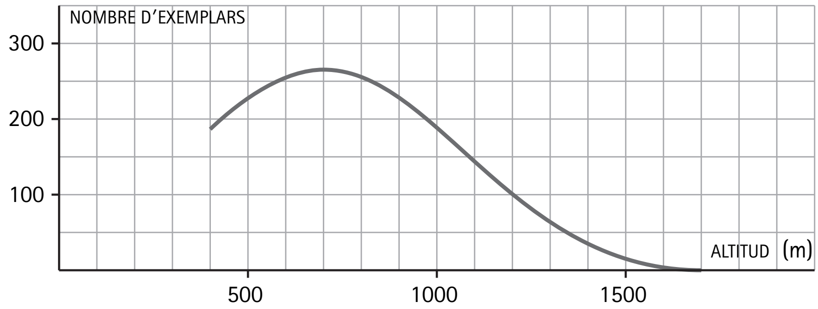
Reflexiona

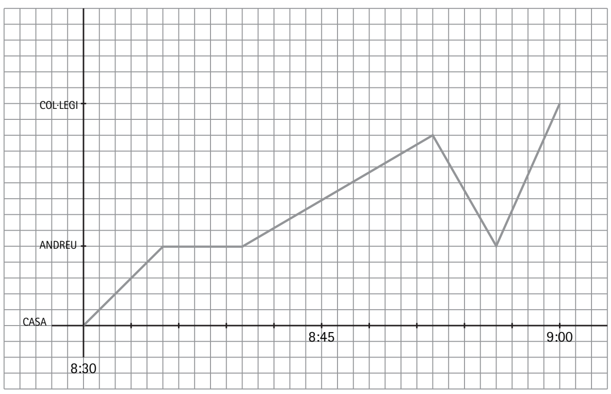
En una comarca hi ha una espècie vegetal molt abundant. S'ha estudiat la quantitat mitjana d'exemplars per hectàrea que es pot trobar a altituds diferents. El resultat apareix en el gràfic adjunt. Observa'l i contesta les preguntes següents:



■ **Quina és la quantitat mitjana d'exemplars a 500 m? I a 1200 m?**
500 m → 225 exemplars
1 200 m → 100 exemplars
■ **A quina altitud hi ha més exemplars?** 700 m
■ **Entre quines altituds es troba la comarca estudiada?** Entre 400 m i 1 700 m
■ **En una altra comarca de característiques semblants hi ha altituds de 2000 m. Quants exemplars d'aquestes plantes creus que pot haver-hi?** Cap
■ **Fes una descripció global de la funció en què expliquis breument com evoluciona el nombre d'exemplars per hectàrea segons l'altitud.** El nombre d'exemplars augmenta fins als 700 m. Després disminueix fins pràcticament desaparèixer per damunt de 1 600 m.

Et convé recordar

Funcions descrites mitjançant enunciats sense dades numèriques
■ **Fes un gràfic per representar el recorregut de l'Albert, des de casa seva fins a l'escola, en funció del temps.**
Va sortir de casa a les 8.30 i es dirigí a casa del seu amic Andreu, on el va esperar una estona assegut al banc. Després se'n van anar tots dos, a poc a poc, cap a l'escola. Quan estaven a punt d'arribar-hi, s'adonà que s'havia deixat la cartera al banc. Va tornar corrents a casa de l'Andreu, l'agafà i arribà a l'escola a les 9 en punt.



Funcions descrites mitjançant enunciats amb dades numèriques

■

TAULA DE PREUS: APARCAMENT «LA GARRIGA»	
PRIMERA HORA:	Gratuït
SEGONA HORA:	0,5 €
TERCERA HORA:	1 €
QUARTA HORA O MÉS:	2 € més per cada hora
ESTADA MÀXIMA:	10 hores

• **Digues quant costa deixar-hi el cotxe:**

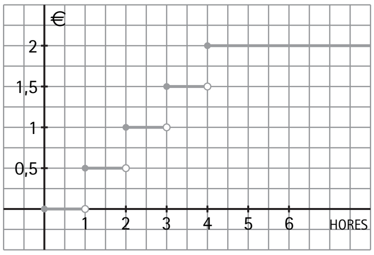
a) 0,5 hores = 0,5 h és gratuït

b) 1,5 hores = 1,5 h costa 0,5 €

c) 2,5 hores = 2,5 h costa 1,5 €

d) 5,5 hores = 5,5 hores costa 7,5 €

• **Representa gràficament la variació del cost en funció del temps.**



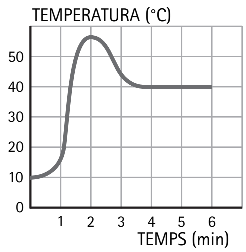
Què és i com s'obté el pendent d'un segment

■ **Calcula el valor del pendent dels segments *AB*, *BC*, *CD*, *DE* i *EB*, sabent que les coordenades dels seus extrems són: *A*(–4, 1), *B*(1, 6), *C*(5, 4), *D*(6, –2), *E*(–2, –2).**

$AB \rightarrow$ pendent = 1 $\quad DE \rightarrow 0 \quad BC \rightarrow -\frac{1}{2} \quad EB \rightarrow \frac{8}{3} \quad CD \rightarrow -6$

Activitats

4.1 **El gràfic descriu la temperatura a què surt l'aigua d'una aixeta que es manté oberta una estona.**



a) Quines són les dues variables? Temps-temperatura.

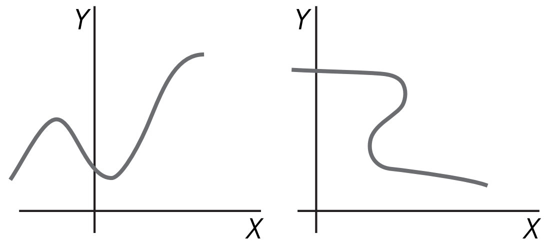
b) Explica per què és una funció.

Perquè defineix diferents valors de temperatura en funció del temps, és a dir, de manera dependent del temps.

c) Quin és el domini de definició? I el recorregut?

Dom f = [0, 6], Recorregut = [10, 55]

4.2 Un d'aquests dos gràfics correspon a una funció i l'altre, no. Identifica'ls i raona la resposta.



El gràfic de l'esquerra correspon a una funció perquè per a cada valor de x, correspon un valor de y; en canvi, el gràfic de la dreta no correspon a una funció perquè hi ha valors de x que corresponen a 2 valors de y.

4.3 Analitzem el gràfic corresponent a l'índex de la borsa.

a) Et sembla raonable que el gràfic arrenqui exactament del valor 100?

Sí és raonable ja que d'aquesta manera:

$y > 100 \rightarrow$ indicarà un augment en l'índex de la borsa.

$y = 100 \rightarrow$ el valor serà el mateix que a l'inici, no hi haurà variació.

$y < 100 \rightarrow$ indica una disminució en l'índex de la borsa.

b) El màxim anual va ser del 128%. En quin moment es va assolir aquest màxim? Respon aproximadament. Entre març i abril.

c) Quin va ser el mínim anual? En quin moment es va assolir aquest mínim?

El mínim va ser aproximadament de 65% i es va assolir durant el mes d'octubre.

d) Quin va ser el valor de la borsa a finals d'any? 90%.

4.4 Analitzem el gràfic que descriu la velocitat del ciclista.

a) Quant temps triga a fer el recorregut? 70 minuts.

b) En els primers 15 minuts circula en pla. A quina velocitat ho fa? Quina distància recorre?

