Solucionari
de les activitats didàctiques

Unitat didàctica 1. El nombre real

Reflexiona

■ **La llista següent consta de tots els nombres escrits a la pissarra i d'alguns més:**
$\mathbf{0;\ 4;\ -11;\ 0{,}31;\ \sqrt{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{4};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{24}{6};\ \frac{-24}{4};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt{81};\ 7{,}\widehat{31};\ \pi;\ -\frac{5}{9}}$

Classifica'ls en una graella com la següent en el teu quadern. Has de tenir en compte que un mateix nombre es pot incloure en més d'un conjunt.

NATURALS: $0;\ 4;\ \frac{24}{6};\ \sqrt{81}$

ENTERS: $0;\ 4;\ -11;\ \frac{24}{6};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt{81}$

RACIONALS: $0;\ 4;\ -11;\ 0{,}31;\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{4};\ \frac{24}{6};\ \frac{-24}{4};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt{81};\ 7{,}\widehat{31};\ -\frac{5}{9}$

NO RACIONALS: $\sqrt{2};\ \sqrt[3]{5};\ -\sqrt{3};\ \pi$

Et convé recordar

■ **Troba la fracció irreductible equivalent als nombres decimals següents i descompon els seus denominadors en factors primers.**

a) $\mathbf{6{,}388} = \frac{1\,597}{250}$ **b)** $\mathbf{0{,}00875} = \frac{7}{800}$

■ **Explica per què les fraccions següents són equivalents a nombres decimals exactes.**

a) $\mathbf{\frac{3\,741}{100\,000}} = \frac{3\,741}{10^5}$ **b)** $\mathbf{\frac{3\,147}{1250}} = 3\,147\cdot\frac{8}{10^4}$ **c)** $\mathbf{\frac{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 91}{2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7}} = \frac{3\cdot 91}{2\cdot 5^2}$ **d)** $\mathbf{\frac{57\,330}{10\,500}} = \frac{3\cdot 91}{2\cdot 5^2}$

En tots els casos es pot aconseguir en el denominador una potència de base 10.

■ **Troba la fracció generatriu de:**

a) $\mathbf{0{,}0\widehat{51}} = \frac{17}{330}$ **b)** $\mathbf{1{,}23\widehat{456}} = \frac{41\,111}{33\,300}$ **c)** $\mathbf{7{,}45\widehat{6}} = \frac{2\,237}{300}$

■ **Explica per què les fraccions següents són equivalents a nombres decimals periòdics.**

a) $\mathbf{\frac{3}{7}}$ **b)** $\mathbf{\frac{37}{2\cdot 5\cdot 7}}$ **c)** $\mathbf{\frac{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 19}}$

a) El denominador no té com a factors ni el 2 ni el 5.
b) i c) En el denominador, a més dels factors 2 o 5, n'hi ha d'altres.

Fes-ho tu

■ **Repeteix el raonament anterior per provar que $\sqrt{3}$ és irracional.**

$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow a^2 = 3b^2$

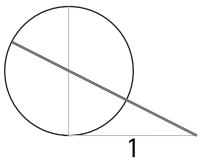
■ **Segueix el raonament que hem fet servir a la dreta i demostra que $3\sqrt{7} + 15$ és irracional.**

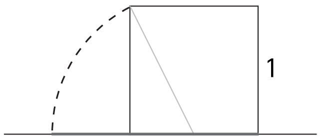
$n = 3\sqrt{7} + 15 \Rightarrow \sqrt{7} = \frac{n\cdot 15}{3}$

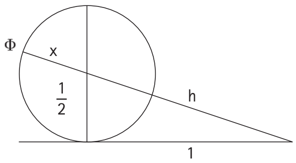
Activitats

1.1 **Justifica que aquestes construccions donen un segment la mida del qual és igual al nombre d'or,**

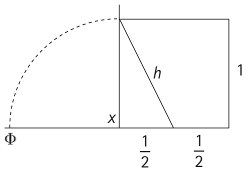
$\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}$.







$$\Phi = x + h$$
$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$\left.\begin{array}{l} h^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Phi = x + h \\ \Phi = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2} \end{array}$$



$$\Phi = x + \frac{1}{2}$$
$$h = x$$
$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$$
$$h = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\Phi = x + \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

1.2 **Volem demostrar que Φ és irracional. Sabem que $\sqrt{5}$ ho és (per la mateixa raó que $\sqrt{2}$). Observa que:**

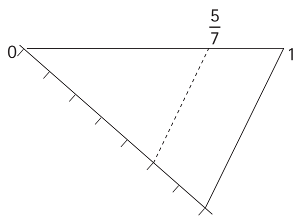
$\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \rightarrow 2\Phi = \sqrt{5} + 1 \rightarrow \sqrt{5} = 2\Phi - 1$

A partir de la igualtat $\sqrt{5} = 2\Phi - 1$, què deduiríem si Φ fos racional?

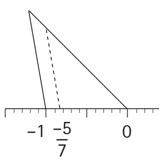
Tot i que Φ fos racional, en restar-li una unitat, el nombre que es trobés sota l'arrel sent irracional.

