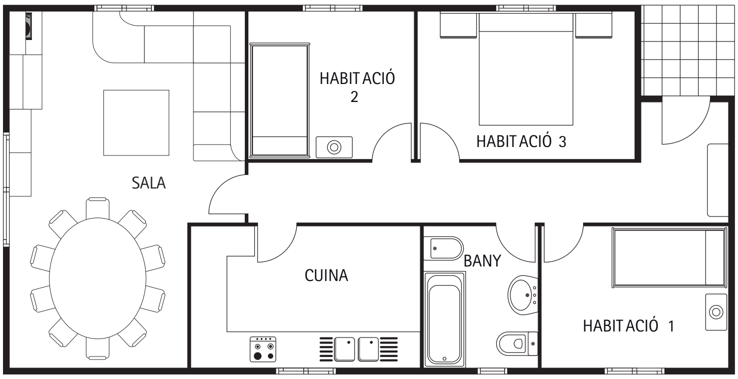
Reflexiona



El plànol de la casa està dibuixat a escala 1:100, és a dir, les distàncies mesurades sobre el plànol es multipliquen per 100 per obtenir les distàncies corresponents en la realitat.

■ **Justifica que 1cm del plànol correspon a 1 m en l'habitatge real.**

Cada mesura del pla s'ha de multiplicar per 100 per obtenir la mesura real.

$$\underbrace{1\text{ cm} \times 100}_{\text{PLA}} = \underbrace{100\text{ cm} = 1\text{ m}}_{\text{MESURA REAL}}$$

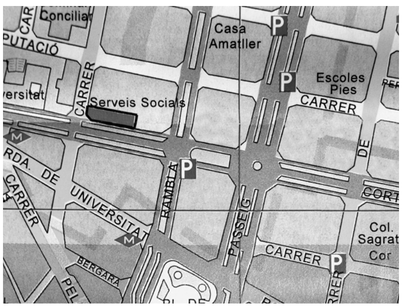
■ **Esbrina les dimensions reals —llarg i ample— de la sala, la cuina i una de les habitacions. Calcula'n la superfície.**

	Mesures en el pla		Mesures reals		Superfície (m²)
	Llarg (cm)	Ample (cm)	Llarg (m)	Ample (m)	
Sala	3 4	2,5 3,5	3 4	2,5 3,5	21,5
Cuina	3,8	2,3	3,8	2,3	8,74
Habitació 1	3,1	2,3	3,1	2,3	7,13
Habitació 2	2,8	2,5	2,8	2,5	7
Habitació 3	3,6	2,5	3,6	2,5	9

Et convé recordar

Què representen els plànols, les maquetes i els mapes

■ **Aquest és el plànol d'una part d'una ciutat, a escala 1:12 500.**



a) Justifica que 1 cm del plànol correspon a 125 m en la realitat.

Com que l'escala és 1 : 12 500, 1 cm del pla correspon a 12 500 cm en la realitat, i 12 500 cm = 125 m.

b) La Jana viu a A i en Pol viu a B. Tria un itinerari per anar d'una casa a l'altra i calcula la distància que han de recórrer.

Quant es tarda, aproximadament, a fer el recorregut a 3 km/h?

Resposta oberta (depèn de l'itinerari elegit).

c) Calcula la superfície real de l'illa de cases de la Casa Amatller.

La superfície real seria 15 625 m^2.

■ **Aquest mapa està a escala 1:20 000 000.**

a) Justifica que 1 cm del mapa correspon a 200 km en la realitat.

L'escala és 1 : 20 000 000, de manera que 1 cm són 20 000 000 de cm, és a dir, 200 km.

b) Calcula la distància de Menorca a Lleida.

2 120 km.

c) Situa la teva localitat en el mapa. Quina distància la separa d'Alger i de Marràqueix?

Resposta oberta (depèn de la localitat elegida).

Activitats

6.1 **a) Un edifici de la maqueta anterior té forma d'ortoedre. Les seves dimensions són 9 cm × × 6,4 cm de planta × 4 cm d'altura. Troba les dimensions, l'àrea de la façana i el volum en la realitat.** A = 900 m^2, V = 28 800 m^3

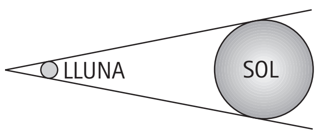
b) La superfície del camp de futbet en la maqueta és de 32 cm^2. Quina és la superfície en la realitat? ($xxx \cdot 250\,000$) cm^2

c) Una caseta de la maqueta és feta amb 0,3 cm^3 de porexpan. Quin és el seu volum real?

($xxx \cdot 1{,}25 \cdot 10^8$) cm^3

d) L'altura d'un edifici en la realitat és de 65 m. Quina és la seva altura en la maqueta? 130 cm

6.2 **Sabem que la Lluna és a 384 000 km de nosaltres i que el seu diàmetre és 3500 km.**



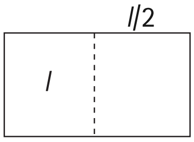
a) Calcula'n la superfície i el volum.

S = 12 250 000 km^2 $V = 7{,}1 \cdot 10^9$ km^3

b) El Sol és a 150 000 000 km de nosaltres i la seva mida aparent és igual que la de la Lluna. Segons això, troba el diàmetre del Sol. Calcula'n també la superfície i el volum a partir de les magnituds corresponents de la Lluna.

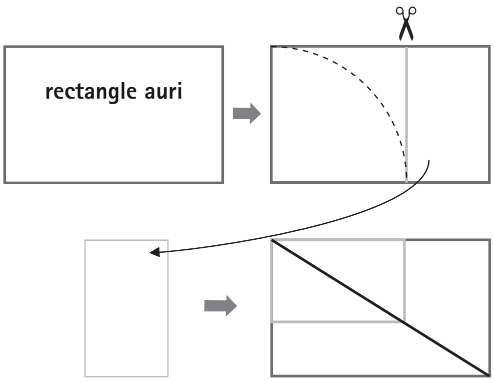
$d = 25\,520\,832$ km $\quad S = 5{,}1 \cdot 10^{13}$ km^2 $\quad V = 6{,}51 \cdot 10^{20}$ km^3

6.3 **Mitjançant aquest mètode, comprova que mig full A4 és semblant a un full A4.**



$\Rightarrow l = \dfrac{1}{1/2} \Rightarrow l = \sqrt{2}$

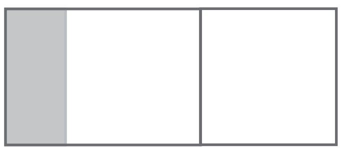
6.4 **Si a un full A4 li talles una tira de 2,5 cm d'ample al llarg del costat gran, obtindràs un rectangle auri. Construeix-ne dos i, a un, talla-li un quadrat i comprova que el rectangle resultant és semblant al rectangle inicial.**



Activitat de manipulació.

