Resol

Pàgina 89

Els fardells de cereal

Resol el problema xinès dels fardells de cereal procedint de manera similar a com ho van resoldre ells. Recorda el mètode de Gauss que vas aprendre el curs passat i tingues en compte que, en els quadres, les equacions estan descrites en columnes en lloc de files.

Anomenem:

x = 1r cereal

y = 2n cereal

z = 3r cereal

De l'enunciat deduïm les equacions:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array}\right)$$

Solució:

$$x = \frac{39 - 2y - z}{3} = \frac{37}{4}, \quad y = \frac{24 - z}{5} = \frac{17}{4}, \quad z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}$$

1 Sistemes d'equacions lineals

Pàgina 91

1 Cert o fals?

a) En un sistema d'equacions amb dues incògnites $(x,\ y)$ l'equació $x + y = 4$ té, entre d'altres, la solució (3, 1).

b) En un sistema amb tres incògnites $(x,\ y,\ z)$ l'equació $x + y = 4$ no té sentit.

c) En un sistema amb tres incògnites $(x,\ y,\ z)$ l'equació $x + y = 4$ sí que té sentit. Representa un pla. Algunes solucions són (3, 1, 0), (3, 1, 7), (3, 1, –4).

d) Si som en el pla (dues incògnites, x, y) l'equació $y = 0$ representa l'eix X.

e) Si som en l'espai (tres incògnites, x, y, z) l'equació $y = 0$ representa el pla XZ.

a) Cert, perquè 3 + 1 = 4.

b) Fals. En una equació no han d'aparèixer totes les incògnites.

c) Cert. El valor de la tercera coordenada pot ser qualsevol.

d) Cert. En l'eix X tots els punts tenen la segona coordenada igual a zero.

e) Cert. En el pla XZ tots els punts tenen la segona coordenada igual a zero.

2 Sense resoldre'ls, explica per què són equivalents els parells de sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x \quad\ = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y \quad\ = 7 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \qquad\quad z = 2 \\ x + y \quad\ = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \ \ y - z = 5 \\ x + \ \ y \quad\ = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \qquad\quad z = 2 \\ x + y \quad\ = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + \ \ y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x + y - z = 11 \\ \quad\ \ y \quad\ = -4 \end{cases}$

a) Hem substituït la segona equació pel resultat de sumar les dues que teníem.

b) Hem substituït la primera equació pel resultat de restar-li a la segona equació la primera.

c) En el primer sistema, la tercera equació s'obté sumant les dues primeres. La resta és igual que en b).

d) Hem substituït la segona equació pel resultat de restar-li a la segona equació la primera.

2 Possibles solucions d'un sistema d'equacions lineals

Pàgina 93

3 Resol i interpreta geomètricament els sistemes d'equacions següents:

$$\text{a) }\begin{cases} 2x+\ \ y=1\\ 3x+2y=4\\ x+\ \ y=3\end{cases}\qquad \text{b) }\begin{cases} x+\ \ y+z=6\\ \qquad y-z=1\\ x+2y\qquad=7\end{cases}\qquad \text{c) }\begin{cases} x+y+z=6\\ x+y+z=0\\ x\qquad\ -z=0\end{cases}\qquad \text{d) }\begin{cases} x+y+z=6\\ \qquad y-z=1\\ \qquad\quad\ z=1\end{cases}$$

a) $$\left.\begin{aligned} 2x+\ y&=1\\ 3x+2y&=4\\ x+\ y&=3\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}&\to\ y=1-2x\\ &\\ &\to\ y=3-x\end{aligned}\right\}\ 1-2x=3-x\ \to\ x=-2,\ y=3-(-2)=5$$

Vegem si compleix la 2a equació: $3\cdot(-2)+2\cdot 5=-6+10=4$

Solució: $x=-2,\ y=5$. Són tres rectes que es tallen en el punt $(-2, 5)$.

b) $$\left.\begin{aligned} x+\ y+z&=6\\ y-z&=1\\ x+2y\quad&=7\end{aligned}\right\}$$ La 3a equació s'obté sumant les dues primeres; podem prescindir-ne.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=6-z\\ y&=\ 1+z\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&x=6-z-y=6-z-1-z=5-2z\\ &y=1+z\end{aligned}$$

Solució: $x=5-2\lambda,\ y=1+\lambda,\ z=\lambda$. Són tres plans que es tallen en una recta.

c) $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6\\ x+y+z&=0\\ x\qquad -x&=0\end{aligned}\right\}$$ Les dues primeres equacions es contradiuen.

El sistema és incompatible. Els dos primers plans són paral·lels i el tercer els talla.

d) $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6\\ y-z&=1\\ z&=1\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&z=1\\ &y=1+z=2\\ &x=6-y-z=6-2-1=3\end{aligned}$$

Solució: $x=3,\ y=2,\ z=1$. Són tres plans que es tallen en el punt $(3, 2, 1)$.

4 a) Resol aquest sistema:

$$\begin{cases} x+2y=3\\ x-\ \ y=4\end{cases}$$

b) Afegeix una tercera equació de manera que continuï sent compatible.

c) Afegeix una tercera equació de manera que el sistema sigui incompatible.

d) Interpreta geomètricament el que has fet en cada cas.

a) $$\left.\begin{aligned} x+2y&=3\\ x-\ y&=\ 4\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} x&=3-2y\\ x&=4+\ y\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&3-2y=4+y\ \to\ -1=3y\ \to\ y=\frac{-1}{3}\\ &x=4+y=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}\end{aligned}$$

Solució: $x=\dfrac{11}{3},\ y=\dfrac{-1}{3}$

b) Per exemple: $2x+y=7$ (suma de les dues anteriors)

c) Per exemple: $2x+y=9$

d) En a) → Són dues rectes que es tallen en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) → La nova recta també passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) → La nova recta no passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No existeix cap punt comú a les tres rectes.

3 Sistemes esgraonats

Pàgina 94

5 Reconeix com a esgraonats els sistemes següents i resol-los:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x \qquad\;\;\, = 7 \\ \;\; x - 2y = 5 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad\;\; = 6 \\ \;\; x + y + 3z = 7 \\ 5x \qquad - \;\; z = 4 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad\quad - 2t = 6 \\ \;\; x + y + 3z \qquad\; = 7 \\ 5x \qquad - \;\; z + \;\; t = 4 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\quad + 3z = 0 \\ \;\; x + 3y - \;\; z = 7 \\ 4x \qquad\qquad\quad = 4 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x \qquad = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}\right\}$ *Solució:* $x = \dfrac{7}{3}$, $y = \dfrac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad\; = 6 \\ \;\; x + y + 3z = 7 \\ 5x \qquad - \; z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad\; = 6 \\ 5x \qquad - z = 4 \\ \;\; x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solució: $x = 3$, $y = -29$, $z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad - 2t = 6 \\ \;\; x + y + 3z \qquad = 7 \\ 5x \qquad - z + \; t = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad = 6 + 2t \\ 5x \qquad - \; z = 4 - \; t \\ \;\; x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Solucions: $x = 3 + \lambda$, $y = -29 - 19\lambda$, $z = 11 + 6\lambda$, $t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x \qquad + 3z = 0 \\ \;\; x + 3y - \; z = 7 \\ 4x \qquad\qquad = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x \qquad\qquad = 4 \\ 2x \qquad + 3z = 0 \\ \;\; x + 3y - \; z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$

Solució: $x = 1$, $y = \dfrac{16}{9}$, $z = \dfrac{-2}{3}$

6 Són esgraonats aquests sistemes? Resol-los:

a) $\left\{\begin{array}{l} \qquad 2y + \;\; z = 1 \\ \qquad 2y \qquad\; = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x \qquad - z = 4 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y \qquad = 2 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad z + \;\; t = 3 \\ \qquad y + 3z - 2t = 4 \\ \qquad\quad\;\; 2z \qquad = 2 \\ x \qquad - \;\; z + 2t = 5 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2y + \; z = 1 \\ 2y \qquad = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2y \qquad = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solució: $x = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} \;\; x + y + z = 7 \\ 2x \qquad - z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x \qquad = 4 + z \\ \;\; x + y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda$, $y = 5 - 3\lambda$, $z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y \qquad = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \qquad = 2 + y \\ x + z = 3 - y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - 2 - y = 1 - 2y \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1 - 2\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} z+t=3\\ y+3z-2t=4\\ 2z=2\\ x-z+2t=5\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2z=2\\ z+t=3\\ y+3z-2t=4\\ x-z+2t=5\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z=1\\ t=3-z=2\\ y=4-3z+2t=5\\ x=5+z-2t=2\end{array}$$

Solució: $x=2,\ y=5,\ z=1,\ t=2$

Pàgina 95

7 **Transforma en esgraonats i resol.**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=21\\ 3x+y=4\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x-y+3z=-4\\ x+y+z=2\\ x+2y-z=6\end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=6\\ x-y-z=-4\\ 3x+y+z=8\end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x-y+3z=0\\ 3x-2y-5z+7w=-32\\ x+2y-z+3w=18\\ x-3y+z+2w=-26\end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=21\\ 3x+y=4\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ 3\cdot(2a)+(1a)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-3y=21\\ 11x=33\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=3\\ y=\dfrac{21-2x}{-3}=-5\end{array}\right\}$$

Solució: $x=3,\ y=-5$

b) $$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=-4\\ x+y+z=2\\ x+2y-z=6\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ (2a)-(1a)\\ (3a)-(1a)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+3z=-4\\ 2y-2z=6\\ 3y-4z=10\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ (2a):2\\ (3a)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+3z=-4\\ y-z=3\\ 3y-4z=10\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} (1a)\\ (2a)\\ (3a)-3\cdot(2a)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+3z=-4\\ y-z=3\\ -z=1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=-1\\ y=3+z=2\\ x=-4+y-3z=1\end{array}\right\}$$

Solució: $x=1,\ y=2,\ z=-1$

c) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6\\ x-y-z=-4\\ 3x+y+z=8\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ (2a)-(1a)\\ (3a)-3\cdot(1a)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=6\\ -2y-2z=-10\\ -2y-2z=-10\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ (2a):(-2)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=6\\ y+z=5\end{array}\right\}$$

(Podem prescindir de la 3a, perquè és igual que la 2a).

$$\left.\begin{array}{r} x+y=6-z\\ y=5-z\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=6-z-y=6-z-5+z=1\\ y=5-z\end{array}$$

Solucions: $x=1,\ y=5-\lambda,\ z=\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=0\\ 3x-2y-5z+7w=-32\\ x+2y-z+3w=18\\ x-3y+z+2w=-26\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ (2a)-3\cdot(1a)\\ (3a)-(1a)\\ (4a)-(1a)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+3z=0\\ y-14z+7w=-32\\ 3y-4z+3w=18\\ -2y-2z+2w=-26\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ (2a)\\ (3a)-3\cdot(2a)\\ (4a)+2\cdot(2a)\end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=0\\ y-14z+7w=-32\\ 38z-18w=114\\ -30z+16w=-90\end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a)\\ (2a)\\ (3a):2\\ 15\cdot(3a)+19\cdot(4a)\end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+3z=0\\ y-14z+7w=-32\\ 19z-9w=57\\ 34w=0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} w=0\\ z=\dfrac{57+9w}{19}=3\\ y=-32+14z-7w=10\\ x=y-3z=1\end{array}\right\}$$

Solució: $x=1,\ y=10,\ z=3,\ w=0$

4 Mètode de Gauss

Pàgina 96

8 Cert o fals?

a) En aplicar el mètode de Gauss, és possible que un sistema incompatible doni lloc a un d'esgraonat compatible. O viceversa.

b) En aplicar el mètode de Gauss, el sistema esgraonat al qual s'arriba finalment és del mateix tipus que el sistema inicial, ja que tots els passos que es donen transformen cada sistema en un altre d'equivalent a aquell.

a) Fals. Les solucions d'un sistema no depenen del mètode emprat per resoldre'l.

b) Cert. Les solucions d'un sistema no depenen del mètode emprat per resoldre'l.