Velocitat = 25 km/h; Distància = 6,25 km

c) Entre els 18 i els 22 minuts va costa amunt. A quina velocitat ho fa? 17 km/h aproximadament.

d) Assenyala un interval de 5 minuts en què vagi costa avall. A quina velocitat ho fa?

Entre els 35 i 40 minuts passa de 25 km/h a 37 km/h, aprox.

4.5 Troba la quota corresponent a cada una d'aquestes bases liquidables.

a) 2500 € = 375 € **b) 12 640 € =** 2 673,6 €

c) 25 000 € = 5 640 € **d) 93 000 € =** 34 910 €

4.6 Calcula la distància de frenada d'un cotxe per a velocitats de 10, 40, 80, 100, 120, 150 i 200 km/h (EXEMPLE 1).

Velocitat (km/h)		distància frenada (m)
10	→	2,84
40	→	20,24
80	→	64,16
100	→	95
120	→	131,76
150	→	198
200	→	338

A quina velocitat correspon una distància de 60 m? 60 m corresponen a una velocitat de 76,96 km/h.

4.7 **Troba el volum d'una esfera el radi de la qual fa 5 cm, i el radi d'una esfera el volum de la qual és de 800 cm³ (EXEMPLE 2).**

a) $\left.\begin{array}{l} r = 5 \text{ cm} \\ V = ? \end{array}\right\} V = \frac{500}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$ b) $\left.\begin{array}{l} r = ? \\ V = 800 \text{ cm}^3 \end{array}\right\} r = 5{,}75 \text{ cm}$

4.8 **Troba el període d'un pèndol d'1 m de llarg (EXEMPLE 3). Es diu que aquest pèndol «bat segons». És raonable l'expressió?**

$l = 1$ m $\rightarrow T = 2$ s

Sí es raonable ja que fa una oscil·lació en 2 s, és a dir, l'anada la fa en un segon, igual que la tornada.

4.9 **Calcula la mida aparent, *A*, d'un objecte per a aquests valors de *d*: 0; 0,5; 1; 1,5; 1,9; 1,99 (EXEMPLE 4).**
Per a *d* = 4, s'obté que *A* = –1. Això significa que l'objecte es veu de la mateixa mida, però invertit. Interpreta els valors de *A* per a aquests valors de *d*: 10; 5; 2,5; 2,1; 2,01.

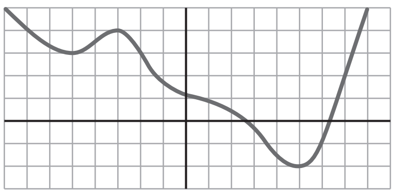
d	0	0,5	1	1,5	1,9	1,99
A	1	1,33	2	4	20	200

d	10	5	2,5	2,1	2,01
A	–0,25	–0,66	–4	–20	–200

4.10 **Calcula el domini de definició de:**

a) $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 8} \rightarrow (-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, +\infty)$ **b)** $y = \sqrt{x - 5} \rightarrow [5, +\infty)$

4.11 **Observa aquesta funció i digues:**



a) En quins intervals és creixent i en quins és decreixent?

Creixent: (–5, –3) U (5, +∞). Decreixent: (–∞, –5) U (–3, 5)

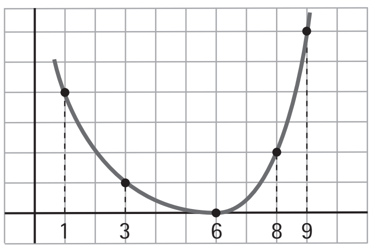
b) Quins en són els màxims i els mínims relatius?

Màxims: (–3, 4), Mínims: (–5, 3) i (5, –2)

4.12 **Troba la TVM d'aquesta funció en els intervals [1, 3], [3, 6], [6, 8], [8, 9] i [3, 9].**

TVM en [1, 3] = $-\frac{3}{2}$ TVM en [3, 6] = $-\frac{1}{3}$ TVM en [6, 8] = 1

TVM en [8, 9] = 4   TVM en [3, 9] = $\frac{5}{6}$



4.13 **Troba la TVM de la funció $y = x^2 - 4x + 5$ (EXERCICI RESOLT 2) en els intervals [0, 2], [1, 3] i [1, 4].**

TVM en [0, 2] = −2

TVM en [1 ,3] = 0

TVM en [1, 4] = 1

4.14 **Troba la velocitat mitjana de la pedra de l'EXERCICI RESOLT 3 en els intervals [0, 1], [0, 3], [3, 4] i [4, 8].**

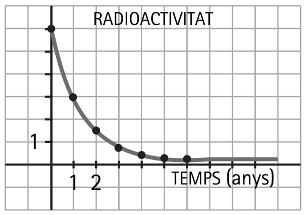
VM en [0, 1] = 35 m/s

VM en [0, 3] = 25 m/s

VM en [3 ,4] = 5 m/s

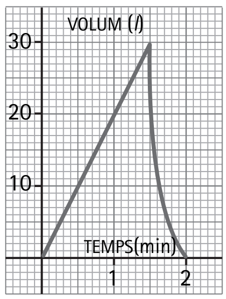
VM en [4, 8] = −20 m/s

4.15 **La quantitat de radioactivitat que posseeix una substància es redueix a la meitat cada any. El gràfic adjunt descriu la quantitat de radioactivitat en un cert cos de la substància.**

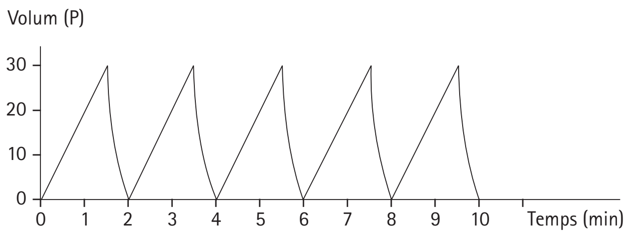


A quant *tendeix* la radioactivitat amb el pas del temps? Tendeix a 0.

4.16 **La cisterna d'uns serveis públics s'omple i es buida automàticament cada dos minuts, seguint el ritme del gràfic adjunt.**



a) Dibuixa el gràfic corresponent a 10 min.

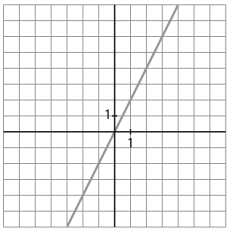


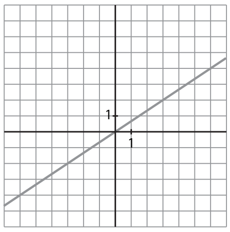
b) Quanta aigua hi haurà a la cisterna en els instants següents?:
I) 17 min II) 40 min 30 s III) 1 h 9 min 30 s

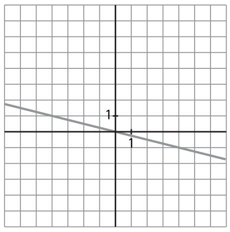
I → 20 l   II → 10 l   III → 20 l

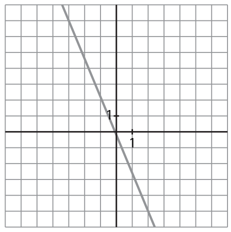
4.17 **Representa:**

a) $y = 2x$ **b)** $y = \frac{2}{3}x$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x$ **d)** $y = -\frac{7}{3}x$

a)


