 \ \ -c_3| = 3(-1)|c_1 \ \ c_2 + c_1 \ \ c_3| = -3|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3| = -21$

c) $|c_1 + 2c_3 \ \ c_2 \ \ 2c_3 - c_1| = |c_1 \ \ c_2 + c_1 \ \ 4c_3| = 4|c_1 \ \ c_2 + c_1 \ \ c_3| = 28$

### 2. Resoldre una equació amb un determinant

***Estudia, segons els valors de $a$, el nombre de solucions reals que té l'equació següent:***

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ x^2+3a & x^2 & a & a \\ x^2+3a & a & x^2 & a \\ x^2+3a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0 \to (x^2+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x^2 & a & a \\ 1 & a & x^2 & a \\ 1 & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0 \to (x^2+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} = 0$$

$(x^2 + 3a)(x^2 - a)^3 = 0$

- Si $a = 0 \to x^8 = 0 \to x = 0$
- Si $a > 0 \to (x^2 + 3a) = 0$, no té solució $\to (x^2 - a)^3 = 0 \to x = -\sqrt{a}$, $x = \sqrt{a}$
- Si $a < 0 \to (x^2 - a)^3 = 0$, no té solució $\to (x^2 + 3a) = 0 \to x = -\sqrt{-3a}$, $x = \sqrt{-3a}$

### 3. Determinar els elements d'una matriu

***Donades les matrius següents:***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$$

***troba els valors de $a$, $b$ i $c$ de manera que $|B| = 8$ i $AB = BA$.***

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{vmatrix} = 3b - 2a + 2c - ab + 6 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b+6 & 2a+c-6 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a-1 \\ 2b+4 & b+c+2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} b+6=4 \\ 2a+c-6=a-1 \\ c=b+c+2 \end{array}\right\} \to b=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} b=-2 \\ 2a+c-6=a-1 \\ 3b-2a+2c-ab+6=8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} b=-2 \\ a+c=5 \\ -6-2a+2c+2a+6=8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} b=-2 \\ a+c=5 \\ 2c=8 \end{array}\right\} \to a=1,\ b=-2,\ c=4$$

## 4. Rang d'una matriu que depèn de dos paràmetres

***Estudia el rang d'aquesta matriu:***

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$ran(B) \le 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = a+1$$

Si $a \ne -1 \rightarrow ran(B) = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2b-4$$

Si $b \ne -2 \rightarrow ran(B) = 3$

Si $a = -1$ i $b = 3 \rightarrow ran(B) = 2$

## 5. Resoldre una equació matricial

***Donada la matriu*** $A=\begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$***:***

***a) Calcular els valors de $m$ per als quals $A$ té inversa.***

***b) Per a $m = 1$, calcula la matriu $X$ que verifica $XA + X - 2A = \mathbf{0}$.***

a) $\begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$m^2 - 2m = 0 \rightarrow m = 0,\ m = 2$

Si $m \ne 0$ i $m \ne 2 \rightarrow A$ té inversa.

b) $XA + X - 2A = 0 \rightarrow X(A+I) = 2A \rightarrow X = 2A(A+I)^{-1}$

Per comprovar que aquest pas és vàlid, veiem si $(A+I)^{-1}$ existeix.

$$A+I=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A+I| = -1$; per tant, té inversa.

$$(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Exercicis i problemes proposats

**Pàgina 83**

## Per practicar

### Determinants. Propietats

**1** **Resol les equacions següents:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 7 - 7a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow a = 1, \; a = -3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a = \sqrt{3}, \; a = -\sqrt{3}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 6a = 0 \rightarrow a = -3, \; a = 0, \; a = 2$

**2** **Troba el valor d'aquests determinants d'ordre 4:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12) = -24$

(1) Desenvolupem per la 3a columna.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} - \text{(1a)} \\ \text{(4a)} - \text{(1a)} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 0$

(1) El determinant s'anul·la, perquè que té dues files iguals.

**3** **Calcula el valor dels determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

**4** **Si** $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, **quin és el valor dels determinants següents? Justifica les respostes.**

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, perquè les dues columnes són proporcionals.

(1) Si a una fila li sumem una altra multiplicada per un nombre, el determinant no varia.

(2) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

(3) Si canviem d'ordre dues files o dues columnes, el determinant canvia de signe.

(4) Si multipliquem una fila o una columna per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

**5** **Sustitueix els punts suspensius pels nombres adequats perquè es verifiquin aquestes igualtats:**

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

**6** **Si** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, **calcula el valor d'aquests determinants:**

**a)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

(1) Descomponem el determinant en suma de dos.

(2) Traiem $\frac{1}{2}$ factor comú de la 3a fila. El 2n determinant és 0, perquè les dues primeres files són proporcionals.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1a)-(3a) \\ (2a)+(3a) \\ (3a)}]{\text{COLUMNES}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a & b & c \\ -x & y & z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5$

(1) Traiem –1 factor comú de la 1a columna.

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1a) \\ (2a)-(3a) \\ (3a)}]{\text{FILES}} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

$= \xrightarrow[\substack{(1a)+(3a) \\ (2a) \\ (3a)}]{\text{FILES}} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

(1) Traiem 2 factor comú de la 3a fila.