Pàgina 98

9 Resol aquests sistemes d'equacions fent servir el mètode de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2\\ 3x-2y-z=4\\ -2x+y+2z=2\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 3x-4y+2z=1\\ -2x-3y+z=2\\ 5x-y+z=5\end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{r} x-2y=-3\\ -2x+3y+z=4\\ 2x+y-5z=4\end{array}\right.$

a)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2\\ 3x-2y-z=4\\ -2x+y+2z=2\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & -1 & 4\\ -2 & 1 & 2 & 2\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1a)\\ (2a)-3\cdot(1a)\\ (3a)+2\cdot(1a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 3 & 4 & 6\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1a)\\ (2a)\cdot(-1)\\ (3a)\cdot 5+(2a)\cdot 3\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 8 & 24\end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=2\\ 5y+4z=2\\ 2z=24\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=3\\ y=\dfrac{2-4z}{5}=-2\\ x=2-y-z=1\end{array}\right\}$$

Solució: $x=1,\ y=-2,\ z=3$

b)

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y+2z=1\\ -2x-3y+z=2\\ 5x-y+z=5\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 1 & 5\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1a)-2\cdot(3a)\\ (2a)-(3a)\\ (3a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9\\ -7 & -2 & 0 & -3\\ 5 & -1 & 1 & 5\end{array}\right)$$

Les dues primeres equacions es contradiuen. El sistema és *incompatible*.

c)

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=-3\\ -2x+3y+z=4\\ 2x+y-5z=4\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -5 & 4\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1a)\\ (2a)+2\cdot(1a)\\ (3a)-2\cdot(1a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -5 & 10\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1a)\\ (2a)\\ (3a)+5\cdot(2a)\end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x-2y=-3\\ -y+z=-2\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-3+2y\\ z=-2+y\end{array}$$

Solucions: $x=-3+2\lambda,\ y=\lambda,\ z=-2+\lambda$

10 **Resol per mitjà del mètode de Gauss.**

$$\text{a)}\ \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ -x + 3y + z &= 3 \\ x + y + 5z &= 7 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{(1a)} \\ \text{(2a) + (1a)} \\ \text{(3a) – (1a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ 2y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x - y &= 2 - 2z \\ 2y &= 5 - 3z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 2 - 2z + y \\ &y = \frac{5 - 3z}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} \end{aligned}$$

$$x = 2 - 2z + \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7z}{2}$$

Solucions: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda,\ \ y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda,\ \ z = 2\lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - y \quad + w &= 0 \\ x - 2y + z \quad &= 0 \\ 5x - y + z + w &= 0 \\ 5x - 2y - z + 2w &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a) – (1a)} \\ \text{(4a) – 2 · (1a)}}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a) + (4a)} \\ \text{(4a)}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} 2x - y \quad + w &= 0 \\ x - 2y + z \quad &= 0 \\ 4x \quad &= 0 \\ x \quad - z \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 0 \\ y &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Solució: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ w = 0$

c) $$\left.\begin{aligned} 2x - y \quad + w &= 9 \\ x - 2y + z \quad &= 11 \\ 5x - y + z + w &= 24 \\ 5x - 2y - z + 2w &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a) – (1a)} \\ \text{(4a) – 2 · (1a)}}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a) + (4a)} \\ \text{(4a)}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} 2x - y \quad + w &= 9 \\ x - 2y + z \quad &= 11 \\ 4x \quad &= -3 \\ x \quad - z \quad &= -18 \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \frac{69}{4} \qquad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

Solució: $x = \dfrac{-3}{4},\ \ y = \dfrac{11}{4},\ \ z = \dfrac{69}{4},\ \ w = \dfrac{53}{4}$

5 Discussió de sistemes d'equacions

Pàgina 99

11 **Discuteix, en funció de k, aquests sistemes d'equacions:**

a) $\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$

a)
$$\left.\begin{array}{l} 4x + 2y \qquad = k \\ x + \ y - z = 2 \\ kx + \ y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x + \ y - z = 2 \\ 4x + 2y \quad = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x \qquad = 3 - 2y \end{array}\right\} \to x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *incompatible indeterminat.*

Solucions: $x = \frac{3}{4} - \lambda, \ y = 2\lambda, \ z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- Si $k \neq 3$, és *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{l} x + \ y - z = \ 2 \\ 4x + 2y \qquad = \ k \\ (k-3)x \qquad = (3-k) \end{array}\right\} \ x = \frac{3 - k}{k - 3} = -1; \ y = \frac{k - 4x}{2} = \frac{k + 4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solució: $x = -1, \ y = 2 + \frac{k}{2}, \ z = -1 + \frac{k}{2}$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 4x + 2y \qquad = k \\ x + \ y - z = 2 \\ kx + \ y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ El sistema és *incompatible*.

- Si $k \neq 3$, és *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{l} x + \ y - z = \qquad 2 \\ 4x + 2y \qquad = \qquad k \\ (k-3)x \qquad = (2-k) \end{array}\right\} \ x = \frac{2 - k}{k - 3}; \ y = \frac{k - 4x}{2} = \frac{k^2 + k - 8}{2k - 6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2 - k}{k - 3} + \frac{k^2 + k - 8}{2(k - 3)} - 2 = \frac{k^2 - 5k + 8}{2k - 6}$$

Solució: $x = \frac{2 - k}{k - 3}, \ y = \frac{k^2 + k - 8}{2k - 6}, \ z = \frac{k^2 - 5k + 8}{2k - 6}$

12 **Discuteix aquests sistemes d'equacions en funció de k:**

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{l} kx + y - z = 8\\ x + y + z = 0\\ 2x + z = k \end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1\\ y + kz = 1\\ x + 2y = k \end{array}\right.$$

a)
$$\left.\begin{array}{r} kx + y - z = 8\\ x + y + z = 0\\ 2x \quad + z = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} - \text{(2a)}\\ \text{(2a)}\\ \text{(3a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)} + 2\cdot\text{(3a)}\\ \text{(2a)}\\ \text{(3a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$$

- Si $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$ Sistema *incompatible.*

- Si $k \neq -3$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} (k+3)x \qquad = 8 + 2k\\ x + y + z = 0\\ 2x \quad + z = k \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{k+3}$$

Solució: $x = \dfrac{8+2k}{k+3},\ y = \dfrac{-k^2-k+8}{k+3},\ z = \dfrac{k^2-k-16}{k+3}$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1\\ y + kz = 1\\ x + 2y \quad = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & k & 1\\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)}\\ \text{(3a)} - \text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & k & 1\\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)}\\ \text{(3a)} - \text{(2a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & k & 1\\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$$

- Si $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$ Sistema *incompatible.*

- Si $k \neq -1$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \quad + z = 1\\ y \quad + kz = 1\\ (-1-k)z = k - 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k\left(\frac{2-k}{1+k}\right) = 1 \ \rightarrow\ y = 1 - \frac{2k-k^2}{1+k} = \frac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} = \frac{-2+3k-k^2}{1+k}$$

Solució: $x = \dfrac{-2+3k-k^2}{1+k},\ y = \dfrac{1-k+k^2}{1+k},\ z = \dfrac{2-k}{1+k}$

6 Un nou criteri per saber si un sistema és compatible

Pàgina 101

13 Aplica el teorema de Rouché per esbrinar si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \to ran\,(A) = 2 \\ |A'| = 0 \to ran\,(A') = 2 \end{array}\right\} \text{El sistema és } \textit{compatible}.$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A'| = 147 \neq 0 \to ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$$

El sistema és *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to ran\,(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \to ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible*.

14 **Seguint el mateix procés que en l'exercici anterior, esbrina si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:**

a) $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + z &= 2 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ i } |A| = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (perquè la 1a i la 3a columna són iguals) } \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema és *compatible*.

Observació: Com que la 4a columna de A' i la 1a són iguals, necessàriament $ran(A') = ran(A)$; és a dir, el sistema és *compatible*.

b) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + z &= 2 \\ 2y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabem que $ran(A) = 2$ (veure apartat a) d'aquest exercici).

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema és *incompatible*.

c) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 7 \\ 3x - y + 4t &= 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &= -13 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$

Sabem que $ran(A) = 2$ (veure apartat c) de l'exercici anterior).

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema és *compatible*.

7 Regla de Cramer

Pàgina 102

15 Enuncia la regla de Cramer per a un sistema de tres equacions amb tres incògnites.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

$$\text{Si } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A')$$

Per tant, el sistema és *compatible*.

La seva solució és: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$, $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, $z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$

A_x és la matriu que resulta de substituïr en la matriu A la columna dels coeficients de x per la columna dels termes independents. Anàlogament, A_y i A_z s'obtenen substituïnt en A la columna dels coeficients de la incògnita corresponent per la dels termes independents.

16 Fent servir la regla de Cramer, resol el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \ |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \ |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Per tant: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

Pàgina 103

17 Demostra la regla de Cramer per a un sistema de tres equacions amb tres incògnites, procedint anàlogament a com s'ha fet en aquesta pàgina.

Tenim un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\}, \text{ amb } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Hem d'aïllar cada una de les incògnites. Comencem per la x.

Per aïllar x, hem d'eliminar y i z. Això s'aconsegueix multiplicant les tres equacions, que anomenem (1), (2) i (3), pels adjunts dels coeficients de la x:

$$(1) \cdot A_{11} \rightarrow a_{11} A_{11}x + a_{12} A_{11}y + a_{13} A_{11}z = c_1 A_{11}$$

$$(2) \cdot A_{21} \rightarrow a_{21} A_{21}x + a_{22} A_{21}y + a_{23} A_{21}z = c_2 A_{21}$$

$$(3) \cdot A_{31} \rightarrow a_{31} A_{31}x + a_{32} A_{31}y + a_{33} A_{31}z = c_3 A_{31}$$

Sumant, obtenim una igualtat que analitzarem per parts:

- El coeficient de la x és:

  $$a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = |A|$$

- El coeficient de la y és:

  $$a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} y + a_{32} A_{31} = 0$$

  Anàlogament, es veu que el coeficient de z és zero.

- El terme independent és:

  $c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + c_3 A_{31}$, que és el determinant de la matriu A_x que resulta en substituïr en A la columna dels coeficients de x per la columna dels termes independents:

  $$A_x = \begin{pmatrix} c1 & a12 & a13 \\ c2 & a22 & a23 \\ c3 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

Resumim: En fer la suma $(1) \cdot A_{11} + (2) \cdot A_{21} + (3) \cdot A_{31}$, obtenim:

$$|A|x + 0y + 0z = |A_x|$$

Com que $|A| \neq 0$, podem aïllar la x, i obtenim:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

Per aïllar la y hauríem de multiplicar les equacions (1), (2) i (3) per A_{12}, A_{22} i A_{32}, respectivament. Procediríem anàlogament per aïllar z, obtenint:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

8 Aplicació de la regla de Cramer a sistemes qualssevol

Pàgina 105

18 **Resol els sistemes d'equacions següents:**

$$\text{a)}\ \begin{cases} x - \ y + 3z = 1 \\ 3x - \ y + 2z = 3 \\ \quad - 2y + 7z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x - \ y + 3z = 1 \\ 3x - \ y + 2z = 3 \\ \quad - 2y + 7z = 10 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} x + y \qquad = 3 \\ \quad y + z = 5 \\ x \qquad + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{aligned} x - \ y + 3z &= 1 \\ 3x - \ y + 2z &= 3 \\ - 2y + 7z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \text{ i } \ |A| = 0 \ \rightarrow \ ran(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ (la 1a i la 3a columna són iguals) } \rightarrow \ ran(A') = 2$$

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 2a equació:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ -2y + 7z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x - y = 1 - 3z \ \rightarrow \ x = y + 1 - 3z = 1 + \frac{z}{2} \\ &-2y = -7z \ \quad \rightarrow \ y = \frac{7z}{2} \end{aligned}$$

Solucions: $x = 1 + \lambda, \ y = 7\lambda, \ z = 2\lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} x - \ y + 3z &= 1 \\ 3x - \ y + 2z &= 3 \\ - 2y + 7z &= 10 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$$

Sabem, per l'apartat a), que $ran(A) = 2$.

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema és *incompatible*.

c) $$\left.\begin{aligned} x + y \qquad &= 3 \\ y + z &= 5 \\ x \qquad + z &= 4 \\ 5x - y + z &= 6 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = 3$

Calculem el rang de A':

$|A'| = 0 \ \rightarrow \ ran(A') = 3$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de l'última equació i aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solució: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

d) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 4 \\ 2x + 6y &= 23 \\ -2x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Com que $|A'| = -309 \neq 0$, llavors $ran(A') = 3 \neq ran(A)$.

El sistema és *incompatible*.

9 Sistemes homogenis

Pàgina 106

19 Resol els sistemes d'equacions següents:

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} 3x-5y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y=0\end{cases} \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases} x-y-z=0\\ x+y+3z=0\\ x-5y-9z=0\end{cases}$$

$$\textbf{c)}\ \begin{cases} x+11y-4z=0\\ -2x+4y+z=0\\ x+y-2z=0\\ 2x-16y+5z=0\end{cases} \qquad \textbf{d)}\ \begin{cases} x+y+5z=0\\ 3x-y-2t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases}$$

a)
$$\left.\begin{array}{r} 3x-5y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y=0\end{array}\right\}\quad |A| = \begin{vmatrix}3&-5&1\\1&-2&1\\1&1&0\end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Per tant, $ran(A) = 3 = nre.\ d'incògnites.$

El sistema només té la solució trivial: $x=0,\ y=0,\ z=0$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=0\\ x+y+3z=0\\ x-5y-9z=0\end{array}\right\}\quad |A| = \begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&3\\1&-5&-9\end{vmatrix} = 0$$

Seleccionem el menor $\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = 2$

Podem suprimir la 3a equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=z\\ x+y=-3z\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=-z\\ y=-2z\end{array}\right\}\quad Solucions:\ x=-\lambda,\ y=-2\lambda,\ z=\lambda$$

c)
$$\left.\begin{array}{r} x+11y-4z=0\\ -2x+4y+z=0\\ x+y-2z=0\\ 2x-16y+5z=0\end{array}\right\}\quad \begin{vmatrix}1&11&-4\\-2&4&1\\1&1&-2\end{vmatrix} = -18 \to ran(A) = 3 = nre.\ d'incògnites.$$

El sistema només té la solució trivial: $x=0,\ y=0,\ z=0$

d)
$$\left.\begin{array}{r} x+y+5z=0\\ 3x-y-2t=0\\ x-y+z-t=0\end{array}\right\}\quad A = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&5&0\\3&-1&0&-2\\1&-1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1&1&5\\3&-1&0\\1&-1&1\end{vmatrix} = -14 \neq 0 \to ran(A) = 3$$

Per resoldre'l, passem la t al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+5z=0\\ 3x-y=2t\\ x-y+z=t\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}0&1&5\\2t&-1&0\\t&-1&1\end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};\quad y = \frac{\begin{vmatrix}1&0&5\\3&2t&0\\1&t&1\end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2};\quad z = \frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\3&-1&2t\\1&-1&t\end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solucions: $x=\lambda,\ y=-\lambda,\ z=0,\ t=2\lambda$

20 **Resol aquests sistemes:**

a) $$\left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=0\\ y+z=0\\ x-3y+2z=0\\ -x+5y=0\end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=0\\ y+z=0\\ x-3y+2z=0\\ -x+5y+3z=0\end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{r} x+3z=0\\ y-t=0\\ x+y+2t=0\\ 2x+2y+3z+t=0\end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{r} x+3z=0\\ y-t=0\\ x+y+2t=0\\ 2x+2y+3z+9t=0\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=0\\ y+z=0\\ x-3y+2z=0\\ -x+5y=0\end{array}\right\} \rightarrow A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\1&-3&2\\-1&5&0\end{pmatrix}$$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0;\quad \begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\1&-3&2\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\-1&5&0\end{vmatrix}=0$$

Per tant, $ran(A)=2$. El sistema és *compatible indeterminat*.