6.5 **Si a un full A4 li afegim un quadrat, el rectangle resultant, al qual anomenarem A4 PLUS, té aquesta curiosa propietat: si li traiem dos quadrats, el rectangle resultant és semblant a l'inicial.**

El rectangle groc és semblant al rectangle total.



a) Comprova-ho pràcticament.

Activitat de manipulació.

b) Demostra-ho tenint en compte que les dimensions de l'A4 PLUS són $\sqrt{2} + 1$, 1 i que les del rectangle sobrant són 1, $\sqrt{2} - 1$.

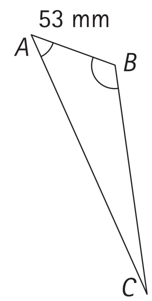
$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \Rightarrow 1 = 1$$

6.6 **Càlcul de la distància fins a un lloc llunyà.**

Som a *A*, i volem calcular la distància a un lloc llunyà i inaccessible, *C*. Assenyalem un altre punt, *B*, i mesurem la distància: $\overline{AB}$ = 53 m.

Mesurem també els angles $\hat{A}$ = 46°, $\hat{B}$ = 118°.

Ara, dibuixem en el nostre quadern un triangle *A'B'C'* amb les mesures següents: $\overline{A'B'}$ = 53 mm, $\hat{A}$ = 46°, $\hat{B}$ = 118°.



a) Construeix el triangle *A'B'C'* en el teu quadern.

b) Explica per què *A'B'C'* és semblant a *ABC*.

Per què $\overline{A'B'}$ és proporcional a $\overline{AB}$ i 2 dels seus angles són iguals.

c) Mesura $\overline{A'C'}$ amb el regle.

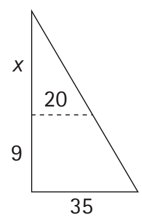
11 cm.

d) Dedueix quant mesura la distància buscada, $\overline{AC}$.

110 m.

6.7 Calcula el volum d'un tronc de con sabent que l'altura és 9 cm i que els radis de les bases fan 20 cm i 35 cm. *a)* Fes-ho pas a pas, raonadament. *b)* Comprova el resultat aplicant la fórmula anterior.

a)



$$\frac{x}{20} = \frac{x+9}{35} \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

$$V_{tronc} = \frac{1}{3}\pi \cdot 35^2\,(9 + 12) - \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 12 = 6\,975\pi \text{ cm}^3$$

b) $V_{tronc} = \frac{1}{3}\pi\,(35^2 + 35 \cdot 20 + 20^2) \cdot 9 = 6\,975\pi \text{ cm}^3$

6.8 Calcula el volum d'un tronc de piràmide quadrangular regular sabent que les bases són quadrats els costats dels quals fan 40 cm i 16 cm i que l'altura mesura 9 cm.

$x = 6$ cm

$$V_{tronc} = \frac{1}{3} \cdot 40^2 \cdot (9 + 6) - \frac{1}{3}\,16^2 \cdot 9 = 7\,232 \text{ cm}^3$$

6.9 Un globus puja 643 m sobre la superfície de la Terra. Esbrina quina superfície terrestre es veurà des de dalt. Fes-ho de dues maneres:

a) Raonadament, aplicant la semblança de triangles.

$$\frac{\text{catet petit}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \frac{R}{R+d} = \frac{R-h}{r} = \frac{6\,366}{6\,366{,}643} = \frac{6\,366 - h}{6\,366}$$

$h = 0{,}643$ km

$A_{\text{CASQUET}} = 2 \cdot \pi \cdot 6\,366 \cdot 0{,}643 = 8\,186{,}67\pi \text{ km}^2$

b) Aplicant la fórmula anterior per comprovar que la solució és correcta.

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{6\,366^2 \cdot 0{,}643}{6\,366{,}643} = 8\,185{,}85\pi \text{ km}^2$$

c) A quina altura hem d'ascendir per veure exactament el 5% de la superfície de la Terra? (Aplica la fórmula.)

$S_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot \pi\ 6\,366^2 = 16{,}21 \cdot 10^7\pi \text{ km}^2$

$5\% = 16{,}21 \cdot 10^7\pi \cdot 0{,}05 = 81{,}05 \cdot 10^5 \text{ km}^2$

d) Caldria pujar 636,6 km.

6.10 **Un coet s'aproxima a la Lluna. Com has vist en l'activitat 6.2, el diàmetre de la Lluna fa 3500 km.**

a) Esbrina quina superfície es veu des del coet quan es troba a 1000 km de distància. Fes-ho raonadament i comprova el resultat aplicant la fórmula.

$A_{CASQUET} = 2{,}2 \cdot 10^6$ km²

b) A quina distància de la Lluna es veurà el 10% de la seva superfície? (Aplica la fórmula.)

$S = 1{,}225 \cdot 10^7\pi$ km²

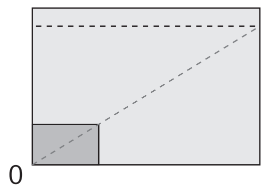
10% $\downarrow$ $x0{,}1$

$S = 1{,}225 \cdot 10^6\pi$ km²

$h = 1\,166$ km

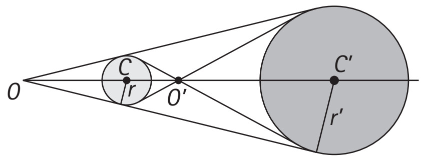
6.11 **En el procediment descrit a sobre per obtenir un full de paper amb dimensions àuries a partir d'un A4 i amb l'ajut del DNI, s'aplica una homotècia. Quin n'és el centre? I la seva raó?**

El seu centre és l'extrem de sota a l'esquerra.



