Unitat didàctica 5. Funcions elementals II

Et convé recordar

Com s'obtenen punts d'una funció

■ **Per a la funció $y = x^2 + 3x$, calcula els punts següents:**

a) D'abscissa 3 = (3, 18) **b) D'abscissa −2 =** (−2, −2)

c) D'ordenada 0 = (0, 0) i (−3, 0) **d) D'ordenada 18 =** (3, 18) i (−6, 18)

■ **Per a la funció $y = \sqrt{x + 2}$, calcula els punts següents:**

a) D'abscissa 2 = (2, 2) **b) D'abscissa 14 =** (14, 4)

c) D'ordenada 0 = (−2, 0) **d) D'ordenada 3 =** (7, 3)

■ **Per a la funció $y = 2^x$, calcula els punts següents:**

a) D'abscissa 0 = (0, 1) **b) D'abscissa 5 =** (5, 32)

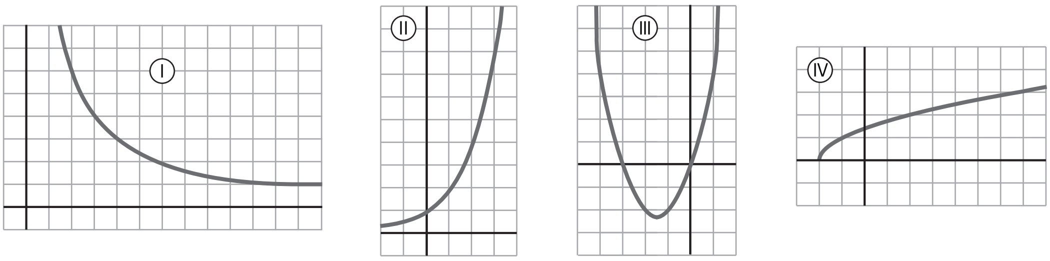
c) D'ordenada 8 = (3, 8) **d) D'ordenada 128 =** (7, 128)

Com es representa una funció a partir de la seva expressió analítica

■ **Els gràfics que hi ha a sota corresponen a les funcions les expressions analítiques de les quals són aquestes:**

a) $y = \sqrt{x + 2}$ **b)** $y = x^2 + 3x$ **c)** $y = 2^x$ **d)** $y = \dfrac{12}{x}$

Troba, en cada cas, els punts necessaris per esbrinar quin és el gràfic corresponent.

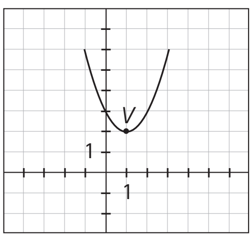


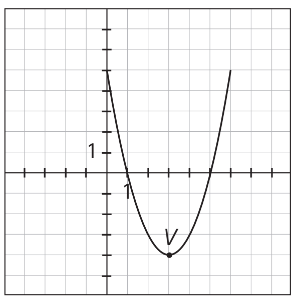
a) IV b) III c) II d) I

Activitats

5.1 **Represènta les paràboles següents.**

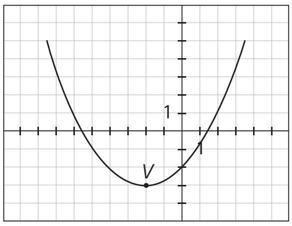
a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$



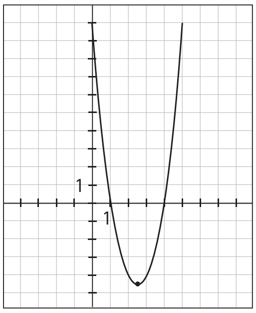


5.2 **Dibuixa aquestes funcions.**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$



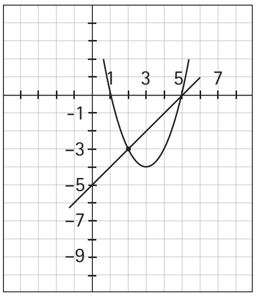
b) $y = 2x^2 - 10x + 8$



5.3 **Resol analíticament i gràficament el sistema d'equacions següent.**

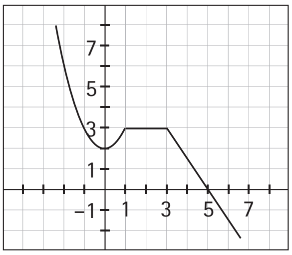
$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

(5, 0) i (2, −3)



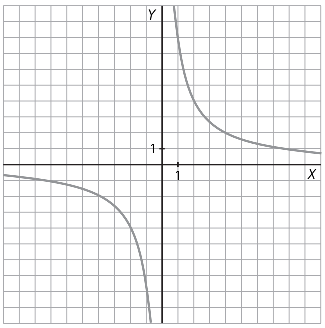
5.4 **Representa gràficament la funció:**

$$y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \dfrac{-3x + 15}{2} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

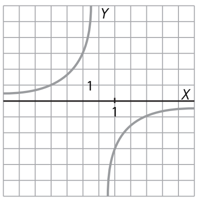


5.5 **Representa.**

a) $y = \frac{8}{x}$

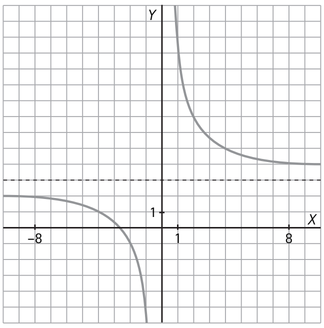


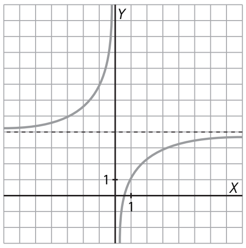
b) $y = -\frac{3}{x}$



5.6 **Dibuixa aquestes funcions.**

a) $y = \dfrac{8}{x} + 3$ b) $y = -\dfrac{3}{x} + 4$

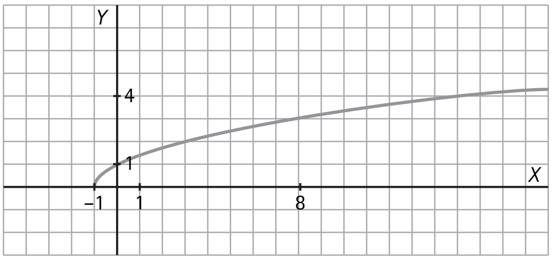




5.7 **Representa aquestes funcions i digues els seus dominis de definició:**

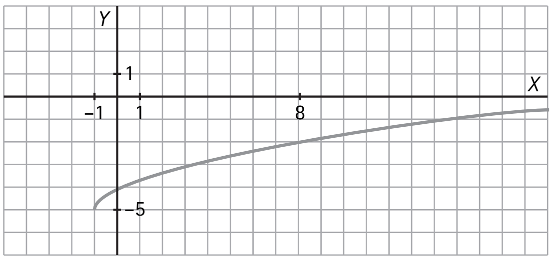
a) $y = \sqrt{x + 1}$ **(Dóna a x els valors –1, 0, 3, 8, 15)** Domini de definició: $[-1, \infty)$

x	$\sqrt{x+1}$
–1	0
0	1
3	2
8	3
15	4



b) $y = \sqrt{x + 1} - 5$ **(Dóna a x els valors –1, 0, 3, 8, 15)** Domini de definició: $[-1, \infty)$

