Reflexiona

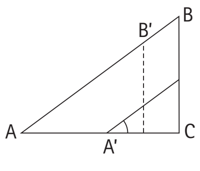
■ **Els nois del dibuix han de determinar les alçàries dels 47 arbres d'una parcel·la horitzontal, i segueixen aquests passos:**
Claven a terra una estaca vertical que sobresurt 120 cm. Tot seguit, marquen de pressa els extrems de les ombres dels 47 arbres i de l'estaca (per què tanta pressa?). Després d'haver-les marcat, les mesuren tranquil·lament i anoten els resultats. Heus-ne aquí alguns:

Ombra de...	Estaca	Xiprer	Figuera	Pollancre
Mesura...	75 cm	8,8 m	3 m	5,7 m

Calcula raonadament l'alçària d'aquests tres arbres.
La figuera mesura 4,8 m d'alçària.
El pollancre mesura 9,12 m d'alçària.
El xiprer mesura 14,08 m d'alçària.
Marquen els extrems de les ombres de pressa perquè aquestes van canviant amb el moviment del Sol.

Et convé recordar

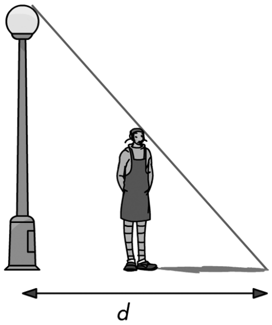
Quan són semblants dos triangles rectangles
■ **Dibuixa un triangle els costats del qual fan 3 cm, 4 cm i 5 cm. És rectangle perquè els seus costats verifiquen el teorema de Pitàgores ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Traça-hi l'altura sobre la hipotenusa. Demostra que els dos triangles més petits en què es divideix el gran són semblants entre si.**



$\hat{A} = \hat{A}'$
$ABC = AA'B'$ perquè comparteixen $\hat{A}$.

Com es mesuren certes longituds inaccessibles
A causa de la seva llunyania, els rajos que arriben a la Terra procedents del Sol són paral·lels entre si. Un camp com el que es descriu en la pàgina anterior pot considerar-se pla (és prou petit perquè no s'hi apreciï l'esfericitat de la Terra). Per tant, els rajos del Sol formen, en cada instant, el mateix angle amb la superfície, per això són semblants tots els triangles que formen els arbres respecte a les seves ombres.

Però això no passa quan la llum procedeix d'un fanal. Observa com calcula la Letícia l'alçària d'una morera que projecta una ombra de 5,7 m a la llum d'un fanal que té una alçària desconeguda.



a) Alçada de la Letícia = 1,68 m
Ombra de la Letícia = 1,5 m
***d* = 2,9 m**
Amb això es calcula l'alçària del fanal.
b) Conexent l'alçària del fanal i l'ombra de la morera, 5,7 m, i amidant la distància del fanal a la morera, 2 m, es calcula l'alçària de la morera.

■ **Resol els apartats *a*) i *b*) descrits en la situació anterior.**

a) h = 3,248 m mesura el fanal.

b) h_m = 1,93 m mesura la morera.

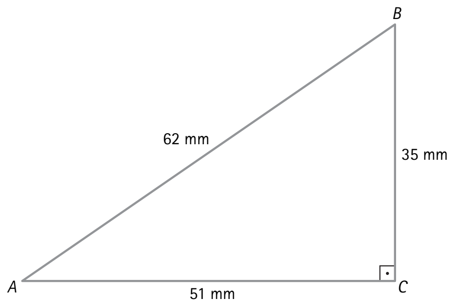
Activitats

7.1 **Dibuixa sobre un angle com l'anterior, que mesura 34°, un triangle rectangle molt més gran. Calcula'n les raons trigonomètriques i observa que són, aproximadament, les mateixes.**

$sin\ 34° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{35}{62} = 0{,}56$

$cos\ 34° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{51}{62} = 0{,}82$

$tg\ 34° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{35}{51} = 0{,}68$



7.2 **Calcula, amb l'aparell anterior i un transportador d'angles, el sinus i el cosinus de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° i 80° i la tangent dels que puguis.**

sin 10° = 0,18	*cos* 10° = 0,98	*tg* 10° = 0,18
sin 20° = 0,34	*cos* 20° = 0,94	*tg* 20° = 0,37
sin 30° = 0,5	*cos* 30° = 0,86	*tg* 30° = 0,58
sin 40° = 0,64	*cos* 40° = 0,76	*tg* 40° = 0,84
sin 50° = 0,76	*cos* 50° = 0,64	
sin 60° = 0,86	*cos* 60° = 0,5	
sin 70° = 0,94	*cos* 70° = 0,34	
sin 80° = 0,98	*cos* 80° = 0,18	

7.3 ***sin* 37° = 0,6. Calcula *cos* 37° i *tg* 37°.**

cos 37° = 0,8, *tg* 37° = 0,75

7.4 ***tg* 28° = 0,53. Calcula *sin* 28° i *cos* 28°.**

cos 28° = 0,88, *sin* 28° = 0,46

7.5 **Tenint en compte que *tg* 45° = 1, dedueix el valor de *sin* 45° i de *cos* 45° mitjançant les relacions fonamentals.**

$cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow sin\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7.6 **Tenint en compte que *sin* 30° = 1/2, calcula el valor de *cos* 30° i de *tg* 30° mitjançant les relacions fonamentals.**

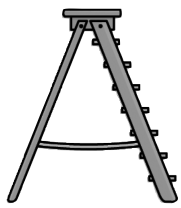
$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7.7 **Completa aquesta taula en el teu quadern.**

Pel que fa a les operacions en què apareixen radicals, no utilitzis l'expressió decimal corresponent.

sin α	*cos* α	*tg* α
0,94	0,34	2,76
0,57	0,82	0,69
4/5	3/5	4/3
0,96	0,27	3,5
1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1

7.8 **Un fuster vol construir una escala de tisora els braços de la qual, oberts, formen un angle de 60°.**



Perquè l'alçària de l'escala oberta sigui de 2 metres, quina longitud ha de tenir cada braç?

2,3 m de longitud

7.9 **Calcula el sinus i la tangent d'un angle el cosinus del qual val 0,7.**

sin α = 0,71, *tg* α = 1,01

7.10 **Calcula el sinus i el cosinus d'un angle la tangent del qual val 0,7.**

cos α = 0,82, *sin* α = 0,57

7.11 **Busca aquestes raons trigonomètriques i escriu en el teu quadern els resultats arrodonits a les mil·lèsimes.**

a) sin 86° = 0,997

b) cos 59° = 0,515

c) tg 22° = 0,404

d) sin 15° 25' 43" = 0,266

e) cos 59° 27' = 0,508

f) tg 86° 52' = 18,26

g) sin 10° 30" (Atenció: 10° 0' 30".) = 0,174

7.12 **Dóna, en cada cas, el valor de l'angle α en forma sexagesimal.**

a) $\boldsymbol{sin\ \alpha = 0{,}91}$ = 65° 30' 19" **b)** $\boldsymbol{tg\ \alpha = 5{,}83}$ = 80° 16' 1"

c) $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0{,}42}$ = 65° 9' 55" **d)** $\boldsymbol{tg\ \alpha = 0{,}34}$ = 18° 46' 40"

e) $\boldsymbol{sin\ \alpha = 0{,}08}$ = 4° 35' 18" **f)** $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0{,}88}$ = 28° 21' 27"

7.13 **Calcula *sin* α sabent que *cos* α = 0,91.**

Calcula *cos* α sabent que *tg* α = 6,41. **Calcula *tg* α sabent que *cos* α = 0,06.**

Calcula *tg* α sabent que *cos* α = 0,96. **Calcula *sin* α sabent que *tg* α = 0,1.**

$cos\ \alpha = 0{,}91 \rightarrow sin\ \alpha = 0{,}41$

$tg\ \alpha = 6{,}41 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}15$

$cos\ \alpha = 0{,}06 \rightarrow tg\ \alpha = 16{,}6$

$cos\ \alpha = 0{,}96 \rightarrow tg\ \alpha = 0{,}29$

$tg\ \alpha = 0{,}1 \rightarrow sin\ \alpha = 0{,}09$

7.14 **Els dos catets d'un triangle rectangle mesuren 48 cm i 71 cm. Calcula, en graus i minuts, els dos angles aguts.**

34° 3' 39", 55° 56' 20"

7.15 **L'angle agut d'un triangle rectangle mesura 37° i el catet oposat, 87 m. Troba l'altre catet i la hipotenusa.**

Hipotenusa = 144,5 m, catet oposat = 115,4 m

7.16 **Troba el radi d'un octògon regular de 20 cm de costat. Quant mesura la seva apotema?**

Apotema = 24,14 cm

7.17 **Des d'un coet espacial es veu la Terra en un angle de 100°. *a*) A quina distància de la Terra es troba en aquest instant? *b*) Quina és l'àrea de la porció de Terra visible des del coet?**

a) 1 944 km b) $5{,}95 \cdot 10^7$ km²

7.18 **A quina altura sobre la superfície de la Terra hem de pujar per veure un lloc situat a 400 km de distància?**

12,5 km

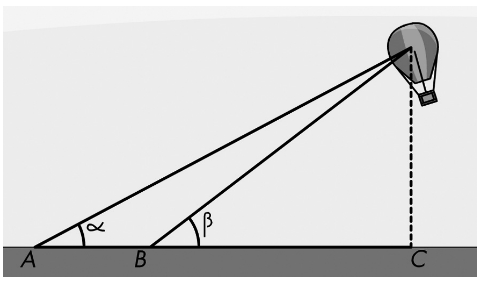
7.19 **En un triangle *ABC*, calcula $\overline{BC}$ si $\overline{AB}$ = 37 cm, $\overline{AC}$ = 50 cm i $\widehat{BAC}$ = 32°.**