Si un A4 fa 21 · 29,7 cm i un DNI fa 8,54 · 5,4 cm, $\frac{29{,}7}{8{,}54} = 3{,}477518$ és la raó.

6.12 **Observa com dues circumferències qualssevol en el pla són homotètiques respecte de dos centres diferents.**

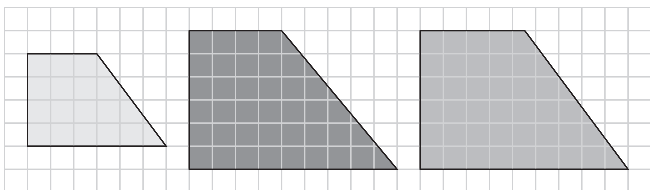


Repeteix-ho en el teu quadern amb $r = 1{,}5$ cm; $r' = 4{,}5$ cm i $\overline{CC'} = 10$ cm.

Exercicis de la unitat. Practica

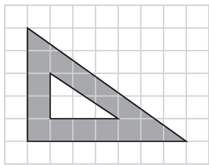
Semblança de figures

6.13 **▲△△ Quines d'aquestes figures són semblants?**
Quina és la seva raó de semblança?

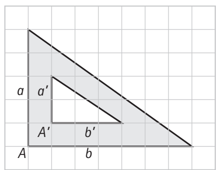


Són semblants la primera i la tercera. La raó de semblança és 1,5.

6.14 ▲△△ **a) Són semblants els triangles interior i exterior?**
b) Quantes unitats mesuren els catets d'un triangle semblant al més petit si la raó de semblança és de 2,5?



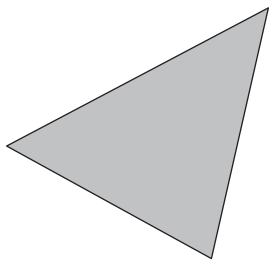
a) No, no són semblants. Això es pot veure de diverses maneres.
En aquest cas ho farem pel **tercer criteri** (pàgina 127 del llibre de l'alumne):
Dos triangles són semblants i tenen un angle igual i els dos costats que el formen són proporcionals.
En el nostre dibuix:
$\hat{A} = \hat{A}' = 90°$
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \frac{5}{2} \neq \frac{7}{3}$
Per tant, no són semblants.



b) El triangle té dos catets amb mida:
$2 \times 2,5 = 5$ unitats $3 \times 2,5 = 7,5$ unitats

6.15 ▲△△ **Una fotografia de 9 cm d'ample i 6 cm d'alt té al voltant un marc de 2,5 cm d'ample. Són semblants els rectangles interior i exterior del marc? Respon raonadament.**
No ho són: els costats corresponents no són proporcionals.

6.16 ▲▲△ **Aquesta figura representa a escala 1:3500 una parcel·la de terreny. Pren les mesures necessàries i calcula'n el perímetre i l'àrea.**



Perímetre: $2,5 + 3 + 3,5 = 6$ cm $\rightarrow$ 21 000 cm.

Àrea: $\frac{3 \times 2,5}{2} = 3,75 \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \times 5\,937\,500 \text{ cm}^2$

6.17 ▲▲△ **En una maqueta d'escala 1:300 un edifici està representat per un prisma recte de base quadrada de 18 cm d'altura i 36 cm² d'àrea de la base.**
a) Calcula el volum real de l'edifici representat.

Altura real: $18 \cdot 300 = 5\,400$ cm
Àrea de la base: $36\,300^2 = 3\,240000 \text{ cm}^2$
Volum $= 3\,240000 \cdot 5\,400 = 1,7496 \cdot 10^{10} \text{ cm}^3 = 17\,496 \text{ m}^3$
b) Quina serà la superfície real d'un estany que en la maqueta ocupa 180 cm²?
Superfície = $1\,620 \text{ m}^2$
c) El volum de l'estany en la maqueta és de 50 cm³. Calcula'n el volum real.
Volum = $1\,350 \text{ m}^3$

6.18 ▲△△ **Quina àrea ocuparà un rombe les diagonals del qual mesuren 275 cm i 150 cm, en un plànol d'escala 1:25?**

Àrea del rombe: 20 625 cm^2

En el plànol: 33 cm^2

6.19 ▲△△ **Digues quina és la relació entre els radis de dos cercles si la raó entre les seves àrees és 16/9.**

$$\left.\begin{matrix}\pi \cdot r_1^2 = 16 \\ \pi \cdot r_2^2 = 9\end{matrix}\right\} \left.\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{16}{9}\right\} r_1^2 = \frac{r_2^2 \cdot 16}{9} \rightarrow r_1 = \frac{4}{3} r_2 \rightarrow \text{La raó és } \frac{4}{3}.$$

Semblança de triangles

6.20 ▲△△ **Dos triangles *ABC* i *A'B'C'* són semblants i la seva raó de semblança és 2/3. Calcula els costats del triangle *A'B'C'* si sabem que:**

$\overline{AB}$ = 12 m, $\overline{BC}$ = 9 m i $\overline{AC}$ = 7,5 m

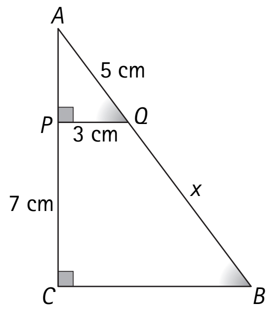
$\overline{A'B'}$ = 8 m, $\overline{B'C'}$ = 6 m, $\overline{A'C'}$ = 5 m

6.21 ▲△△ **a) Per què són semblants els triangles *APQ* i *ACB*?**

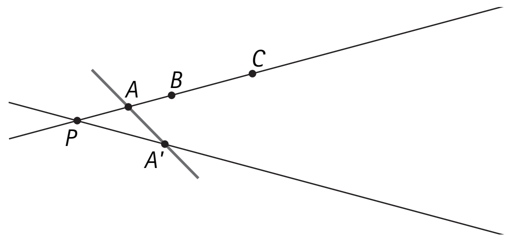
L'angle $\hat{A}$ és comú als dos triangles i $\hat{Q}$ i $\hat{C}$ són rectes; per tant, $\hat{Q} = \hat{B}$.