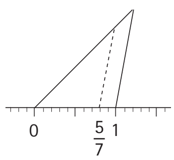
1.3 **Representa $\dfrac{5}{7}$, $-\dfrac{5}{7}$ i $\dfrac{26}{7}$.**

$\dfrac{5}{7}$

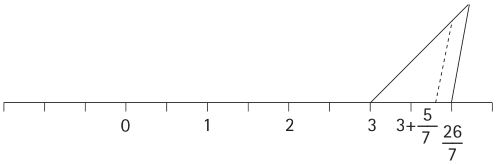


$-\dfrac{5}{7}$

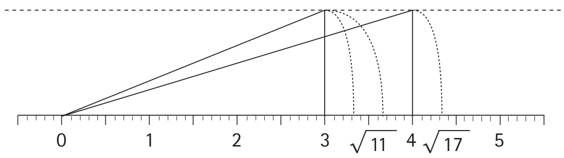




$\frac{26}{7} = 3 + \frac{5}{7}$

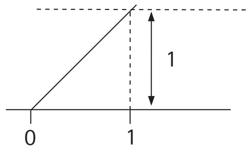


1.4 **Justifica la construcció de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{10}$. Representa $\sqrt{11}$ i $\sqrt{17}$ (Observa que $17 = 4^2 + 1^2$).**



Si tenim en compte que la recta discontínua està a alçada 1, i tenint en compte també el teorema de Pitàgores, veiem que:

$\sqrt{2}$: la hipotenusa del triangle que formen

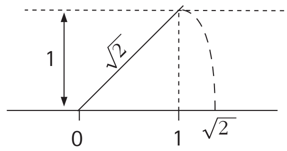


Sabent que el Teorema de Pitàgores: $h^2 = c^2 + c^2$

$\text{hipotenusa}^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

$\text{hiptenusa} = \sqrt{2}$.

Si projectem la hipotenusa sobre la recta real ens queda:



Per a la resta de casos utilitzem el mateix raonament:

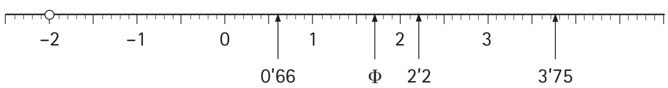
$\sqrt{5} \rightarrow h^2 = c^2 + c^2 \rightarrow 5 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5}$

$\sqrt{10} \rightarrow h^2 = c^2 + c^2 \rightarrow 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow h^2 = 10 \Rightarrow h = \sqrt{10}$

1.5 **Representa en la recta real aquests nombres:**

a) De manera exacta: –2; 3,75; $\sqrt{5}$; 0,666…

b) Φ de manera exacta $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ i de manera aproximada (1,618…).



1.6 **Escriu en forma d'interval i representa els nombres que compleixen les condicions indicades en cada cas.**

a) Compresos entre 5 i 6, incloent-los tots dos.

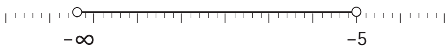
$[5, 6] = \{x \,/\, 5 \leqslant x \leqslant 6\}$

b) Més grans que 7.

$(7, +\infty) = \{x \,/\, 7 < x < +\infty\}$

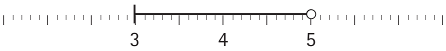
c) Més petits o iguals que –5.

$(-\infty, -5] = \{x \,/\, -\infty < x \leqslant -5\}$

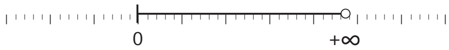


1.7 **Escriu en forma d'interval i representa.**

a) $\{x \,/\, 3 \leqslant x < 5\} = [3, 5)$

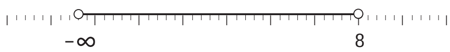


b) $\{x \,/\, x \geqslant 0\} = [0, +\infty)$



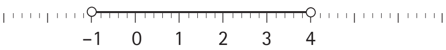
c) $\{x \,/\, -3 < x < 1\} = (-3, 1)$

d) $\{x \,/\, x < 8\} = (-\infty, 8)$

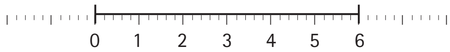


1.8 **Escriu en forma de desigualtat i representa.**

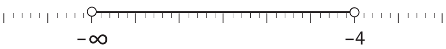
a) $(-1, 4) = \{x \,/\, -1 < x < 4\}$



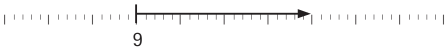
b) $[0, 6] = \{x \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 6\}$



c) $(-\infty, -4) = \{x \,/\, -\infty < x < -4\}$



d) $[9, +\infty) = \{x \,/\, 9 \leqslant x < +\infty\}$



Càlcul mental

1 **Digues el valor de *k* en cada cas.**

a) $\sqrt[3]{k} = 2 \rightarrow k = 8$ **b)** $\sqrt[k]{-243} = -3 \rightarrow k = 5$

c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{2}{3} \rightarrow k = \dfrac{16}{81}$ **d)** $\sqrt[k]{1\,024} = 2 \rightarrow k = 10$

2 **Calcula les arrels següents.**

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$ **b)** $\sqrt[5]{32} = 2$ **c)** $\sqrt[5]{-32} = -2$ **d)** $\sqrt[8]{0} = 0$ **e)** $\sqrt[4]{81} = 3$ **f)** $\sqrt[3]{125} = 5$