$\overline{BC}$ = 27,03 cm

7.20 **Per calcular l'altura a què es troba un globus, seguim aquests passos:**

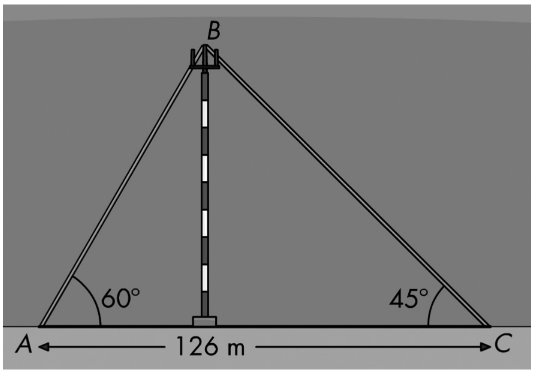
La Rosa es col·loca en un punt *B*, i jo, en un punt *A*, a 5 metres d'ella, de manera que els punts *A*, *B* i *C* (observa la figura) queden alineats.

Si els angles α i β mesuren 40° i 50°, respectivament, a quina altura es troba el globus?



14,28 m d'altura.

7.21 **Una antena de ràdio està subjecta a terra amb dos tirants de cable d'acer, com indica la figura.**



Calcula:

a) L'alçària de l'antena.

$h = 79{,}88$ m

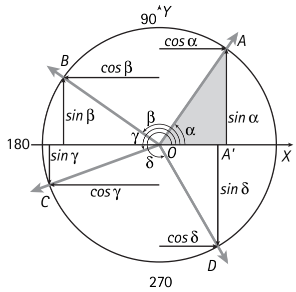
b) La longitud dels cables.

$\overline{AB} = 92{,}24$ m, $\overline{BC} = 112{,}97$ m.

c) El valor de l'angle $\widehat{ABC}$.

$\widehat{ABC} = 75°$

7.22 **A partir del triangle acolorit de dalt i tenint en compte que la seva hipotenusa és $\overline{OA} = 1$, justifica que els segments $\overline{OA'}$ i $\overline{A'A}$ corresponen, efectivament, a les raons trigonomètriques *cos* α i *sin* α, respectivament.**

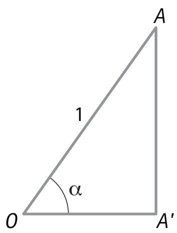


$sin\ \alpha = \dfrac{\overline{AA}}{\overline{OA}} \rightarrow sin\ \alpha = \dfrac{\overline{AA'}}{1} \rightarrow sin\ \alpha = \overline{AA'}$

$cos\ \alpha = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

$cos\ \alpha = \dfrac{\overline{AA'}}{1}$

$cos\ \alpha = \overline{OA'}$

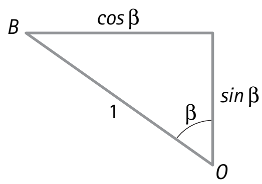


7.23 **Aplica el teorema de Pitàgores al triangle rectangle corresponent i justifica que $(sin\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1$.**

(Tingues en compte que $(-a)^2 = a^2$.)

Pel teorema de Pitàgores:

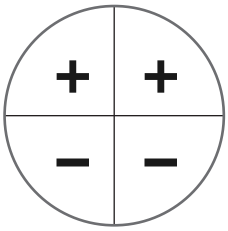
$(-cos\ \beta)^2 + (sin\ \beta)^2 = \overline{OB} \rightarrow (cos\ \beta)^2 + (sin\ \beta)^2 = 1$

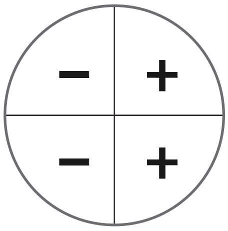


7.24 **Digues el valor de *sin* α i *cos* α quan α val 0°, 90°, 180°, 270° i 360°.**

	0°	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
sin	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1

7.25 **En aquest cercle es dóna el signe de *sin* ϕ segons el quadrant en què es trobi situat l'angle ϕ. Comprova que és correcte i fes una cosa similar per a *cos* ϕ.**





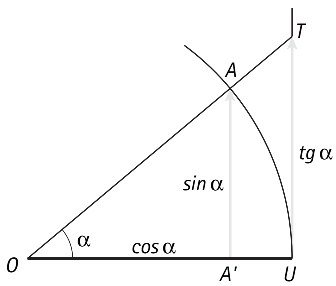
7.26 **Situa en la circumferència goniomètrica els angles següents:**
a) 32° **b) 323°**
Representa'n les raons trigonomètriques i valora-les numèricament.

a) *sin* 32° = 0,52 *cos* 32° = 0,85 *tg* 32° = 0,62

b) *sin* 323° = −0,6 *cos* 323° = 0,8 *tg* 323° = −0,75

7.27 **Tenint en compte la semblança dels triangles *OA'A* i *OUT*, i que $\overline{OU}$ = 1, demostra que:**