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.

$\overline{BQ}$ = 8,75 cm



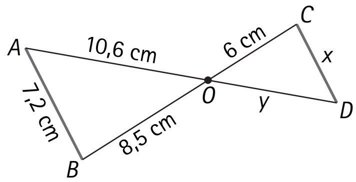
6.22 ▲△△ **Sabem que $\overline{AP}$ = 7 cm, $\overline{PB}$ = 13 cm, $\overline{PC}$ = 24 cm i $\overline{PA'}$ = 12 cm.**



Traça paral·leles a *AA'* des de *B* i des de *C* i calcula $\overline{A'B'}$ i $\overline{B'C'}$.

$\overline{A'B'}$ = 10,28 cm, $\overline{B'C'}$ = 18,85 cm

6.23 ▲▲△



Observa aquesta figura en la qual el segment *AB* és paral·lel a *CD*.

a) Digues per què són semblants els triangles *OAB* i *ODC*.

$\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{C}$ i $\hat{O}$ és comú a ambdós.

b) Calcula *x* i *y*.

x = 5,08 cm; y = 7,48 cm

6.24 ▲▲△ **Els costats grans de dos triangles semblants mesuren 8 cm i 13,6 cm, respectivament. Si l'àrea del primer és de 26 cm², quina és l'àrea del segon?**

A = 75,14 cm²

Pensa i resol

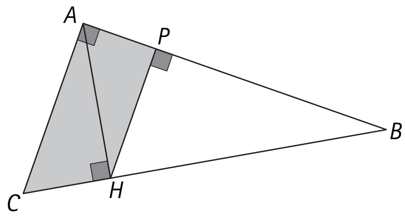
6.25 ▲△△ **Dibuixa en el teu quadern dues semirectes *r* i *s* amb el mateix origen *P*. Indica en *r* tres punts *A, B* i *C* de manera que $\overline{PA}$ = 4 cm, $\overline{PB}$ = 7 cm i $\overline{PC}$ = 14 cm. Indica en *s* un punt *A'* de manera que $\overline{AA'}$ = 5 cm. Traça la recta *AA'* i les paral·leles a aquesta des de *B* i des de *C* (tallen *s* en *B'* i *C'*, respectivament). Calcula $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$.**

$\overline{BB'}$ = 3,75 cm

$\overline{CC'}$ = 8,75 cm

6.26 ▲▲△ Exercici resolt.

6.27 ▲▲▲ **Sabem que en el triangle *ABC*, rectangle en *A*, $\overline{AH}$ = 18 cm i $\overline{HB}$ = 32 cm.**



a) Calcula $\overline{CH}$ en el triangle *ABC*. Recorda el teorema de l'altura en els triangles rectangles. Calcula després $\overline{CB}$.

$\overline{CM}$ = 10,125 cm, $\overline{CB}$ = 42,125 cm.

b) Amb el teorema de Pitàgores, calcula $\overline{AC}$ en el triangle *AHC* i $\overline{AB}$ en el triangle *AHB*.

$\overline{AC} \approx$ 20,65 cm, $\overline{AB} \approx$ 36,71 cm.

c) Aplica el teorema del catet en el triangle rectangle *AHB* per obtenir $\overline{AP}$.

$\overline{AP} \approx$ 8,83 cm.

d) Calcula l'àrea i el perímetre del trapezi rectangle *APHC*.

Àrea = 160,44 cm², Perímetre = 55,295 cm

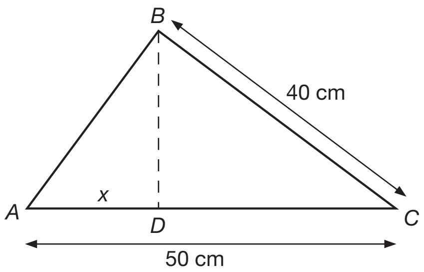
6.28 ▲▲△ **Dibuixa, en cada cas, un triangle rectangle i traça'n l'altura sobre la hipotenusa.**

a) Calcula la projecció del catet més petit sobre la hipotenusa si aquesta mesura 50 cm i el catet més gran, 40 cm.

b) La hipotenusa fa 25 cm, i la projecció del catet més petit sobre la hipotenusa mesura 9 cm. Calcula'n el catet més gran.

c) L'altura relativa a la hipotenusa mesura 6 cm, i la projecció del catet més petit sobre la hipotenusa, 4,5 cm. Calcula la hipotenusa.

a)

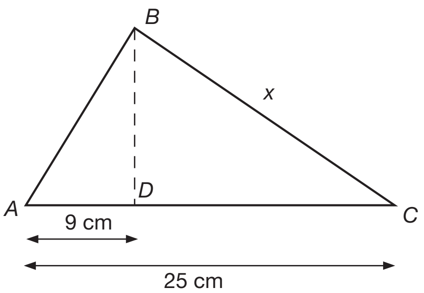


$C^2 = h^2 - C^2 = 2500 - 1600 = 900 \rightarrow C = \sqrt{900} = AB = 30.$

Sabem que *ABC* i *ABD* són semblants. Per tant,

$\frac{AB}{x} = \frac{50}{AB} = x = \frac{900}{50} = \frac{90}{5}$ cm = 18 cm

b)

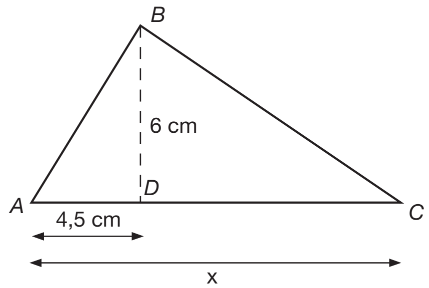


Per una banda sabem que

$\frac{AB}{9} = \frac{25}{AB} \rightarrow AB = 15$ cm

I per Pitàgores $BC^2 = x^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \rightarrow x = 20$ cm

c)