**7** **Sabent que** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3$ **i fent servir les propietats dels determinants, calcula:**

**a) El determinant de la matriu** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}^4$. **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ 2a & 2b & 2c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 6$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}^4 = 6^4$

La solució és $6^4 = 1\,296$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 60$

c) $\begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ 2a & 2b & 2c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ a & b & c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$

**8** **a) Resol l'equació $|A| = 0$ si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$.**

**b) Per a $a = 3$, obtén el determinant de la matriu $2A$.**

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} (1a) \\ (2a) \\ (3a)+(1a) \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2(a-1) = 0 \rightarrow a = 0,\ a = 1$

b) $a = 3$

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$|2A| = 2^3|A| = 8 \cdot 9 \cdot 2 = 144$

## Rang d'una matriu

**9** **Troba el rang d'aquestes matrius:**

**a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran(A) \geq 2$

Les dues últimes files són linealment independents.

Veiem si la 2a fila depèn linealment de les dues últimes:

$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Sí, la 2a fila depèn linealment de les dues últimes.

Veiem si la 1a fila depèn de les dues últimes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \text{ Per tant, } ran\ (A) = 3.$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Les dues primeres columnes són linealment independents. Per tant, $ran\ (B) \geq 2$.

Veiem si la 3a columna depèn linealment de les dues primeres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Per tant, } ran\ (B) = 3.$$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculem $|C|$:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} \\ \text{(4a)} - \text{(1a)} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2 - 1) = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (C) = 4$$

(1) Desenvolupem per la 1a columna.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Les dues primeres files són linealment independents.

Veiem si la 3a fila depèn linealment de les dues primeres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 + 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0$$

La 3a fila depèn linealment de les altres dues.

Per tant, $ran\ (D) = 2$

**10** **Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \;\rightarrow\; a = 2$

- Si $a = 2 \;\rightarrow$ Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$
- Si $a \neq 2 \;\rightarrow\; |A| \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a = 0 \;\rightarrow\; 2a(2a-1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$

Observem que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(B) \geq 2$

- Si $a = 0 \;\rightarrow\; |B| = 0 \;\rightarrow\; ran(B) = 2$
- Si $a = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; |B| = 0 \;\rightarrow\; ran(B) = 2$
- Si $a \neq 0$ i $a \neq \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; |B| \neq 0 \;\rightarrow\; ran(B) = 3$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \dfrac{7 \pm 9}{-2} \left\langle \begin{array}{l} a = -8 \\ a = 1 \end{array} \right.$

Observem que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(C) \geq 2$

Per tant:

- Si $a = 1 \;\rightarrow\; |C| = 0 \;\rightarrow\; ran(C) = 2$
- Si $a = -8 \;\rightarrow\; |C| = 0 \;\rightarrow\; ran(C) = 2$
- Si $a \neq 1$ i $a \neq -8 \;\rightarrow\; |C| \neq 0 \;\rightarrow\; ran(C) = 3$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array} \right.$

- Si $a = 1 \;\rightarrow\; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran(D) = 2$
- Si $a = -1 \;\rightarrow\; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran(D) = 2$
- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1 \;\rightarrow\; |D| \neq 0 \;\rightarrow\; ran(D) = 3$

## Pàgina 84

**11** **Troba els valors del paràmetre $m$ per als quals el rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$ és menor que 3.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m^2 - m & m^2 - m \\ m & 0 & m^2 - m \end{vmatrix} = (m^2 - m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m^2 - m & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m^2 - m)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m^2 - m)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m^2 - m)^2$$

$(m^2 - m)^2 = 0 \ \rightarrow \ m = 1, \ m = 0$

Si $m = 0$ o $m = 1$, llavors $ran(A) < 3$

**12** **Estudia el rang de les matrius següents segons el valor que agafi el paràmetre $a$:**

**a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix}$

a) Si $|A| = 0 \ \rightarrow \ a = 2$

- Si $a = 2 \ \rightarrow \ ran(A) = 3$
- Si $a \neq 2 \ \rightarrow \ ran(A) = 4$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

- Si $a = 4 \ \rightarrow$ les quatre files són proporcionals $\rightarrow \ ran(B) = 1$
- Si $a \neq 4 \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} 3 & a \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ ran(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 < \begin{matrix} a = 1 \\ a = -1 \end{matrix}$

- Si $a = 1$, queda:

  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ ran(C) = 1$

- Si $a = -1$, queda:

  $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(C) = 2$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1 \ \rightarrow \ ran(C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} a-2 & 1-2a \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a - a + 2a^2 = 3a^2 - 3a = 0 < \begin{matrix} a = 0 \\ a = 1 \end{matrix}$

- Si $a = 0 \ \rightarrow \ D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ ran(D) = 1$
- Si $a = 1 \ \rightarrow \ D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \rightarrow$ les dues files no són proporcionals $\rightarrow \ ran(D) = 2$
- Si $a \neq 0 \ \rightarrow \ ran(D) = 2$

**13** **Estudia el rang de la matriu $M$ segons els valors de $t$.**

a) $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & t & 3 & 2\\ 1 & 8-3t & 3 & -2\end{pmatrix}$ b) $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 2\\ 0 & t & 4 & 0\\ -1 & 3 & t & -2\end{pmatrix}$ c) $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & t+1 & 1\\ t & 0 & 0 & 2\\ 0 & t & 2 & 0\end{pmatrix}$

a) $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & t & 3 & 2\\ 1 & 8-3t & 3 & -2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & t & 2\\ 1 & 8-3t & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & t-2 & 1\\ 0 & 6-3t & -3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}t-2 & 1\\ 3t-6 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}t-2 & 1\\ 3(t-2) & 3\end{vmatrix}=0 \rightarrow ran(M)<3$$