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$$



Per la semblança de triangles:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{UT}} \rightarrow \overline{UT} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{OU}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} \rightarrow tg\,\alpha = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

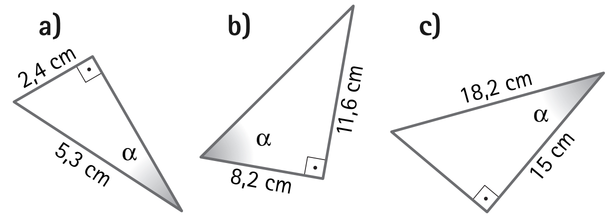
7.28 **Expressa amb valors compresos entre −180° i 180°:**

a) 1555° $\rightarrow$ 1 555° = 4 · 360° + 115° $\rightarrow$ 1 555° = 115°

b) 1297° $\rightarrow$ 1 297° = 3 · 360° + 217° $\rightarrow$ 1 297° = −360° + 217° = −143°

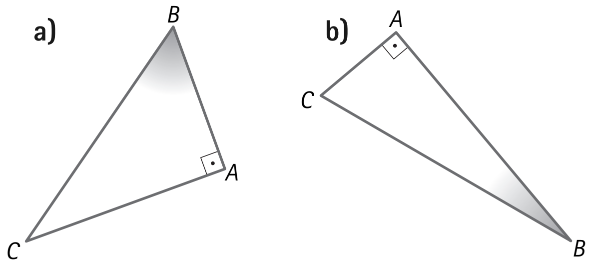
Raons trigonomètriques d'un angle agut

7.29 ▲△△ **Calcula les raons trigonomètriques d'un angle α en cadascun d'aquests triangles.**



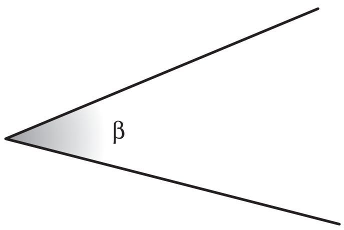
a) *sin* α = 0,45 *cos* α = 0,89 *tg* α = 0,5
b) *tg* α =1,41 *sin* α = 0,82 *cos* α = 0,58
c) *cos* α = 0,82 *sin* α = 0,57 *tg* α = 0,69

7.30 ▲△△ **Mesura els costats i calcula les raons trigonomètriques $\hat{B}$ en cada cas.**



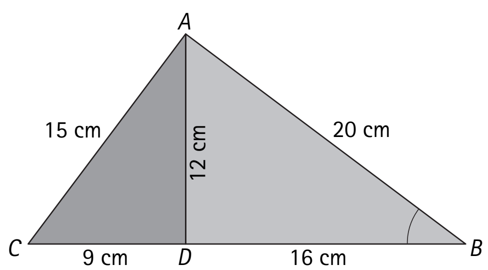
a) *sin B* =0,81 *cos B* = 0,58 *tg B* = 1,4
b) *sin B* = 0,34 *cos B* = 0,95 *tg B* = 0,36

7.31 ▲△△ **Calcula les raons trigonomètriques de β.**



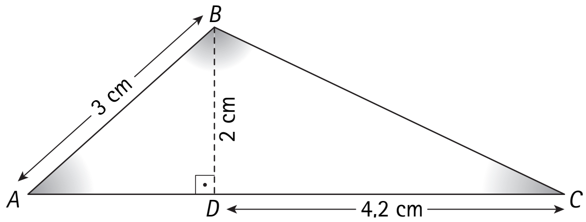
☛ ***Construeix un triangle rectangle traçant una perpendicular a un dels costats.***
sin β = 0,61; *cos* β = 0,79; *tg* β = 0,77

7.32 ▲△△ **Prova, amb el teorema de Pitàgores, que els triangles *ABC* i *ADB* són rectangles.**



Calcula *sin* $\hat{B}$ en els dos triangles (el verd i el total) i comprova que n'obtens el mateix valor.
sin $\hat{B}$ = 0,6

7.33 ▲▲△ **Calcula les raons trigonomètriques dels angles $\hat{A}$ i $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ i $\widehat{CBD}$.**



a) $sin\ \hat{A} = \frac{2}{3}$; $cos\ \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $tg\ \hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$tg\ \hat{C} = 0{,}48$; $cos\ \hat{C} = 0{,}9$; $sin\ \hat{C} = 0{,}43$

b) $sin\ \widehat{ABD} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $cos\ \widehat{ABD} = \frac{2}{3}$; $tg\ \widehat{ABD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$sin\ \widehat{CBD} = 0{,}9$; $cos\ \widehat{CBD} = 0{,}43$; $tg\ \widehat{CBD} = 2{,}1$

Relacions fonamentals

7.34 ▲△△ **Si $sin\ \alpha = 3/5$, calcula $cos\ \alpha$ i $tg\ \alpha$ utilitzant les raons fonamentals ($\alpha < 90°$).**

$cos\ \alpha = \frac{4}{5}$; $tg\ \alpha = \frac{3}{4}$

7.35 ▲▲△ **Calcula el valor exacte (amb radicals) de $sin\ \alpha$ i $cos\ \alpha$ sabent que $tg\ \alpha = 3$ ($\alpha < 90°$).**