x	$\sqrt{x+1} - 5$
–1	–5
0	–4
3	–3
8	–2
15	–1

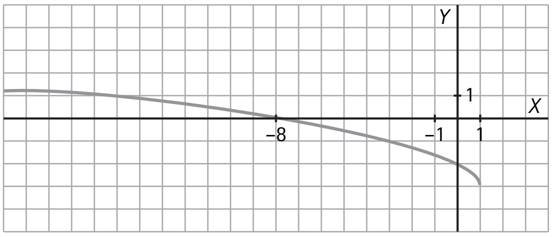


c) $y = \sqrt{x - 1}$ **(Dóna a x els valors 1, 0, –3, –8, –15)** Domini de definició: $(-\infty, 1]$

x	$\sqrt{1 - x}$
1	0
0	1
–3	2
–8	3
–15	4

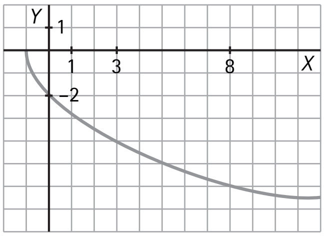
d) $y = \sqrt{x - 1} - 3$ **(Dóna a x els valors 1, 0, –3, –8, –15)** Domini de definició: $(-\infty, 1]$

x	$\sqrt{1 - x} - 3$
1	–3
0	–2
–3	–1
–8	0
–15	1



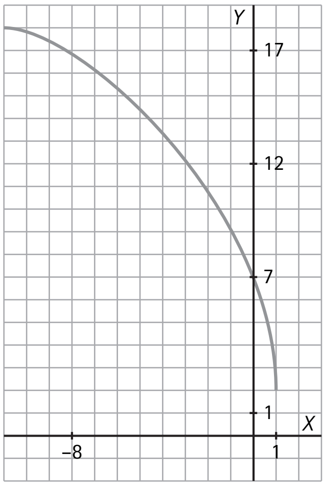
e) $y = -2\sqrt{x + 1}$ Domini de definició: $[-1, \infty)$

x	$-2\sqrt{x+1}$
–1	0
0	–2
3	–4
8	–6



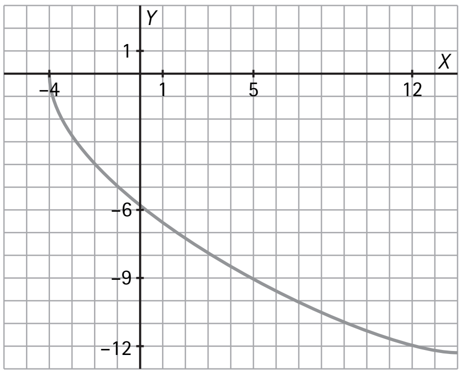
f) $y = 5\sqrt{1 - x} + 2$ Domini de definició: $[-1, \infty)$

x	$5\sqrt{1 - x} + 2$
–8	17
–3	12
0	7
1	2



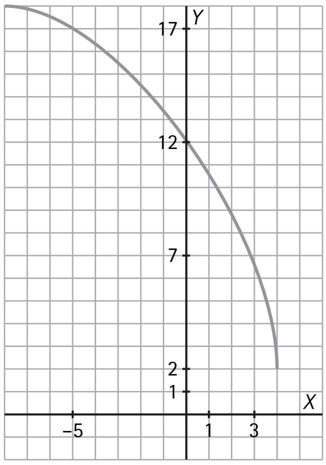
g) $y = -3\sqrt{x + 4}$ Domini de definició: $[-4, \infty)$

x	$-3\sqrt{x + 4}$
–4	0
0	–6
5	–9
12	–12



h) $y = 5\sqrt{x - 4} + 2$ Domini de definició: $(-\infty, 4]$

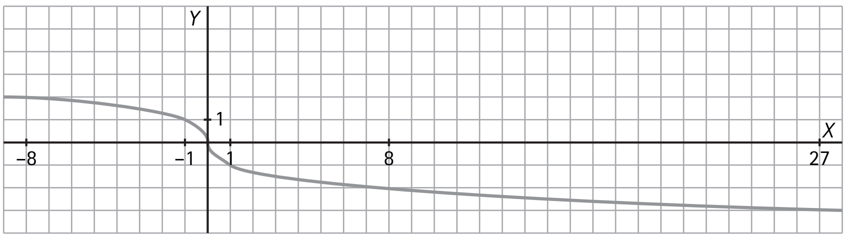
x	$5\sqrt{4 - x} + 2$
−12	22
−5	17
0	12
3	7
4	2



5.8 Representa:

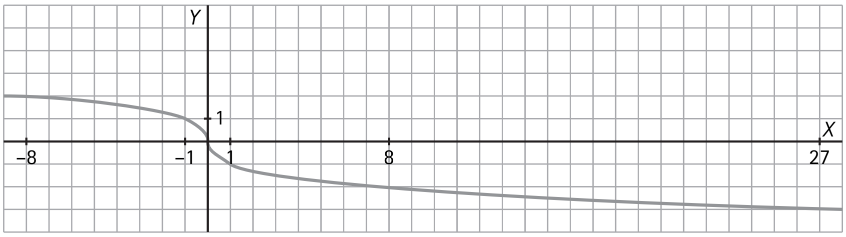
a) $y = -\sqrt[3]{x}$

x	$-\sqrt[3]{x}$
−8	2
−1	1
0	0
1	−1
8	−2
27	−3



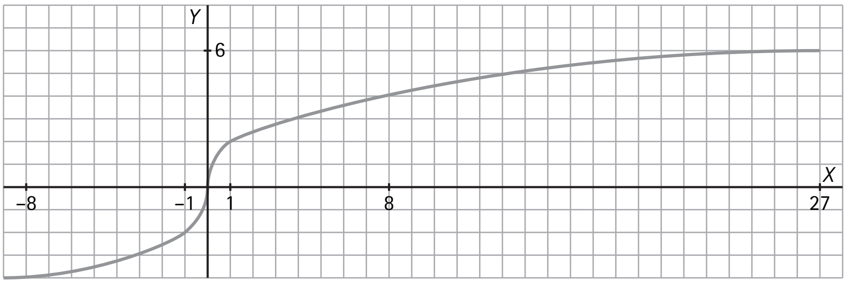
b) $y = \sqrt[3]{-x}$

x	$\sqrt[3]{-x}$
−8	2
−1	1
0	0
1	−1
8	−2
27	−3



c) $y = 2\sqrt[3]{x}$

x	$\sqrt[3]{-x}$
–8	–4
–1	–2
0	0
1	2
8	4
27	6



5.9 Si penges una rosca d'un fil i el fas oscil·lar, hauràs aconseguit un pèndol. El temps que tarda en cada oscil·lació (anada i tornada) s'anomena període. Doncs bé, el període *T* depèn de la longitud *l* del fil segons la fórmula següent:

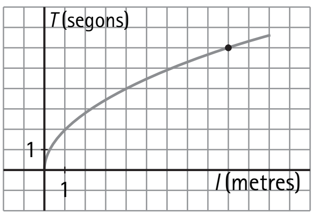
$T = 2\sqrt{l}$ **(*T* en segons i *l* en metres)**

a) Què passa si *l* augmenta? Si *l* augmenta, *T* augmenta.

b) I si *l* disminueix? Si *l* disminueix, *T* disminueix.

c) Pot ser *l* negatiu? *l* no pot ser negatiu (es troba dins d'una arrel; a més, *l* representa una longitud, per la qual cosa aquesta no pot tenir valors negatius).