Agafem un menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0 \rightarrow ran(M)=2$, per a qualsevol $t$.

b) $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 2\\ 0 & t & 4 & 0\\ -1 & 3 & t & -2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ -1 & t & -2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & t & 0\\ -1 & 3 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ t & 4 & 0\\ 3 & t & -2\end{vmatrix}=2t^2+8t-24$$

$2t^2+8t-24=0 \rightarrow t=2,\ t=-6$

Si $t\neq 2$ i $t\neq -6 \rightarrow ran(M)=3$

Agafem un menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix}4 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-8$

Si $t=2 \rightarrow ran(M)=2$

Si $t=-6 \rightarrow ran(M)=2$

c) $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & t+1 & 1\\ t & 0 & 0 & 2\\ 0 & t & 2 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & t+1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ t & 2 & 0\end{vmatrix}=2t^2+2t-4$$

$2t^2+2t-4=0 \rightarrow t=1,\ t=-2$

$$\begin{vmatrix}1 & t+1 & 1\\ t & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=2t-4$$

$2t-4=0 \rightarrow t=2$

Com que s'anul·len en punts diferents, tenim que $ran(M)=3$, per a qualsevol $t$.

**14** **Estudia el rang de les matrius següents segons els valors del paràmetre $a$:**

**a)** $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**c)** $C = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & -1 \\ -a-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & a & a-2 & 1 \\ 1 & 2a & a-4 & 3 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$; per tant, $ran(A) \geq 2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 2a & 5 & a \end{vmatrix} = -3a^2 + 8a - 5 = 0 \rightarrow a = \frac{5}{3},\ a = 1$

$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 8a + 6 = 0 \rightarrow a = 3,\ a = 1$

Només s'anul·len els dos menor d'ordre 3 si $a = 1$.

- Si $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = 3$
- Si $a = 1 \rightarrow ran(A) = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; per tant, $ran(B) \geq 2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1+a & 0 \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 = 0 \rightarrow a = -1,\ a = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 2 & a+1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1 \rightarrow ran(B) = 3$
- Si $a = 1 \rightarrow ran(B) = 2$
- Si $a = -1 \rightarrow ran(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & -1 \\ -a-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; per tant, $ran(C) \geq 2$.

$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = a^3 - a = 0 \rightarrow a = 1,\ a = 0,\ a = -1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{vmatrix} = -2a^2 + 4a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$

- Si $a \neq 1 \rightarrow ran(C) = 3$
- Si $a = 1 \rightarrow ran(C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & a & a-2 & 1 \\ 1 & 2a & a-4 & 3 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; per tant, $ran(D) \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 2 \\ a & a^2 & 2a+2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a = 0 \rightarrow a = -2,\ a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-2 & 1 \\ 1 & a-4 & 3 \\ a & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{vmatrix} = -2a^2 - 2a + 4 = 0 \rightarrow a = 1,\ a = -2$$

- Si $a \neq -2 \rightarrow ran(D) = 3$
- Si $a = 1 \rightarrow ran(D) = 2$

## Matriu inversa

**15** **Troba la inversa d'aquestes matrius:**

**a)** $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

**b)** $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|M| = 2 \neq 0 \rightarrow$ La matriu $M$ té inversa. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(M) \longrightarrow (Adj\,(M))^t \longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|}(Adj\,(M))^t$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu inversa.

b) $|N| = 6 \neq 0 \rightarrow$ La matriu $N$ té inversa. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(N) \longrightarrow (Adj\,(N))^t \longrightarrow N^{-1} = \frac{1}{|N|}(Adj\,(N))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = N^{-1}$$

$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ és la matriu inversa.

**16** **a) Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**b) Resol les equacions $AX = B$ i $XB = A$ si $A$ i $B$ són les matrius de l'apartat anterior.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existeix $A^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix $B^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$XB = A \rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \rightarrow X = AB^{-1}$

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

**17** **Calcula la inversa d'aquesta matriu:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**18** **Donada la matriu** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$**, troba:**

**a) Els valors de $x$ per als quals la matriu $A$ té inversa.**

**b) La inversa de $A$ per $x = 2$.**

**c) El valor que ha d'agafar $b \in \mathbb{R}$ perquè la matriu $bA$ tingui determinant 1.**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = 3,\ x = 1$

$A$ té inversa si $x \neq 3$ i $x \neq 1$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Suposem $x \neq 3$ i $x \neq 1$:

$|bA| = b^3|A| = 1 \rightarrow b^3 = \dfrac{1}{|A|}$

$b = \sqrt[3]{\dfrac{1}{|A|}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{-x^2 + 4x - 3}}$

**19** **Donada la matriu** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$**:**

**a) Calcula $A(2I - A)$.**

**b) Justifica si existeixen les matrius inverses de $A$ i $2I - A$.**

**c) Per a quin valor de $k$ es verifica $A^{-1} = kI - A$?**

a) $A(2I - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2I - A) = I \rightarrow A$ i $2I - A$ tenen inversa i cada una és la inversa de l'altra.