Per resoldre'l, podem prescindir de les dues últimes equacions i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=-3z\\ y=-z\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=-3z+2y=-3z-2z=-5z\\ y=-z\end{array}\right\}$$

Solucions: $x=-5\lambda,\ y=-\lambda,\ z=\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=0\\ y+z=0\\ x-3y+2z=0\\ -x+5y+3z=0\end{array}\right\}$$ El menor associat a la 1a, 2a i 4a equació és:

$$\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\-1&5&3\end{vmatrix}=3\neq 0 \rightarrow ran(A)=3=nre.\ d'incògnites$$

El sistema té solució única, que és la solució trivial pel fet de ser homogeni.

Solució: $x=0,\ y=0,\ z=0$

c) $$\left.\begin{array}{l} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + t = 0 \end{array}\right\} \; A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right); \; |A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 3 < nre.\ d'incògnites.$$

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació i passar la t al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x - 3z = 0 \\ y = t \\ x + y = -2t \end{array}\right\} \; \begin{array}{l} z = \dfrac{-x}{3} = \dfrac{3t}{3} = t \\ y = t \\ x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{array}$$

Solucions: $x = -3\lambda, \; y = \lambda, \; z = \lambda, \; t = \lambda$

d) $$\left.\begin{array}{l} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 9t = 0 \end{array}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 4 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema té solució única, que és la solució trivial per ser homogeni.

Solució: $x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; t = 0$

10 Discussió de sistemes per mitjà de determinants

Pàgina 108

21 Discuteix i resol.

a) $\begin{cases} x + \ \ y + az = 0 \\ ax - \ \ y \qquad = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \ \ y = k \\ kx - \ \ y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + \ \ y + az = 0 \\ ax - \ \ y \qquad = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix};\ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \to a = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \left\langle \begin{array}{l} a = 2 \\ a = \frac{-3}{4} \end{array}\right.$$

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c|c} \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}}_{A}} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \end{array}\right) \quad \text{Agafem el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A') = 3 \neq ran(A) \to \text{El sistema és } \textit{incompatible}.$$

- Si $a = -\frac{3}{4}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \end{array}\right) \quad \text{Agafem el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \to ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A') = 3 \neq ran(A) \to \text{El sistema és } \textit{incompatible}.$$

- Si $a \neq 2$ i $a \neq -3/4 \to ran(A) = ran(A') = nre.\ d'incògnites = 3$, el sistema és *compatible determinat*. El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solució: $x = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6},\ y = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6},\ z = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $$\left.\begin{aligned} x + y &= k \\ kx - y &= 13 \\ 5x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\} \to A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \to k = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- Si $k = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

Agafem el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2 = nre.\ d'incògnites$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 13 \end{aligned}\right\} \text{ Sumant: } 3x = 15 \to x = 5;\ y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solució: $x = 5,\ y = -3$

- Si $k = \frac{5}{3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x - y &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Sumant: $\frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \to x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2};\ y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$

Solució: $x = \frac{11}{2},\ y = \frac{-23}{6}$

- Si $k \neq 2$ i $k \neq \frac{5}{3} \to ran(A') = 3 \neq ran(A)$, el sistema és *incompatible*.

22 Discuteix i resol, en funció del paràmetre a, el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} (a-1)x + \qquad y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} (a-1)x + \qquad y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{array}{l} \nearrow a = 0 \\ \searrow a = 1 \end{array}$$

- Si $a = 0$, queda:

  $$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \; y = x \;\rightarrow\; \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Solucions: $x = \lambda,\ y = \lambda$

- Si $a = 1$, queda:

  $$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \; \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Solucions: $x = \lambda,\ y = 0$

- Si $a \neq 0$ i $a \neq 1 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$

  El sistema té només la solució trivial: $x = 0,\ y = 0$

11 Forma matricial d'un sistema d'equacions

Pàgina 109

23 Expressa en forma matricial i resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} x-\ y-\ z=6\\ -x\qquad +3z=2\\ -2x+5y-3z=0\end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-\ y=7\\ x-2y=11\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-\ y-\ z=6\\ -x\qquad +3z=2\\ -2x+5y-3z=0\end{array}\right\} \to \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&0&3\\-2&5&-3\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}}_{B}$$

En l'exercici 1 de la pàgina 78 hem calculat A^{-1}.

$$A\cdot X=B \to X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}15&8&3\\9&5&2\\5&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}106\\64\\36\end{pmatrix}$$

Solució: $x=106,\ y=64,\ z=36$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-\ y=7\\ x-2y=11\end{array}\right\} \to \underbrace{\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}}_{B}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}}_{C}$$

En l'exercici 1 de la pàgina 78 hem calculat B^{-1}.

$$B\cdot X=C \to X=B^{-1}\cdot C=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$$

Solució: $x=1,\ y=-5$

24 Expressa en forma matricial i resol.

a) $\begin{cases} x-2y-3z-t=0\\ y+2z\qquad =4\\ 2y+3z+t=1\\ 3x-2y\qquad +t=-2\end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\qquad\qquad =5\\ y+z\qquad =-1\\ z+t=4\\ t=2\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-2y-3z-t=0\\ y+2z\qquad =4\\ 2y+3z+t=1\\ 3x-2y\qquad +t=-2\end{array}\right\} \to \underbrace{\begin{pmatrix}1&-2&-3&-1\\0&1&2&0\\0&2&3&1\\3&-2&0&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\4\\1\\-2\end{pmatrix}}_{B}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$|A|=-5\neq 0 \to$ existeix A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}-5&0&-5&0\\-6&3&-8&2\\3&-4&4&-1\\3&6&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \to X = A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2,\ t = -5$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y \qquad = 5 \\ y + z \qquad = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 2 \end{array}\right\} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Resolem el sistema esgraonat.

Solució: $x = 8,\ y = -3,\ z = 2,\ t = 2$

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 110

1. Discussió de sistemes aplicant el mètode de Gauss

Fes-ho tu. **Discuteix i resol, en funció de cada paràmetre, aplicant el mètode de Gauss.**

$$\text{a)}\ \begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{a)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 1$, el sistema és *compatible determinat.*

$$\left.\begin{array}{r} -x \qquad\qquad - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ (m-1)y \qquad = 0 \end{array}\right\} \ \textit{Solució: } x = -1,\ y = 0,\ z = 1$$

- Si $m = 1$, el sistema és *compatible indeterminat.*

$$\left.\begin{array}{r} -x \qquad - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ 0y \qquad = 0 \end{array}\right\} \ \textit{Solucions: } x = 2 - 3\lambda,\ y = 4 - 4\lambda,\ z = \lambda$$

$$\text{b)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 3 \cdot (1a) \\ (3a) - 2 \cdot (1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array}\right)$$

- Si $a \neq 2$, el sistema és *compatible determinat.*

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\} \ \textit{Solució: } x = 3,\ y = -\frac{3a-4}{a-2},\ z = \frac{2}{a-2}$$

  Els tres plans es tallen en un punt.

- Si $a = 2$, la matriu queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

  El sistema és *incompatible*. Els plans es tallen dos a dos.

Pàgina 111

2. Discussió de sistemes aplicant el teorema de Rouché

Fes-ho tu. Discuteix els sistemes d'equacions següents i resol-los quan siguin compatibles:

a) $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \to |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 2$ i $a \neq -1 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema és *compatible determinat*.

  Per a cada valor de a diferent de –1 i 2, tenim un sistema amb solució única, que per la regla de Cramer és:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}$$

  Solució: $x = a + 1, \ y = \dfrac{2-a}{a-1}, \ z = -\dfrac{a}{a-1}$

  Són tres plans que es tallen en un punt.

- Si $a = -1$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  $$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A') = 3 \end{array}\right\} \text{El sistema és } \textit{incompatible.}$$

  Són tres plans que es tallen per parelles.

- Si $a = 2$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

  Com que la columna de termes independents és igual a la columna de coeficients de z, tenim que $ran(A') = 2 = ran(A)$; el sistema és *compatible indeterminat.*

  Per resoldre'l, agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \to x = 1 - \lambda, \ y = 0, \ z = \lambda$$

  Els plans es tallen en una recta.

b) Comencem estudiant el rang de A', ja que pot ser 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ m & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 12m$$

- Si $m \neq 1 \to ran(A') = 4 \neq ran(A)$, el sistema és *incompatible*.
- Si $m = 1$, traient la tercera equació:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to ran(A) = 3 = ran(A')\text{, el sistema és } \textit{compatible determinat}:$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x - \phantom{y +{}} 2z = 0 \end{array}\right\} \text{ Apliquem la regla de Cramer i obtenim: } x = 2,\ y = 1,\ z = 1$$

Els plans es tallen en un punt: $P = (2, 1, 1)$.

Pàgina 112

3. Sistemes que depenen de dos paràmetres

Fes-ho tu. Discuteix i resol segons els valors de m i n el sistema següent:

$$\begin{cases} mx + y + z = n \\ x + y + mz = 2 \\ 2x + y + mz = n \end{cases}$$

Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$$

- Si $m \neq 1 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema és *compatible determinat*.

  Per a cada valor de m diferent de 1, tenim un sistema amb solució única:

$$\left.\begin{array}{r} mx + y + z = n \\ x + y + mz = 2 \\ 2x + y + mz = n \end{array}\right\} \to x = n - 2,\ y = \frac{n - m^2 n + mn + 2m^2 - 4}{m - 1},\ z = -\frac{2m + 2n - mn - 4}{m - 1}$$

- Si $m = 1$ i $n = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = n \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = n \end{array}\right\}$$

  Les dues primeres equacions són iguals. El sistema és *compatible indeterminat*.

  El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\}$$

  Passant z al segon membre obtenim: $x = 0,\ y = 2 - \lambda,\ z = \lambda$

- Si $m = 1$ i $n \neq 2$, les dues primeres equacions representen dos plans paral·lels.

  El sistema és *incompatible*.

4. Sistemes homogenis

Fes-ho tu. Discuteix i resol aquest sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$$

És un sistema homogeni; per tant, sempre és compatible. Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = 20 - 2a$$

- Si $a \neq 10 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema és *compatible determinat.*

  Per a cada valor de a diferent de 10, tenim un sistema amb solució única: (0, 0, 0), la solució trivial.
- Si $a = 10 \to ran(A) = 2 = ran(A') \to$ el sistema és *compatible indeterminat.*

  Per resoldre'l, agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x + 3y &= -z \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solucions:}\ x = 2\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda$$

5. Sistemes amb més incògnites que equacions

Fes-ho tu. Discuteix aquest sistema d'equacions i resol-lo en el cas que $a = 0$:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 3x + y - z = -1 \\ x - 5y + 5z - at = a + 5 \end{cases}$$

Com que A no és quadrada, anem a calcular el seu rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 5 & -a \end{pmatrix} \to \text{Calculem els determinants següents:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -a \end{vmatrix} = 16 - 4a$$

- Si $a \neq 4 \to ran(A) = 3 = ran(A') <$ *nre. d'incògnites* $\to$ el sistema és *compatible indeterminat.*

  Passem z al segon membre com a paràmetre en no haver seleccionat la columna de coeficients de z per al menor diferent de zero.

$$\left.\begin{aligned} x - y + z - t &= 2 \\ 3x + y - z &= -1 \\ x - 5y + 5z - at &= a + 5 \end{aligned}\right\} \to x = 0,\ y = \lambda - 1,\ z = \lambda,\ t = -1$$

- Si $a = 4 \to ran(A) = 2$

$$\left.\begin{aligned} x - y + z - t &= 2 \\ 3x + y - z &= -1 \\ x - 5y + 5z - 4t &= 9 \end{aligned}\right\} \text{ Si afegim la columna de termes independents:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 0 \to ran(A') = 2 = ran(A) \to \text{el sistema és } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Per resoldre'l, agafem les dues primeres equacions i passem z i t al segon membre com a paràmetres:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z - t &= 2 \\ 3x + y - z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solucions:}\ x = \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4},\ y = \lambda - \frac{3}{4}\mu - \frac{7}{4},\ z = \lambda,\ t = \mu$$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 113

1. Sistema matricial

Donat aquest sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{aligned} x - y + mz &= m \\ mx + y - \quad z &= m \\ (m+1)x \quad + \quad z &= m + 2 \end{aligned}\right.$$

troba la matriu $A^{-1}B$, sense calcular la matriu inversa de A, si A és la matriu de coeficients i B la de termes independents.

a) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B$

b) $AX = AA^{-1}B = B$

c) X és la solució del sistema:

$$\left\{\begin{aligned} x - y + mz &= m \\ mx + y - \quad z &= m \\ (m+1)x + \quad z &= m + 2 \end{aligned}\right.$$

Perquè existeixi A^{-1}, el sistema ha de tenir solució única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 2 \neq 0$$

Per tant, $m \neq -1$ i $m \neq 2$.