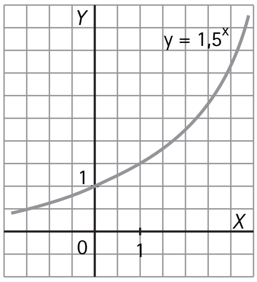
d) Representa'n la funció.



5.10 **Utilitza la calculadora i representa en un full mil·limetrat aquestes funcions.**

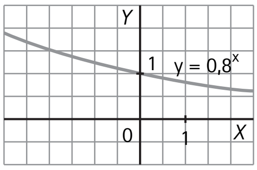
a) $\boldsymbol{y = 1{,}5^x}$ Fem la taula de valors:

x	y
−2	$0,\widehat{4}$
−1	$1,\widehat{6}$
0	1
1	1,5
2	2,25
3	3,37



b) $\boldsymbol{y = 0{,}8^x}$ Fem la taula de valors amb ajuda de la calculadora:

x	y
−2	1,56
−1	1,25
0	1
1	0,8
2	0,64
3	0,51



5.11 **Escriu en forma exponencial les expressions:**

a) $\mathbf{2^{0,4x}} = (1{,}32)^x$ **b)** $\mathbf{10^{0,01x}} = (1{,}02)^x$ **c)** $\mathbf{1{,}01^{12x}} = (1{,}13)^x$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x/28} = (0{,}98)^x$

5.12 **Escriu l'equació que expressa el nombre aproximat d'amebes que hi haurà al cap de *t* hores en un cultiu similar al de l'exemple 1 si al principi hi havia 3 amebes.**
Quantes amebes hi haurà al cap de 150 minuts?

$N = 3 \cdot 2^t$ amb $t \geqslant 0$

Al cap de 150 minuts, hi haurà 17 amebes, aproximadament.

5.13 **En un banc hi ha un capital de 130 000 € a un 12% d'interès anual. Expressa el valor del capital *C* en funció del temps, *t*, expressat en anys, que es mantinguin els diners al banc.**

$C = 130\,000 \cdot (1{,}2)^t$ amb $t \geqslant 0$

5.14 **El temps que tarda a desintegrar-se la meitat de la massa d'una substància radioactiva s'anomena període de semidesintegració.**
Una substància radioactiva té un període de semidesintegració de 10 anys. Tenim 8 g d'aquesta substància. L'equació que dóna la quantitat de substància radioactiva en funció del temps transcorregut, en anys, és $C = 8a^t$. Quin és el valor de *a*?
INDICACIÓ: **$8a^{10} = 4$. Aïlla *a* en la igualtat anterior.**

$a = 0{,}93$

5.15 **Calcula els valors següents i raona quin significat tenen. Esbrina'n de nou el resultat amb la calculadora.**

a) $\log_5 125 = 3$ **b)** $\log_5 0{,}04 = -2$ **c)** $\log_2 128 = 7$

d) $\log_2 0{,}0625 = -4$ **e)** $\log_a 1 = 0$ **f)** $\log_{10} 0{,}0001 = -4$

5.16 **Calcula.**

a) $\log_2 740 = 9{,}53$ **b)** $\log_3 100 = 4{,}19$

c) $\log_5 0{,}533 = -0{,}39$ **d)** $\log_8 0{,}004 = -2{,}65$

Comprova la validesa de cada solució mitjançant la tecla x^y.

Exercicis de la unitat. Practica

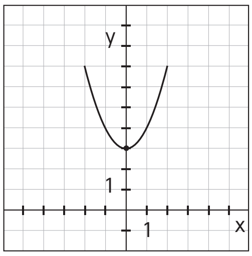
Funcions quadràtiques

5.17 ▲△△ **Fes, en cada cas, una taula de valors com aquesta per representar les funcions següents, i digues quin és el vèrtex de cada paràbola.**

a) $y = x^2 + 3$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

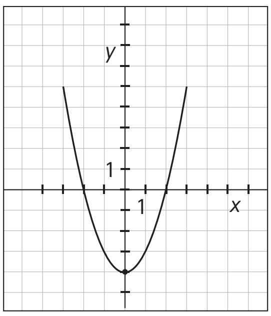
El vèrtex és el punt (0, 3)



b) $y = x^2 - 4$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	−3	−4	−3	0	5	12

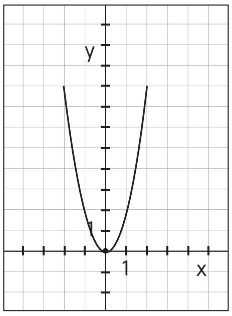
$v = (0, -4)$



c) $y = 2x^2$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

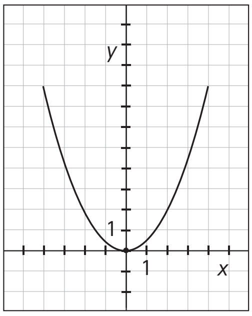
$v = (0, 0)$



d) $y = 0{,}5x^2$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

$v = (0, 0)$

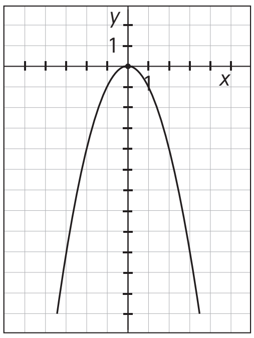


5.18 ▲△△ **Fes una taula de valors com la de l'exercici anterior per representar cadascuna de les funcions següents. Digues quin és el vèrtex de cadascuna d'aquestes paràboles.**

a) $y = -x^2$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−16	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16

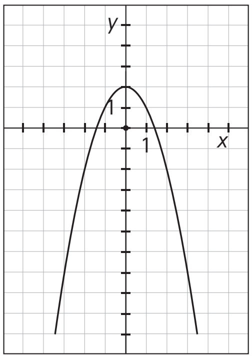
$v = (0, 0)$



b) $y = -x^2 + 2$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−14	−7	−2	1	2	1	−2	−7	−14

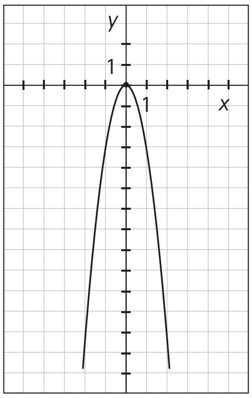
$v = (0, 2)$



c) $y = -3x^2$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−48	−27	−12	−3	0	−3	−12	−27	−48

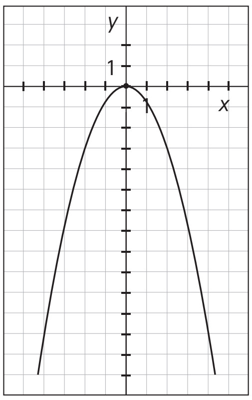
$v = (0, 0)$



d) $y = -0{,}75x^2$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−12	−6,75	−3	−0,75	0	−0,75	−3	−6,75	−12