Activitats

1.9 **Expressa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$ **b)** $(\sqrt[3]{x^2})^5 = x^{10/3}$ **c)** $\sqrt[15]{a^6} = a^{2/5}$

d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}} = a^{7/2}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = x^{1/6}$ **f)** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}} = a^{k/(m \cdot n)}$

1.10 **Calcula:**

a) $4^{1/2} = 2$ **b)** $125^{1/3} = 5$ **c)** $625^{1/4} = 5$ **d)** $8^{2/3} = 4$ **e)** $64^{5/6} = 32$

1.11 **Expressa en forma radical.**

a) $x^{7/9} = \sqrt[9]{x^7}$ **b)** $(m^5 \cdot n^5)^{1/3} = (\sqrt[3]{m \cdot n})^5$ **c)** $a^{1/2} \cdot b^{1/3} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ **d)** $[(x^2)^{1/3}]^{1/5} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$

Fes aquestes operacions amb la calculadora:

1.12 **a)** $\sqrt{54} = 7{,}348$ **b)** $327^2 = 106\,276$ **c)** $\sqrt[3]{8{,}53} = 2{,}04$

1.13 a) $\sqrt[5]{\mathbf{8,24}} = 1{,}524$ b) $\sqrt[6]{\mathbf{586}} = 2{,}892$ c) $\sqrt[4]{\mathbf{79,46}} = 2{,}985$

1.14 a) $\sqrt[5]{\mathbf{37^2}} = 4{,}239$ b) $\sqrt[4]{\mathbf{2,1^5}} = 2{,}527$ c) $\sqrt[3]{\mathbf{0,008^2}} = 0{,}04$

1.15 **Calcula les arrels de l'activitat 1.13 amb la tecla x^y (per exemple, 8,24 x^y 5 $1/x$ =).**

a) 1,524 b) 2,892 c) 2,985

1.16 **Calcula les arrels de l'activitat 1.14 amb la tecla x^y (per exemple, 37 x^y 2 $a^{b/c}$ 5 =).**

a) 4,239 b) 2,527 c) 0,04

1.17 **Simplifica:**

a) $\sqrt[12]{\boldsymbol{x^9}} = \sqrt[4]{x^3}$ b) $\sqrt[12]{\boldsymbol{x^8}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[5]{\boldsymbol{y^{10}}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{\mathbf{8}} = \sqrt{2}$ e) $\sqrt[9]{\mathbf{64}} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[8]{\mathbf{81}} = \sqrt{3}$

1.18 **Quin dels dos és més gran en cada cas?**

a) $\sqrt[4]{\mathbf{31}}$ **i** $\sqrt[3]{\mathbf{13}} \rightarrow \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

b) $\sqrt[3]{\mathbf{51}}$ **i** $\sqrt[9]{\mathbf{132\,650}} \rightarrow \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132\,650}$

1.19 **Redueix:**

a) $\sqrt[3]{\mathbf{3}} \cdot \sqrt[5]{\mathbf{2}} = \sqrt[15]{1\,944}$ b) $\sqrt[3]{\mathbf{6}} \cdot \sqrt[6]{\mathbf{3}} = \sqrt[18]{1\,259\,712}$ c) $\sqrt[10]{\boldsymbol{a^4b^6}} = \sqrt[5]{x^2b^3}$

1.20 **Treu del radical els factors que sigui possible:**

a) $\sqrt[3]{\mathbf{32}\boldsymbol{x^4}} = 2x\sqrt[3]{4x}$ b) $\sqrt[3]{\mathbf{81}\boldsymbol{a^3b^5c}} = 3ab\sqrt[3]{3b^2c}$ c) $\sqrt[5]{\mathbf{64}} = 2\sqrt[5]{2}$

1.21 **Simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3^2}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2^3}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}}$

d) $(\sqrt[3]{\boldsymbol{a^2}})^6 = a^4$ e) $(\sqrt{\boldsymbol{x}})^3 \cdot (\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}) = x\sqrt[6]{x^5}$ f) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\mathbf{2}}}})^8 = 2$

1.22 **Fes aquestes operacions:**

a) $\sqrt{\mathbf{18}} + \sqrt{\mathbf{50}} - \sqrt{\mathbf{2}} - \sqrt{\mathbf{8}} = 5\sqrt{2}$ b) $\sqrt{\mathbf{12}} + \sqrt{\mathbf{75}} - \sqrt{\mathbf{27}} = 4 \cdot \sqrt{3}$

1.23 **Racionalitza els denominadors:**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{35}}{1}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{3}$ e) $\dfrac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ f) $\dfrac{3}{2 - \sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3}$

Exercicis de la unitat. Practica

Nombres reals

1.24 ▲▲△ **Expressa en notació científica:**

Escriure un nombre en notació científica és expressar-lo com a producte d'un nombre major o igual que 1 i menor que 10, i una potència de 10. Per tant, les solucions serien:

a) $\mathbf{32 \cdot 10^5} = 3{,}2 \cdot 10^6$ b) $\mathbf{75 \cdot 10^{-4}} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$

c) $\mathbf{843 \cdot 10^7} = 8{,}43 \cdot 10^9$ d) $\mathbf{458 \cdot 10^{-7}} = 4{,}58 \cdot 10^{-5}$

e) $\mathbf{0,03 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^4$ f) $\mathbf{0,0025 \cdot 10^{-5}} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$