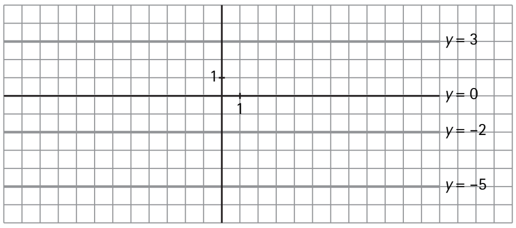
b)


c)


d)


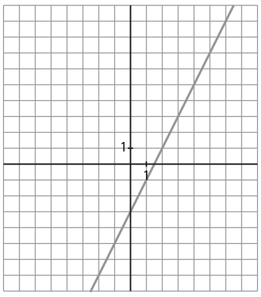
4.18 **Representa:**

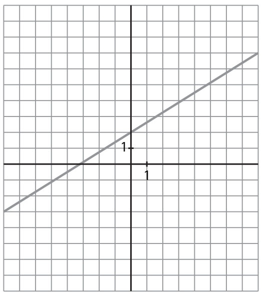
a) $y = 3$ **b)** $y = -2$ **c)** $y = 0$ **d)** $y = -5$

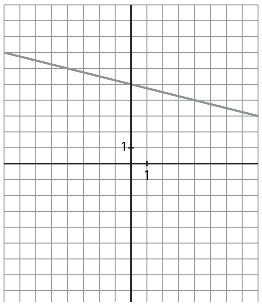


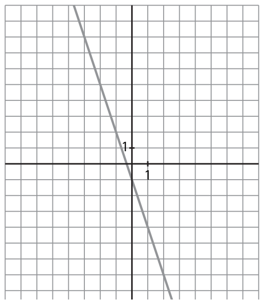
4.19 **Representa:**

a) $y = 2x - 3$ **b)** $y = \frac{2}{3}x + 2$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x + 5$ **d)** $y = -3x - 1$

a)


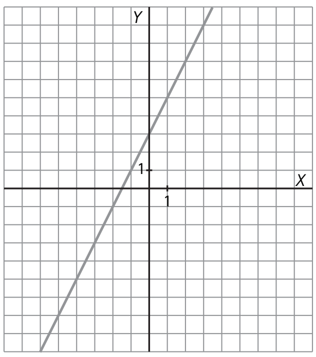
b)


c)


d)


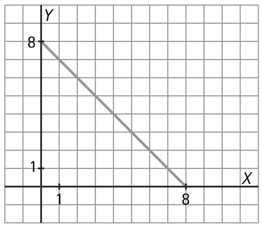
4.20 **Un mòbil, en l'instant inicial, es troba a 3 m de l'origen i se n'allunya a una velocitat de 2 m/s. Calcula l'equació de la seva posició en funció del temps i representa-la.**

$y = 3 + 2x$, on y és la distància a l'origen en metres i x és el temps en segons.



4.21 **Un mòbil que inicialment portava una velocitat de 8 m/s frena amb una acceleració de −1 m/s². Escriu l'equació de la velocitat en funció del temps i representa-la.**

$y = 8 - x$, on y és la velocitat en m/s i x és el temps en segons.



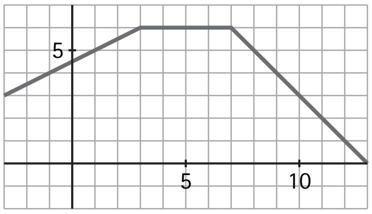
4.22 **Calcula l'equació de cadascuna de les rectes següents.**

a) **Passa per (−3, −5) i el seu pendent és $\frac{4}{9}$.** $y = \frac{4}{9}x - \frac{11}{3}$

b) **Passa pel punt (0, −3) i el seu pendent és 4.** $y = 4x - 3$

c) **Passa per (3, −5) i per (− 4, 7).** $y = -\frac{12}{7}x + \frac{1}{7}$

4.23 **Escriu l'equació que correspon a aquest gràfic.**



$$y = \begin{cases} (1/2)(x + 9) & \text{si } x \leqslant 3 \\ 6 & \text{si } 3 < x \leqslant 7 \\ 13 - x & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

4.24 **Representa la funció l'expressió analítica de la qual és la següent.**

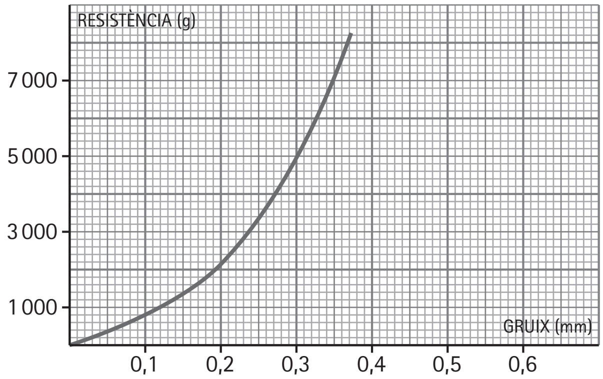
$$y = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x - 3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 2 & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Digues quin és el pendent de cadascun dels trams que formen la funció.

El pendent en el primer i en l'últim tram és 0; en el segon és 1.

Interpretació de gràfics

4.25 ▲△△ **En un llibre de pesca hem trobat el gràfic següent que relaciona la resistència d'un tipus de fil amb el seu gruix:**



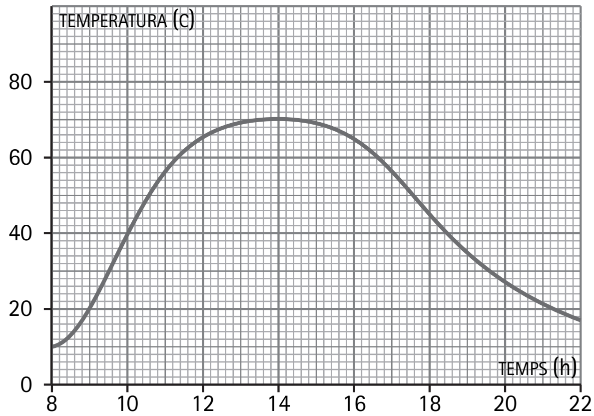
a) Quin gruix ha de tenir el fil d'un pescador que vulgui pescar salmons el pes dels quals no superi els 2 kg? Un gruix d'almenys 0,17 mm.

b) Amb quants grams es podria trencar un fil de 0,2 mm de gruix? I de 0,35 mm?

Amb més de 2 200 g es trencaria un fil de 0,2 mm.

Amb més de 7 000 g es trencaria un fil de 0,35 mm.

4.26 ▲△△ **El gràfic següent ens mostra la temperatura d'un radiador des que s'encén la calefacció (8 h) fins a 14 hores més tard:**



a) Quina és la temperatura màxima a què arriba i en quin moment l'assoleix?

70 °C, i l'aconsegueix a les 14 hores.

b) Calcula la taxa de radiació mitjana entre les 8 h i les 10 h i explica'n el significat. És la mateixa entre les 10 h i les 12 h?

TVM en [8, 10] = 15. Significa que entre les 8 h i les 10 h, la temperatura del radiador augmenta 15 °C cada hora.