$v = (0, 0)$

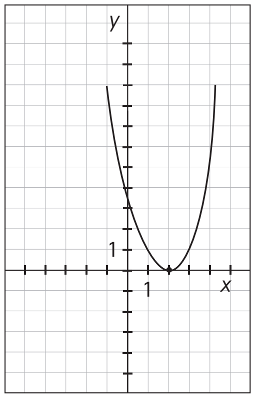


5.19 ▲△△ **Calcula els punts de tall amb els eixos, el vèrtex i alguns punts pròxims a aquest i representa les paràboles següents.**

a) $y = (x - 2)^2$

x	−1	1	3	4
y	9	1	1	4

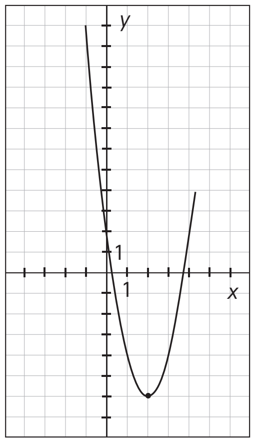
Vèrtex: (2, 0)



b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

x	−1	1	3	4
y	12	−4	−4	2

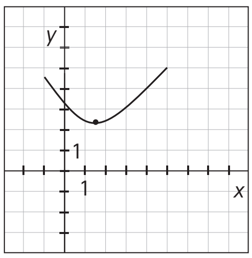
Vèrtex: (2, −6)



c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

x	−1	1	3
y	13/3	7/3	3

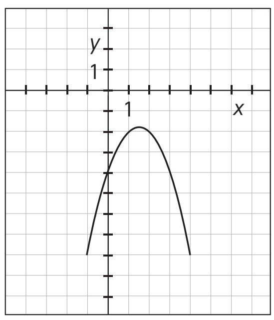
Vèrtex: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$



d) $y = -x^2 + 3x - 4$

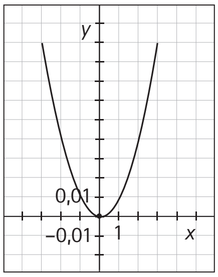
x	−1	1	2	3
y	−8	−2	−2	−4

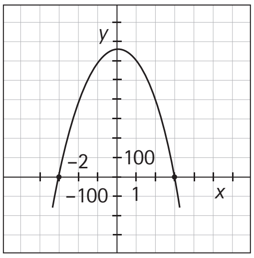
Vèrtex: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

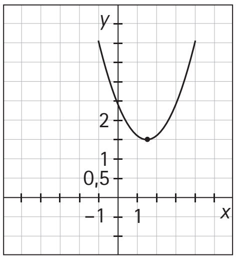


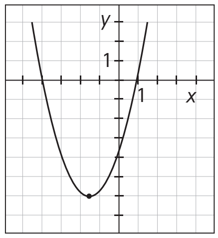
5.20 ▲△△ **Utilitza una escala adequada per representar les paràboles següents.**

a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$ **c)** $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

a)


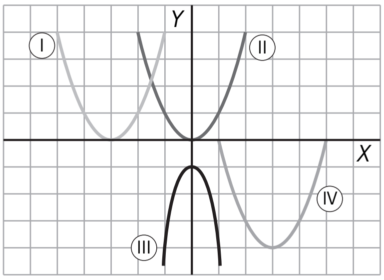
b)


c)


d)


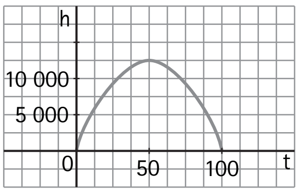
5.21 ▲△△ **Associa amb cadascun dels gràfics una de les expressions següents.**

a) $y = x^2$ → II
b) $y = x^2 - 6x + 5$ → IV
c) $y = (x + 3)^2$ → I
d) $y = -3x^2 - 1$ → III



5.22 ▲▲△ **L'altura, *h*, a què es troba en cada instant, *t*, un projectil que llancem verticalment a una velocitat de 500 m/s és:** $h = 500t - 5t^2$

a) Fes-ne una representació gràfica.



b) Digues quin és el seu domini de definició. Domini = [0, 100]

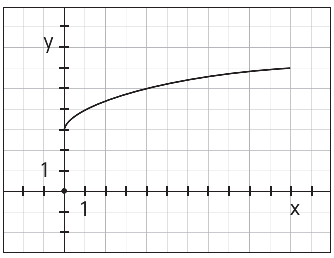
c) En quin instant assoleix l'altura màxima? Quina és? L'altura màxima s'aconsegueix als 50 segons, a una altura de 12 500 metres.

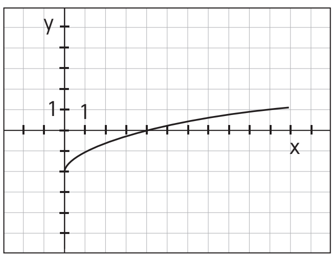
d) En quin interval de temps el projectil es troba a una altura superior als 4500 metres? $h > 4\,500$ m en l'interval (10, 90)

Altres funcions

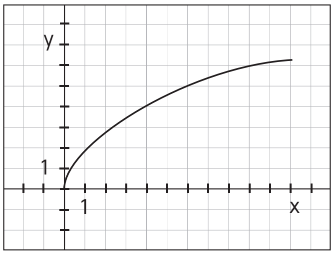
5.23 ▲△△ **Representa gràficament les funcions següents.**

a) $y = 3 + \sqrt{x}$ **b)** $y = \sqrt{x} - 2$ **c)** $y = 2\sqrt{x}$ **d)** $y = \sqrt{-x} + 1$

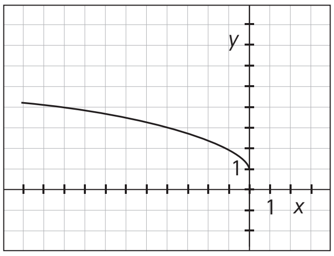
a)


b)


c)

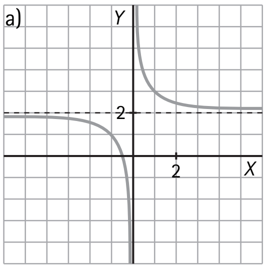


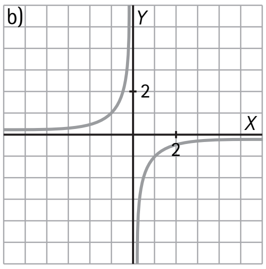
d)

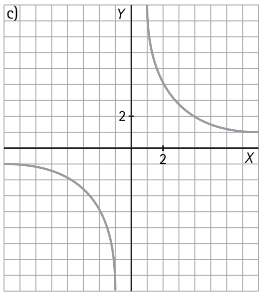


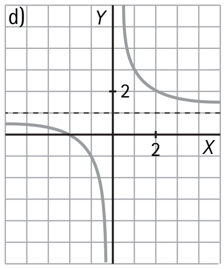
5.24 ▲△△ **Dibuixa el gràfic de les funcions següents.**

a) $y = \frac{1}{x} + 2$ b) $y = -\frac{1}{x}$ c) $y = \frac{8}{x}$ d) $y = \frac{2}{x} + 1$





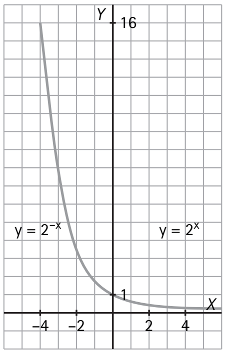




5.25 ▲△△ **Fes, en cada cas, una taula de valors com la de l'exercici 5.17 i representa les funcions següents.**
(Utilitza la calculadora.)