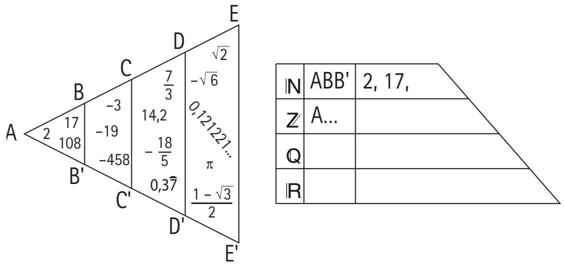
1.25 ▲△△ **Digues quins d'aquests nombres són irracionals.**

$-\frac{3}{4}$; $1{,}7\widehat{3}$; $\sqrt{3}$; π; $\sqrt{9}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Són irracionals: $\sqrt{3}$, π i $(1+\sqrt{5})/2$

1.26 ▲△△ **Ordena de més petit a més gran. Utilitza l'aproximació decimal.**

a) 1,45; $1{,}\widehat{4}$; $\sqrt{2}$ = $\sqrt{2} < 1{,}\widehat{4} < 1{,}45$ **b) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\frac{13}{9}$** = $\sqrt{2} < \sqrt[3]{5} < \frac{13}{9}$

1.27 ▲△△ **a) Observa el diagrama i completa en el teu quadern el quadre adjunt.**



$\mathbb{N}$: 2; 17; 108

$\mathbb{Z}$: 2; 17; 108; −3; −19; −458

$\mathbb{Q}$: 2; 17; 108; −3; −19; −458; $\frac{7}{3}$; 14,2; $\frac{-18}{5}$; $0{,}3\widehat{7}$

$\mathbb{R}$: Tots

b) Situa els nombres següents al lloc que correspongui en el diagrama i en el quadre.

$3{,}\widehat{28}$; $\frac{14}{7}$; $\sqrt{8}$; $-\sqrt{9}$

$3{,}\widehat{28} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $\frac{14}{7} \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$; $-\sqrt{9} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

c) Com s'anomenen els nombres de DEE'D'?

Nombres irracionals.

1.28 ▲▲△ **Classifica aquests nombres segons que pertanyin als conjunts $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.**

3	**−3/4**	**$\sqrt{2}$**	**7,23**
−2	**π**	**0**	**−4**
1/3	**$\sqrt[3]{-1}$**	**11/9**	**$\sqrt{-5}$**
2	**2,48**	**18**	**$1+\sqrt{2}$**
−1	**$\sqrt[4]{-5}$**	**1**	**1,010203...**

$\mathbb{N} \to$ 3; 0; 2; 18; 1

$\mathbb{Z} \to$ 3; 0; 2; 18; 1; −2; −4; −1; $\sqrt[3]{-1}$

$\mathbb{Q} \to$ 3; 0; 2; 18; 1; −2; −4; −1; $\sqrt[3]{-1}$; $-\frac{3}{4}$; 7,23; $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{9}$; 2,48

$\mathbb{R} \to$ Tots

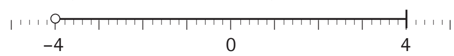
Intervals

1.29 ▲△△ Exercici resolt.

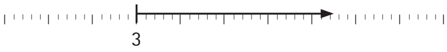
1.30 ▲△△ **Escriu simbòlicament i representa els intervals següents.**

***A* = {*x* / −6 ⩽ *x* ⩽ 3}** = [−6, 3]

***B* = {*x* / −4 < *x* ⩽ 4}** = (−4, 4]



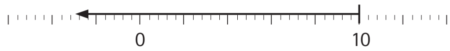
$C = \{x \,/\, 3 \leqslant x\} = [3, +\infty)$



$D = \{x \,/\, 0 < x < 5\} = (0, 5)$

$E = \{x \,/\, x > -2\} = (-2, +\infty)$

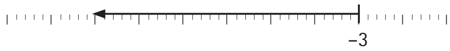
$F = \{x \,/\, 10 \geqslant x\} = (-\infty, 10]$



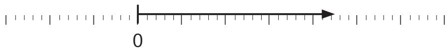
1.31 ▲△△ **Escriu en forma d'interval o semirecta i representa els nombres que compleixen la desigualtat indicada en cada cas.**

a) $0 < x < 1 = (0, 1)$

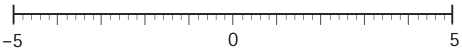
b) $x \leqslant -3 = (-\infty, -3]$



c) $x > 0 = (0, +\infty)$

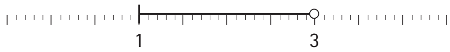


d) $-5 \leqslant x \leqslant 5 = [-5, 5]$



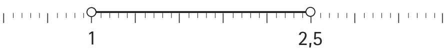
e) $-5 < x = (-5, +\infty)$

f) $1 \leqslant x < 3 = [1, 3)$

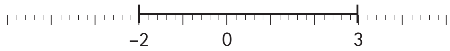


1.32 ▲▲△ **Escriu en forma de desigualtat i representa els intervals següents.**

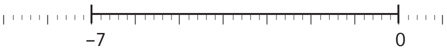
$P = (1;\ 2{,}5) = \{x \,/\, 1 < x < 2{,}5\}$