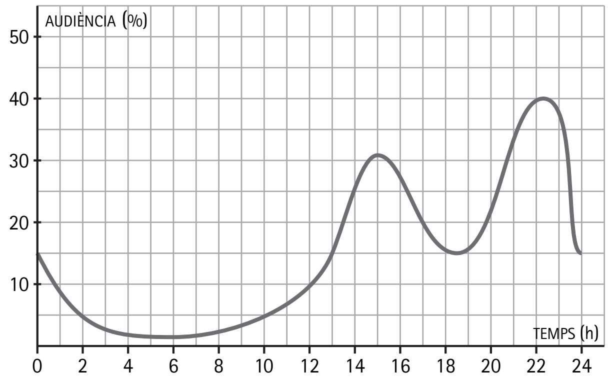
TVM en [10, 12] = 12,5.

La TVM en [10, 12] és menor que en l'interval [8, 10].

c) Quin és el domini de la definició? [8, 22]

d) Digues en quin interval la funció és decreixent. [14, 22]

4.27 ▲△△ **a) Aquesta corba mostra l'audiència de televisió a l'Estat espanyol en un dia del mes d'abril de 2007. Quins són els punts més importants? Descriu-la.**

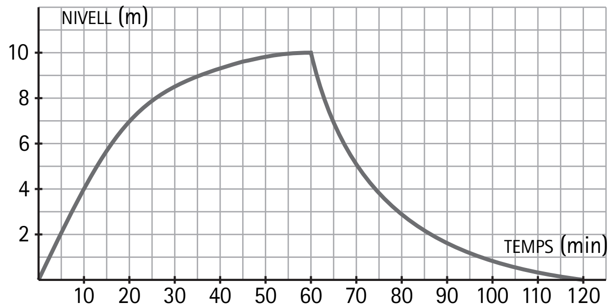


A les 0 h hi ha un 15% de gent que veu la televisió. D'aquesta hora endavant decreix el percentatge fins a les 6 h, que comença a créixer a poc a poc fins a les 15 h, que és quan hi ha més d'un 30% d'audiència. Baixa una altra vegada fins a un 15% a les 18 h, i torna a pujar molt ràpidament fins a un 40% d'audiència a les 22 h, que comença a decréixer, i es queda a les 24 h en un 15%, igual que al principi.

b) Quan es parla d'audiència, es diu que l'Estat espanyol, igual que França, Itàlia o Portugal, pertany al grup de països *camell*, les corbes d'audiència dels quals tenen dos *geps*. Uns altres països, com ara Alemanya i Dinamarca, són del grup *dromedari*, amb un sol *gep*, que es produeix al voltant de les 20 h. Què volen dir els tècnics quan parlen de *geps*?

Els geps són els màxims, és a dir, els punts amb un índex d'audiència més alt.

4.28 ▲△△ **Aquest gràfic mostra com varia el nivell de l'aigua en un dipòsit que s'omple amb una bomba i que porta dues vàlvules per regular l'entrada i la sortida de l'aigua:**



a) Quin és el màxim d'aquesta funció? Explica'n el significat.

El màxim arriba als 60 minuts, i és de 10 m d'altura. Això significa que, en arribar l'aigua als 10 m, s'obre la vàlvula.

b) En quins punts talla l'eix de les *x*? Què signifiquen aquests punts?

En $x = 0$ i en $x = 120$.

Per a $x = 0$, comença a omplir-se el dipòsit, i per a $x = 120$, és que el dipòsit s'ha buidat, a les 2 hores.

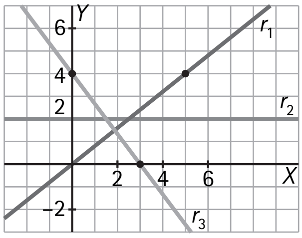
c) Quin és el seu domini de definició?[0, 120]

d) Digues en quin interval és creixent i en quin és decreixent.

Creixent → (0, 60), decreixent → (60, 120)

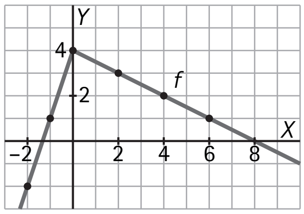
Gràfics i fórmules

4.29 ▲△△ **Associa amb cada recta la seva equació.**



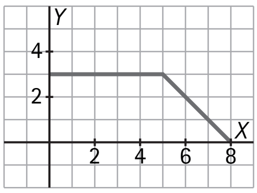
a) $y - 2 = 0 \rightarrow r_2$
b) $4x - 5y = 0 \rightarrow r_1$
c) $4x + 3y = 12 \rightarrow r_3$

4.30 ▲△△ **Observa el gràfic de la funció *f* i completa la taula de valors següent.**



x	–2	–1	0	2	4	6	8
y	–2	1	4	3	2	1	0

4.31 ▲▲△ **A quina d'aquestes funcions, *f*, *g* o *h*, correspon aquest gràfic?**



a) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ -x + 8 & \text{si } 6 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$ b) $g(x) = \dfrac{24 - 3x}{8}$ c) $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leqslant x < 5 \\ -x + 8 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$

Correspon a la funció c).

4.32 ▲▲△ **Comprova si els parells de valors que figuren en la taula següent corresponen a la funció donada i completa els que hi falten.**

$$y = 3 - \frac{1}{x - 2}$$

x	2,01	2,5	1,9	102	0	1,99
y	–97	1	13	2,99	3,5	103

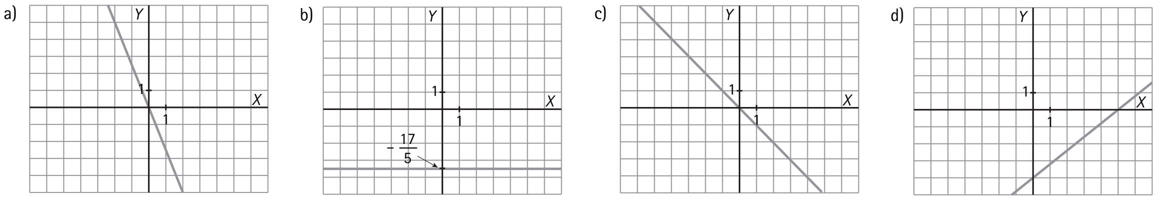
Quin valor no podem donar a x en aquesta funció?

$x = 2$

Funcions lineals

4.33 ▲△△ **Representa.**

a) $y = -2{,}5x$ **b)** $y = -\dfrac{17}{5}$ **c)** $y = -x$ **d)** $y = \dfrac{4x - 20}{5}$



4.34 ▲△△ Exercici resolt.

4.35 ▲△△ **Calcula, en cada cas, el pendent de la recta que passa pels punts A i B i escriu la seva equació.**

a) $A(5, 0)$, $B(0, 3)$ → $m = -\dfrac{3}{5}$; $y = -\dfrac{3}{5}x + 3$ **b)** $A(-4, 1)$, $B(-2, 5)$ → $m = 2$; $y = 2x + 9$

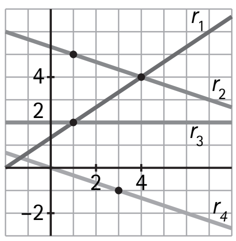
c) $A(2, -3)$, $B(-1, 2)$ → $m = -\dfrac{5}{3}$; $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$ **d)** $A\left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ → $m = \dfrac{9}{5}$; $y = \dfrac{9}{5}x + \dfrac{21}{10}$

4.36 ▲△△ **Digues quin és el pendent de cadascuna de les rectes següents.**

a) $y = 3x - 5$ → $m = 3$ **b)** $y = \dfrac{2x + 3}{5}$ → $m = \dfrac{2}{5}$

c) $y = 3$ → $m = 0$ **d)** $x - 2y + 4 = 0$ → $m = \dfrac{1}{2}$

4.37 ▲▲△ **Calcula l'equació de les rectes r_1, r_2, r_3 i r_4.**



$r_1 \rightarrow y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$ $r_2 \rightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{16}{3}$ $r_3 \rightarrow y = 2$ $r_4 \rightarrow y = -\dfrac{1}{3}x$