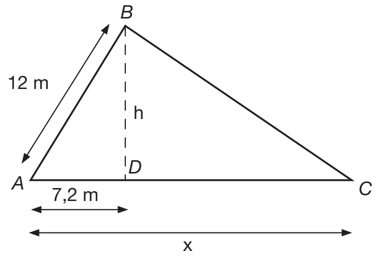


$AB^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25$

$AB = 7{,}5$ cm

$\frac{x}{7{,}5} = \frac{7{,}5}{4{,}5} \rightarrow x = 12{,}5$ cm

6.29 ▲▲△ **Un dels catets d'un triangle rectangle mesura 12 m i la seva projecció sobre la hipotenusa, 7,2 m. Calcula l'àrea i el perímetre del triangle.**



$BD^2 = h^2 = 12^2 - 7,2^2 = 92,16$

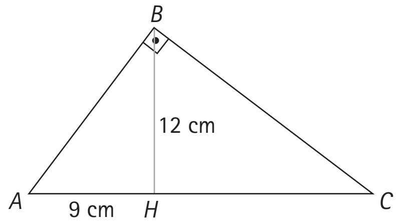
$BD = h = 9,6$ m

$\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{\text{catet}}{\text{catet}} \rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{12}{7,2} \rightarrow x = 20 \text{ m}$

$\text{Àrea} = \dfrac{x \cdot h}{2} = \dfrac{20 \cdot 9,6}{2} = 96 \text{ m}^2$

6.30 ▲▲△ **Calcula el perímetre del triangle *ABC*, del qual coneixem que *AH* = 9 cm i *BH* = 12 cm.**

$AB^2 = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} \qquad AB = 15 \text{ cm}$



Per triangles semblants tenim que:

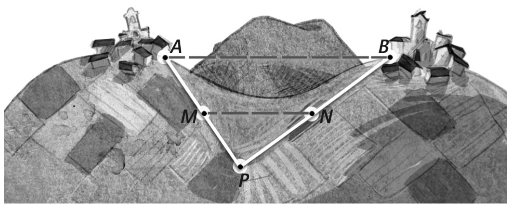
$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{9}; \dfrac{BC}{15} = \dfrac{12}{9}; \qquad BC = 20 \text{ cm}$

i

$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{20}{12}; \dfrac{AC}{15} = \dfrac{20}{12}; \qquad AC = 25 \text{ cm}$

Perímetre = $AB + AC + BC = 60$ cm

6.31 ▲▲△ **Entre dos pobles *A* i *B* hi ha un turó. Per mesurar la distància *AB*, fixem un punt *P* des del qual es veuen els dos pobles i prenem les mides *AP* = 15 km, *PM* = 7,2 km i *MN* = 12 km. (*MN* és una línia paral·lela a *AB*.) Calcula la distància *AB*.**



Com que són triangles semblants, sabem que:

$\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AP}{MP} \rightarrow \dfrac{AB}{12 \text{ km}} = \dfrac{15 \text{ km}}{7,2 \text{ km}} \rightarrow AB = \dfrac{12 \cdot 15}{7,2} = 25 \text{ km}$

6.32 ▲▲△ **El perímetre d'un triangle isòsceles és de 64 m i el costat desigual mesura 14 m. Calcula l'àrea d'un triangle semblant el perímetre del qual és de 96 m.**

$A = 378 \text{ m}^2$

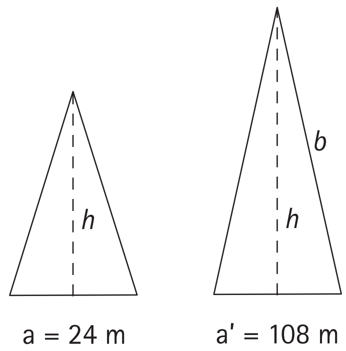
6.33 ▲▲△ **Dos triangles *ABC* i *PQR* són semblants. Els costats del primer mesuren 18 m, 32 m i 40 m. Calcula la mesura dels costats del segon triangle sabent que el seu perímetre és de 333 m.**

$A = 18$ m $\qquad B = 32$ m $\qquad C = 40$ m

Perímetre = 18 + 32 + 40 = 90 m $\qquad$ Perímetre = 333 m $\qquad$ Raó = 3,7

$P = 18 \cdot 3,7 = 66,6$ m $\qquad Q = 32 \cdot 3,7 = 118,4$ m $\qquad R = 40 \cdot 3,7 = 148$ m

6.34 ▲▲△ **Les àrees de dos triangles isòsceles semblants són 60 m² i 1215 m². Si el costat desigual del primer triangle fa 24 m, quin és el perímetre del segon?**



Àrea = 60 m² Àrea' = 1215 m²

Si la raó és k, la raó entre àrees és k^2.

$k^2 = \dfrac{1215}{60} = 20{,}25 \rightarrow k = 4{,}5$

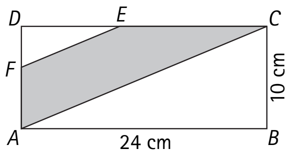
Si $a = 24$ m, $a' = 24 \cdot 4{,}5 = 108$ m

$\text{Àrea} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{108 \cdot h'}{2} = 1215 \rightarrow h' = 22{,}5$ m

$h^2 = c^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 54^2 + 22{,}5^2 = 3422{,}25$ $b = 58{,}5$ m

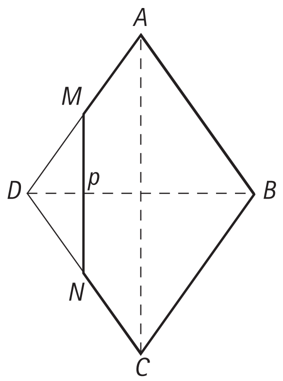
Perímetre = 58,5 × 2 +108 = 225 m

6.35 ▲▲▲ **Si $\overline{DF}$ = 4 cm, quina és l'àrea i el perímetre del trapezi *EFAC*?**



$A = 100{,}8$ cm²; $P = 56{,}8$ cm

6.36 ▲▲▲ **Les diagonals d'un rombe mesuren: $\overline{AC}$ = 32 cm i $\overline{BD}$ = 24 cm. Per un punt *P* de la diagonal petita, de manera que $\overline{PD}$ = 9 cm, es traça una paral·lela a la diagonal *AC* que talla en *M* i *N* els costats *AD* i *CD*. Calcula l'àrea i el perímetre del pentàgon *MABCN*.**