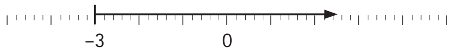
$Q = [-2, 3] = \{x \,/\, -2 \leqslant x \leqslant 3\}$



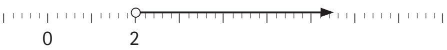
$R = [-7, 0] = \{x \,/\, -7 \leqslant x \leqslant 0\}$



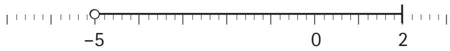
$S = [-3, +\infty) = \{x \,/\, -3 \leqslant x < +\infty\}$



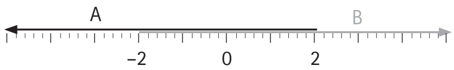
$T = (2, +\infty) = \{x \,/\, 2 < x < +\infty\}$



$I = (-5, 2] = \{x \,/\, -5 < x \leqslant 2\}$



1.33 ▲▲△ **a) Representa les semirectes $A = (-\infty, 2]$ i $B = [-2, +\infty)$ en una mateixa recta.**



b) Quins són els nombres que pertanyen a totes dues semirectes?

Els compresos entre −2 i 2, inclosos tots dos.

c) Expressa en forma d'interval la part comuna a A i B, ($A \cap B$).

$A \cap B = [-2, 2]$

1.34 ▲▲△ **Representa en la recta real.**

a) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty]$

b) $(-\infty, 2] \cup (7, +\infty)$

1.35 ▲▲△ **Per a quins valors de x són vàlides les expressions següents?**

a) $\sqrt{x-5} = x \geqslant 5 \rightarrow [5, +\infty)$ **b)** $\sqrt{3-x} = x \leqslant 3 \rightarrow (-\infty, 3]$ **c)** $\sqrt{2x-1} = x \geqslant \frac{1}{2} \rightarrow [\frac{1}{2}, +\infty)$

Potències i arrels

1.36 ▲△△ **Expressa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ b) $(\sqrt[5]{a^2})^3 = a^{6/5}$ c) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2} = a^{7/8}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = x^{1/12}$

e) $(\sqrt{a})^{-3} = a^{-3/2}$ f) $\sqrt[6]{a^3} = a^{1/2}$ g) $(\sqrt[4]{a^2})^2 = a$ h) $\sqrt[5]{a^{10}} = a^2$

1.37 ▲△△ **Expressa com una arrel.**

a) $15^{1/2} = \sqrt{15}$ b) $(a^2)^{1/3} = \sqrt[3]{a^2}$ c) $(x^{-1})^{5/4} = \sqrt[4]{x^{-5}}$ d) $(a^{1/5})^{-4} = \sqrt[4]{x^{-5}}$

e) $(a^{2/3})^{1/2} = \sqrt[3]{a}$ f) $a^2 \cdot a^{1/2} = \sqrt{a^5}$ g) $(3^{-2/5})^{10/3} = \sqrt[3]{3^{-4}}$

1.38 ▲▲△ Exercici resolt.

1.39 ▲▲△ **Expressa com a potència única.**

a) $\sqrt{3}\sqrt[3]{3} = 3^{5/6}$ b) $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} = 2^{1/3}$ c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = 2^{5/6}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = a^{2/3}$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} = a^{-2/3}$ f) $a\sqrt{\dfrac{1}{a}} = a^{1/2}$

1.40 ▲△△ **Soluciona amb la calculadora.**

a) $\sqrt[5]{9{,}5^2} = 2{,}46$ b) $\sqrt[3]{-173} = -5{,}57$ c) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{14}{9}\right)^3} = 1{,}39$ d) $\sqrt[4]{5^{-9}} = 0{,}027$

e) $28^{3/4} = 12{,}17$ f) $8^{-1/3} = 0{,}5$ g) $0{,}03^{-3/2} = 192{,}45$ h) $(\sqrt[5]{0{,}0025})^{-1} = 3{,}31$

1.41 ▲▲△ **Expressa com a potència única.**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4} = a^{-5/3}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}} = a^{-1/4}$ c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}} = 5^{5/6}$

d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{2} = 2^{-1/4}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}} = a^{-5/6}$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \cdot \dfrac{a^3}{\sqrt{a}} = a^{7/6}$

Radicals

1.42 ▲△△ **Multiplica i simplifica el resultat.**

a) $\sqrt{2a}\,\sqrt{3a}\,\sqrt{6a} = 6a\sqrt{a}$ b) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[3]{b^4}\,\sqrt[3]{b^2} = ab^2$ c) $\sqrt{5a}\,\sqrt{10ab}\,\sqrt{8a^3b}\,\sqrt{a} = 20a^3b$

1.43 ▲△△ **Simplifica els radicals següents.**

a) $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$ b) $\sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^4}$ c) $\sqrt[10]{a^8} = \sqrt[5]{a^4}$

d) $\sqrt[12]{a^4 \cdot b^8} = \sqrt[3]{a \cdot b^2}$ e) $\sqrt[8]{(x^2y^2)^2} = \sqrt{x \cdot y}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}} = x$