4.38 ▲△△ **Calcula els punts de tall amb els eixos de coordenades d'aquestes rectes i representa-les.**

a) $y = -3 + 2(x - 1)$ → Eix $X \rightarrow \left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$; Eix $Y \rightarrow (0, -5)$

b) $y = \dfrac{3x + 15}{5}$ → Eix $X \rightarrow (-5, 0)$; Eix $Y \rightarrow (0, 3)$

c) $-x + 4y = -2$ → Eix $X \rightarrow (2, 0)$; Eix $Y \rightarrow \left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

d) $x - y = 0$ → Eix $X \rightarrow (0, 0)$; Eix $Y \rightarrow (0, 0)$

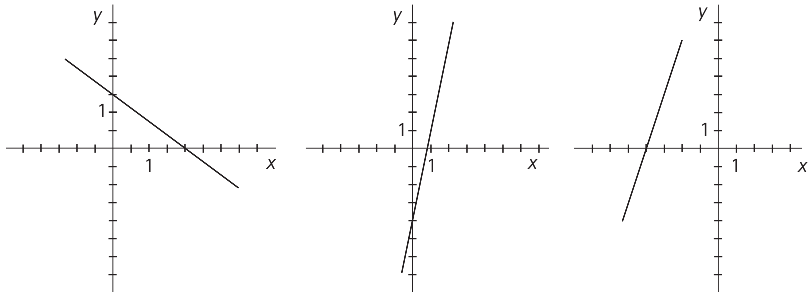
4.39 ▲△△ **Escriu l'equació de les rectes següents i representa-les.**

a) El seu pendent és $m = -\frac{2}{3}$ i passa pel punt $P(-1, 2)$.

b) El seu pendent és $m = 5$ i la seva ordenada en l'origen és -4.

c) És paral·lela a $2x - y + 4 = 0$ i passa pel punt $P(-3, 2)$.

a) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$; b) $y = 5x - 4$; c) $y = 2x + 8$

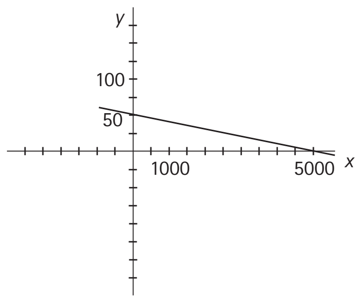


4.40 ▲△△ **Representa les rectes següents (pren una escala adequada en cada eix).**

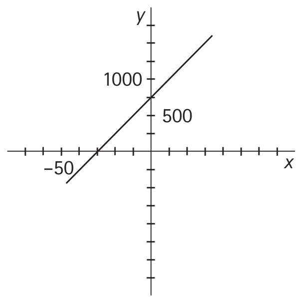
a) $y = 50 - 0{,}01x$ **b) $y = 25x + 750$**

c) $y = \frac{x}{150} - 5$ **d) $x - 70y = 840$**

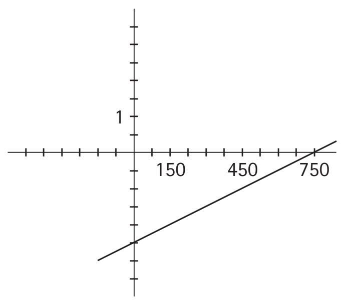
a)



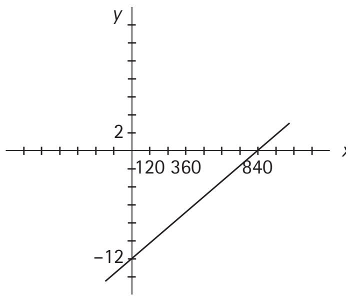
b)



c)



d)



4.41 ▲△△ **Calcula, en cada cas, l'equació de la recta que passa pels punts P i Q i representa-la.**

a) $P(350, 0)$, $Q(100, 135)$ → $y = -\frac{27}{50}x + 189$ **b) $P(0{,}04; 0{,}85)$, $Q(0{,}4; 1{,}75)$** → $y = 2{,}5x + 0{,}75$

4.42 ▲△△ **Digues, sense representar-les, quines d'aquestes rectes són paral·leles.**

a) $y = \frac{2x - 1}{3}$ **b) $y = \frac{1}{2}$** **c) $y = 2x + 3$** **d) $y - 2x = -5$** **e) $y = -7$** **f) $2x - 3y = 0$**

a) Paral·lela a f); c) paral·lela a d); b) paral·lela a e).

4.43 ▲▲△ **Un lampista cobra 18 € pel desplaçament i 15 € per cada hora de feina.**

a) Fes una taula de valors de la funció *temps-cost* i representa-la gràficament.

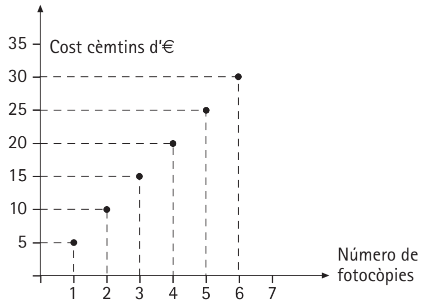
Temps (h)	1	2	3	4	5
Cost (€)	33	48	63	78	93

b) Si ha cobrat per una reparació 70,50 €, quant temps hi ha invertit? 3 hores i mitja.

Pensa i resol

4.44 ▲▲△ **Una casa de reprografia cobra 5 cèntims per cada fotocòpia. També ofereix un servei de multicòpia, pel qual cobra 50 cèntims fixos pel clixé i 1,50 cèntims per cada còpia d'un mateix exemplar.**

Fes, per a cada cas, una taula de valors que mostri el que s'ha de pagar segons el nombre de còpies realitzades. Representa les funcions obtingudes.



Nre. de fotocòpies	1	2	3	4	5	6
Cost (cent. d'€)	5	10	15	20	25	30

Nre. de multicòpies	1	2	3	4	5
Cost (cent. d'€)	51,5	53	54,5	56	57,5

Té sentit unir els punts en cadascuna? Escriu l'expressió analítica de cada funció. A partir de quantes còpies és més econòmic utilitzar la multicopista?

No té sentit unir els punts de cadascuna, ja que no es pot fer una fracció de fotocòpia, com, per exemple, 1/2 fotocòpia.

Fotocòpies → $y = 5x$ amb $x \in \mathbb{N}$

Multicòpies → $y = 50 + 1,5x$ amb $x \in \mathbb{N}$

A partir de 15 còpies, és més econòmic utilitzar la multicopista.

4.45 ▲▲△ **Mentre pujàvem per una muntanya, vam mesurar la temperatura i vam obtenir les dades d'aquesta taula:**

Altitud (m)	0	360	720	990
Temperatura (°C)	10	8	6	4,5

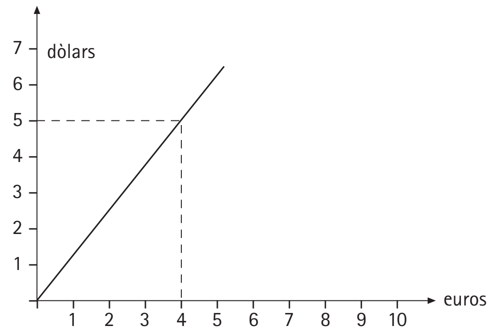
a) Representa la funció *altitud-temperatura* i busca'n l'expressió analítica.