$A^{-1} = 2I - A$

$(2I - A)^{-1} = A$

c) $k = 2$

**20** **Troba els valors del paràmetre $t$ per als quals les matrius $A$ i $B$ no són regulars i calcula:**

**a) $A^{-1}$ si $t = 1$.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$

**b) $B^{-1}$ si $t = 2$.**

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \rightarrow t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

$A$ no és invertible per $t = 2$ ni per $t = -6$.

Calculem $A^{-1}$ per $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

$B$ no és invertible per $t = 1$ ni per $t = -1$.

Calculem $B^{-1}$ per $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

## Equacions matricials

**21 Donada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, troba $X$ tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.**

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}A^{-1}$$

Calculem $A^{-1}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**22 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, troba la matriu $X$ tal que $AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.**

$$AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B^{-1}$$

Calculem $A^{-1}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem $B^{-1}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

**23 Resol l'equació $AXB = C$ si:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$AXB = C \to A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \to X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculem $A^{-1}$ i $B^{-1}$ ($|A| = 1$ i $|B| = 1 \to$ existeixen $A^{-1}$ i $B^{-1}$):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Per tant:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**24 Donades les matrius:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**troba la matriu $X$ que verifica $(AB^t + C)X = D$.**

$(AB^t + C)X = D \to (AB^t + C)^{-1}(AB^t + C)X = (AB^t + C)^{-1}D \to X = (AB^t + C)^{-1}D$

- Si $E = AB^t + C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- Calculem $E^{-1}$ ($|E| = 6 \neq 0 \to$ existeix $E^{-1}$):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(E) \longrightarrow (Adj\,(E))^t \longrightarrow E^{-1} = \frac{1}{|E|}(Adj\,(E))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \to \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = E^{-1}$$

- Per tant:

$$X = (AB^t + C)^{-1}D = E^{-1}D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

**25** **Troba $X$ tal que $3AX = B$, si:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$3AX = B \rightarrow X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculem $A^{-1}$ ($|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix $A^{-1}$):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

## Pàgina 85

**26** **Donades les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**a) Per a quin valors de $m$ existeix $A^{-1}$?**

**b) Per a $m = 1$, determina la matriu $X$ tal que $XA + B = C$.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m$

Existeix $A^{-1}$ si $m \neq 0$.

b) $XA + B = C \rightarrow XA = C - B \rightarrow X = (C - B)A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

**27** **Siguin les matrius** $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

**a) Determina per a quins valors de $k$ la matriu $AB$ té inversa.**

**b) Resol l'equació $ABX = 3I$ per a $k = 0$, en la qual $I$ és la matriu unitat d'ordre 2.**

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3k - 2 = 0 \rightarrow k = -\dfrac{2}{3}$

Existeix $(AB)^{-1}$ si $k \neq -\dfrac{2}{3}$

b) $ABX = 3I \rightarrow X = 3(AB)^{-1}$

$k = 0$

$AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$X = 3\begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

## Per resoldre

**28** **Resol aquestes equacions:**

**a)** $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} x \cdot x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

(1) Desenvolupem per la 1a columna.

(2) Són determinants de matrius triangulars.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \hline (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a) \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a(x-b)(x-c) = 0 \begin{cases} x = b \\ x = c \end{cases}$

(Suposem que $a \neq 0$).

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{array}{l} \text{FILES} \\ (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a) \\ (4a)-(1a) \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -x \begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

(1) Sumem a la 1a columna les altres.

(2) Traiem $(2-x)$ factor comú de la 1a columna.

(3) Desenvolupem per la 1a columna.

(4) Desenvolupem per la 2a fila.

d) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$

$$= (x-1)(x^3 + 1 + x - x) = (x-1)(x^3+1) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x^3 + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

(1) Sumem a la 1a columna la 2a.

(2) Desenvolupem per la 1a columna.

**29** **Estudia el rang de les matrius següents segons els valors del paràmetre que contenen:**

**a)** $A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

**c)** $C = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

**d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & -2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ (1a)-2\cdot(4a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a) \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 & 0 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$

$$= -5 \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 5 & k \end{vmatrix} = -40k = 0 \rightarrow k = 0$$

(1) Desenvolupem per la 4a columna.

(2) Desenvolupem per la 3a columna.

- Si $k = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$
- Si $k \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran(A) = 4$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Fem $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ k & k & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6k - 18 = 0 \rightarrow k = 3$

- Si $k = 3 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(B) = 3$

- Si $k \neq 3 \rightarrow ran(B) = 3$

Per tant, $ran(B) = 3$ per a qualsevol valor de $k$.

c) $\begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow$ Fem $\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -k^2 + 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} k = 1 \\ k = -1 \end{array} \right.$

- Si $k = 1 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(C) = 3$

- Si $k = -1 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(C) = 2$

- Si $k \neq -1 \rightarrow ran(C) = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & a+3 & 4-a \\ 1 & a+3 & a^2+2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$

$$= (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 4-a \\ 1 & 1 & a^2+2 \end{vmatrix} = (a+3)(a^2 + a - 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \\ a = -3 \end{array} \right.$$

(1) Traiem $(a+3)$ factor comú de la 2a columna.