$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5} \rightarrow sin\ \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

7.36 ▲▲△ **Completa aquesta taula.**

$sin\ \alpha$	0,92	0,6	0,99	$\sqrt{5}/3$	0,2	$\sqrt{3}/2$
$cos\ \alpha$	0,39	0,8	0,12	2/3	0,98	1/2
$tg\ \alpha$	2,35	0,75	8,27	$\sqrt{5}/2$	0,2	$\sqrt{3}$

7.37 ▲▲△ **Calcula el valor exacte (utilitzant radicals) de les raons trigonomètriques que falten i l'angle α ($\alpha < 90°$).**

$sin\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$tg\ \alpha$	α
1/3	$(2\sqrt{2})/3$	$\sqrt{2}/4$	19° 28′ 16″
$\sqrt{7}/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{7/2}$	61° 52′ 28″
$(2\sqrt{5})/5$	$\sqrt{5}/5$	2	63° 26′ 6″

Resolució de triangles rectangles

7.38 ▲△△ **Calcula la mesura dels costats i dels angles desconeguts en els triangles rectangles següents ($\hat{A} = 90°$).**

a) b = 5 cm c = 12 cm Calcula a, $\hat{B}$ i $\hat{C}$. a = 13 cm; $\hat{B}$ = 22° 37' 11''; $\hat{C}$ = 67° 22' 48''

b) c = 43 m $\hat{C}$ = 37° Calcula a, b i $\hat{B}$. $\hat{B}$ = 53°; a = 71,45 m; b = 57,06 m

c) b = 7 m $\hat{C}$ = 49° Calcula a, c i $\hat{B}$. $\hat{B}$ = 41°; a = 10,67 m; c = 8,05 m

d) a = 5 m $\hat{B}$ = 65° Calcula b, c i $\hat{C}$ $\hat{C}$ = 25°; b = 4,53 m; c = 2,11 m

7.39 ▲△△ **En un triangle rectangle, *ABC*, amb l'angle recte en *C*, coneixem $\hat{B}$ = 50° i el catet $\overline{BC}$ = 7 cm. Calcula $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\hat{A}$.**

$\overline{AB}$ = 10,89 cm; $\overline{AC}$ = 8,34 cm; $\hat{A}$ = 40°

7.40 ▲△△ **Calcula l'alçària d'una torre sabent que la seva ombra mesura 13 m quan els rajos del Sol formen un angle de 50° amb el terra.**

15,49 m

7.41 ▲△△ **Sabem que un angle d'un triangle rectangle mesura 45° i un dels seus catets, 5 cm. Quant mesuren l'altre catet, la hipotenusa i l'altre angle agut?**

L'altre catet mesura 5 cm, la hipotenusa, 7,1 cm, i l'angle, 45°.

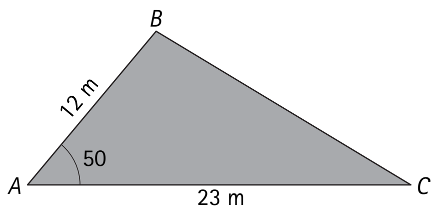
7.42 ▲△△ **Una escala de 4 m recolza sobre la paret. Quina és la seva inclinació si la seva base es troba a 2 m de la paret?**

60° respecte del terra.

7.43 ▲▲△ **Calcula els angles d'un rombe les diagonals del qual mesuren 12 cm i 8 cm, respectivament. Quant mesura el costat?**

$\hat{A}$ = 112,6°; $\hat{B}$ = 67,4°; l = 7,21 cm

7.44 ▲▲△ **En el triangle *ABC*:**



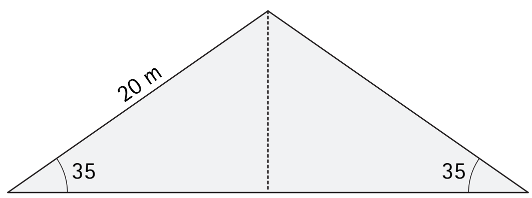
a) Traça l'altura sobre *AC* i calcula'n la longitud.

h = 9,19 m

b) Calcula l'àrea del triangle.

Àrea = 105,68 m^2

7.45 ▲▲△ **Calcula l'àrea d'aquest triangle.**



☛ ***En traçar l'altura, es formen dos triangles rectangles. Calcula'n els catets.***

187,88 m^2

Raons trigonomètriques d'angles qualssevol

7.46 ▲▲△ **Digues en quin quadrant es troben els angles següents i indica el signe de les seves raons trigonomètriques.**

a) 128° b) 198° c) 87° d) 98° e) 285° f) 305°

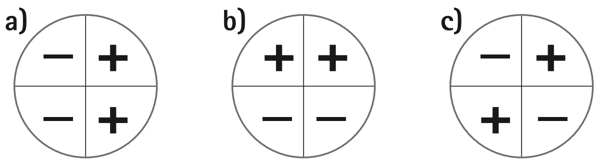
Comprova-ho amb la calculadora.