$y = 10 - \dfrac{x}{180}$

b) A partir de quina altitud la temperatura és més baixa que 0 °C? 1800 m.

4.46 ▲▲△ **En un banc ens donen 10 euros per 14 dòlars. Escriu l'expressió analítica de la funció que dóna el canvi d'euros a dòlars i representa-la. De quin tipus és?**

$y = \frac{14x}{10} = 1{,}4x \rightarrow$ és una funció de proporcionalitat. $y = 1{,}4x$.



4.47 ▲▲△ **Un triangle isòsceles té 20 cm de perímetre.**
Anomena *x* el costat desigual i *y* els costats iguals. Fes una taula de valors i, a partir d'aquesta, escriu la relació entre *x* i *y*.
Quin tipus de funció obtens?

$y = -\frac{x}{2} + 10 \rightarrow$ és una funció lineal.

4.48 ▲▲△ **Determina el domini de definició de les funcions següents i calcula'n la taxa de variació mitjana en l'interval [4, 7].**

a) $y = \sqrt{x-3} \rightarrow \text{TVM}_{[4,\,7]} = \frac{1}{3}$ i $D = [3, +\infty)$

b) $y = \sqrt{2x+7} \rightarrow \text{TVM}_{[4,\,7]} = \frac{\sqrt{21}-\sqrt{15}}{3} \simeq 0{,}24$ i $D = [-35, +\infty)$

c) $y = \sqrt{8-x} \rightarrow \text{TVM}_{[4,\,7]} = -\frac{1}{3}$ i $D = (-\infty, 8]$

d) $y = \sqrt{x^2+1} \rightarrow \text{TVM}_{[4,\,7]} = \frac{\sqrt{50}-\sqrt{17}}{3} \simeq 0{,}98$ i $D = \mathbb{R}$

4.49 ▲△△ **Determina el domini de definició de les funcions següents. Calcula la taxa de variació mitjana de les funcions dels apartats *d*), *e*) i *f*) en l'interval [−1, 2].**

a) $y = \frac{1}{5x-15} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ b) $y = \frac{2}{2x+7} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{2}\right\}$ c) $y = \frac{1}{4x+x^2} \rightarrow \mathbb{R} - \{0, 4\}$

d) $y = \frac{-3}{x^2+1} \rightarrow \mathbb{R}$ e) $y = \frac{x}{x^2-9} \rightarrow \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ f) $y = \frac{1-x}{x^2-x-6} \rightarrow \mathbb{R} - \{3, -2\}$

TVM: d) $\text{TVM}_{[-1,\,2]} = 0{,}3$ e) $\text{TVM}_{[-1,\,2]} = -0{,}175$ f) $\text{TVM}_{[-1,\,2]} = 0{,}25$

4.50 ▲▲△ **Compara i interpreta la taxa de variació mitjana de les funcions $f(x) = 3x^2$ i $g(x) = x^3$ en l'interval [0, 4].**

$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 \rightarrow \text{TVM}_{[0,\,4]} = 12 \\ g(x) = x^3 \rightarrow \text{TVM}_{[0,\,4]} = 16 \end{array}\right\}$ Ambdues funcions són creixents en l'interval [0, 4] perquè la seva TVM és positiva. El creixement de $g(x)$ és major que el de $f(x)$.

4.51 ▲▲△ Exercici resolt.

4.52 ▲▲△ **Calcula el domini de definició de les funcions següents.**

a) $y = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow [-2, 2]$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9} \rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

c) $y = \sqrt{2x^2 - 5x} \rightarrow (-\infty, 0] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

d) $y = \sqrt{x^2 - x - 6} \rightarrow (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

e) $y = \sqrt{-x^2 + 2x - 3} \rightarrow [-1, 3]$

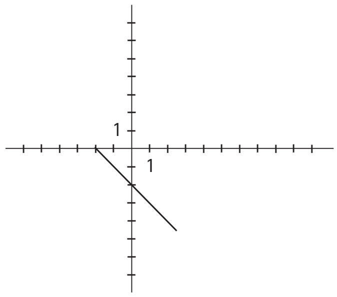
f) $y = \sqrt{x^2 - x + 5} \rightarrow \mathbb{R}$

4.53 ▲△△ **Representa les funcions següents per als valors en què estan definides.**

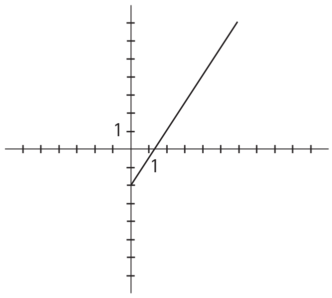
a) $y = -x - 2$ **si** $-2 \leqslant x \leqslant 2$

b) $y = \dfrac{3x - 4}{2}$ **si** $0 \leqslant x \leqslant 6$

a)



b)



4.54 ▲▲△ Exercici resolt.

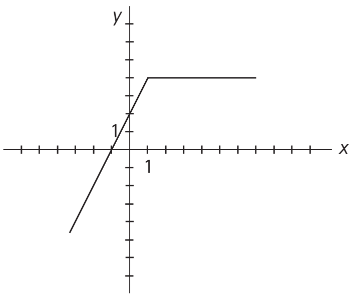
4.55 ▲▲△ **Representa aquestes funcions.**

a) $y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

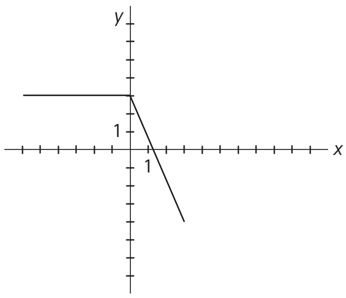
b) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x < 5 \\ 5 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

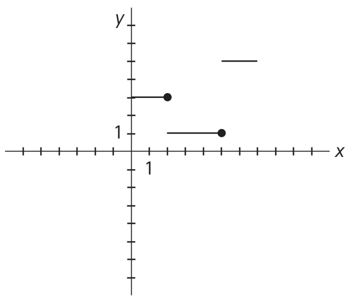
a)



b)



c)



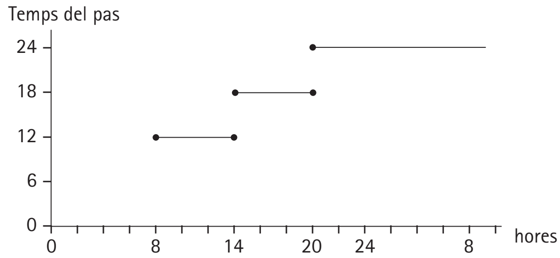
4.56 ▲▲△ **En les trucades interurbanes, el temps que dura cada pas del comptador depèn de l'hora de la trucada:**

De 8 h a 14 h	12 segons
De 14 h a 20 h	18 segons
De 20 h a 8 h de l'endemà	24 segons

a) Representa gràficament la funció que dóna la durada del pas del comptador segons l'hora de la trucada per a un dia complet.