- Si $a = 1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

- Si $a = -2 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$

- Si $a = -3 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 11 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

- Si $a \neq -2 \rightarrow ran(D) = 3$

**30** **Calcula el rang de les matrius següents en funció del paràmetre $t$:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & t & t^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 2t = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- Si $t = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$
- Si $t = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$
- Si $t = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$
- Si $t \neq 2 \rightarrow ran(A) = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{vmatrix} = t(t^2 - 3t + 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- Si $t = 0 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(B) = 2$
- Si $t = 1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(B) = 2$
- Si $t = 2 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(B) = 2$
- Si $t \neq 0,\ t \neq 1$ i $t \neq 2 \rightarrow ran(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \end{vmatrix} = -3(3t - 6) = 0 \rightarrow t = 2$

- Si $t = 2 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(C) = 2$
- Si $t \neq 2 \rightarrow ran(C) = 3$

**31** **Comprova-les, aplicant les propietats dels determinants.**

**a)** $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

**b)** $\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$

a) $$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2 \\ 2a-2(a+b)+2b & a+b & 2b \\ 1-2+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2 \\ 0 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2-ab \\ 0 & a+b & 2b-(a+b) \\ 0 & 1 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a+b-2b & 2b \\ 0 & 1-1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a-1)(a+1) = (a^2-1)^2$$

**32** **Donada la matriu** $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$**:**

**a) Resol l'equació** $|A| = 0$**.**

**b) Calcula el rang de la matriu** $A$ **segons els valors de** $x$**.**

a) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$

b) Si $x = -1 \rightarrow ran(A) = 1$

Si $x = 2 \rightarrow ran(A) = 2$

Si $x \neq -1$ i $x \neq 2 \rightarrow ran(A) = 3$

**33** **Donada aquesta matriu d'ordre $n$:**

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

**calcula el determinant de $A_2$, $A_3$ i $A_5$.**

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

$$|A_5| = 10^4 = 10\,000$$

**34** **a) Estudia per quin valors de $a$ té inversa aquesta matriu:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

**b) Troba la inversa de $A$ sempre que sigui possible.**

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a \rightarrow$ Existeix $A^{-1}$ si $a \neq 0$.

b) $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & -(a^2-1) & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-a^2-1)/a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$$

**35** **Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

**a) Troba l'expressió general de $A^n$ on $n$ és un nombre natural qualsevol.**

**b) Raona que $A^n$ té inversa per a qualsevol $n \geq 1$ i calcula aquesta matriu inversa.**

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow A^n$ té inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**36** **Calcula, en funció de $a$, el valor d'aquests determinants:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \hline (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a) \\ (4a)-(1a) \end{array} \longrightarrow (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+1)\cdot 1 = 4a+1$$

(1) Sumem a la 1a columna les altres.

(2) Traiem $(4a+1)$ factor comú de la 1a columna.

(3) Desenvolupem per la 1a columna.

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \hline (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a) \\ (4a)-(1a) \end{array} \longrightarrow \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= -a\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -a(2-a)^3 = a(a-2)^3$$

(1) Desenvolupem per la 4a columna.

(2) És el determinant d'una matriu triangular.

**37** **Demostra, sense desenvolupar-los, que el valor d'aquests determinants és 0:**

**a)** $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ \hline (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a) \end{array} \longrightarrow \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$

perquè les dues últimes files són proporcionals.

b) $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{y}\,\dfrac{1}{z}\begin{vmatrix} xyz & xyz & xyz \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 0$

(1) Traiem factor comú $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$ i $\dfrac{1}{z}$ en la 1a, 2a i 3a columnes.

(2) La 1a i 3a files són proporcionals $(xyz \cdot 1a = 3a)$.

## Pàgina 86

**38** **Considera aquesta matriu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, on $a$, $b$ i $c$ són no nuls.**

**a) Troba el nombre de columnes de $A$ que són linealment independents.**

**b) Calcula el rang de $A$.**

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

Però $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0$, perquè $a$ i $b$ són no nuls.

Per tant:

a) Hi ha dues columnes en la matriu $A$ que són linealment independents.

b) $ran(A) = 2$.

**39** **Estudia el rang d'aquesta matriu per als diferents valors de $a$, $b$ i $c$:**

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 0$$

(1) Sumem a la 2a fila la 3a.

(2) Traiem $(a + b + c)$ factor comú de la 2a fila.

(3) Les dues primeres files són proporcionals.

Per tant, $ran(M) \leq 2$. Tenim que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \rightarrow b = a$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \rightarrow c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a \rightarrow a = c$$

Per tant:

- Si $a = b = c \rightarrow ran(M) = 1$
- En qualsevol altre cas $\rightarrow ran(M) = 2$

**40** **Estudia el rang de la matriu següent:**

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

(1) Desenvolupem el determinant per la 3a fila o per la 3a columna.

Per tant, com que $|A| \neq 0$, tenim que $ran(A) = 3$.