Angle	*Quad.*	*Sinus*	*Cosinus*	*Tangent*
128°	2n	+	–	–
198°	3r	–	–	+
87°	1r	+	+	+
98°	2n	+	–	–
285°	4t	–	+	–
305°	4t	–	+	–

7.47 ▲▲△ **Completa la taula sense la calculadora:**

	0°	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
sin	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tg	0	—	0	—	0

7.48 ▲▲△ **En cadascun d'aquests cercles s'indica el signe de les raons trigonomètriques de l'angle α, segons el quadrant en què es trobi α. Quin correspon a *sin* α, quin a *cos* α i quin a *tg* α?**



a) *cos* α; b) *sin* α; c) *tg* α

7.49 ▲▲△ Exercici resolt.

7.50 ▲▲△ **Dibuixa dos angles el sinus dels quals sigui 2/5 i calcula'n el cosinus.**

$\alpha = 23° \ 34' \ 41''$; $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\alpha' = 156° \ 25' \ 18''$; $cos\ \alpha' = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

7.51 ▲▲△ **Dibuixa un angle més petit que 180° el cosinus del qual sigui –2/3 i calcula'n el sinus i la tangent.**

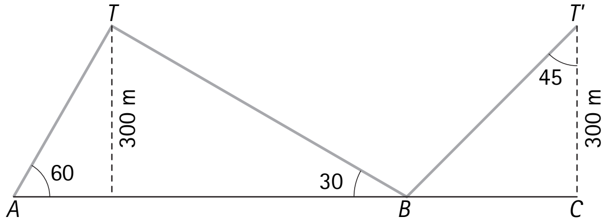
$\alpha = 131° \ 48' \ 37''$; $sin\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

7.52 ▲▲△ **Sabent que *tg* $\alpha = -2$ i $\alpha < 180°$, calcula *sin* α i *cos* α.**

$cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $sin\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Pensa i resol

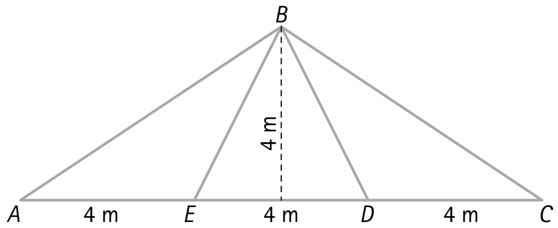
7.53 ▲▲△ **Una línia d'alta tensió passa per dos transformadors, *T* i *T'*.**
Aquest és el pla de la línia:



Calcula les longituds dels tres trams de cable.

b = 346,4 m; a = 600 m; c = 424, 3 m

7.54 ▲▲△ **Una estructura metàl·lica té la forma i les dimensions de la figura.**

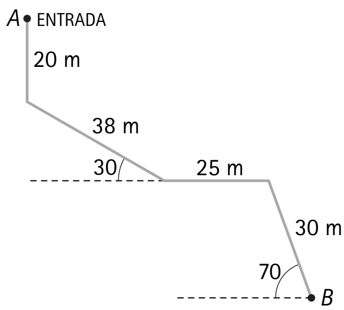


Calcula la longitud dels pals *AB* i *BE* i la mesura dels angles $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{EBD}$ i $\widehat{ABC}$.

$\overline{AB}$ = 7,21 m; $\overline{BE}$ = 4,47 m; $\hat{A}$ = 33° 41' 24"

$\hat{C}$ = 33° 41' 24"; $\widehat{ABC}$ = 112° 37' 12"; $\widehat{EBD}$ = 53° 8' 24"

7.55 ▲▲△ **Els espeleòlegs utilitzen un rodet de fil per amidar profunditats. Deixen anar fil i mesuren la longitud i l'angle que forma amb l'horitzontal. Calcula la profunditat del punt *B*.**



67,19 m

7.56 ▲▲△ **Un senyal de perill en una carretera ens adverteix que el pendent és del 12%. Quin angle forma aquest tram de carretera amb l'horitzontal? Quants metres hem descendit després de recórrer 7 km per aquesta carretera?**

α = 6° 50' 34". Hem descendit 834 m.

7.57 ▲▲△ **En una ruta de muntanya, un senyal indica una altitud de 785 m. Tres quilòmetres més endavant, l'altitud és de 1065 m. Calcula el pendent mitjà d'aquesta ruta i l'angle que forma amb l'horitzontal.**

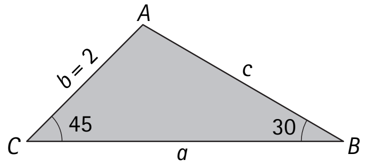
α = 5° 21' 19". El pendent és del 9,37%.