En aquest cas,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + m + 2} = \frac{-m^2 + m + 2}{-m^2 + m + 2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & m & -1 \\ m+1 & m+2 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + m + 2} = \frac{-m^2 + m + 2}{-m^2 + m + 2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & m \\ m+1 & 0 & m+2 \end{vmatrix}}{-m^2 + m + 2} = \frac{-m^2 + m + 2}{-m^2 + m + 2} = 1$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Sistemes amb infinites solucions

Siguin S i S' dos sistemes d'equacions amb dues incògnites que difereixen només en els termes independents. Si S és compatible indeterminat, ho és també S'?

Si S és compatible indeterminat significa que la columna de termes independents és linealment dependent de les columnes dels coeficients.

En canviar els termes independents, canviem la columna corresponent i pot ser que sigui linealment independent amb les anteriors; per tant, pot ser que el sistema resulti ser incompatible.

3. Sistema compatible per a qualsevol valor del paràmetre

Sigui el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} ax + y + z = a + 2 \\ 2x - ay + z = -2 \\ x - y + az = a \end{cases}$$

a) Comprova que és compatible per a qualsevol valor de a.

b) Calcula la solució en forma matricial en el cas $a = 0$.

c) Resol per a $a = 1$ fent servir el mètode de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 1 = 0 \rightarrow a = -1$

- Si $a \neq -1 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A') \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat*, té solució única.
- Si $a = -1$:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema és *compatible indeterminat*, té infinites solucions.

És *compatible* per a qualsevol valor de a.

b) $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = -2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ 3 \cdot (3a) - 2 \cdot (2a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \rightarrow x = -3,\ y = 1,\ z = 5$$

4. Afegir una equació a un sistema

Afegeix una equació al sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de manera que sigui:

a) Incompatible.

b) Compatible determinat.

c) Compatible indeterminat.

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

Fem (1a) + (2a) $\rightarrow$ $3x + z = 4$

Canviem el terme independent $\rightarrow$ $3x + z = 5$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$$

és *incompatible*.

b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda, \ y = \frac{4}{3}\lambda + \frac{5}{3}, \ z = \lambda$

Una solució és: $x = \frac{4}{3}, \ y = \frac{5}{3}, \ z = 0$

Afegim l'equació $5x - 4y = 0$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 5x - 4y - \quad = 0 \end{cases}$$

és *compatible determinat*.

c) Fem (1a) + (2a) $\rightarrow$ $3x + z = 4$

Posem aquesta nova equació, que és combinació lineal de les anteriors.

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

és *compatible indeterminat*.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 114

Per practicar

Mètode de Gauss

1 **Resol, si és possible, els sistemes següents:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ -(2a) + (1a) \\ (3a) - 2\cdot(1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (2a) + 2\cdot(3a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow y = 1;\ z = \frac{19 - 3y}{2} = 8;\ x = 9 - 2y - z = -1$$

Solució: $x = -1,\ y = 1,\ z = 8$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ -(2a) + 2\cdot(1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{7}{5} - \frac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \frac{14}{5} + \frac{2z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3z}{5} \end{array}$$

Si agafem $z = 5\lambda$, les solucions són: $x = \frac{1}{5} - 3\lambda,\ y = \frac{7}{5} - \lambda,\ z = 5\lambda$

c) $$\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2\cdot(1a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 2\cdot(3a) \\ (3a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

La segona equació és impossible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema és *incompatible.*

d) $$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - 2\cdot(2a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\}$$

$y = 3x;\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x;\ x = \lambda$

Solucions: $x = \lambda,\ y = 3\lambda,\ z = 7\lambda$

2 **Estudia i resol pel mètode de Gauss.**

a) $\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 4 \cdot (1a) \\ (3a) + 2 \cdot (1a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to$$ Sistema *compatible determinat.*

El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\} y = -\frac{1}{2};\ x = y + 3z + 2 = \frac{3}{2}$$

Solució: $x = \frac{3}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (2a) \\ (1a) \\ (3a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (1a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - 3 \cdot (2a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} x = 1 + y;\ z = -1 - y;\ y = \lambda$$

Solucions: $x = 1 + \lambda,\ y = \lambda,\ z = -1 - \lambda$

c) $$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (1a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 5 \cdot (1a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) : 3 \\ (3a) - 2 \cdot (2a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

Solució: $x = 1,\ y = 1,\ z = -1$

d) $$\left.\begin{aligned} x - y + 3z - 14t &= 0\\ 2x - 2y + 3z + t &= 0\\ 3x - 3y + 5z + 6t &= 0\end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-14&0\\2&-2&3&1&0\\3&-3&5&6&0\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)} - 2\cdot\text{(1a)}\\ \text{(3a)} - 3\cdot\text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-14&0\\0&0&-3&29&0\\0&0&-4&48&0\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)}\\ -4\cdot\text{(2a)} + 3\cdot\text{(3a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-14&0\\0&0&-3&29&0\\0&0&0&28&0\end{array}\right)$$

Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z - 14t &= 0\\ -3z + 29t &= 0\\ 28t &= 0\end{aligned}\right\} \to t = 0;\ z = 0;\ x = y;\ y = \lambda$$

Solucions: $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = 0,\ t = 0$

3 **Resol pel mètode de Gauss.**

a) $$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2z = 11}\\ \boldsymbol{x + y = 3}\\ \boldsymbol{y + z = 13}\\ \boldsymbol{x + y + z = 10}\end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z + t = 1}\\ \boldsymbol{x - y + z - t = 0}\\ \boldsymbol{x + y - z - t = -1}\\ \boldsymbol{x + y + z - t = 2}\end{cases}$$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&11\\1&1&0&3\\0&1&1&13\\1&1&1&10\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)} - \text{(1a)}\\ \text{(3a)}\\ \text{(4a)} - \text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&11\\0&1&-2&-8\\0&1&1&13\\0&1&-1&-1\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)}\\ \text{(3a)} - \text{(2a)}\\ \text{(4a)} - \text{(2a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&11\\0&1&-2&-8\\0&0&3&21\\0&0&1&7\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)}\\ \text{(3a)}\\ \text{(4a)} - (1/3)\cdot\text{(3a)}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&11\\0&1&-2&-8\\0&0&3&21\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

(3a) $\to 3z = 21 \to z = 7$

(2a) $\to y - 2z = -8 \to y - 14 = -8 \to y = 6$

(1a) $\to x + 2z = 11 \to x + 14 = 11 \to x = -3$

Solució: $x = -3,\ y = 6,\ z = 7$

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&0\\1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&2\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)} - \text{(1a)}\\ \text{(3a)} - \text{(1a)}\\ \text{(4a)} - \text{(1a)}\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&-1\\0&0&-2&-2&-2\\0&0&0&-2&1\end{array}\right)$$

(4a) $\to -2t = 1 \to t = -\dfrac{1}{2}$

(3a) $\to -2z - 2t = -2 \to -2z + 1 = -2 \to z = \dfrac{3}{2}$

(2a) $\to -2y - 2z = -1 \to -2y - 3 = -1 \to y = 1$

(1a) $\to x + y + z + t = 1 \to x + 1 + \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1 \to x = -1$

Solució: $x = -1,\ y = 1,\ z = \dfrac{3}{2},\ t = -\dfrac{1}{2}$

4 **Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:**

$$\text{a) }\left\{\begin{array}{r} x+2y=3\\ y=1\\ 2y=m-2\end{array}\right. \qquad \text{b) }\left\{\begin{array}{r} x-2y+z=3\\ y+2z=0\\ 3y+7z=m\end{array}\right.$$

$$\text{c) }\left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -2y+8z=3\\ mz=1\end{array}\right. \qquad \text{d) }\left\{\begin{array}{r} x-y=0\\ 3x+z=0\\ (m-5)\,z=0\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+2y=3\\ y=1\\ 2y=m-2\end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\0&1&1\\0&2&m-2\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-2\cdot(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\0&1&1\\0&0&m-4\end{array}\right)$$

- Si $m=4$ → Sistema *compatible determinat.*
- Si $m\neq 4$ → Sistema *incompatible.*

b) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=3\\ y+2z=0\\ 3y+7z=m\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&1&2&0\\0&3&7&m\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-3\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&1&2&0\\0&0&1&m\end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinat* per a qualsevol m.

c) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -2y+8z=3\\ mz=1\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&8&3\\0&0&m&1\end{array}\right)$$

- Si $m=0$ → Sistema *incompatible.*
- Si $m\neq 0$ → Sistema *compatible determinat.*

d) $$\left.\begin{array}{r} x-y=0\\ 3x+z=0\\ (m-5)\,z=0\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\3&0&1&0\\0&0&m-5&0\end{array}\right)$$

- Si $m=5$ → Sistema *compatible indeterminat.*
- Si $m\neq 5$ → Sistema *compatible determinat* amb *solució* $x=0,\ y=0,\ z=0$.

5 **Discuteix aquests sistemes i resol-los quan sigui possible:**

$$\text{a) }\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4\\ -x+(y/2)=-2\\ x+my=2\end{array}\right. \quad \text{b) }\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=1\\ x-2y+z=3\\ 5x-5y+2z=m\end{array}\right. \quad \text{c) }\left\{\begin{array}{l} x+2y=3\\ 2x-y=1\\ 4x+3y=m\end{array}\right. \quad \text{d) }\left\{\begin{array}{l} x-y-2z=2\\ 2x+y+3z=1\\ 3x+z=3\\ x+2y+5z=m\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y=4\\ -x+(y/2)=-2\\ x+my=2\end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&4\\-1&1/2&-2\\1&m&2\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\2\cdot(2a)+(1a)\\2\cdot(3a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&4\\0&0&0\\0&2m+1&0\end{array}\right)$$

- Si $m=-\dfrac{1}{2}$ → Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$$2x-y=4 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-4\\ x=\lambda\end{array}\right.$$

Solucions: $x=\lambda,\ y=2\lambda-4$

- Si $m\neq -\dfrac{1}{2}$ → Sistema *compatible determinat.*

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y=4\\ (2m+1)\,y=0\end{array}\right\} \begin{array}{l} y=0\\ x=2\end{array}$$

Solució: $x=2,\ y=0$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (2a) \\ (1a) \\ (3a) \end{array} \blacktriangleright$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 5 \cdot (1a) \end{array} \blacktriangleright$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \blacktriangleright$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10$ → Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

  $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 3 \\ \\ 5y - 3z = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-5 + 3z}{5} = -1 + \dfrac{3z}{5} \\ \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \dfrac{6z}{5} - z = 1 + \dfrac{z}{5} \end{array}$$

  Fem $z = 5\lambda$

  Solucions: $x = 1 + \lambda,\ y = -1 + 3\lambda,\ z = 5\lambda$

- Si $m \neq 10$ → Sistema *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 4 \cdot (1a) \end{array} \blacktriangleright$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) : (-5) \\ (3a) - (2a) \end{array} \blacktriangleright$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$

- Si $m = 7$ → Sistema *compatible determinat*.

  $$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \ x = 3 - 2y = 1$$

  Solució: $x = 1,\ y = 1$

- Si $m \neq 7$ → Sistema *incompatible*

d) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 3 \cdot (1a) \\ (4a) - (1a) \end{array} \blacktriangleright$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \\ (4a) - (2a) \end{array} \blacktriangleright$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$

- Si $m = -1$ → Sistema *compatible indeterminat*.

  $$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3 - 7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

  Fem $z = 3\lambda$.

  Solucions: $x = 1 - \lambda,\ y = -1 - 7\lambda,\ z = 3\lambda$

- Si $m \neq -1$ → Sistema *incompatible*.

Teorema de Rouché. Regla de Cramer

6 Aplica el teorema de Rouché per esbrinar si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

$$\textbf{a) }\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases} \qquad \textbf{b) }\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \textbf{c) }\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\textbf{d) }\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{cases} \qquad \textbf{e) }\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \textbf{f) }\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$, tenim que: $ran(A) = ran(A') = 2 = nre.\ d'incògnites.$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \text{Sumant} \quad 5x = 5 \rightarrow x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\} \quad \textit{Solució: } x = 1,\ y = -5$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Tenim que $|A| = 0$ i que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A) = 2$

Per tant, el sistema és *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{array}}_{A} & \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenim que $ran(A) = 2$.