## Qüestions teòriques

**41** **Cert o fals? Justifica les respostes i posa'n exemples.**

**a) Si $c_1$, $c_2$ i $c_3$ són les columnes 1a, 2a i 3a d'una matriu quadrada d'ordre 3 tal que $|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 5$, aleshores:**

I) $|c_2\ \ 2c_3\ \ c_1| = 10$

II) $|c_1 + c_2\ \ c_2 - c_1\ \ c_3| = 0$

III) $|c_1 + c_3\ \ c_2\ \ c_3 + c_1| = 5$

IV) $|-c_2\ \ 2c_1 - c_3\ \ c_3 + c_2| = 10$

**b) Si $B$ és una matriu quadrada d'ordre 3 el determinant de la qual val 4, llavors:**

I) $|5B| = 20$ II) $|B^2| = 16$ III) $|B^{-1}| = 1/4$

**c) L'única solució de** $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ **és** $x = -1$.

**d) La matriu inversa de la matriu** $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ **és:**

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} a & -a^2+1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{a}, \quad a \neq 0$$

**e) Si $A$ és una matriu quadrada tal que $A^2 = 2A - I$, llavors $A$ és invertible i $A^{-1} = 2I - A$.**

**f) Si $A$ i $B$ són dues matrius regulars que verifiquen que $AXB = A + B$, llavors $X = A^{-1} + B^{-1}$.**

a) I) Cert:

$$|c_2\ \ 2c_3\ \ c_1| = 2|c_2\ \ c_3\ \ c_1| = (-1)^2\, 2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$$

II) Fals:

$$|c_1 + c_2\ \ c_2 - c_1\ \ c_3| = |c_1 + c_2\ \ 2c_2\ \ c_3| = 2|c_1 + c_2\ \ c_2\ \ c_3| = 2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$$

III) Fals:

$$|c_1 + c_3\ \ c_2\ \ c_3 + c_1| = |c_1 + c_3\ \ c_2\ \ 0| = 0$$

IV) Cert:

$$|-c_2\ \ 2c_1 - c_3\ \ c_3 + c_2| = |-c_2\ \ 2c_1 - c_3\ \ c_3| = |-c_2\ \ 2c_1\ \ c_3| = 2|-c_2\ \ c_1\ \ c_3| =$$

$$= -2|c_2\ \ c_1\ \ c_3| = (-1)(-2)|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$$

b) I) Fals:

$$|5B| = 5^3|B| = 5^3 \cdot 4 = 500$$

II) Cert:

$$|B^2| = |B \cdot B| = |B||B| = 16$$

III) Cert:

$$|B \cdot B^{-1}| = |B||B^{-1}| = 1 \to |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$$

c) Fals:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$-x^3 + 3x + 2 = 0$$

Les solucions són: $x = -1$, $x = 2$

d) Cert:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a\,(-a^2+1) & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & 1-a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Cert:

$A^2 = 2A - I \;\rightarrow\; A^2 - 2A = -I \;\rightarrow\; A(A-2I) = -I \;\rightarrow\; A(2I - A) = I$

Per tant, $A$ és invertible amb $A^{-1} = 2I - A$.

f) Cert:

$AXB = A + B \;\rightarrow\; X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

**42 Prova que el determinant d'una matriu qualsevol d'ordre 3 és igual que el de la seva transposada.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, llavors $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicant la definició de determinant, obtenim que $|A^t| = |A|$. Ho veiem:

$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

$|A^t| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

Per tant, $|A| = |A^t|$.

**43 Sabries dir quin d'aquests dos productes pot formar part del desenvolupament d'un determinant d'ordre 4?:**

**a)** $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$ **b)** $a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Només podria ser el b), perquè en cada producte ha d'aparèixer un factor de cada fila i un de cada columna.

**44 Si $A$ és una matriu quadrada d'ordre 4, pots saber el valor de $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} + a_{24}A_{14}$ sense conèixer els elements de la matriu?**

El resultat és 0, perquè tenim un producte dels elements d'una fila (la 2a) pels adjunts d'una altra (la 1a).

**45 Si la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ té rang 2, quin rang tindrà la matriu $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m-a & n-b & p-c \end{pmatrix}$?**

Observem que la 3a fila de $B$ (la que hem afegit respecte de $A$), és combinació lineal de les dues primeres (s'obté restant la 1a menys la 2a). Per tant, $B$ tindrà el mateix rang que $A$, és a dir, $ran(B) = 2$.

**46 Donades dues matrius $A$ i $B$ d'ordre 4 amb $|A| = 3$ i $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^tA|$ i $|(AB^{-1})^t|$.**

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$ (1)

$|B^t \cdot A| \overset{(2)}{=} |B^t| \cdot |A| \overset{(3)}{=} |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = 6$

$|(AB^{-1})^t| \overset{(3)}{=} |AB^{-1}| \overset{(2)}{=} |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{|A|}{|B|} = \dfrac{3}{2}$

(1) El determinant de la inversa d'una matriu és l'invers del determinant de la matriu.

(2) Tenim en compte que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

(3) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

**47** **a) Defineix què és el rang d’una matriu.**

**b) Indica, raonant la resposta, quines de les afirmacions següents són certes:**

**I)** $ran(A) = ran(-A)$ **($-A$ és la matriu oposada de $A$).**

**II)** $ran(A) = ran(A^t)$ **($A^t$ és la matriu transposada de $A$).**

**III)** $ran(A+B) = ran(A) + ran(B)$

**IV)** $ran(A^2) = [ran(A)]^2$

**V)** $ran(A) = ran(A^{-1})$ **si $A$ té inversa ($A^{-1}$ és la matriu inversa de $A$).**

a) El rang d'una matriu és el nombre de files (o de columnes) linealment independents. També podem definir-lo com el màxim ordre dels seus menors no nuls.

b) I) Certa. El fet de canviar de signe els elements de $A$ només afectarà al signe dels menors; però el màxim ordre dels menors no nuls (el rang) no es veu afectat.