1.44 ▲▲△ **Extreu factors dels radicals següents.**

a) $\sqrt[3]{16x^6} = 2\sqrt{2} \cdot x^2$ b) $\sqrt{\dfrac{28x^2}{75y^3}} = \dfrac{2x^2}{5y} \cdot \sqrt{\dfrac{7x}{3y}}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10} = 4\sqrt{2}$

d) $\sqrt{\dfrac{8a^5}{b^4}} = \dfrac{2a^2}{b^2}\sqrt{2a}$ e) $\sqrt{\dfrac{25a^2b}{c^6}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^2}}$ f) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}} = \dfrac{4a}{3b^2}\sqrt{\dfrac{2a}{5}}$

1.45 ▲▲△ **Redueix a índex comú i ordena de més petit a més gran.**

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6} \rightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[6]{3^5} \rightarrow \sqrt[6]{3^5} < \sqrt[3]{2^4} < \sqrt[4]{5^3}$

1.46 ▲▲△ **Introdueix dins de l'arrel i simplifica.**

a) $2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$ b) $3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$ c) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{2}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3}$ f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

1.47 ▲▲△ **Divideix i simplifica el resultat.**

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}} = \sqrt[4]{\frac{1}{b}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ f) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[12]{\frac{4}{10}}$

1.48 ▲▲△ **Fes aquestes operacions i simplifica'n el resultat.**

a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \rightarrow \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{4^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$

b) $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) : (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}) \rightarrow (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) : \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} : \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^3}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[6]{20} : \sqrt[4]{10} \rightarrow \sqrt[6]{10} : \sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{20^2} : \sqrt[12]{10^3} = \sqrt[12]{\frac{20^2}{10^3}} = \sqrt[12]{\frac{2}{10}} = \sqrt[12]{\frac{1}{5}}$

d) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{18} \rightarrow \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[12]{27^3} \cdot \sqrt[12]{18^4} = \sqrt[12]{27^3 \cdot 18^4} = \sqrt[12]{3^9 \cdot 2^4 \cdot 3^8} = 3\sqrt[12]{3^5 \cdot 2^4}$

1.49 ▲▲△ Exercici resolt.

1.50 ▲▲△ **Suma.**

a) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 7\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 12\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48} = -23\sqrt{3}$

1.51 ▲▲△ **Resol.**

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500} = 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{5}{8}\sqrt{7}$ d) $\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{\frac{3}{32}} = \frac{2}{3}\sqrt[5]{3}$

e) $\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24} = 6\sqrt{6}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{130}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{130}$

1.52 ▲▲△ Exercici resolt.

1.53 ▲△△ **Racionalitza i simplifica.**

a) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ b) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$ d) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

1.54 ▲▲△ **Racionalitza.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$ c) $\dfrac{8}{\sqrt{5}-1} = 2(\sqrt{5}+1)$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 3-\sqrt{6}$

1.55 ▲▲△ **Racionalitza i simplifica.**

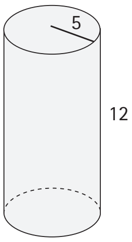
a) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$ b) $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}} = 2(3+\sqrt{2})$ c) $\dfrac{23}{5-\sqrt{2}} = 5+\sqrt{2}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$ e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3} = 2\sqrt{5}-3$ f) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = -\dfrac{11+4\sqrt{6}}{5}$

g) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} = 3\sqrt{2}-4$ i) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{15}$

Pensa i resol

1.56 ▲△△ **Troba el valor exacte de l'àrea total i del volum d'un cilindre de 5 cm de radi i 12 cm d'altura. (Expressa'l en funció de π).**



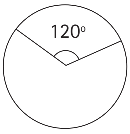
Àrea lateral = $2\pi Rh = 2\pi\, 5 \cdot 12 = 120\pi$ cm^2

Àrea base = $\pi R^2 = 25\pi$

Àrea total = $120\pi + 2{,}25\pi = 170\pi$ cm^2

Volum = $\pi R^2 h = \pi\, 5^2 \cdot 12 = 300\pi$ cm^3

1.57 ▲▲△ **Tallem un sector circular de 120º d'amplitud d'un cercle la circumferència del qual mesura 30π m. Calcula l'àrea del sector i dóna el seu valor en funció de π.**



Radi del cercle:

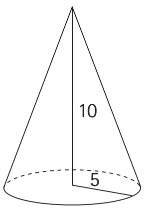
$2\pi R = 30\pi \rightarrow R = 15$ cm

Àrea del sector:

360º ——— $\pi \cdot 15^2$

120º ——— x $\rightarrow x = \dfrac{120\pi \cdot 15^2}{360} = 75\pi$ cm^2

1.58 ▲▲△ **Calcula l'àrea total i el volum d'aquest con mitjançant nombres irracionals.**



Àrea base: $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

Àrea lateral: $\pi R g = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi$ cm^2

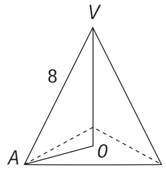
Àrea total: $25\pi + 50\pi = 75\pi$ cm^2

Volum: $\dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

Alçada: $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

$V = \dfrac{\pi}{3} \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3} = \dfrac{125}{3}\sqrt{3}\,\pi$ cm^3

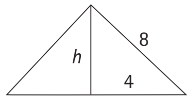
1.59 ▲▲△ **Calcula l'altura d'un tetraedre regular de 8 cm d'aresta. Expressa-la amb radicals.**