7.58 ▲▲△ **Els braços d'un compàs, que mesuren 12 cm, formen un angle de 60°. Quin és el radi de la circumferència que s'hi pot traçar?**

12 cm

7.59 ▲▲△ **Calcula l'altura del llum d'un far sobre un penya-segat la base del qual és inaccessible, si des d'un vaixell es prenen les mesures següents:**
• L'angle que forma la visual cap al llum amb la línia horitzontal és de 25°.
• Si ens allunyem 200 metres, l'angle que forma ara la visual és de 10°.
53,93 m

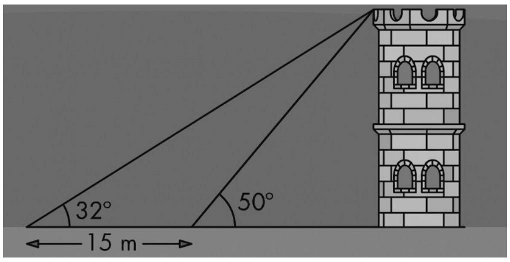
7.60 ▲▲△ **Resol el triangle *ABC* següent, és a dir, esbrina'n les mesures dels elements desconeguts. Comença per traçar-hi l'altura *AH*.**



$\hat{A} = 105°$; $a = 3,9$; $c = 2,8$

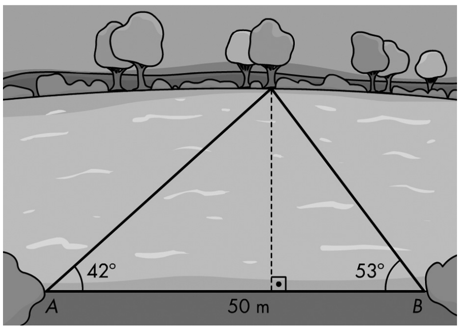
7.61 ▲▲△ **Des de la torre de control d'un aeroport s'estableix comunicació amb un avió que pretén aterrar. En aquest moment l'avió es troba a una altura de 1200 metres, i l'angle d'observació des de la torre (angle que forma la visual cap a l'avió amb l'horitzontal) és de 30°.**
A quina distància es troba l'avió de la base de la torre si aquesta fa 40 m d'alçària?
2 340,3 m

7.62 ▲▲△ **Des del lloc on em trobo, la visual de la torre forma un angle de 32° amb l'horitzontal.**



Si m'hi aproximo 15 m, l'angle és de 50°. Quina és l'alçària de la torre? 19,4 m

7.63 ▲▲△ **Observa les mesures que ha pres en Joan per calcular l'amplària del riu.**



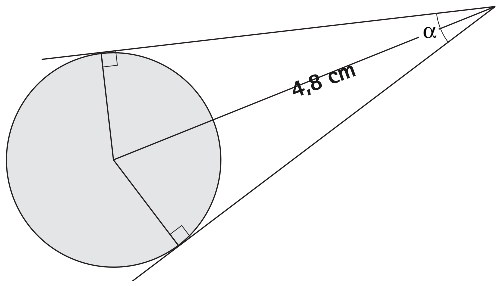
Realitza els càlculs que ha de fer per calcular-la. 26,75 m

7.64 ▲▲△ **Entre dos edificis hi ha una distància de 150 metres. Des d'un punt que es troba entre els dos edificis veiem que les visuals als punts més alts d'aquests formen amb l'horitzontal angles de 35° i 20°.**
Quina és l'alçària dels edificis, si sabem que tots dos mesuren el mateix?
35,66 m

7.65 ▲▲△ **Calcula l'àrea d'un rombe el costat del qual mesura 6 cm i un dels seus angles, 150°.** 18 cm²

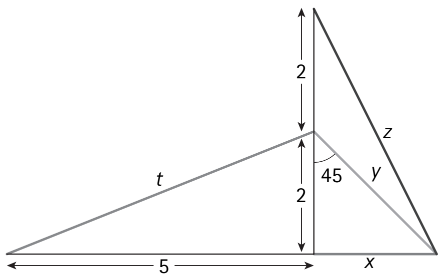
7.66 ▲▲△ **Les tangents a una circumferència de centre *O*, traçades des d'un punt exterior, *P*, formen un angle de 50°. Calcula la distància *PO* sabent que el radi de la circumferència és de 12,4 cm.** 29,3 cm

7.67 ▲▲△ **El diàmetre d'una moneda de 2 € mesura 2,5 cm.**
Calcula l'angle que formen les seves tangents traçades des d'una distància de 4,8 cm del centre, com indica la figura.



$\alpha = 30°\ 11'\ 22''$

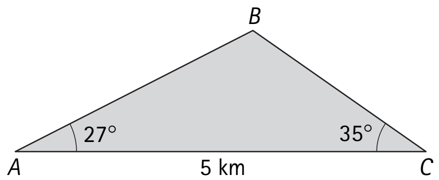
7.68 ▲▲△ **Calcula els valors de *x, y, z, t* en la figura següent.**



$x = 2$; $y = 2{,}8$; $t = 5{,}38$; $z = 4{,}47$

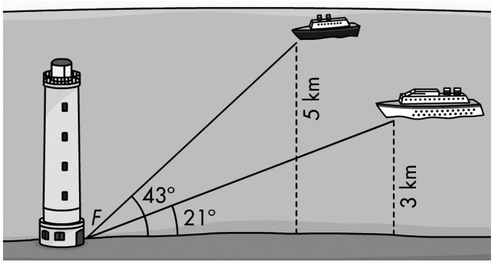
7.69 ▲▲▲ Exercici resolt.