A mé, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Per tant, $ran(A') = 2 = ran(A) < nre.\ d'incògnites.$

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - z = 3 - 3y \\ -x + z = 5y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Sumant} \quad x = 3 + 2y \\ z = 5y + x = 5y + 3 + 2y = 3 + 7t \end{array}$$

Solucions: $x = 3 + 2\lambda,\ y = \lambda,\ z = 3 + 7\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=2\\ 2x+y+3z=1\\ 3x\qquad +z=5\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-1&-2\\2&1&3\\3&0&1\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}2\\1\\5\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=-3\neq 0$, tenim que $ran(A)=2$.

Com que $\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\3&0&3\end{vmatrix}=6\neq 0\ \rightarrow\ ran(A')=3\neq ran(A)=2$

Per tant, el sistema és *incompatible*.

e) $$\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=2\\ x-2y-7z=0\\ y+\ z=-1\\ 2x+3y\qquad =0\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\1&-2&-7\\0&1&1\\2&3&0\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}2\\0\\-1\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&-7\\0&1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$ i $|A'|=0$, tenim que $ran(A)=ran(A')=3=$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible determinat*.

Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació. Apliquem la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\0&-2&-7\\-1&1&1\end{vmatrix}}{5}=\frac{15}{5}=3\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&-7\\0&-1&1\end{vmatrix}}{5}=\frac{-10}{5}=-2\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-2&0\\0&1&-1\end{vmatrix}}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Solució: $x=3,\ y=-2,\ z=1$

f) $$\left.\begin{array}{r} x+3y+\ z=-1\\ x-\ y-\ z=-1\\ 2x+\ y+3z=5\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&3&1\\1&-1&-1\\2&1&3\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}-1\\-1\\5\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $|A|=-14\neq 0$, tenim que $ran(A)=ran(A')=3=$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible determinat*.

El resolem per mitjà de la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1&3&1\\-1&-1&-1\\5&1&3\end{vmatrix}}{-14}=\frac{0}{-14}=0\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-1&-1\\2&5&3\end{vmatrix}}{-14}=\frac{14}{-14}=-1\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\1&-1&-1\\2&1&5\end{vmatrix}}{-14}=\frac{-28}{-14}=2$$

Solució: $x=0,\ y=-1,\ z=2$

7 Resol els sistemes següents aplicant-los la regla de Cramer:

a) $\begin{cases}8x+14y=2\\3x-\ \ 5y=11\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y-z+t=1\\x-y\qquad\ -t=2\\\qquad\quad\ z-t=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}3x-\ \ y\qquad\ \ =2\\2x+\ \ y+\ \ z=0\\\qquad 3y+2z=-1\end{cases}$

d) $\begin{cases}x-y-z+t=4\\x+y+z-t=2\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l}8x+14y=2\\3x-\ \ 5y=11\end{array}\right\}\quad A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}8&14\\3&-5\end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\begin{matrix}2\\11\end{matrix}\right)\to |A|=-82\neq 0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&14\\11&-5\end{vmatrix}}{-82}=\frac{-164}{-82}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}8&2\\3&11\end{vmatrix}}{-82}=\frac{82}{-82}=-1$$

Solució: $x=2,\ y=-1$

b) $$\left.\begin{array}{l}x+y-z+t=1\\x-y\qquad -t=2\\\qquad\quad z-t=0\end{array}\right\}\quad A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&-1&1\\1&-1&0&-1\\0&0&1&-1\end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}\right)\to \text{Tenim que }\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1-t&1&-1\\2+t&-1&0\\t&0&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-3-t}{-2}=\frac{3+t}{2};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1-t&-1\\1&2+t&0\\0&t&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{1+t}{-2}=\frac{-1-t}{2};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1-t\\1&-1&2+t\\0&0&t\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2t}{-2}=t$$

Solucions: $x=\dfrac{3+\lambda}{2},\ y=\dfrac{-1-\lambda}{2},\ z=\lambda,\ t=\lambda$

c) $$\left.\begin{array}{l}3x-\ \ y\qquad\ =2\\2x+\ \ y+\ \ z=0\\\qquad 3y+2z=-1\end{array}\right\}\quad A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}3&-1&0\\2&1&1\\0&3&2\end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\begin{matrix}2\\0\\-1\end{matrix}\right)\to |A|=1\neq 0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\-1&3&2\end{vmatrix}}{1}=\frac{-1}{1}=-1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3&2&0\\2&0&1\\0&-1&2\end{vmatrix}}{1}=\frac{-5}{1}=-5;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&1&0\\0&3&-1\end{vmatrix}}{1}=\frac{7}{1}=7$$

Solució: $x=-1,\ y=-5,\ z=7$

d) $$\left.\begin{array}{l}x-y-z+t=4\\x+y+z-t=2\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x-y=4+z-t\\x+y=2-z+t\end{array}\right\}\quad \begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4+z-t&-1\\2-z+t&1\end{vmatrix}}{2}=\frac{6}{2}=3;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&4+z-t\\1&2-z+t\end{vmatrix}}{2}=\frac{-2-2z+2t}{2}=-1-z+t$$

Solucions: $x=3,\ y=-1-\lambda+\mu,\ z=\lambda,\ t=\mu$

8 **Estudia aquests sistemes i resol-los quan sigui possible:**

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right.\right)$$

Com que $|A| = -6 \neq 0$, tenim que: $ran(A) = ran(A') = 3 = nre.\ d'incògnites$.

El sistema és *compatible determinat*. El resolem per mitjà de la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solució: $x = \frac{-1}{3}, \ y = \frac{2}{3}, \ z = \frac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -2 \end{array}\right.\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ i $|A| = 0$, tenim que $ran(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Per tant, $ran(A') = 3 \neq ran(A) = 2$.

Per tant, el sistema és *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x - y \quad = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right.\right)$$

Com que $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenim que:

$ran(A) = ran(A') = 2 < nre.\ d'incògnites$. El sistema és *compatible indeterminat*.

Per trobar les solucions, podem prescindir de la 1a equació i resoldre'l en funció de y:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y \quad = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -1 - y \\ z = 1 - y \end{array}\right\}$$

Solucions: $x = -1 - \lambda, \ y = \lambda, \ z = 1 - \lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 11 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Tenim que $|A'| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Per tant, $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solució: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

9 Resol aquests sistemes homogenis:

a) $$\left\{\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 12 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, llavors, $ran(A) = 2$.

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & z - 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Solucions: $x = \dfrac{\lambda}{3},\ y = \dfrac{2\lambda}{3},\ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, llavors $ran(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites*.

El sistema només té la solució trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Discussió de sistemes per mitjà de determinants

10 **Hi ha algun valor de a per al qual els sistemes següents tinguin infinites solucions?**

a) $\begin{cases} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$, amb $A=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}$

$|A| = 9a + 27 = 0 \to a = -3$

- Si $a=-3$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ i $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, llavors $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

El sistema és *incompatible*.

- Si $a=-3 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema és *compatible determinat*.

Per tant, *no* existeix cap valor de a per al qual el sistema tingui infinites solucions.

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$, amb $A=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = -a^2+3a-2=0 \to a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3\pm 1}{-2} \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

- Si $a=1$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La 1a i la 3a equació es contradiuen; per tant, el sistema és *incompatible*.

- Si $a=2$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right),\quad A=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

les columnes 1a, 3a i 4a són iguals, i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

per tant, $ran(A) = ran(A') = 2$. El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema és *compatible determinat*.

Per tant, el sistema té infinites solucions per a $a = 2$.

Pàgina 115

11 Discuteix els sistemes homogenis següents en funció del paràmetre a:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$$

Com que és homogeni, sabem que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \rightarrow a = -5$

- Si $a = -5 \rightarrow$ Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq -5 \rightarrow$ Només té la solució trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Com que és homogeni, sabem que $ran(A) = ran(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} \nearrow a = -3 \\ \searrow a = 2 \end{array}$$

- Si $a = -3$ o $a = 2 \rightarrow$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq -3$ i $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$. Només existeix la solució trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

c) $$\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Com que és homogeni, sabem que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -2a - 5 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-5}{2}$

- Si $a = -\dfrac{5}{2} \rightarrow$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$. Només existeix la solució trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

d) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3a - 46 = 0 \rightarrow a = \frac{46}{3}$$

- Si $a = \dfrac{46}{3} \rightarrow$ Com que $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq \dfrac{46}{3} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$. Només existeix la solució trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

12 **Discuteix aquests sistemes segons els valors del paràmetre *m*:**

a) $\begin{cases} mx+y+z=4\\ x+y+z=m\\ x-y+mz=2\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=m-1\\ 2x+y+mz=m\\ x+my+z=1\end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y+3z=0\\ x+my+z=0\\ 2x+3y+4z=2\end{cases}$

d) $\begin{cases} x+my+z=4\\ x+3y+z=5\\ mx+y+z=4\end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+2z=3\\ 3x+y+z=-1\\ 2y-z=-2\\ x-y+mz=-5\end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -2x+y+z=1\\ x-2y+z=m\\ x+y-2z=0\\ x-y-z=m\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} mx+y+z=4\\ x+y+z=m\\ x-y+mz=2\end{array}\right\}\ A'=\left(\underbrace{\begin{matrix} m & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & m\end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\begin{matrix}4\\ m\\ 2\end{matrix}\right)$$

$$|A| = m^2-1=0 < \begin{array}{l} m=1\\ m=-1\end{array}$$

- Si $m=1$, queda:

  $$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4\\ 1&1&1&1\\ 1&-1&1&2\end{array}\right)$$ Contradicció → Sistema *incompatible*.

- Si $m=-1$, queda:

  $$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -1&1&1&4\\ 1&1&1&-1\\ 1&-1&-1&2\end{array}\right)$$ Contradicció → Sistema *incompatible*.

- Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *nre. d'incògnites.*

  El sistema és *compatible determinat.*

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=m-1\\ 2x+y+mz=m\\ x+my+z=1\end{array}\right\}\ A'=\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & m\\ 1 & m & 1\end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\begin{matrix}m-1\\ m\\ 1\end{matrix}\right)$$

$$|A| = -m^2+3m-2=0 \rightarrow m=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2} < \begin{array}{l} m=1\\ m=2\end{array}$$

- Si $m=1$, queda:

  $$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 2&1&1&1\\ 1&1&1&1\end{array}\right)$$ Contradicció → Sistema *incompatible*.

- Si $m=2$, queda:

  $$A'=\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\ 2\\ 1\end{matrix}\right).$$ Les columnes 1a, 3a i 4a són iguals.

  Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1 \neq 0$ → *ran* (A') = *ran* (A) = 2 < *nre. d'incògnites.*

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- Si $m \neq 1$ i $m \neq 2$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *nre. d'incògnites.*

  El sistema és *compatible determinat.*

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right.\right)$$

$|A| = -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, llavors: $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

El sistema és *incompatible*.

- Si $m \neq 1$, queda: $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible determinat*.

d) $$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 4 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow m = 3 \\ \searrow m = 1 \end{array}$$

- Si $m = 3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$ Contradicció → Sistema *incompatible*.

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$ La 1a i la 3a fila són iguals.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Per tant, $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $m \neq 3$ i $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible determinat*.

e) $$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{|l|}\hline \text{FILES} \\ \hline \text{(1a)} \\ \text{(2a)} - 3 \cdot \text{(1a)} \\ \text{(3a)} \\ \text{(4a)} - \text{(1a)} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{array}{|l|}\hline \text{FILES} \\ \hline \text{(1a)} \\ \text{(2a)} - 2 \cdot \text{(1a)} \\ \text{(3a)} + \text{(1a)} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - m + 7) = 18(-m-2) = 0 \rightarrow m = -2$$

A més, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$

- Si $m = -2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible indeterminat*.
- Si $m \neq -2 \rightarrow ran(A') = 4 \neq ran(A) = 3$. El sistema és *incompatible*.

f) $$\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ m \\ 0 \\ m \end{matrix} \end{array}\right)$$

$|A'| = 3m + 3 = 0 \rightarrow m = -1$

Eliminant la 3a fila de A, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

- Si $m = -1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

  Llavors: $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*.

  El sistema és *compatible determinat*.
- Si $m \neq -1$, queda:

  $3 = ran(A) < ran(A') = 4 \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

13 **Estudia els sistemes d'equacions següents. Resol-los quan siguin compatibles; després, interpreta geomètricament les solucions obtingudes:**

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$

a) La matriu associada al sistema, permutant les dues primeres files entre si, és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$$

Fent servir el mètode de Gauss obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.
- Si $m = 10 \rightarrow$ El sistema és *compatible indeterminat*.

  Agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre.

  Solucions: $x = \frac{1}{5}\lambda + 1,\ y = \frac{3}{5}\lambda - 1,\ z = \lambda$

Interpretació geomètrica:

- Si $m \neq 10$, tenim tres plans que es tallen dos a dos.
- Si $m = 10$, tenim tres plans que es tallen en una recta.

b) $\left.\begin{array}{l} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat*.