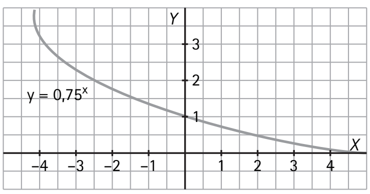
a) $y = 2^{-x}$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625



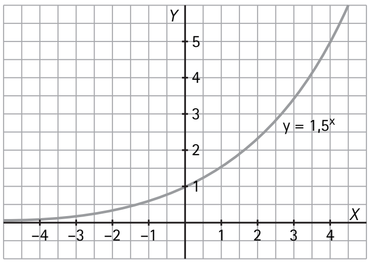
b) $y = 0{,}75^x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	3,16	2,37	1,78	1,33	1	0,75	0,562	0,42	0,31



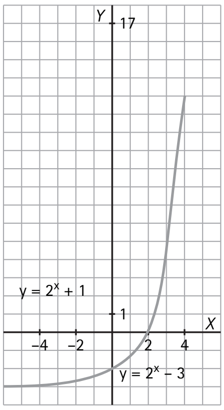
c) $y = 1{,}5^x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0,197	0,296	0,44	0,66	1	1,5	2,25	3,375	5,0625



d) $y = 2^x - 3$

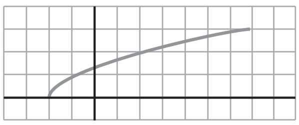
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−2,93	−2,87	−2,75	−2,5	−2	−1	1	5	13



5.26 ▲△△ **Estudia el domini de definició de les funcions següents i representa-les gràficament.**

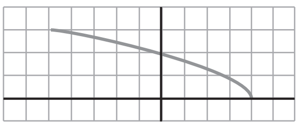
a) $y = \sqrt{x + 2}$

Domini = [−2, ∞)



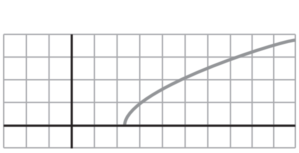
b) $y = \sqrt{4 - x}$

Domini = (−∞, 4]



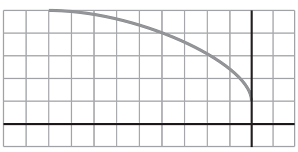
c) $y = \sqrt{2x - 5}$

Domini = $\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$



d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

Domini = (−∞, 0]

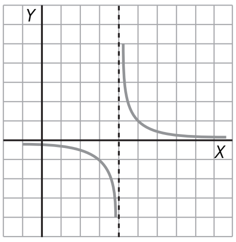


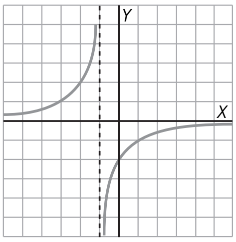
5.27 ▲△△ Exercici resolt.

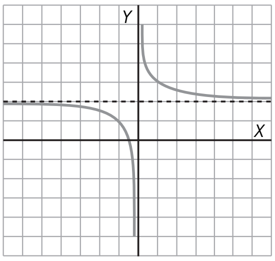
5.28 ▲△△ **Digues quin és el domini de definició de les funcions següents i representa-les gràficament.**

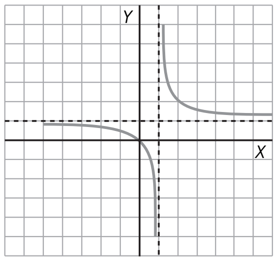
a) $y = \dfrac{1}{x-4}$ **b)** $y = \dfrac{-2}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **d)** $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$

a) Domini = $\mathbb{R} - \{4\}$ b) Domini = $\mathbb{R} - \{-1\}$ c) Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$ d) Domini = $\mathbb{R} - \{1\}$



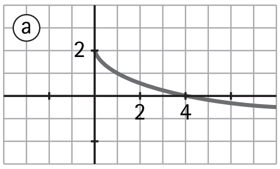


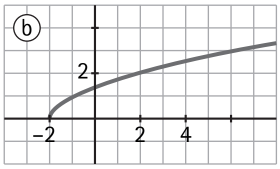


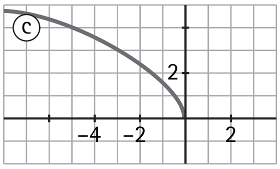


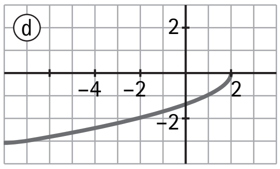
5.29 ▲△△ **Associa amb cada gràfic la fórmula corresponent:**

I) $y = \sqrt{x+2}$ **II)** $y = 2 - \sqrt{x}$ **III)** $y = -\sqrt{2-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$





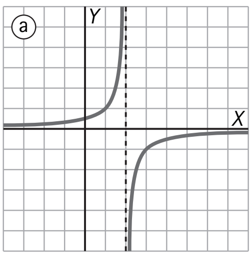


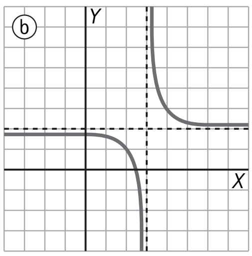


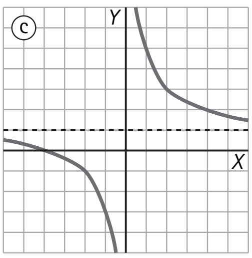
I → b), II → a), III → d), IV → c)

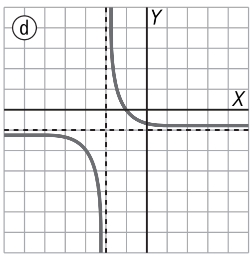
5.30 ▲△△ **Associa els gràfics amb les fórmules:**

I) $y = \dfrac{4}{x} + 1$ **II)** $y = 2 + \dfrac{1}{x-3}$ **III)** $y = -1 + \dfrac{1}{x+2}$ **IV)** $y = \dfrac{-1}{x-2}$





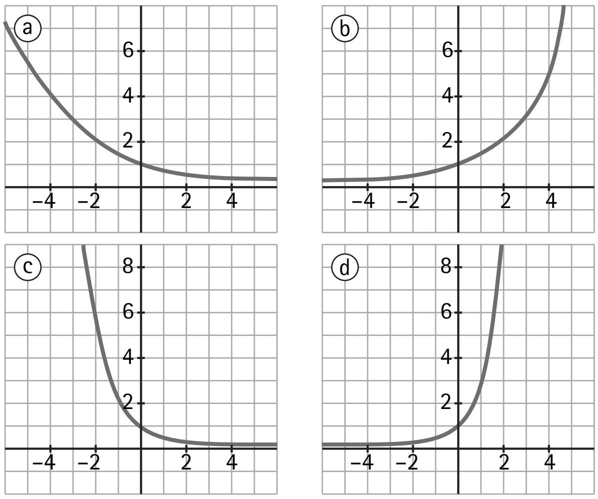




I → c), II → b), III) → d), IV → a)

5.31 ▲△△ **Associa amb cada gràfic una d'aquestes fórmules.**

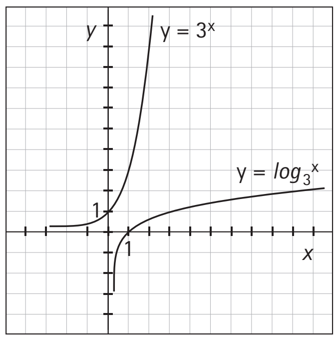
I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1{,}5^x$ **III)** $y = 0{,}4^x$ **IV)** $y = 0{,}7^x$



Digues si cadascuna de les corbes és creixent o decreixent.