$AC = 32$ cm, $BD = 24$ cm, $PD = 9$ cm

$AB^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \rightarrow AB = 20$

$AB = BC = CD = AD = 20$ cm

Per triangles semblants sabem que:

$\dfrac{MD}{AD} = \dfrac{PD}{BD/2} \rightarrow MD = \dfrac{20 \cdot 9}{12} = 15$ cm

I per Pitàgores:

$MP^2 = MD^2 = PD^2 = 225 - 81 = 144 \rightarrow MP = 12$ cm

$MA = AD - MD = 20 - 12 = 8$ cm

I sumant: Perímetre $MABCN = MA \cdot 2 + MP \cdot 2 + AB \cdot 2 = 16 + 24 + 40 = 80$ cm

6.37 ▲▲▲ **En un trapezi rectangular la diagonal petita és perpendicular al costat oblic, l'altura mesura 12 cm i la diferència entre les bases és de 9 cm. Calcula el perímetre i l'àrea del trapezi.**

$P = 68$ cm; $A = 246$ cm^2

6.38 ▲▲△ **Volem construir un ortoedre de 36 015 cm^3 de volum que sigui semblant a un altre les dimensions del qual són 25 × 15 × 35 cm.**

Quant mesuraran les seves arestes?

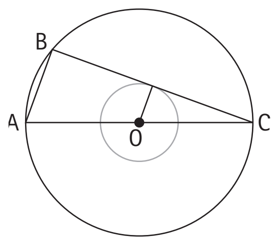
$V = 36\,015$ cm^3, $V' = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13125$ cm^3

$$k^3 = \frac{36\,015}{13\,125} = 2{,}744 \rightarrow k = 1{,}4$$

$a = 25 \rightarrow a' = 25 \cdot 1{,}4 = 35$ cm, $b = 15 \rightarrow b' = 15 \cdot 1{,}4 = 21$ cm, $c = 35 \rightarrow c' = 35 \cdot 1{,}4 = 49$ cm

6.39 ▲▲△ **En aquestes dues circumferències concèntriques, el radi de la més gran és el triple de la més petita.**

Hem dibuixat el diàmetre *AC* i la corda *BC*, que és tangent a la circumferència interior. Si *AB* = 10 cm, quant mesuren els radis de cada circumferència?



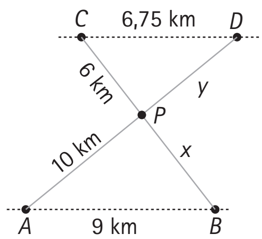
Sabem, pels triangles semblants que:

$$\frac{AB}{x} = \frac{AC}{AC/2} = x = \frac{AB}{2} = 5 \text{ cm}$$

Radi petit = 5 cm, Radi gran = Radi petit · 3 = 15 cm

6.40 ▲▲△ **Un centre comercial *P* està situat entre dues vies paral·leles *r* i *s*, i es volen construir dues carreteres per comunicar el centre comercial amb els pobles *A*, *B*, *C* i *D*.**

Amb les dades de l'esquema, calcula *x* i *y*.

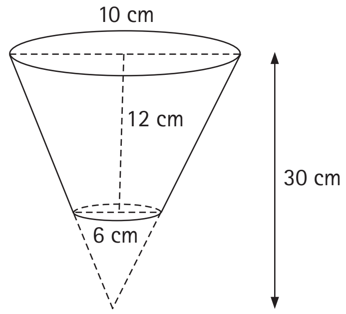


Pels triangles semblants sabem que:

$$\frac{9}{6{,}75} = \frac{10}{y} \rightarrow y = \frac{67{,}5}{9} = 7{,}5 \text{ cm}$$

$$\frac{9}{6{,}75} = \frac{x}{6} \rightarrow x = \frac{54}{6{,}75} = 8 \text{ cm}$$

6.41 ▲▲△ **Tenim un got amb forma de tronc de con els diàmetres de les bases del qual mesuren 10 cm i 6 cm i l'altura és de 12 cm. Creus que, si l'omplim, hi cabrà més de mig litre d'aigua o menys de mig litre?**



$$\frac{x}{x-12} = \frac{5}{3} \rightarrow 3x = 5x - 60$$

$2x = 60$

$x = 30$ cm

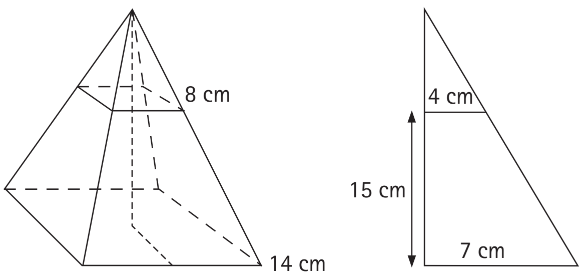
Volum con gran $= \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 5^2 \cdot 30 = 250\pi$ cm^3

Volum con petit $= \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 18 = 54\pi$ cm^3

Volum got = volum con gran − volum con petit $= 250\pi - 54\pi = \pi(250 - 54) = 196\pi$ cm^3

Si $1\,l = 1000$ cm^3 → Hi cap més de mig litre.

6.42 ▲△△ **Calcula el volum d'un tronc de piràmide quadrangular regular en el qual els costats de les bases mesuren 8 cm i 14 cm i l'altura fa 15 cm.**



$$\frac{x}{x-15} = \frac{7}{4} \rightarrow 4x = 7x - 105$$

$3x = 105 \qquad x = 35$

Volum piràmide $= \frac{1}{3}$ àrea base $\cdot h$

Volum piràmide gran $= \frac{1}{3}\, 196 \cdot 35 = \frac{6860}{3}$

Volum piràmide petita $= \frac{1}{3}\, 64 \cdot 35 = \frac{2240}{3}$

Volum tronc = volum gran − volum petit $= \frac{6860 - 2240}{3} = 1540$ cm^3

6.43 ▲▲△ **D'un con el radi del qual fa 5 cm hem tallat un altre con de 2 cm de radi i 3 cm d'altura. Calcula el volum del con gran.**

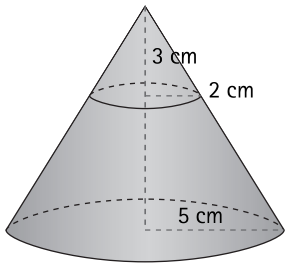
Calculem l'altura del con gran:

Per semblança: $\frac{3 + x}{3} = \frac{5}{2} \rightarrow x = 4,5$ cm

Altura = 3 + 4,5 = 7,5 cm

Volum del con gran:

$\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 7,5 = 62,5\pi$ cm^3

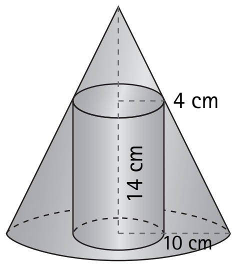


6.44 ▲▲△ **En un con de 10 cm de radi hi hem inscrit un cilindre de 4 cm de radi i 14,4 cm d'altura. Calcula l'altura del con.**

Calculem l'altura del con per semblança:

$\frac{x + 14,4}{10} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 9,6$ cm

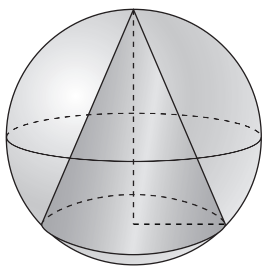
Altura del con: 9,6 + 14,4 = 24 cm



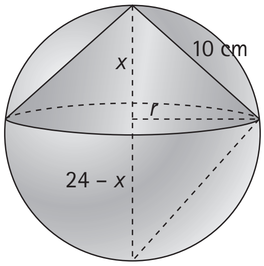
6.45 ▲▲△ **Tenim un con inscrit en una esfera el radi de la qual fa 11 cm. Quin serà el radi de la base del con si fa 14 cm d'altura?**

$AD = 2R - 14 = 8$ cm

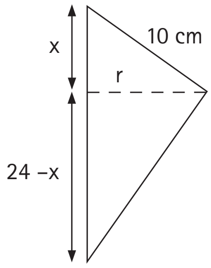
Segons el teorema de l'alçada: $r \simeq 10,58$ cm



6.46 ▲▲△ **En una esfera de 12 cm hem inscrit un con la generatriu del qual fa 10 cm. Calcula el volum del con.**



Suposant que l'esfera té 12 cm de radi, veiem que:



Pels triangles semblants tenim que:

$$\frac{24}{10} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{25}{6} \simeq 4{,}17$$

També pels triangles semblants veiem que:

$$\frac{24 - x}{r} = \frac{r}{x} \rightarrow x^2 = 24x - x^2 \rightarrow r^2 = \frac{2975}{36} \rightarrow \sqrt{\frac{2975}{36}} \simeq 9{,}1$$

El volum del cos seria: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{2975}{36}}\right)^2 \cdot \frac{25}{6} = \frac{74375\pi}{648} \simeq 114{,}78\pi$

Reflexiona sobre la teoria

6.47 ▲△△ **Un triangle rectangle pot ser semblant a un triangle isòsceles? I a un triangle equilàter?**

Un triangle rectangle pot ser semblant a un triangle isòsceles, perquè un triangle isòsceles pot ser rectangle. Però no tots els isòsceles són rectangles.

Un triangle equilàter no pot ser mai semblant a un triangle rectangle perquè sempre té els tres angles iguals, i mai no tindrà cap angle de 90° (condició necessària perquè dos triangles siguin semblants).

6.48 ▲△△ **Dos triangles equilàters qualssevol, són semblants entre si? I dos polígons regulars amb el mateix nombre de costats?**

Dos triangles equilàters sí que són semblants perquè tenen els angles iguals, i tots els seus costats són proporcionals als de l'altre triangle.

Amb dos polígons regulars qualssevol que tinguin el mateix nombre de costats passa exactament el mateix, tots els seus costats són proporcionals, i els angles són iguals.

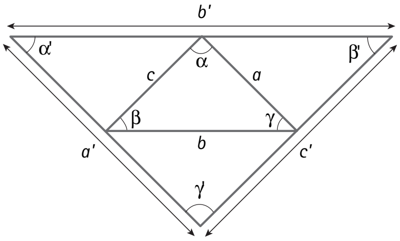
6.49 ▲▲△ **Dibuixa un triangle i, des de cada vèrtex, traça una recta paral·lela al costat oposat. Així obtindràs un altre triangle més gran.**

a) Justifica per què és semblant a l'inicial.

Com que $a // a'$ i $b // b'$, aleshores $\alpha = \alpha'$.

Com que $b // b'$ i $c // c'$, aleshores $\beta = \beta'$.

Per tant, $\gamma = \gamma'$



Els tres angles del triangle gran són iguals als respectius del triangle petit. Ambdós triangles són semblants.

b) Quina és la raó entre les àrees?

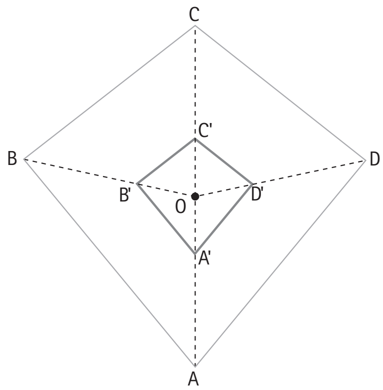
Si la raó entre els dos és k, la raó entre les àrees és k^2.

6.50 ▲▲△ **Justifica en quins dels casos següents podem assegurar que els triangles *ABC* i *A'B'C'* són semblants:**

a) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$; $\hat{C} = \hat{C}'$ **b)** $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$; $\hat{A} = \hat{A}'$ **c)** $\frac{AB}{A'B'} \neq \frac{BC}{B'C'}$; $\hat{B} = \hat{B}'$ **d)** $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$

Sí Sí No Sí.

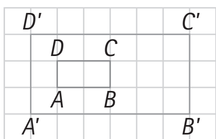
6.51 ▲△△ **Hem aplicat una homotècia al quadrilàter *ABCD* per poder obtenir el quadrilàter *A'B'C'D'*.**



a) Quin és el centre i quina és la raó? El cercle és el punt 0. La raó és aproximadament 3. (No es pot saber exactament, perquè no hi ha dades numèriques.)

b) Justifica que *ABCD* i *A'B'C'D'* siguin semblants. Dues figures homotètiques sempre són semblants.