  El resolem fent servir la regla de Cramer:

  $$x = \frac{-a + a^2 + 1}{a - 1},\quad y = \frac{1}{a + 1},\quad z = \frac{2}{a^2 - 1}$$

- Si $a = -1$:

  $$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Afegim la 4a columna:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A') = 3$$

  Per tant, $ran(A) \neq ran(A') \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

- Si $a = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la 4a columna i la 2a fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A') = 3$$

Per tant, $ran(A) \neq ran(A') \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

Interpretació geomètrica:

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 1$, tenim tres plans que es tallen en un punt.
- Si $a = -1$, el primer i el tercer pla són paral·lels.
- Si $a = 1$, el primer i el segon pla són paral·lels.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m - 1$

- Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

El resolem fent servir la regla de Cramer i obtenim: $x = 1,\ y = 1,\ z = -1$.

- Si $m = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la 4a columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2$$

Per tant, $ran(A) = ran(A') = 2 \rightarrow$ El sistema és *compatible indeterminat.*

Agafem les dues primeres equacions i passem y al segon membre com a paràmetre.

Solucions: $x = -\lambda + 2,\ y = \lambda,\ z = -1$

Interpretació geomètrica:

- Si $m \neq 1$, tenim tres plans que es tallen en un punt.
- Si $m = 1$, els tres plans es tallen en una recta.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = 2,\ a = 1$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

Fent servir la regla de Cramer:

$$x = \frac{a-1}{a-2},\ y = \frac{a-1}{a-2},\ z = -\frac{1}{a-2}$$

- Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+z=1 \\ y=0 \\ x+z=1 \end{array}\right.$$

Les equacions 1a i 3a representen el mateix pla.

$$\left\{\begin{array}{l} x + \quad z = 1 \\ \quad y \quad = 0 \end{array}\right.$$

Agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre.

Solucions: $x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$

- Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + \qquad z = 1 \\ \qquad y + \ z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = 2$$

Afegim la 4a columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A') = 3$$

En aquest cas el sistema és *incompatible*.

Interpretació geomètrica

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$, tenim tres plans que es tallen en un punt.
- Si $a = 1$, dos plans són coincidents i es tallen en una recta amb el tercer.
- Si $a = 2$, els plans es tallen dos a dos.

Forma matricial d'un sistema

14 Expressa en forma matricial i resol fent servir la matriu inversa:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y \qquad = 2 \\ \quad y + 3z = 0 \\ 2x + y + \ z = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + \ y - \ z = 3 \\ 2x + \ y + \ z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x + y \qquad = -1 \\ \quad y + z = -2 \\ x \qquad + z = 3 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + \ z = 3 \\ \quad 3y + \ z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{l} 2x + y \qquad = 2 \\ \quad y + 3z = 0 \\ 2x + y + \ z = 2 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \ . \ X = B$$

$|A| = 2 \neq 0 \ \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$A \cdot X = B \ \rightarrow \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \ \rightarrow \ X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tant: $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=3\\ 2x+y+z=-2\\ x-2y-3z=1\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\1&-2&-3\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}-1&-7&-5\\-5&-2&-3\\2&3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&7&-5\\5&-2&3\\2&-3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Per tant:

$$A\cdot X=B\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11\\22\\-22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Per tant: $x=-1,\ y=2,\ z=-2$

c) $$\left.\begin{array}{l} x+y\qquad=-1\\ \quad\ y+z=-2\\ x\qquad+z=3\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Per tant:

$$A\cdot X=B\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Per tant: $x=2,\ y=-3,\ z=1$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3\\ 3y+z=4\\ x+2y+2z=4\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 3 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}4&-1&-3\\2&1&0\\-1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&1&0\\-1&-1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Per tant:

$$A\cdot X=B\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Per tant: $x=0,\ y=1,\ z=1$

15 **Expressa en la forma habitual aquests sistemes i resol-los, si és possible.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y + 2x &= 4 \\ x - \ y - \ z &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + 3y &= 4 - 2\lambda \\ x - \ y &= \lambda \end{aligned}\right\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-2\lambda & 3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4-\lambda}{-4} = \frac{4+\lambda}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-2\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4+3\lambda}{-4} = \frac{4-3\lambda}{4}$$

Solucions: $x = \dfrac{4+\lambda}{4}, \ y = \dfrac{4-3\lambda}{4}, \ z = 1$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x - y &= 0 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$ Comprovem si té solució:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Com que $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema és *incompatible*.

16 **Escriu totes les equacions lineals del sistema $AX = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, i resol-lo.**

$$AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicant les matrius del primer terme:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 4z &= 11 \\ 3x + y \qquad &= \ 5 \\ -x + \qquad z &= \ 2 \end{aligned}\right\}$$

Resolem el sistema:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}}_{B}\right)$$

$|A| = 8$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Solució: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

17 **Resol aquest sistema:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Calculem A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; és a dir: $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$

Per resol

18 **Un forn empra tres ingredients A, B i C per elaborar tres tipus de pastís. El pastís P_1 es fa amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C. El pastís P_2 duu 4 unitats de A, 1 de B i 1 de C. I el P_3 necessita 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. Els preus de venda al públic són 7,50 € el P_1; 6,50 € el P_2 i 7 € el P_3. Sabent que el benefici que s'obté amb la venda de cada pastís és de 2 €, calcula quant li costa al forn cada unitat de A, B i C.**

Anomenem $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matriu de preus per unitat de A, B i C, respectivament.

La matriu que indica els ingredients en relació amb el tipus de pastís és:

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ P_1 & 1 & 2 & 2 \\ P_2 & 4 & 1 & 1 \\ P_3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

La despesa per a cada tipus de pastís és:

$$\begin{pmatrix} 7,50 \\ 6,50 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,50 \\ 4,50 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Podem calcular la solució per mitjà de la resolució del sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,50 \\ 4,50 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solució és: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 1 \\ 1,50 \end{pmatrix}$$

La unitat A costa 0,50 €, la unitat B costa 1 € i la unitat C costa 1,50 €.

19 **a) Troba un nombre de tres xifres tal que la suma de les centenes i les unitats amb el doble de les desenes és 23; la diferència entre el doble de les centenes i la suma de les desenes més les unitats és 9, i la mitjana de les centenes i les desenes més el doble de les unitats és 15.**

b) És possible trobar un nombre de tres xifres si canviem la tercera condició per «el triple de les centenes més les desenes és 25»?

a) El nombre buscat és xyz.

El sistema que expressa les condicions del problema és:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=23\\ 2x-(y+z)=9\\ \dfrac{x+y}{2}+2z=15 \end{array}\right\} \rightarrow\; x=9,\;\; y=5,\;\; z=4$$

El nombre és 954.

b) El sistema resultant és:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=23\\ 2x-(y+z)=9\\ 3x+y\qquad=25 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema no té solució; per tant, no hi ha cap nombre que verifiqui aquestes condicions.

20 **Un automòbil puja les costes a 54 km/h, les baixa a 90 km/h i en pla va a 80 km/h. Per anar de A a B tarda 2 hores i 30 minuts, i per tornar de B a A, 2 hores i 45 minuts. Quina és la longitud de camí pla entre A i B si sabem que la distància entre A i B és de 192 km?**

Anomenem x la longitud de camí pla entre A i B, y la longitud de camí costa amunt anant de A a B i z la longitud de camí costa avall anant de A a B.

Tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=192\text{ km}\\ \dfrac{x}{80}+\dfrac{y}{54}+\dfrac{z}{90}=2{,}5\text{ horas}\\ \dfrac{x}{80}+\dfrac{y}{90}+\dfrac{z}{54}=2{,}75\text{ horas} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+\quad y+\quad z=192\\ 27x+40y+24z=5\,400\\ 27x+24y+40z=5\,940 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192\\ 27 & 40 & 24 & 5\,400\\ 27 & 24 & 40 & 5\,940 \end{array}\right) \begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)}-27\cdot\text{(1a)}\\ \text{(3a)}-27\cdot\text{(1a)}\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192\\ 0 & 13 & -3 & 216\\ 0 & -3 & 13 & 756 \end{array}\right) \begin{array}{l}\text{(1a)}\\ \text{(2a)}\\ \text{(3a)}\cdot 3+\text{(2a)}\cdot 13\end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192\\ 0 & 13 & -3 & 216\\ 0 & 160 & 0 & 5\,076 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x+\quad y+z=\;\;192\\ 13y-3z=\;\;216\\ 160y\qquad=5\,076 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=31{,}725\text{ km}\\ z=65{,}475\text{ km}\\ x=94{,}800\text{ km} \end{array}$$

Solució: La longitud de camí pla entre A i B és de 94,8 km.

21 **Una persona ha obtingut 6 000 € de benefici en invertir un total de 60 000 € en tres empreses: A, B i C. La suma dels diners invertits en A i B va ser m vegades l'invertit en C, i els beneficis van ser del 5 % en A, del 10 % en B i del 20 % en C.**

a) Planteja un sistema d'equacions per esbrinar la quantitat invertida a cada empresa.

b) Prova que si $m > 0$, el sistema és compatible determinat.

c) Troba la solució per a $m = 5$.

a) Siguin x, y, z les quantitats invertides en A, B i C, respectivament. Plantegem el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+\quad y+\quad z=60\,000\\ x+\quad y\quad =\quad mz\\ 0,05x+0,1y+0,2z=\ \ 6\,000\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r} x+\quad y+\quad z=60\,000\\ x+\quad y-\quad mz=\quad 0\\ 0,05x+0,1y+0,2z=\ \ 6\,000\end{array}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000\\ 1 & 1 & -m & 0\\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 6\,000\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-0,05\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000\\ 0 & 0 & -m-1 & -60\,000\\ 0 & 0,05 & 0,15 & 3\,000\end{array}\right)$$

- Si $m = -1$: El sistema és *incompatible.*
- Si $m \neq -1$: El sistema és *compatible determinat.*

Per tant, si $m > 0$, el sistema és *compatible determinat.*

c) $m = 5$, *solució:* $x = 20\,000$ €, $y = 30\,000$ €, $z = 10\,000$ €.

Pàgina 116

22 **Tres comerciants inverteixen en la compra d'ordinadors dels models A, B i C de la manera següent. El primer inverteix 50 000 € en els de tipus A, 25 000 € en els de tipus B i 25 000 € en els de tipus C. El segon dedica 12 500 € als de tipus A, 25 000 € als de tipus B i 12 500 € als de tipus C. El tercer, 10 000 €, 10 000 € i 20 000 €, respectivament, en els models A, B i C. Després de vendre'ls tots, la rendibilitat que obté el primer és del 15 %, el segon del 12 % i el tercer del 10 %. Determina la rendibilitat de cada un dels models venuts.**

Anomenem $x = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ la matriu de rendibilitat per model: A, B i C, respectivament.

La matriu que indica la inversió en relació amb el comerciant és:

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C}\\ \hline 1\text{r} & 50\,000 & 25\,000 & 25\,000\\ 2\text{n} & 12\,500 & 25\,000 & 12\,500\\ 3\text{r} & 10\,000 & 10\,000 & 20\,000\end{array}$$

La rendibilitat per cada comerciant és:

$$\begin{pmatrix} 0,15\cdot 100\,000\\ 0,12\cdot 50\,000\\ 0,1\cdot 40\,000\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\,000\\ 6\,000\\ 4\,000\end{pmatrix}$$

Podem calcular la rendibilitat per model per mitjà de la resolució del sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 50\,000 & 25\,000 & 25\,000\\ 12\,500 & 25\,000 & 12\,500\\ 10\,000 & 10\,000 & 20\,000\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\,000\\ 6\,000\\ 4\,000\end{pmatrix}$$

la solució del qual és:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,23\\ 0,11\\ 0,03\end{pmatrix}$$

La rendibilitat del model A és del 23 %, la rendibilitat del model B és del 11 %, i la rendibilitat del model C és del 3 %.

23 **Una caixa forta conté 95 bitllets de 10 €, 20 € i m €. Se sap que emmagatzema 2 000 € i que el nombre de bitllets de 10 € és el doble que el nombre de bitllets de 20 €.**

a) Planteja un sistema d'equacions que reflecteixi les condicions del problema. Prova que si $m \in [5, 50, 100]$, el sistema és compatible determinat.

b) Pot haver-hi bitllets de 5 o 100 euros a la caixa?

c) Resol el sistema per a $m = 50$.

a) Anomenem x el nombre de bitllets de 10 €, y el nombre de bitllets de 20 € i z el nombre de bitllets de m €.

El sistema que expressa les condicions del problema és:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + mz = 2\,000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + mz = 2\,000 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right.$$

Per a $m = 5$, la matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El seu determinant resulta: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -25 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$

Per tant, el sistema és *compatible determinat*.

Per a $m = 50$, la matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 110 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

Per tant, el sistema és *compatible determinat*.

Per a $m = 500$, la matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 500 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 500 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\,460 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

Per tant, el sistema és *compatible determinat*.

b) Per a $m = 5$, el sistema és:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 5z = 2\,000 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 122,\ y = 61,\ z = -88$$

La solució no és possible perquè el nombre de bitllets no pot ser negatiu.

Per a $m = 100$, la matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 100 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 100 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 260 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

Per tant, el sistema és *compatible determinat.*

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + \quad z = \quad 95 \\ 10x + 20y + 100z = 2\,000 \\ x - \quad 2y \qquad = \qquad 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{750}{13},\ y = \frac{375}{13},\ z = \frac{110}{13}$$

La solució no és possible perquè el nombre de bitllets no pot ser un nombre fraccionari.