I → d) Creixent, II → b) Creixent, III → c) Decreixent, IV → a) Decreixent

5.32 ▲△△ **a) Representa les funcions** $y = 3^x$ **i** $y = log_3\, x$**.**



b) Comprova si els punts següents pertanyen al gràfic de $y = log_3\, x$**:**

$(243,\ 5)\ \left(\frac{1}{27},\ -3\right)\ (\sqrt{3};\ 0{,}5)\ (-3,\ -1)$

$(243,\ 5)$, $\left(\frac{1}{27},\ -3\right)$ i $(\sqrt{3},\ 0{,}5)$ són punts que pertanyen al gràfic de $y = log_3\, x$.

Pensa i resol

5.33 ▲▲△ Exercici resolt.

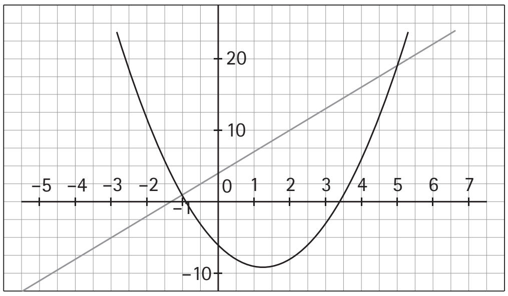
5.34 ▲△△ **Resol analíticament i gràficament els sistemes següents.**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - 15 \end{cases}$

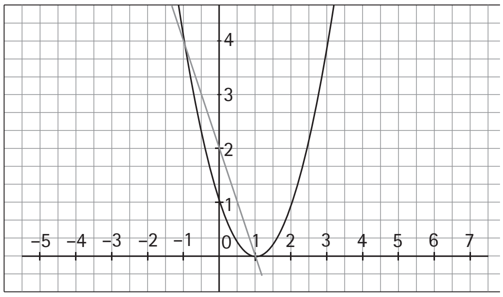
a) $(5,\ 19)$, $(-1,\ 1)$ b) $(1,\ 0)$, $(-1,\ 4)$ c) $x_1 = 0$, $y_1 = -3$; $x_2 = 6$, $y_2 = 21$

d) $x_1 = 3{,}28 \rightarrow y_1 = 5{,}63$, $x_2 = -2{,}28 \rightarrow y_2 = -16{,}63$

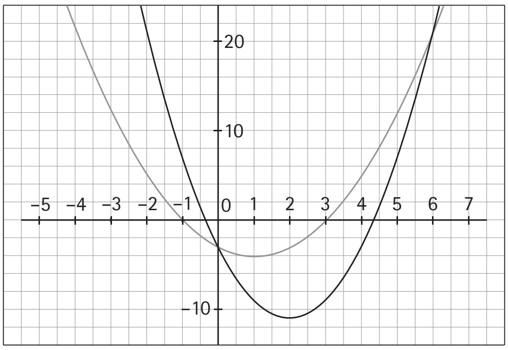
a)



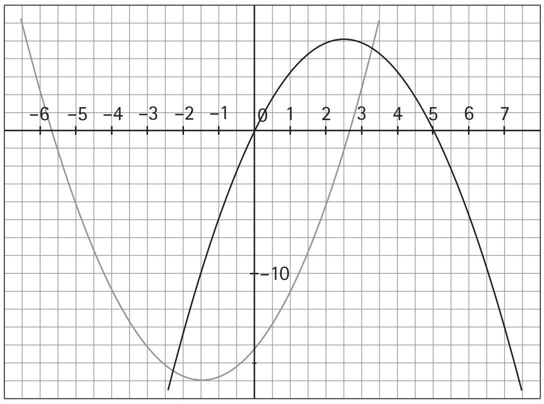
b)



c)



d)



5.35 ▲▲△ **Comprova analíticament i gràficament que aquests dos sistemes no tenen solució:**

a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} - 3 \end{cases}$

• Resolem el sistema:

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} - 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = x - 6 \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow$ No hi ha punts en comú $\rightarrow$ No hi ha solució.

• Representem $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}$

Punts de tall amb els eixos:

Eix X: $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

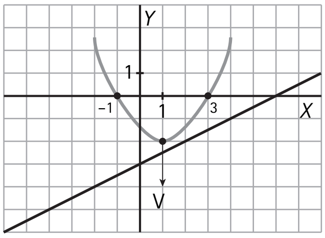
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow (3, 0) \\ -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$$

Eix Y: $y = -\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

Vèrtex: $(1, -2)$

• Representem $y = \frac{x}{2} - 3$

x	0	2
y	–3	–2



b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x - 1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

• Resolem el sistema:

$\frac{1}{x - 1} = -x + 1 \rightarrow 1 = (-x + 1)\,(x - 1) \rightarrow 1 = -(x - 1)^2 \rightarrow 1 = -x^2 + 2x - 1$

$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow$ No hi ha punts en comú.

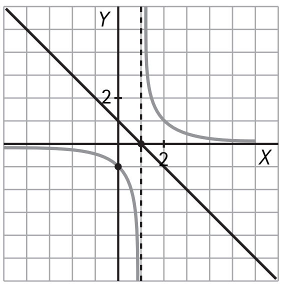
No hi ha solució.

• Representem $y = \frac{1}{x - 1}$

x	0	–1	2	3
y	–1	–1/2	1	1/2

• Representem $y = -x + 1$

x	0	2
y	1	–1



5.36 ▲▲△ **Resol analíticament i gràficament els sistemes següents:**

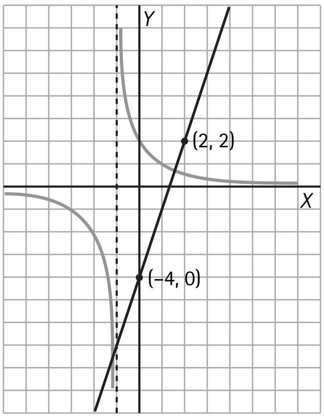
a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x + 1} \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

• Resolem el sistema:

$\frac{2}{x + 1} = 3x - 4 \rightarrow 2 = (3x - 4)\,(x + 1) \rightarrow 3x^2 + 3x - 4x - 6 = 0$

$3x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 72}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{6}$

$x = \frac{1 + \sqrt{73}}{6} \rightarrow y = \frac{12}{\sqrt{73} + 7}$ $\qquad$ $x = \frac{1 + \sqrt{73}}{6} \rightarrow y = \frac{12}{7 - \sqrt{73}}$



b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

• Punts de tall:

$\sqrt{x+1} = x - 5 \rightarrow x + 1 = (x-5)^2 \rightarrow x + 1 = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \dfrac{11 \pm 5}{2} =$

$= \begin{cases} x = 8 \rightarrow y = 3 \\ x = 3 \rightarrow y = -2 \rightarrow \text{no pertany a } y = \sqrt{x+1} \end{cases}$

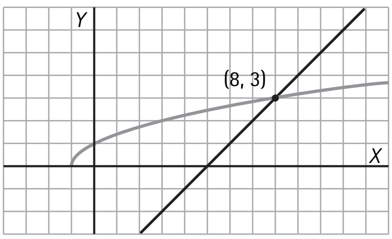
Solució: (8, 3)

• Per representar $y = \sqrt{x+1}$ donem valors:

x	−1	3	0	8
y	0	2	1	3

• Per representar $y = x - 5$, fem la taula de valors:

x	3	8
y	−2	3



5.37 ▲▲△ **Calcula els punts comuns de les funcions $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$.**

(0, 0) i (1, 1)