II) Certa. El nombre de files i el nombre de columnes linealment independents és el mateix. En $A^t$ només hem canviat files per columnes.

III) Falsa. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ran(A) = ran(B) = 2$ (perquè $|A| \neq 0$ i $|B| \neq 0$) i $ran(A+B) = 1$).

IV) Falsa. Per exemple, si $A$ és una matriu d'ordre 2 i amb $ran(A) = 2$, $A^2$ també serà d'ordre 2; per tant, $ran(A^2) \leq 2$, i $[ran(A)]^2 = 2^2 = 4$ (si $A^2$ és d'ordre 2 *no* pot tenir rang 4).

V) Si $A$ és una matriu quadrada d'ordre $n$, i existeix la seva inversa, llavors $|A| \neq 0$ (i $|A^{-1}| \neq 0$). Per tant, $ran(A) = ran(A^{-1}) = n$. Conseqüentment, la igualtat és certa.

**48** **Sigui $A$ una matriu quadrada tal que $A^2 = A$. Demostra que $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$.**

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |A| \rightarrow |A|^2 - |A| = 0 \rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$$

(Hem tingut en compte que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$).

**49** **Escriu dues matrius $A$ i $B$ d'ordre 2 tals que:**

**a)** $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$

**b)** $det(A+B) = det(A) + det(B)$

a) Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};\ A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 7;\ |B| = -11;\ |A+B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$

b) Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};\ A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0;\ |B| = 0;\ |A+B| = 0 = |A| + |B|$

# Per aprofundir

**50 Demostra, sense desenvolupar el determinant, que:**

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{COLUMNES} \\ (1a)-(3a) \\ (2a)-(3a) \\ (3a) \end{array} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+b-2b) = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

(1) Traiem $(a-b)$ factor comú de la 1a i de la 2a columna.

(2) Desenvolupem per la 3a fila.

**51 Prova, sense desenvolupar, que** $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$.

En el segon membre, multipliquem i dividim la 1a fila per $a$; la 2a, per $b$, i la 3a, per $c$.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

**52 Demostra que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

* ***Aquest determinant s'anomena de Vandermonde.***

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

## Pàgina 87

**53 Determina les matrius quadrades d'ordre 2 els elements de les quals siguin nombres enters, amb determinant igual a –1, i tals que la seva inversa coincideixi amb la seva transposada.**

* ***Fes*** $A \cdot A^t = I$ ***i*** $|A| = -1$. ***Hi ha 4 solucions.***

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, llavors $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Si $A^t = A^{-1}$, ha de ser:

$$A \cdot A^t = I \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

Com que $a$, $b$, $c$ i $d$ són enters, tenim només quatre solucions: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**54** **Escriu una matriu amb 3 files i 3 columnes, que tingui 3 elements nuls i tal que cap dels seus menors d'ordre 2 sigui nul¡.**

Per exemple: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ja que: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

**55** **Demostració que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ per determinants d'ordre 2:**

$$|AB| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}}_{(1)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}_{(2)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}}_{(3)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}_{(4)}$$

**a) Comprova que els determinants (1) i (4) són els dos zero.**

**b) Treu factor comú dels elements $b_{ij}$ en (2) i en (3). Com es volia demostrar, arribaràs a $|A| \cdot |B|$.**

a) (1) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\,b_{11}\,a_{21}\,b_{12} - a_{11}\,b_{12}\,a_{21}\,b_{11} = a_{11}\,a_{21}\,b_{11}\,b_{12} - a_{11}\,a_{21}\,b_{11}\,b_{12} = 0$

(4) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{12}\,b_{21}\,a_{22}\,b_{22} - a_{12}\,b_{22}\,a_{22}\,b_{21} = a_{12}\,a_{22}\,b_{21}\,b_{22} - a_{12}\,a_{22}\,b_{21}\,b_{22} = 0$

b) (2) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}\,b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}\,b_{22}\,|A|$

(3) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = b_{21}\,b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -b_{21}\,b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b_{21}\,b_{12}\,|A|$

Per tant, queda:

$$|AB| = 0 + b_{11}\,b_{22}\,|A| - b_{21}\,b_{12}\,|A| + 0 = |A|\,(b_{11}\,b_{22} - b_{21}\,b_{12}) = |A| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

**56** **Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

**a) Troba la matriu $(A_{ij})$.**

**b) Demostra que $A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$.**

**c) Quina relació hi ha entre $|A|$ i $|(A_{ij})|$?**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -8 - 8 + 3 = -13$

$$A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

c) $|(A_{ij})| = 169 = (-13)^2 = |A|^2$

**57** **Sigui $A$ una matriu quadrada d'ordre 3 amb $|A| \neq 0$. Busca la relació que hi ha entre $|A|$ i $|(A_{ij})|$. Per a això, tingues en compte l'apartat b) del problema anterior i que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.**

- Sabem que el determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada:

$$|A_{ij}| = |A_{ji}|$$

- Per altra banda (suposant que existeix $A^{-1}$) tenim que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) \rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \cdot |A_{ji}| = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ji}| = |A^{-1}|$$

- També sabem que:

$$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Unint les dues igualtats obtingudes, tenim que:

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| \rightarrow |A_{ij}| = |A|^2 \quad (A \text{ d'ordre } 3 \times 3)$$

**58** **Si $A$ és una matriu quadrada d'ordre $n$, dona el valor de $|(A_{ij})|$ en funció de $|A|$.**

Amb el mateix raonament que hem seguit en l'exercici anterior, arribem a que, si $A$ és $n \times n$, llavors:

$$\left.\begin{array}{l} |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|^n}|A_{ij}| \\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right\} \rightarrow |A_{ij}| = |A|^{n-1}$$

# Autoavaluació

## Pàgina 87

**1 Troba el valor de $a$ que fa que la matriu $A$ no sigui regular.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 2a + 4 = 0 \;\rightarrow\; a = -2$$

$A$ no és regular per a $a = -2$.