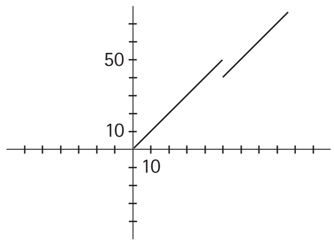
b) Cerca l'expressió analítica d'aquesta funció.

$$y = \begin{cases} 24 \text{ si } 0 < x \leqslant 8 \\ 12 \text{ si } 8 < x \leqslant 14 \\ 18 \text{ si } 14 < x \leqslant 20 \\ 24 \text{ si } 20 < x \leqslant 24 \end{cases}$$



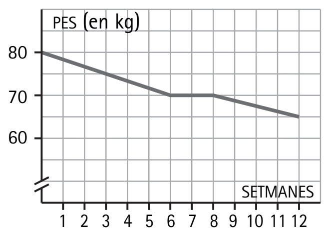
4.57 **▲▲△ En una botiga rebaixen el 10% en compres inferiors a 50 € i el 20% a partir de 50 €. Quina és la relació entre el preu marcat (x) i el que paguem (y)? Representa-la gràficament.**

$$y = \begin{cases} 0{,}9x \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0{,}8x \quad \text{si } x > 50 \end{cases}$$



4.58 ▲▲△ Exercici resolt.

4.59 **▲▲△ El metge ha ordenat a en Ricard un règim per aprimar-se i li ha fet aquest gràfic per explicar-li què espera aconseguir en les 12 setmanes que durarà la dieta.**



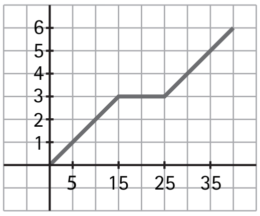
a) Quin pes tenia en començar el règim? 80 kg

b) Quant ha d'aprimar-se per setmana en la primera etapa del règim? I entre la 6a i la 8a setmana? 1,67 kg per setmana. Entre la 6a i la 8a setmana no s'ha d'aprimar gens.

c) Calcula l'expressió analítica d'aquesta funció.

c) $y = \begin{cases} (-5/3)x + 80 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ 70 & \text{si } 6 \leqslant x \leqslant 8 \\ (-5/4)x + 80 & \text{si } 8 \leqslant x \leqslant 12 \end{cases}$

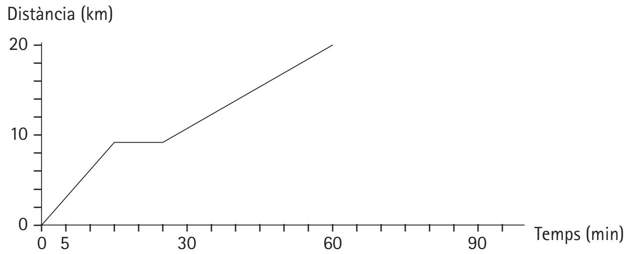
4.60 ▲▲△ **Busca l'expressió analítica d'aquesta funció que mostra l'altura a què es troba un ascensor que puja fins al 6è pis amb una parada al 3r.**



$$y = \begin{cases} x/5 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 15 \\ 3 & \text{si } 15 \leqslant x \leqslant 25 \\ (x/5) - 2 & \text{si } 25 \leqslant x \leqslant 40 \end{cases}$$

4.61 ▲▲△ **Un ciclista surt d'excursió a un lloc que és a 20 km de casa seva. Quan és a 6 km de la sortida, després de 15 minuts, fa una parada de 10 minuts. Reprèn la marxa i arriba al seu destí una hora després d'haver sortit.**

a) Representa el gràfic *temps-distància a casa seva.*



b) Porta la mateixa velocitat abans i després de la parada?
(Suposem que en cada etapa la velocitat és constant.)

Sí, porta la mateixa velocitat abans i després de la parada.

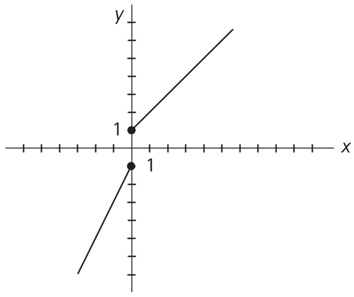
c) Busca l'expressió analítica de la funció que has representat.

c) $y = \begin{cases} (2/5)x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 15 \\ 6 & \text{si } 15 \leqslant x \leqslant 25 \\ (2/5)x - 4 & \text{si } 25 \leqslant x \leqslant 60 \end{cases}$

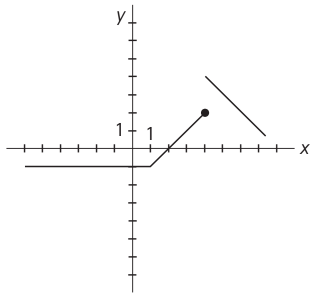
4.62 ▲▲△ **Representa les funcions següents definides a trossos:**

a) $y = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 \leqslant x < 4 \\ 8 - x & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } -2 \leqslant x < 2 \\ -2 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

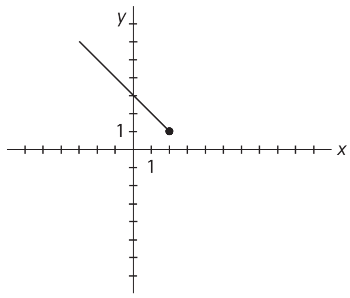
a)



b)



c)



Reflexiona sobre la teoria

4.63 ▲△△ **Esbrina si els punts següents estan alineats; per fer-ho, comprova si *C* pertany a la recta que passa per *A* i *B*:**

$A\left(\frac{1}{3}, 5\right)$, $B\left(\frac{13}{3}, -3\right)$ i $C\left(\frac{100}{3}, -61\right)$ Es troben alineats.

4.64 ▲▲△ **L'expressió analítica d'una funció és de la forma: $y = ax^3 + bx + c$**

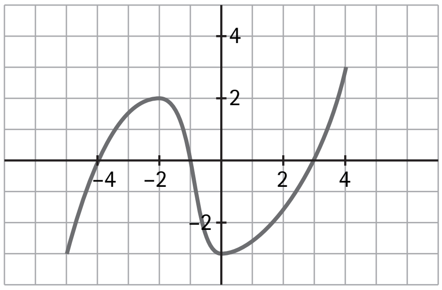
Si sabem que els punts $A(0, 0)$, $B(1, 4)$ i $C(2, -4)$ pertanyen al seu gràfic, quins seran els valors de a, b i c?

$a = -2$; $b = 6$; $c = 0$

4.65 ▲△△ **Comprova si els punts $A(-13, -265)$, $B(0{,}1; 2{,}01)$ i $C\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{16}\right)$ pertanyen al gràfic de la funció: $y = -x^2 + 7x - 5$**

A hi pertany, però no *B* ni *C*.

4.66 ▲△△ **Observa el gràfic de la funció i respon.**



a) Quin és el seu domini de definició? $\mathbb{R}$

b) Té màxim i mínim? En cas afirmatiu, quins són? Màxim → (–2, 2); mínim → (0, –3)

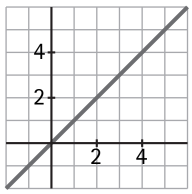
c) Quina és la taxa de variació mitjana en els intervals [–4, –2] i [–2, 0]?

$TVM_{[-4, -2]} = 1$; $TVM_{[-2, 0]} = -2{,}5$

d) Per a quins valors de x és creixent i per a quins és decreixent?