5.38 ▲△△ **Aplica la definició de logaritme per calcular aquests. No utilitzis la calculadora.**

a) $\log_2 64 = 64$ b) $\log_2 16 = 16$ c) $\log_2 \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ d) $\log_2 \sqrt{2} = \sqrt{2}$

e) $\log_3 81 = 81$ f) $\log_3 \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ g) $\log_3 \sqrt{3} = \sqrt{3}$ h) $\log_4 16 = 16$

5.39 ▲△△ **Resol amb la calculadora.**

a) $\log_2 13{,}5$ = 3,75 b) $\log_3 305$ = 5,206 c) $\log_5 112$ = 2,93 d) $\log_2 \frac{1}{7}$ = −2,807

e) $\log_3 5^7$ = 10,255 f) $\log_4 \sqrt{725}$ = 2,375 g) $\log_2 10^6$ = 19,93 h) $\log_3 10^{-4}$ = −8,384

5.40 ▲▲△ **Calcula la base dels logaritmes següents.**

a) $\log_b 10\,000 = 2 \rightarrow b = 100$ b) $\log_b 125 = 3 \rightarrow b = 5$

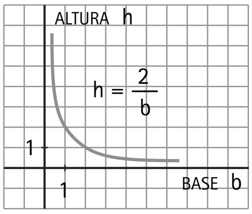
c) $\log_b 4 = -1 \rightarrow b = \frac{1}{4}$ d) $\log_b 3 = \frac{1}{2} \rightarrow b = 9$

5.41 ▲▲△ **Les finestres d'un edifici d'oficines han de tenir 2 m² d'àrea.**

a) Fes una taula que mostri com varia l'alçària de les finestres segons la longitud de la base.

b) Representa la funció *base-alçària*.

b	*h*
0,25	8
0,5	4
1	2
1,25	1,6
1,5	$1,\widehat{3}$
1,75	1,14



5.42 ▲▲△ **Amb un llistó de fusta de 3 metres de llarg, volem fabricar un marc per a un quadre.**

a) Si la base mesurés 0,5 m, quant mesurarien l'alçària i la superfície del quadre? L'altura mesuraria 1 m. La superfície seria de 0,5 m².

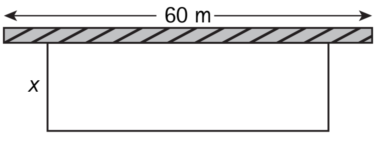
b) Quin és el valor de la superfície per a una base qualsevol *x*? Àrea = $x \cdot \left(\frac{3 - 2x}{2}\right)$

c) Per a quin valor de la base s'obté la superfície màxima?

d) Quant val aquesta superfície?

c) i d) La superfície màxima és $\frac{9}{16}$ = 0,5625 m², que correspon a un marc quadrat de 0,75 m de costat.

5.43 ▲▲△ **Amb 100 metres de tanca volem delimitar un recinte rectangular aprofitant una paret.**



a) Si un dels dos costats de la tanca s'anomena *x*, quant val l'altre? 100 − 2*x*

b) Construeix la funció que ens dóna l'àrea.

La funció seria: $f(x) = \frac{x\,(100 - 2x)}{2}$

c) Quin és el seu domini de definició? Domini de definició: (0, 50)

5.44 ▲▲△ **El cost de fabricació per unitat d'uns adhesius disminueix segons el nombre d'unitats fabricades i ve donat per la funció:**

$$y = \frac{0{,}5x + 10}{x}$$

a) Fes-ne el gràfic corresponent. Es poden unir els punts que hi has representat? No es poden unir els punts, ja que el nombre d'adhesius és un nombre enter (i positiu).

b) Quin serà el cost quan el nombre d'adhesius sigui molt elevat? 50 cèntims per adhesiu.

5.45 ▲▲△ **Tenim 200 kg de taronges que avui es venen a 0,40 €/kg. Cada dia que passa se'n fa malbé 1 kg i el preu augmenta 0,01 €/kg.**

Quan hem de vendre les taronges per obtenir-ne el benefici màxim? Quin serà aquest benefici?

S'han de vendre d'aquí a 80 dies, i el benefici serà de 144 €.

5.46 ▲▲△ **Les despeses anuals d'una empresa per la fabricació de x ordinadors són $G(x) = 20\,000 + 250x$ en euros, i els ingressos que s'obtenen de les vendes són $I = 600x - 0{,}1x^2$ en euros. Quants ordinadors s'han de fabricar perquè el benefici (ingressos menys despeses) sigui màxim?**

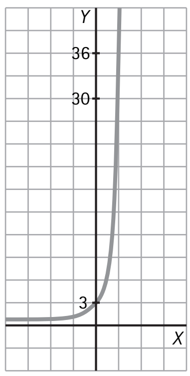
1 750 ordinadors.

5.47 ▲▲△ **El gràfic d'una funció exponencial del tipus $y = ka^x$ passa pels punts (0, 3) i (1; 3,6).**

a) Calcula k i a. $k = 3$; $a = 1{,}2$

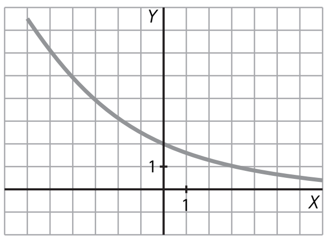
b) És creixent o decreixent? És una funció creixent.

c) Representa la funció.



5.48 ▲▲△ **La funció exponencial $y = ka^x$ passa pels punts (0, 2) i (2; 1,28). Calcula k i a i representa la funció.**

$k = 2$; $a = 0{,}8 \rightarrow$ La funció és $y = 2 \cdot (0{,}8)^x$



5.49 ▲▲△ **S'anomena inflació la pèrdua de valor dels diners; és a dir, si un article que costà 100 € al cap d'un any costa 115 €, la inflació haurà estat del 15%. Suposem una inflació constant del 15% anual. Quant costarà al cap de 5 anys un terreny que avui costa 50 000 €?**

100 567,86 €

5.50 ▲▲△ **En el contracte de lloguer d'un apartament figura que el preu pujarà un 5% anual. Si el preu és de 600 € mensuals, quin serà d'aquí a 5 anys?**
Escriu la funció que dóna el preu del lloguer segons els anys transcorreguts.
765,76 €; $P = 600 \cdot 1{,}05^t$

5.51 ▲▲▲ **Una furgoneta que costà 20 000 € es deprecia a un ritme d'un 12% anual. Quin serà el seu preu d'aquí a 4 anys?**
Calcula la funció que dóna el preu del vehicle segons els anys transcorreguts i calcula quant de temps tardarà el preu a reduir-se a la meitat.
11 993,90 €; $P = 20\,000 \cdot 0{,}88^t$; $t \approx 5{,}4$ anys.