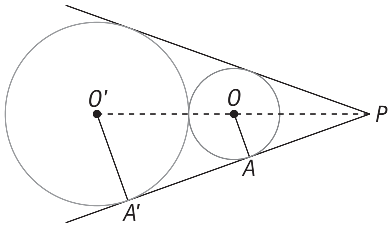
6.52 ▲▲△ **Troba el centre i la raó d'homotècia que transforma el rectangle *ABCD* en *A'B'C'D'*.**



Si imaginem el centre de coordenades en el punt *A'*, i cada quadrat és la unitat de mesura:

$0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i la raó $k = \sqrt{2}$

6.53 ▲▲△ **Des d'un punt *P* tracem tangents a dues circumferències tangents exteriors. Si $\overline{OP}$ = 12 cm i $\overline{O'A'}$ = 5 cm, quant mesura el radi de la circumferència petita?**

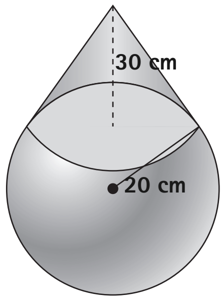


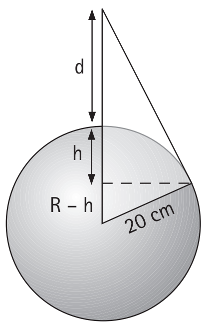
Sabem que:

$$\frac{\overline{O'A'} + \overline{OA} + \overline{OP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}};$$

$$\frac{\overline{O'A'} + 17}{12} = \frac{5}{\overline{OA}}; \qquad \overline{OA} = 3$$

6.54 ▲▲▲ **Sobre una esfera de 20 cm de radi s'ha encaixat un con de 30 cm d'altura. Calcula l'àrea del casquet esfèric que determina el con.**





$d = 30 - h$

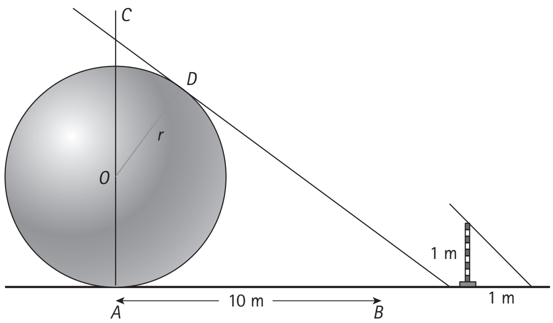
$R = 20$

Sabem pels triangles semblants que:

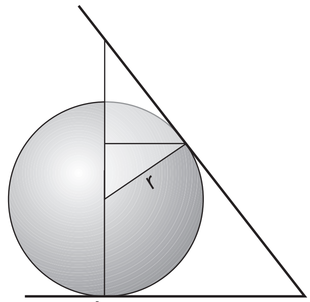
$$\frac{R + d}{20} = \frac{20}{R - h} \rightarrow \frac{50 - h}{20} = \frac{20}{20 - h} \rightarrow h = 10 \rightarrow d = 20$$

$$\text{Àrea casquet} = \frac{2\pi R^2 \cdot d}{R + d} = 400\pi \text{ cm}^2$$

6.55 ▲▲▲ **Una esfera recolzada en el terra projecta una ombra que arriba fins a 10 m del punt on l'esfera toca el terra. En aquell moment, un pal vertical d'1 m d'altura fa una ombra d'1 m. Quin és el radi de l'esfera?**



Sabem pels triangles semblants que $AC = 10$. Per altra banda sabem que $AC = 2 \cdot r + d \rightarrow d = 10 - 2r$

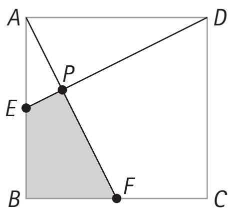


Fent servir un altre cop els triangles semblants tenim que:

$$\frac{r + d}{\sqrt{2}} = \frac{r}{1} \rightarrow r + d = \sqrt{2} \cdot r \rightarrow d = \sqrt{2}\,r - r$$

Si igualem les d, ens queda que: $\sqrt{2}\,r - r = 10 - 2r \rightarrow r = \dfrac{10}{\sqrt{2} + 1} \simeq 4{,}1$

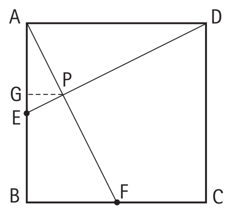
6.56 ▲▲▲ **En el quadrat de la figura, *E* és el punt mitjà del costat *AB*, i *F*, el punt mitjà de *BC*. Si el costat del quadrat mesura 2 cm, quina és l'àrea del quadrilàter *EPFB*?**



Àrea $EPBF$ = Àrea ABF – Àrea APE

$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{5}$ $\quad \dfrac{AP}{2} = \dfrac{AE}{\sqrt{5}} \rightarrow AP = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{AP}{2} = \dfrac{PE}{1} \rightarrow PE = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\dfrac{PG}{2} = \dfrac{PE}{\sqrt{5}} \rightarrow PG = \dfrac{2}{5}$ $\quad$ Àrea $ABF = 1\ \text{cm}^2$



Àrea $APE = \dfrac{2}{10}\ \text{cm}^2$

Àrea $EPBF = 1 - \dfrac{2}{10} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8\ \text{cm}^2$

Problemes d'estratègia

Cubs

- 4 pots de pintura
- 8 kg

Dinosaures amb «radiador»

Com que l'aleta augmenta la superfície del cos però no el volum, pot irradiar més calor, compensar així la producció de calor del seu cos.

Ossos i pesos

Proporció: $\frac{2\ \text{m}}{4\ \text{m}} = \frac{1}{2} \rightarrow 20\,000\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20\,000 \cdot \frac{1}{8} = 2500\ \text{kg}$

Jocs per pensar

Targetes amb or

Anomenem $x = \frac{a}{b}$

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{(a-b)/b} = \frac{1}{(a/b)-1} = \frac{1}{x-1}$$

Com que $\frac{a}{b} = x$, $x = \frac{1}{x-1} \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Resolem aquesta equació, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b}$, que és el nombre d'or (la solució $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ no és vàlida perquè és un nombre negatiu, i a i b són positius).

El nombre d'or en el pentàgon

$d = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Cares oposades