Alçada d'una cara

$h^2 = 8^2 - 4^2 \rightarrow h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

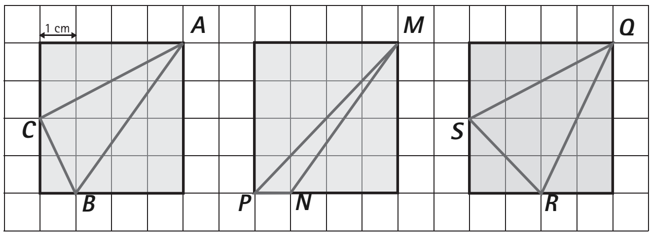
$AO = \dfrac{2}{3}\,h = \dfrac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \dfrac{8}{3}\,\sqrt{3}$



$$\overline{VO}^2 = \overline{AV}^2 - \overline{AO}^2 \rightarrow \overline{VO} = \sqrt{8^2 - \left(\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{128}{3}} = 8\sqrt{\dfrac{2}{3}}\ \text{cm}$$

L'alçada del tetraedre és de $8\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm

1.60 ▲△△ **Troba el perímetre dels triangles dibuixats. Expressa el resultat amb radicals.**



$$ABC \begin{cases} \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \overline{CB} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

Perímetre: $2\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$

$$MNP \begin{cases} \overline{MN} = \overline{AB} = 5 \\ \overline{MP} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \\ \overline{PN} = 1 \end{cases}$$

Perímetre: $5 + 4\sqrt{2} + 1 = 6 + 4\sqrt{2}$

$$QRS \begin{cases} \overline{QR} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ \overline{QS} = QR = 2\sqrt{5} \\ \overline{SR} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Perímetre: $2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

1.61 ▲▲△ **Els costats iguals d'un triangle isòsceles mesuren el doble que la base, la longitud de la qual és $\sqrt{3}$ m. Calcula el perímetre del triangle, l'altura i l'àrea. Expressa el resultat en radicals.**

Perímetre $5\sqrt{3}$ m; $h = \dfrac{2}{3}\sqrt{5}$ m; $A = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ m^2

1.62 ▲▲△ **En un cub de $\sqrt{3}$ cm d'aresta, calcula:**

a) La diagonal d'una cara. $\sqrt{6}$ cm

b) La diagonal del cub.

3 cm

c) El volum del cub.

$3\sqrt{3}$ cm^3

Expressa els resultats en forma radical.

1.63 ▲▲△ **Redueix a un sol radical.**

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^{11}}$ b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a\sqrt[12]{a^7}$ c) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[8]{18}}$

Reflexiona sobre la teoria

1.64 ▲△△ **Quines d'aquestes arrels no existeixen?**

$\sqrt[3]{-20}$, $\sqrt[6]{0{,}12}$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[5]{241}$, $\sqrt[4]{-16}$

$\sqrt{-1}$ i $\sqrt[4]{-16}$

1.65 ▲▲△ **Escriu un nombre racional i un d'irracional compresos entre els nombres donats.**

a) $3{,}\widehat{7}$ i 3,78 b) $\dfrac{71}{50}$ i $\dfrac{64}{45}$ c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt[4]{3}$

Per exemple:
a) 3,778 i 3,778777877778...
b) 1,421 i 1,421442144421...
c) 1,5 i 1,51511511151111...
d) 1,26 i 1,2616116111...

1.66 ▲△△ **Quants nombres racionals hi ha entre $0{,}\widehat{8}$ i $0{,}\widehat{9}$? Posa'n exemples i raona la teva resposta.**

Infinits. Sempre es pot fer un nombre racional diferent en un interval qualsevol. Per exemple: $\dfrac{91}{100}$; $\dfrac{911}{1000}$; $\dfrac{9111}{10000}$; etc.

1.67 ▲▲△ **Escriu dos nombres racionals, un que sigui més gran que $\sqrt{2}$ i un altre que sigui més petit que $\sqrt{2}$, que es diferenciïn en menys d'una mil·lèsima.**

Per exemple:

$x = 1{,}413313562 < \sqrt{2}$; $\sqrt{2} - x = 0{,}0009 < 0{,}001$

$y = 1{,}415213562 < \sqrt{2}$; $y - \sqrt{2} = 0{,}0009 < 0{,}001$

1.68 ▲▲△ **Justifica si, en cada cas, els dos radicals són iguals o diferents.**

a) $\sqrt[6]{8}$ i $\sqrt[8]{16}$ b) $\sqrt[3]{27}$ i $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[6]{9}$ i $\sqrt[12]{16}$ d) $\sqrt[4]{25}$ i $\sqrt[6]{125}$

a) i d), iguals.
b) i c), diferents.