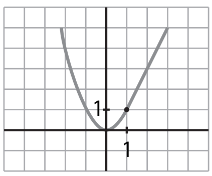
5.52 ▲▲△ **En un bosc en etapa de creixement es mesura el volum de fusta i el resultat són 10 250 m³. S'observa que el bosc creix a un ritme del 2% anual.**
a) Quina quantitat de fusta tindrà d'aquí a 10 anys? $V = 12\,494{,}7$ m³
b) Quina és la funció que dóna la quantitat de fusta segons els anys transcorreguts, suposant que el ritme de creixement es mantingui? $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^t$

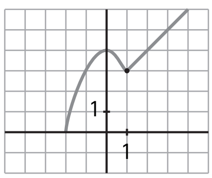
5.53 ▲△△ **Es col·loca un milió d'euros al 8% d'interès anual. En quant es converteix al cap de 3 anys? I al cap de x anys?**
Al cap de tres anys tindrem: $C = 1\,259\,712$ €
Al cap de x anys tindrem: $C = 1\,000\,000 \cdot (1{,}08)^x$ €

5.54 ▲△△ **a) Estudia, sobre el gràfic de la funció $y = x^2 - 4x - 5$, per a quins valors de x es verifica $x^2 - 4x - 5 > 0$.**
$(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$
b) Quins valors de x compliran la desigualtat $x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$? $[-1, 5]$

5.55 ▲▲△ **Representa les funcions següents.**

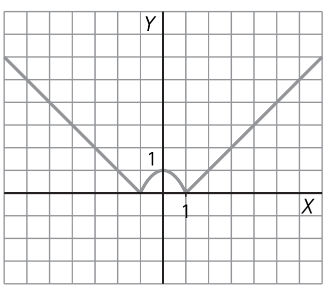
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a)


b)


5.56 ▲▲△ **Representa.**

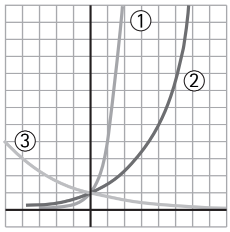
a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$



Reflexiona sobre la teoria

5.57 ▲▲△ **L'expressió analítica d'aquests tres gràfics és de la forma $y = a^x$. Digues el valor de a en cadascun. (En els eixos s'ha pres la mateixa escala.)**

① $a = 4$
② $a = 1,5$
③ $a = 0,76$



5.58 ▲△△ **Totes les funcions exponencials de la forma $y = a^x$ passen per un mateix punt. Digues quin és i justifica-ho.**

Passen pel punt (0, 1). La raó és que qualsevol nombre elevat a 0 dóna 1.

En quins casos la funció és decreixent? Quan $0 < a < 1$

5.59 ▲△△ **Calcula b perquè el vèrtex de la paràbola $y = x^2 + bx + 10$ es trobi en el punt (3, 1). Quin és el seu eix de simetria? En quins punts es talla amb els eixos?**

$b = -6$. L'eix de simetria és la recta $x = 3$.

No té punts de tall amb l'eix X.

El punt de tall amb l'eix Y és el punt (0, 10).

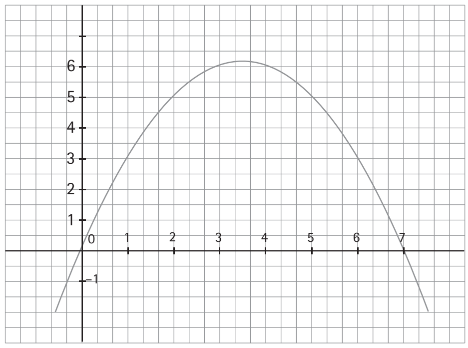
5.60 ▲△△ **Quant ha de valer k perquè la paràbola $y = 4x^2 - 20x + k$ tingui un sol punt de tall amb l'eix d'abscisses? Per a quins valors de k no tallarà l'eix X?**

$k = 25$. La paràbola no talla l'eix X si $k > 25$.

5.61 ▲▲△ **La paràbola $y = ax^2 + bx + c$ passa per l'origen de coordenades. Quin valor té c? Si, a més, saps que passa pels punts (1, 3) i (4, 6), com calcularies a i b? Calcula a i b i representa la paràbola.**

$c = 0$; $a = \frac{-1}{2}$; $b = \frac{7}{2}$

Creant un sistema d'equació: $\begin{cases} 3 = a + b \\ 6 = 16a + 4b \end{cases}$



5.62 ▲△△ **Calcula a i b perquè la funció $y = \dfrac{a}{x - b}$ passi pels punts (2, 2) i (–1, –1).**

$b = 1 \rightarrow a = 2$

Aprofundeix

5.63 ▲▲△ **Aplica la definició de logaritme per calcular x en cada cas:**

a) $\log_2 (2x - 1) = 3 \rightarrow x = \frac{9}{2}$

b) $\log_2 (x + 3) = -1 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

c) $\log 4x = 2 \rightarrow x = 25$

d) $\log (x - 2) = 2,5 \rightarrow x = \approx 318,23$

e) $\log (3x + 1) = -1 \rightarrow x = -\frac{3}{10}$

f) $\log_2 (x^2 - 8) = 0 \rightarrow x = 3; x = -30$

5.64 ▲▲△ **Una equació en què la incògnita es troba en l'exponent s'anomena equació exponencial. Per exemple, $3^{1-x^2} = 1/27$.**

Es resol així: $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$. Com que $\frac{1}{27} = 3^{-3}$: $3^{1-x^2} = 3^{-3} \rightarrow 1 - x^2 = -3 \rightarrow x = 2;\ x = -2$

Expressa com a potència el segon membre i resol aquestes equacions exponencials.

a) $3^{x^2-5} = 81 \rightarrow x = \pm 3$ **b)** $2^{2x-3} = \frac{1}{8} \rightarrow x = 0$

c) $2^{x+1} = \sqrt[3]{4} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$ **d)** $2^{x+1} = 0{,}5^{3x-2} \rightarrow x = \frac{1}{4}$

5.65 ▲▲△ **Per resoldre $3^x = 1000$ no podem aplicar el procediment de l'exercici anterior.**

a) Busca la solució per tempteig amb la calculadora. $x \approx 6{,}2877$

b) Saps que la funció inversa de $y = 3^x$ és $y = log_3\,x$. Per això: $3^x = 1000 \Leftrightarrow x = log_3\,1000$

Calcula el valor de x i compara el resultat amb el que has obtingut en l'apartat *a*).

El resultat és el mateix que l'obtingut en l'apartat a).

5.66 ▲▲▲ **Resol, com en l'exercici anterior, les equacions següents.**

a) $5^x = 42 \rightarrow x = 2{,}32$ **b)** $4^{x-1} = 186{,}4 \rightarrow x = 4{,}77$

c) $2^{x^2+1} = 87 \rightarrow x = \pm 2{,}33$ **d)** $1{,}5^x = 0{,}84 \rightarrow x = -0{,}43$

5.67 ▲▲▲ **Resol aquestes equacions.**

a) $7^{x+2} = 823\,543 \rightarrow x = 5$ **b)** $1{,}5^x = 318 \rightarrow x = 14{,}21$

c) $2^{x^2-2} = 1753 \rightarrow x = \pm 3{,}57$ **d)** $4^{1-x} = 0{,}125 \rightarrow x = 2{,}5$

5.68 ▲▲▲ Exercici resolt.

5.69 ▲▲▲ **Resol les equacions següents.**

a) $3^x + 3^{x+2} = 30 \rightarrow x = 1$ **b)** $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5} \rightarrow x = 0$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \rightarrow x = 2;\ x = 0$ **d)** $2^{x-1} + 4^{x-3} = 5 \rightarrow x = 3$

e) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \rightarrow x = 2;\ x = 1$

Problemes d'estratègia

El salt de la granota

$2 \cdot n + n^2$

Les torres de Hanoi

$a_n = 2^n - 1$

La superfície ombrejada

$0{,}43\ cm^2$

Jocs per pensar

Baula rere baula

Ha d'obrir sols la tercera baula.

L'estrella

Salt	Fitxa suprimida
7 – 1	4
2 – 4	3
8 – 2	6
1 – 7	4
5 – 8	7
10 – 6	8
2 – 8	6
9 – 7	8

Tomografia

1 ↔ A   2 ↔ D   3 ↔ C   4 ↔ E   5 ↔ B