**2 Calcula el valor d'aquest determinant i dona'n el resultat factoritzat:**

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+2)\begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+2)\begin{vmatrix} a-2 & a-2 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+2)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+2)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2(a+2)(a-2)$$

**3 Donades les matrius següents:**

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

**a) Calcula el determinant de la matriu $3A(x)$ i obtén el valor de $x$ perquè aquest determinant valgui 162.**

**b) Demostra que la matriu $B(y)$ no té inversa per a cap valor de $y$.**

a) $$|A(x)| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2x & 3 & 6 \\ 4x & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2x & 3 & 6 \\ 4x & 2 & 6 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6x$$

$|3A(x)| = 3^3|A(x)| = 3^3 \cdot 6x = 162x$

$|3A(x)| = 162 \rightarrow x = 1$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot y = 0,$$

Per tant, $B$ no té inversa.

**4** **a) Estudia el rang de $M$ segons els valors de $a$ i $b$.**

$$M=\begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

**b) Troba $M^{-1}$ en el cas $a=1$, $b=-1$.**

a) Veiem per a quins valors de $a$ i $b$ el determinant de $M$ es fa zero:

$$|M|=(2a+b)(b-a)^2=0 \rightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \rightarrow b=-2a \\ b=a \end{cases}$$

• Si $b=a$, $M=\begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Si $b=-2a$, $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -3a & 0 \\ a & 0 & -3a \end{pmatrix}$ i $\begin{vmatrix} -3a & 0 \\ 0 & -3a \end{vmatrix}=9a^2$

Per tant:

• Si $a=b=0$, $ran(M)=0$

• Si $a=b\neq 0$, $ran(M)=1$

• Si $b=-2a\neq 0$, $ran(M)=2$

• Si $a\neq b$ i $b\neq -2a$, $ran(M)=3$

b) Per a $a=1$ i $b=-1$, $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$M^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad Adj(M^t)=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad |M|=4$$

Així, $M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

**5** **Si $c_1$, $c_2$, $c_3$ són els vectors columna d'una matriu tal que $|c_1 \ c_2 \ c_3|=5$, calcula:**

**a) $|c_1-3c_2 \quad c_2 \quad c_3|$**

**b) $|c_1 \quad c_2 \quad 2c_3|$**

**c) $|c_1 \quad c_1-c_2 \quad c_3|$**

a) $|c_1-3c_2 \ \ c_2 \ \ c_3|=|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3|=5$

b) $|c_1 \ \ c_2 \ \ 2c_3|=2|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3|=10$

c) $|c_1 \ \ c_1-c_2 \ \ c_3|=-5$

**6** **Estudia el rang de $N$ segons els valors del paràmetre $a$:**

$$N=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

Busquem els valors que anul·len el determinant format per les tres primeres files i les tres primeres columnes:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3+1+1-(a+1)-(a+1)-(a+1) =$$

$$= (a+1)^3-3(a+1)+2 = a^3+3a^2+3a+1-3a-3+2 = a^3+3a^2 = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=-3 \end{cases}$$

- Si $a=0 \rightarrow N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Les tres primeres files són iguals i la 4a són zeros $\rightarrow$ $ran(N)=1$

- Si $a=-3 \rightarrow N=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

  Busquem algun menor d'ordre 3 diferent de zero:

  $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot 9 = -27 \neq 0 \rightarrow ran(N)=3$$

  (1) Traiem $-3$ factor comú de la 3a columna.

- Si $a\neq 0 \rightarrow ran(N)=3$

**7** **Considera la matriu $A=\begin{pmatrix} t & -1 & 4 \\ 3 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

**a) Determina per a quins valors de $t$ la matriu $A$ és regular.**

**b) Per a $t=1$, troba la matriu $X$ que verifica $AXA^{-1}=B$ si $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

a) $\begin{vmatrix} t & -1 & 4 \\ 3 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -1 & 4+t \\ 3 & t & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 4+t \\ t & 3 \end{vmatrix} = -(-3-4t-t^2) = t^2+4t+3=0 \rightarrow t=-1,\ t=-3$

$A$ té inversa si $t\neq -1$ i $t\neq -3$.

b) $AXA^{-1}=B \rightarrow X=A^{-1}BA$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 20 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 & -1/8 & 1/2 \\ 5/8 & 3/8 & 5/2 \\ 1/8 & -1/8 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 9/8 & -1/8 & 1/2 \\ 5/8 & 3/8 & 5/2 \\ 1/8 & -1/8 & 3/2 \end{pmatrix}$$