Per a qualsevol dels dos casos el sistema té solució, però no són solucions reals.

c) Per a $m = 50$, el sistema és:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + \quad z = \quad 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2\,000 \\ x - \quad 2y \qquad = \qquad 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 50,\ y = 25,\ z = 20$$

Hi ha 50 bitllets de 10 €, 25 bitllets de 20 € i 20 bitllets de 50 €.

24 Discuteix i resol els sistemes següents:

a) $\left\{\begin{array}{l} \lambda x \qquad + 2z = 0 \\ \qquad \lambda y - \quad z = \lambda \\ x + 3y + \quad z = 5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ \qquad mx - \qquad\quad y + z = 2 \\ \qquad\ x + \qquad\ my - z = 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} \lambda x + 3y + \quad z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + \quad y - \quad z = 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} mx + \quad y + \quad\ z = 2 \\ 2x + my + m^2 z = 1 \\ 2x + \quad y + \quad\ z = 2 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} \lambda x + \qquad 2z = 0 \\ \lambda y - \quad z = \lambda \\ x + 3y + \quad z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1,\ \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq -1$ i $\lambda \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

Fent servir la regla de Cramer:

$$x = -\frac{4}{\lambda+1},\ y = \frac{\lambda+3}{\lambda+1},\ z = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

Si $\lambda = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} 2z = 0 \\ - \quad z = 0 \\ x + 3y + \quad z = 5 \end{array}\right\}$$

Les dues primeres equacions són equivalents.

$$\left.\begin{array}{r} -z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\}$$

Sistema *compatible indeterminat.*

Passem y al segon membre com a paràmetre.

Solucions: $x = -3\lambda + 5,\ y = \lambda,\ z = 0$

Si $\lambda = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} -x + \quad\quad 2z = 0 \\ -\ y - \ z = -1 \\ x + 3y + \ z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la quarta columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

b) $$\left.\begin{array}{r} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - \quad\quad y + z = 2 \\ x + \quad\quad my - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = 0 \rightarrow m = 0,\ m = -1$$

Si $m \neq 0$ i $m \neq -1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

Fent servir la regla de Cramer: $x = \dfrac{2m+1}{m^2+m},\ y = \dfrac{1}{m},\ z = \dfrac{2m+1}{m^2+m}$

Si $m = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ -y + z = 2 \\ x - \quad z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) < 3, \text{ però } ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

Si $m = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} x - \quad z = 3 \\ -x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) < 3, \text{ però } ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

c) $$\left.\begin{array}{r} \lambda x + 3y + \ z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + \ y - \ z = 1 \end{array}\right\} \text{ Estudiem el determinant de la matriu de coeficients:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 2,\ \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq -1$ i $\lambda \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

Fent servir la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0$$

Si $\lambda = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + \ z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + \ y - \ z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la quarta columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat}.$$

Agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre.

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 3y + \ z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

Solucions: $x = 4\mu + 1,\ y = -3\mu,\ z = \mu$

Si $\lambda = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y+z=-1 \\ x-\ y-z=\ \ 1 \\ x+\ y-z=\ \ 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la quarta columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre.

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y+z=-1 \\ x-\ y-z=\ \ 1 \end{array}\right\}$$

Solucions: $x = \mu + 1,\ y = 0,\ z = \mu$

d) $$\left.\begin{array}{r} mx+\ y+\ \ \ z=2 \\ 2x+my+m^2z=1 \\ 2x+\ y+\ \ \ z=2 \end{array}\right\}$$

La matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m & m^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ amb determinant } \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m & m^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 2m = 0 \left< \begin{array}{l} m=1 \\ m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$$

Si $m \neq 0,\ m \neq 1$ i $m \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$

Per tant, el sistema és *compatible determinat*.

Fem servir la regla de Cramer:

Solució: $x = 0,\ y = -\dfrac{2m^2-1}{m-m^2},\ z = \dfrac{2m-1}{m-m^2}$

Per a $m = 0$, la matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim l'última columna.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

Per a $m = 1$, la matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim l'última columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

Per a $m = 2$, la matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim l'última columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Agafem les dues primeres files i passem z al segon membre com a paràmetre.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\}$$

Solucions: $x = \lambda + \frac{3}{2},\ y = -3\lambda - 1,\ z = \lambda$

25 **Discuteix els sistemes següents en funció del paràmetre i resol-los quan siguin compatibles:**

a) $\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{array}\right\}$ aquest sistema és *compatible* perquè és homogeni.

La matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és: $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = -2a^3 - 2a = 0 \rightarrow a = 0$

Si $a \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

Solució: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Si $a = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ -y = 0 \\ -x = 0 \end{array}\right\}$$

Les dues primeres equacions són equivalents $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat.*

El sistema queda:

$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ -x = 0 \end{array}\right\}$ *Solucions:* $x = 0,\ y = 0,\ z = \lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right\}$

La matriu de coeficients és:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = 2,\ m = 1$$

Si $m \neq 1$ i $m \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

Fent servir la regla de Cramer: $x = 0,\ y = -\dfrac{1}{m-1},\ z = \dfrac{1}{m-1}$

Si $m = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim l'última columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

Si $m = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim l'última columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Solucions: } x = \frac{1-\lambda}{5},\ y = -\frac{3\lambda - 2}{5},\ z = \lambda$$

c) $$\left.\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

La matriu ampliada és:

$$\begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40k$$

Si $k \neq 0 \rightarrow ran(A') = 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*

Si $k = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x \quad = 0 \\ 5x \quad = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\} \text{ les equacions 2a i 3a són equivalents, ens queda: } \left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x \quad = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

El determinant de la matriu ampliada és:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Com que $ran(A) < 3$, el sistema és *incompatible.*

Aquest sistema no té solució per a cap valor de k.

d) $$\left.\begin{array}{rl} x+3y+z=5 \\ mx\quad\;\;+2z=0 \\ my-z=m \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

La matriu ampliada és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7m - m^2 = 0 \rightarrow m = 7,\; m = 0$$

Si $m \neq 0$ i $m \neq 7 \rightarrow ran(A') = 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Si $m = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \\ -z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

Les equacions 2a i 3a són equivalents, per tant el sistema és equivalent a:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

El determinant de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible determinat.}$$

Fent servir la regla de Cramer: $x = \frac{5}{4},\; y = \frac{5}{4},\; z = 0$

Si $m = 7$:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ 7x+\quad\;\;2z=0 \\ 7y-z=7 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

El menor format pels coeficients de les tres primeres equacions és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible determinat.}$$

Agafem les tres primeres equacions:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ 7x+\quad\;\;2z=0 \\ 7y-z=7 \end{array}\right\}$$

Fent servir la regla de Cramer: $x = -\frac{1}{2},\; y = \frac{5}{4},\; z = \frac{7}{4}$

26 Sigui la matriu: $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Determina per a quins valors de m la matriu és singular.

b) Resol, si és possible, el sistema següent per a $m = 1$ i $m = -1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m+2 & 2 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

A és singular per a $m = -1$ i $m = 1$.

b) Si $m = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ -2x + y + 2z = 8 \\ -2x + y = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la quarta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

Si $m = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = 8 \end{array}\right\} \text{ les equacions 2a i 3a són equivalents.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la quarta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Agafem les dues primeres equacions i passem x al segon membre com a paràmetre.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 3y + 2z = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Solucions: } x = \lambda,\ y = 2,\ z = 1$$

27 **Sigui el sistema d'equacions:** $\begin{cases} 2ax + \ \ by + \ \ \ z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - \ \ 2y + \ \ cz = -4b \end{cases}$

a) Justifica que per als valors dels paràmetres $a = 0,\ b = 1,\ c = 2$ el sistema és compatible.

b) Determina els valors dels paràmetres a, b i c per als quals es verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ és solució del sistema.

c) Justifica si aquesta solució és única o no ho és.

a) $$\left.\begin{array}{r} 2ax + \ \ by + \ \ \ z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - \ \ 2y + \ \ cz = -4b \end{array}\right\}$$

Per a $a = 0,\ b = 1,\ c = 2,$ el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} y + \ z = \ \ 6 \\ 3x - 2y - 4z = \ \ 0 \\ 2y + 2z = -4 \end{array}\right\}$$

El determinant de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 48 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Com que $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema és *incompatible.*

b) Substituïm les incògnites per les dades i resolem les equacions. Obtenim el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 2b + \ 3 = \ \ 3c \\ 3 - 4b - 6c = \ \ \ a \\ 5a - \ \ 4 + 3c = -4b \end{array}\right\}$$

Les noves incògnites són $a,\ b,\ c.$

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = \ \ 4 \end{array}\right\}$$

El determinant de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -78 \rightarrow ran(A) = 3 \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible determinat.}$$

Solució: $a = 1,\ b = -1,\ c = 1$

c) Com que el sistema és compatible determinat, la solució és única.

28 **a) Demostra que el sistema d'equacions següent té sempre solució per a qualsevol valor de α i β:**

$$\begin{cases} x - y + (\alpha + \beta) z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

b) És possible que tingui infinites solucions per a algun valor de α i β?

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha + \beta) z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha + \beta & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & -1 & \alpha - 3\beta \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de α i β.

b) El determinant de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A) = 3 \rightarrow \text{El sistema serà sempre } \textit{compatible determinat};$$

per tant, la solució sempre serà única. No pot haver infinites solucions.

Qüestions teòriques

29 **Cert o fals? Justifica les respostes i posa exemples.**

a) A un sistema amb dues equacions i dues incògnites que és compatible indeterminat, podem afegir-li una equació que el transformi en incompatible.

b) Si S i S' són dos sistemes equivalents amb solució única que tenen iguals els termes independents, llavors els coeficients de les incògnites també són iguals.

c) Per al valor $m = 1$, el sistema $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}$ té infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

d) El sistema anterior és incompatible si $m = -2$.

e) El sistema $\begin{cases} ax + y + z = a + 2 \\ 2x - ay + z = 2 \\ x - y + az = a \end{cases}$ sempre té solució per a qualsevol valor de a.

f) El sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ és compatible indeterminat per a qualsevol valor de a i b.

g) Si el determinant de la matriu ampliada d'un sistema de quatre equacions i tres incògnites és diferent de zero, el sistema té solució única.

h) Si el rang de la matriu de coeficients d'un sistema és menor que el nombre d'incògnites, el sistema és compatible indeterminat.

a) Cert.

Tenim el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2yz = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Compatible indeterminat.}$$

Li afegim l'equació: $x - y = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2yz = 4 \\ x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Incompatible.}$$

b) Fals. Els sistemes següents són equivalents, tenen iguals els termes independents i no tenen els mateixos coeficients en les incògnites.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ \ y = 1 \qquad \left.\begin{array}{r} 3y = 3 \\ \dfrac{x}{2} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ \ y = 1$$

c) Fals.

Per a $m = 1$ el sistema té infinites solucions, però depenen de dos paràmetres ja que:

$ran(A) = ran(A') = 1$

Podem quedar-nos amb una sola equació i passar dues incògnites al segon membre com a paràmetres.

d) Cert.

El rang de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) < 3$$

El menor té com a rang:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Com que els rangs no coincideixen, el sistema és *incompatible*.

e) $$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = a + 2 \\ 2x - ay + z = 2 \\ x - y + az = a \end{array}\right\}$$

Fals, per a $a = 1$ el rang de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) < 3$$

Afegim la 4a columna al menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow ran(A') = 3$$

Per tant, per a $a = 1$, el sistema és *incompatible* i, per tant, no té solució.

f) Cert, $ran(A) = 2$, i com que només hi ha dues files, A' no té més rang. És *compatible determinat* per a qualsevol valor de a i b.

g) Fals, pot ser també *incompatible*.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \quad 2y + 2z = 3 \\ \quad 3y + 3z = 1 \\ x - y \qquad = -1 \end{array}\right\}$$

Té $|A'| = 7 \neq 0$, però $ran(A) = 3 \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

h) Fals, pot ser també *incompatible*.

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=3 \\ 2x+2y+2z=4 \\ 3x+3y+3z=5 \end{array}\right\}$$

$$ran(A)=1,\ \ ran(A')=2$$

Pàgina 117

30 **En un sistema d'igual nombre d'equacions que d'incògnites, el determinant de la matriu de coeficients és igual a 0. Respon raonadament les preguntes següents:**

a) Pot ser compatible?

b) Pot tenir solució única?

c) S'hi pot aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podria ser compatible indeterminat si $ran(A) = ran(A') <$ *nre. d'incògnites*.

b) No, perquè en ser $ran(A) <$ *nre. d'incògnites*, el sistema no pot ser compatible determinat.

c) Sí, si és compatible, pasant al 2n membre les incògnites que sigui necessari.

31 **Si dos sistemes de quatre equacions lineals amb quatre incògnites, $AX = B$ i $AX = B'$, tenen una mateixa matriu de coeficients A, pot ser incompatible un dels dos sistemes mentre que l'altre és compatible determinat?**

No. Si un és compatible determinat és perquè $ran(A) = ran(A') = 4$. Per tant, si A és la mateixa matriu en tots dos sistemes, també en l'altre serà $ran(A) = 4$. Per tant, els dos serien compatibles determinats.