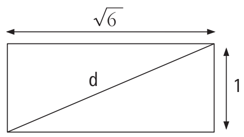
1.69 ▲▲△ **Explica un procediment per construir un segment que mesuri exactament $\sqrt{7}$ cm.**

Amb un rectangle $2 \times 1 \rightarrow \sqrt{5}$

Amb un rectangle $\sqrt{5} \times 1 \rightarrow \sqrt{6}$

Amb un rectangle $\sqrt{6} \times 1 \rightarrow \sqrt{7}$

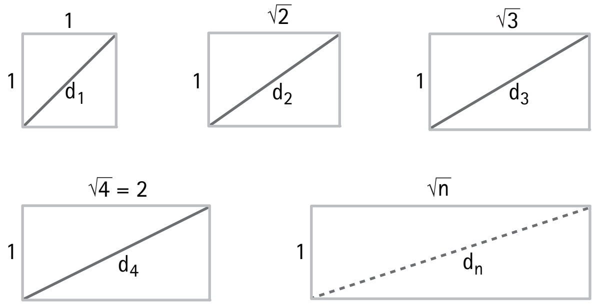
La diagonal del rectangle $\sqrt{6} \times 1$ mesura, pel Teorema de Pitàgores, exactament $\sqrt{7}$.



$d^2 = (\sqrt{6})^2 + 1^2 = 6 + 1 = 7$

$d = \sqrt{7}$.

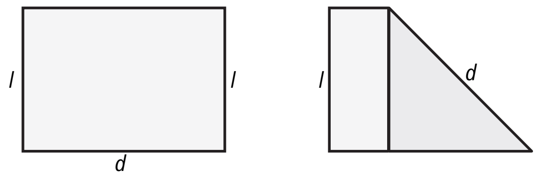
1.70 ▲▲△ **Calcula el valor de la diagonal en cada cas.**



$d_1 = \sqrt{2}$; $d_2 = \sqrt{3}$; $d_3 = 2$; $d_4 = \sqrt{5}$; $d_n = \sqrt{n + 1}$

Aprofundeix

1.71 ▲▲△ **Doblega un full DIN A4 i forma un quadrat. Expressa la diagonal d'aquest quadrat en funció del costat petit, *l*. Comprova, amb un altre full igual, que el costat gran mesura el mateix que la diagonal del quadrat. Quina és la raó entre les dimensions del full DIN A4?**



Raó = $\sqrt{2}$

1.72 ▲▲▲ **Racionalitza i simplifica.**

a) $\dfrac{\mathbf{2 - \sqrt[3]{2}}}{\mathbf{\sqrt[3]{2}}} = \sqrt{15}$ b) $\dfrac{\mathbf{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}}{\mathbf{3\sqrt{3} + 2}} = \sqrt{2}$ c) $\dfrac{\mathbf{4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}}}{\mathbf{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}} = 2\sqrt{3}$ d) $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = x - \sqrt{x^2 - 1}$

1.73 ▲▲▲ **Resol i simplifica.**

a) $\left(\dfrac{\mathbf{\sqrt{6} - \sqrt{3}}}{\mathbf{\sqrt{6} + \sqrt{3}}}\right)\mathbf{(3 + 2\sqrt{2})} = 3 - 2\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\mathbf{(\sqrt{5} + 1)^2}}{\mathbf{\sqrt{5} - 1}} \mathbf{- 3\sqrt{5}} = 4 - \sqrt{5}$

c) $\left(\mathbf{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}}\right) : \left(\mathbf{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}}\right) = -2 + \sqrt{3}$

1.74 ▲▲△ **Per a quins valors de *x* es poden calcular les arrels següents?**

a) $\sqrt{\mathbf{x - 2}} = x \geqslant 2$ **b)** $\sqrt{\mathbf{-x}} = x \leqslant 0$ **c)** $\sqrt{\mathbf{8 - x}} = x \leqslant 8$ **d)** $\sqrt{\mathbf{x^2 + 1}} = \mathbb{R}$

1.75 ▲▲▲ **Si saps que *a* > 1, com ordenaries els nombres següents de més petit a més gran?**

$\mathbf{a, \dfrac{1}{a}, -\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a + 1}, -\dfrac{1}{a + 1}}$

$-\dfrac{1}{a} < -\dfrac{1}{a + 1} < \dfrac{1}{a + 1} < \dfrac{1}{a} < a$

Problemes d'estratègia

Rectangles auris

$\dfrac{1}{\Phi} + 1 = \Phi$

Espiral i natura

$5\Phi + 3$; $8\Phi + 5$; $13\Phi + 8$

Racionals i irracionals en el cub

$m = \sqrt{\frac{5}{4}}$ és irracional

$n = \frac{3}{2}$, és racional

Dins del quadrat

$A = 15{,}48$ cm^2

Jocs per pensar

Radis i Fibonacci

■ $R_6 = 8\Phi + 5$

$R_7 = 13\Phi + 8$

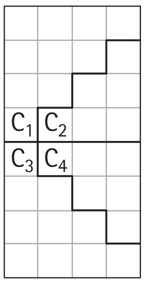
$R_8 = 21\Phi + 13$

$R_9 = 34\Phi + 21$

■ Sent la sèrie de Fibonacci = F

$R_n = F_n \cdot \Phi + F_n \cdot 1$

Cases amb parcel·la



De lògica

La sèrie és «cap forat, un forat, dos forats», per tant el dibuix que continuaria la sèrie seria el de jaqueta, que té tres forats (els traus).

Ordena de menor a major

$8^{99} < 16^{75} < 32^{120} < 25^{150} < 7^{300} < 2^{900}$

Va d'espelmes

L'espelma més ampla té ara 10 cm d'alçària.