Creixent → $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$; decreixent → $(-2, 0)$

4.67 ▲▲△ **La recta representada en aquest gràfic s'anomena *bisectriu del primer quadrant*.**



a) Escriu la seva expressió analítica. $y = x$

b) Quin és el seu pendent? Quin angle forma amb l'eix *OX*? El seu pendent és 1 i forma 45° amb l'eix *OX*.

c) Si una recta forma un angle de 60° amb l'eix *OX*, el seu pendent serà més gran o més petit que 1? El seu pendent serà major.

d) Escriu l'equació de la bisectriu del segon quadrant. $y = -x$

e) Quin serà el pendent de les rectes paral·leles a la bisectriu del segon quadrant? $m = -1$

4.68 ▲△△ **Quin és el pendent de cadascuna de les rectes següents? Digues si són creixents o decreixents:**

a) $y = \frac{3x - 5}{2} \rightarrow m = \frac{3}{2}$ → Creixent

b) $2x + y - 3 = 0 \rightarrow m = -2$ → Decreixent

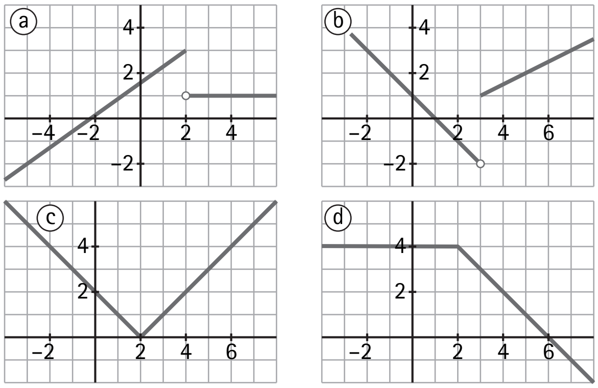
c) $y - 7 = 0 \rightarrow m = 0$ → Ni creixent ni decreixent

d) $y = -3 - \frac{1}{2}(x - 5) \rightarrow m = -\frac{1}{2}$ → Decreixent

Quina relació hi ha entre el creixement o decreixement d'una recta i el seu pendent?

Una recta és creixent si el seu pendent és positiu, i és decreixent si el seu pendent és negatiu.

4.69 ▲▲△ **Calcula l'expressió analítica de les funcions:**



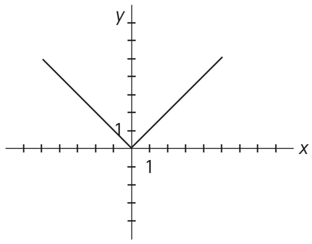
a) $y = \begin{cases} (5/7)x + 11/7 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 3 \\ (1/2)x - 1/2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leqslant 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

4.70 ▲▲△ **a) Representa $y = |x|$ (valor absolut de x).**



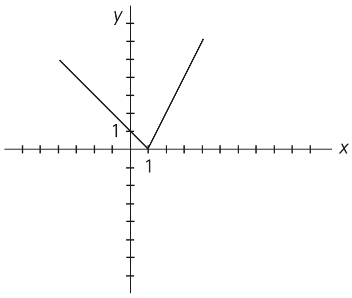
b) Representa: $y = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Compara-la amb l'anterior.

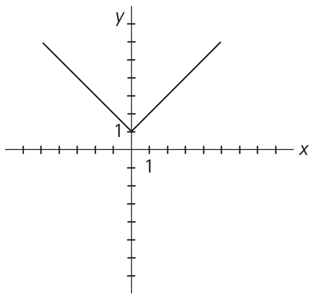
És el mateix gràfic que en l'apartat a).

4.71 ▲▲▲ **Fes el gràfic de les funcions següents:**

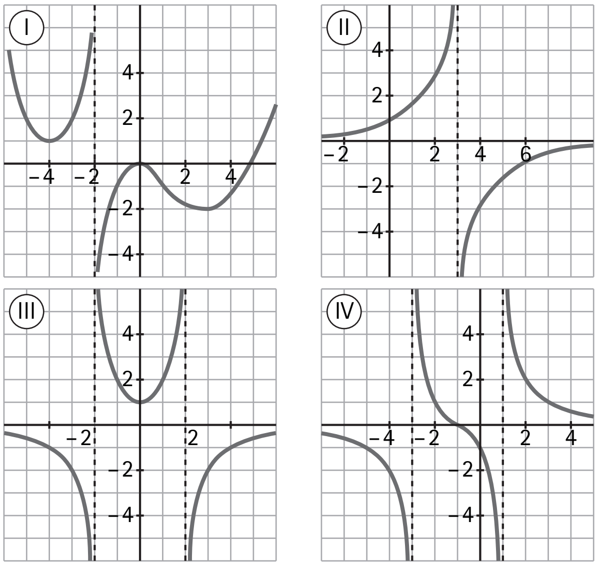
a) $y = |x - 1|$



b) $y = 1 + |x|$



4.72 ▲▲▲ **Els quatre gràfics següents corresponen a funcions discontínues.**



a) Digues quins són els punts de discontinuïtat. Quin és el seu domini de definició?

I $\begin{cases} Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2\} \\ \text{Discontinuïtat: } x = -2 \end{cases}$

II $\begin{cases} Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\} \\ \text{Discontinuïtat: } x = 3 \end{cases}$

III $\begin{cases} Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \\ \text{Discontinuïtats: } x = -2,\ x = 2 \end{cases}$

IV $\begin{cases} Dom\ f = \mathbb{R} - \{-3, 1\} \\ \text{Discontinuïtats: } x = -3,\ x = 1 \end{cases}$

b) Indica si tenen màxims o mínims i digues quins són.

I $\begin{cases} \text{Màxim: } (0, 0) \\ \text{Mínim: } (-4, 1), (3, -2) \end{cases}$

II: No té màxim ni mínim.

III: Mínim: (0, 1)

IV: No té màxim ni mínim.

c) En quins intervals són creixents i en quins són decreixents?

I $\begin{cases} \text{Creixent: } (-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (3, \infty) \\ \text{Decreixent: } (-\infty, -4) \cup (0, 3) \end{cases}$

II: Creixent: $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

III $\begin{cases} \text{Creixent: } (0, 2) \cup (2, \infty) \\ \text{Decreixent: } (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \end{cases}$

IV: Decreixent: $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$

Problemes d'estratègia

Problema

$D = 30 + 2\sqrt{450}$ metres

$D = l + \sqrt{l^2 + k^2}$

Quina és la llei?

a	a
0	5
1	8
2	11
5	20
x	$3x+5$

a	$\boxed{a}$
0	0
1	2
2	6
5	30
x	$x(x+1)$

a	$\boxed{a}$
0	30
1	72
2	132
3	210
x	$9x^2+33x+30$

a	$\boxed{a}$
0	5
1	11
2	23
3	41
x	$3x^2+3x+5$

Comptant quadrats

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ quadrats

Jocs per pensar

Elecció difícil

El flascó *A* conté el remei.

Amb una sola pesada

Seguint l'estratègia del visir, tindrem 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 monedes, que haurien de pesar 55 · 10 = 550 g.

Com que algunes són falses, sols cal veure quant pesen realment les 55 monedes. Per exemple:

— Si pesen 549 g, la falsa és la moneda del primer sac.

— Si pesen 548 g, les falses són les monedes del segon sac.

— Si pesen 547 g, les falses són les monedes del tercer sac.

— Etcètera.

Jocs per a dos

En L'ÚLTIM PERD sempre guanya el primer jugador. L'única cosa que ha de fer és retirar, en la seva primera jugada, una o tres fitxes, perquè en quedi un nombre parell. Després, sols ha de retirar el nombre de fitxes necessari perquè sempre en quedi un nombre parell.