32 **Troba una matriu A perquè el sistema homogeni $AX = 0$ sigui equivalent a l'equació matricial:**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0,\ 0)$$

L'equació matricial donada la podem escriure així:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+\ \ z=0 \\ -2x+\ \ y+2z=0 \end{array}\right\}$$

Si anomenem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, llavors: $AX = 0$.

Per tant, la matriu A que busquem és $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

33 **Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} a+3 \\ b \\ c+3 \end{pmatrix}$.**

Justifica que si el sistema $AX = B$ és compatible determinat, llavors el sistema $AX = C$ també ho és.

Si $AX = B$, és *compatible determinat* $\rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$.

Per a això, el determinant següent ha de ser igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c = 0$$

Calculem el determinant de la matriu ampliada corresponent al sistema $AX = C$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c+3 \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c$$

Els dos determinants tenen el mateix valor, perquè el segon s'obté substituïnt la 3a columna per la suma de les altres dues; per tant, valen zero per als mateixos valors de a, b i c. Conseqüentment, el sistema $AX = C$ és *compatible determinat.*

Per aprofundir

34 **Estudia i resol quan sigui possible.**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y \quad + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} ax \quad + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y \quad + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \end{matrix}}_{A} \begin{array}{|c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$$

(La 4a columna depèn linealment de les tres primeres).

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{FILES} \\ (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \\ (4a) - 2 \cdot (2a) \end{matrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & a-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{FILES} \\ (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) + (1a) \end{matrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(a+1) = 0 \rightarrow a = -1$$

- Si $a = -1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 <$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació i passar la t al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \quad = 3 - 2t \\ 3x - y + z = 1 + t \\ 2x + y + z = 2 - t \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-2t & 1 & 0 \\ 1+t & -1 & 1 \\ 2-t & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2t-5}{-3} = \frac{5-2t}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2t & 0 \\ 3 & 1+t & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4t-4}{-3} = \frac{4-4t}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-2t \\ 3 & -1 & 1+t \\ 2 & 1 & 2-t \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8-5t}{-3} = \frac{-8+5t}{3}$$

Solucions: $x = \dfrac{5-2\lambda}{3}, \; y = \dfrac{4-4\lambda}{3}, \; z = \dfrac{-8+5\lambda}{3}, \; t = \lambda$

- Si $a \neq -1 \rightarrow ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$. El sistema és *incompatible.*

b) $$\left.\begin{aligned} ax \quad\;\; + z + \;\; t &= 1 \\ ay + z - \;\; t &= 1 \\ ay + z - 2t &= 2 \\ az - \;\; t &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 1 & -2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|}\hline \text{FILES} \\ \hline (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \; a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot a^2 = a^3 = 0 \;\rightarrow\; a = 0$$

- Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rightarrow z = 1 \\ \rightarrow z = 2 \\ \rightarrow t = 0 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \textit{Incompatible}$$

- Si $a \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = nre.\ d'incògnites = 4.$

  El sistema és *compatible determinat*. El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{(2a+1)a}{a^3} = \frac{2a+1}{a^2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^2}{a^3} = \frac{-1}{a}; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^3}{a^3} = -1$$

Solucions: $x = \dfrac{2a+1}{a^2}$, $y = \dfrac{1}{a^2}$, $z = \dfrac{-1}{a}$, $t = -1$

35 Discuteix els sistemes següents:

a) $\left\{\begin{aligned} \mathbf{x - y + z} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{2x + 3y - 2z} &= \mathbf{-8} \\ \mathbf{4x + y + az} &= \mathbf{b} \end{aligned}\right.$ b) $\left\{\begin{aligned} \mathbf{x + y + z} &= \mathbf{a - 1} \\ \mathbf{2x + y + az} &= \mathbf{a} \\ \mathbf{x + ay + z} &= \mathbf{b} \end{aligned}\right.$ c) $\left\{\begin{aligned} \mathbf{x - 3y + z} &= \mathbf{a} \\ \mathbf{x \quad\;\; - z} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x \quad\;\; + z} &= \mathbf{c} \end{aligned}\right.$ d) $\left\{\begin{aligned} \mathbf{ax + y - z} &= \mathbf{b - 1} \\ \mathbf{2x + ay} \quad &= \mathbf{b + 1} \\ \mathbf{-x \quad\;\; + z} &= \mathbf{b} \end{aligned}\right.$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + 3y - 2z &= -8 \\ 4x + y + az &= b \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = 5a = 0 \;\rightarrow\; a = 0$$

- Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \;\rightarrow\; b = -4$$

- Si $a = 0$ i $b = -4 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 2 < nre.\ d'incògnites.$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a = 0$ i $b \neq -4 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema és *incompatible*.
- Si $a \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = nre.\ d'incògnites = 3$. El sistema és *compatible determinat*, qualsevol que sigui el valor de b.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} a-1 \\ a \\ b \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}\right.$$

- Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$ Contradicció, excepte quan $b = 0$.

— Si $a = 1$ i $b \neq 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = 1$ i $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ La 1a fila i la 3a són iguals.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 < nre.\ d'incògnites \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat}.$$

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right)$$ La 1a columna i la 3a són iguals.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ i $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$.
El sistema és *incompatible*.

— Si $a = 2$ i $b = 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 < nre.\ d'incògnites$.
El sistema és *compatible indeterminat*.

— Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 = nre.\ d'incògnites$.
El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de b.

c) $$\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = a \\ x \quad\;\; - z = b \\ x \quad\;\; + z = c \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right.\right)$$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = nre.\ d'incògnites$.

El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de a, b i c.

d) $$\left.\begin{array}{r} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay \quad\;\; = b + 1 \\ -x \quad\;\; + z = b \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} b-1 \\ b+1 \\ b \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & -1 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b-1 \\ 2 & -1 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = -3b = 0 \rightarrow b = 0$$

— Si $a = -1$ i $b \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema és *incompatible*.

— Si $a = -1$ i $b = 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & 2 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ i $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema és *incompatible*.

— Si $a = 2$ i $b = 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible indeterminat*.

— Si $a \neq -1$ i $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de b.

36 Donat aquest sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x - 1 = 3\alpha - \beta \\ y + 2 = 2\alpha + \beta \quad \textbf{on } \alpha, \beta \in \text{À} \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

transforma'l en un sistema equivalent que no depengui dels paràmetres α, β; és a dir, transforma'l en un sistema en el qual les equacions s'expressen només en funció de les incògnites.

Interpretem el sistema a l'inrevés, és a dir:

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = x - 1 \\ 2\alpha + \beta = y + 2 \\ \alpha + 2\beta = z \end{cases}$$

Perquè aquest sistema tingui solució, el determinant següent ha de ser igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & x-1 \\ 2 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 3x - 7y + 5z - 17 = 0$$

En aquest cas, per calcular α i β agafem les dues primeres equacions i obtenim un sistema compatible determinat:

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = x - 1 \\ 2\alpha + \beta = y + 2 \end{cases}$$

Les solucions són: $\alpha = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}$, $\beta = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}$

Substituïm α i β pels seus valors en el sistema original i obtenim:

$$\begin{cases} x - 1 = 3\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \\ y + 2 = 2\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \\ z = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 2\left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \end{cases}$$

Les equacions d'aquest sistema s'expressen només en funció de les incògnites.

Autoavaluació

Pàgina 117

1 **Resol pel mètode de Gauss el sistema següent i interpreta'l geomètricament:**

$$\begin{cases} x-3y-z=-1\\ x+5y+3z=3\\ x+y+z=1\\ 3x+7y+5z=5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-1\\ x+5y+3z=3\\ x+y+z=1\\ 3x+7y+5z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1\\ 1 & 5 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (3a)\\ (2a)\\ (1a)\\ (4a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 3 & 3\\ 1 & -3 & -1 & -1\\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1a)\\ (2a)-(1a)\\ (3a)-(1a)\\ (4a)-3\cdot(1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 2 & 2\\ 0 & -4 & -2 & -2\\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1a)\\ (2a):2\\ (3a)+(2a)\\ (4a)-(2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1\\ 2y+z=1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} z=1-2y\\ x=1-y-z=y\\ y=\lambda \end{array}\right.$$

Solucions: $x=\lambda$, $y=\lambda$, $z=1-2\lambda$. Són quatre plans amb una recta comuna.

2 **Un transportista té tres camions P, Q i R, en els quals caben un cert nombre de contenidors de tres tipus A, B i C. En el camió P, hi caben 5 contenidors del tipus A, 3 del tipus B i 4 del C. En el camió Q, hi caben 2 contenidors del tipus A, 5 del B i 5 del C. I en el camió R, hi caben 4 de l'A, 3 del B i 6 del C. Si s'han de transportar 45 contenidors del tipus A, 44 del tipus B i 58 del tipus C, quants viatges ha de fer cada camió si tots els viatges els fan totalment plens?**

Anomenem:

x = viatges del camió P

y = viatges del camió Q

z = viatges del camió R

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array}\\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 3\\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45\\ 44\\ 58 \end{pmatrix}$$

Obtenim el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y+4z=45\\ 3x+5y+3z=44\\ 4x+5y+6z=58 \end{array}\right\} \to x=5,\ y=4,\ z=3$$

El camió P ha de fer 5 viatges.

El camió Q ha de fer 4 viatges.

El camió R ha de fer 3 viatges.

3 a) Discuteix, en funció de a, el sistema següent:

$$\begin{cases} x + ay + z = a+2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

b) Resol el sistema anterior per al cas $a = -1$.

a) $$\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a+2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} a+2 \\ -2(a+1) \\ a \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

- Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{El sistema és } \textit{incompatible}.$$

- Si $a = -2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, llavors $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.*

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -2$: $ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

b) Per a $a = -1$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right.\right), \text{ i sabem que } |A| = 4.$$

El sistema en aquest cas és *compatible determinat*. El resolem aplicant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Solució: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$

4 **Demostra que no hi ha valors de m per als quals aquest sistema no tingui solució. Resol-lo:**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= 5 \\ x + my + 3z &= 7 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}\right.\right)$$

$|A| = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$

- Si $m = 4$:

  $$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}\right.\right)$$ La 4a columna s'obté sumant la 2a i la 3a.

  Per tant, $ran(A) = ran(A')$. El sistema és *compatible*.

  (En aquest cas seria *compatible indeterminat*, perquè: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$).

  El resolem. Podem prescindir de la 3a equació:

  $$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 - z \\ x + 3y &= 5 - 2z \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 2 \\ 5 - 2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 1 & 5 - 2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

  Solucions: $x = -1 + \lambda,\ y = 2 - \lambda,\ z = \lambda$

- Si $m \neq 4 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible determinat*.

  El resolem en aquest cas:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{4 - m}{4 - m} = 1\,; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{0}{4 - m} = 0\,;$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{8 - 2m}{4 - m} = \frac{2(4 - m)}{4 - m} = 2$$

  Solució: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2$

  Per tant, no hi ha cap valor de m per al qual el sistema no tingui solució.

5 **El rang de la matriu dels coeficients d'un sistema de quatre equacions amb tres incògnites és 3. Quin rang pot tenir la matriu ampliada? Partint d'això, quantes solucions tindrà el sistema?**

La matriu ampliada és una matriu quadrada d'ordre 4.

El seu rang pot ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema serà *compatible determinat*.
- Si $ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4 \rightarrow$ El sistema serà *incompatible*.

6 Discuteix i resol el sistema següent:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Segons el teorema de Rouché, el sistema tindrà solució si el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada són iguals.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

(la part de coeficients: A)

Com que la matriu ampliada és d'ordre 4, busquem els valors que anul·len el seu determinant.

$$|A'| = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ (1a) \\ (2a) \\ (3a)-(1a) \\ (4a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 2a - 2 + 3a - 2 - 4 \rightarrow a = 14$$

- Si $a = 14$

$$\underbrace{A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)}_{A} \rightarrow \text{Com que} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 = nre.\ d'incògnites.$$

El sistema és *compatible determinat.*

- Si $a \neq 14 \rightarrow ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$. El sistema és *incompatible.*
- Resolució si $a = 14$:

Agafem les equacions 2a, 3a i 4a:

$$\begin{cases} y + z = 14 \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

De la 1a i la 3a ecuació obtenim $2y = 16 \rightarrow y = 8$

$z = 14 - 8 = 6$

En la 2a $x = -1 + 3z = -1 + 18 = 17$

Solució: $x = 17,\ y = 8,\ z = 6$

Una altra manera de resoldre el problema:

Si resolem el sistema format per les equacions 1a, 3a i 4a, obtindríem la solució $x = 17,\ y = 8,\ z = 6$.

Portant aquests valors a la 2a equació, $y + z = a \rightarrow 8 + 6 = a \rightarrow a = 14$. Aquest és el valor de a que fa el sistema compatible. Per a qualsevol altre valor de a, el sistema no té solució.

7 En un sistema homogeni de tres equacions i dues incògnites, la matriu dels coeficients té rang 2. Digues, raonadament, quantes solucions tindrà el sistema.

En un sistema homogeni, el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada sempre coincideix, perquè en afegir una columna de zeros no canvia el rang.

Per tant, tenim que $ran(A) = ran(A') = 2 = nre.\ d'incògnites.$

El sistema serà *compatible determinat.* Només té una solució, que és la trivial: $x = 0,\ y = 0$.