7.70 ▲▲▲ **En dues comissaries de policia, *A* i *C*, se sent l'alarma d'un banc *B*. Amb les dades de la figura, calcula la distància del banc a cadascuna de les comissaries.**



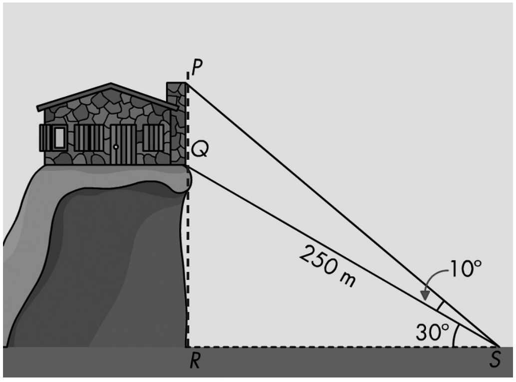
$d = 3{,}23$ km; $D = 2{,}56$ km

7.71 ▲▲▲ **Des del far *F* s'observa el vaixell *A* que forma un angle de 43° respecte a la línia de la costa i el vaixell *B* que forma un angle de 21°. El vaixell *A* és a 5 km de la costa, i el *B*, a 3 km. Calcula la distància que hi ha entre els vaixells.**



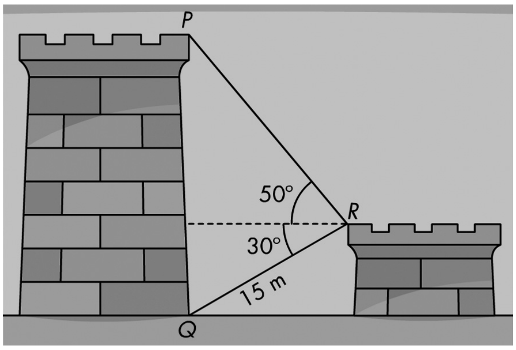
3,16 km

7.72 ▲▲△ **Per calcular l'alçària de l'edifici, $\overline{PQ}$, hem mesurat els angles que indica la figura. Sabem que hi ha un funicular per anar de *S* a *Q*, la longitud del qual és de 250 m. Calcula $\overline{PQ}$.**



56,66 m

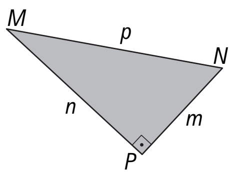
7.73 ▲▲△ **Si $\overline{QR}$ = 15 m, quina és l'alçària de la torre, $\overline{PQ}$?**



23 m

Reflexiona sobre la teoria

7.74 ▲△△ **Observa el triangle rectangle *MPN*. Substitueix els punts suspensius de les igualtats següents per *sin, cos* o *tg*.**



a) … $\hat{M} = \frac{m}{p} \rightarrow$ *sin* b) …$\hat{N} = \frac{m}{p} \rightarrow$ *cos* c) … $\hat{M} = \frac{m}{n} \rightarrow$ *tg*

d) …$\hat{N} = \frac{n}{p} \rightarrow$ *sin* e) …$\hat{N} = \frac{n}{m} \rightarrow$ *tg* f) … $\hat{M} = \frac{n}{p} \rightarrow$ *cos*

7.75 ▲▲△ **Existeix algun angle α en què *sin* $\alpha = \frac{3}{5}$ i *tg* $\alpha = \frac{1}{4}$?**

No existeix.

7.76 ▲▲△ **Un dels catets d'un triangle rectangle mesura el doble que l'altre.**

a) Anomena *x* el catet petit i expressa en funció de *x* l'altre catet i la hipotenusa.

$h = x\sqrt{5}$

b) Calcula les raons trigonomètriques de l'angle més petit.

$sin\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $tg\ \alpha = \frac{1}{2}$

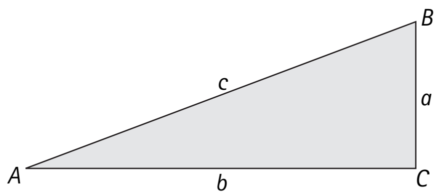
c) Quant mesuren els angles d'aquest triangle?

$\alpha = 26°\ 33'\ 54''$; $\beta = 63°\ 26'\ 6''$

7.77 ▲▲△ **El sinus d'un angle α és igual a la meitat del seu cosinus. Calcula *sin* α, *cos* α i *tg* α.**

$sin\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $tg\ \alpha = \frac{1}{2}$

7.78 ▲▲△



En el triangle rectangle *ABC*, *sin* $\hat{A} = \frac{1}{3}$.

Quant valen les relacions següents entre els seus costats? $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{c}{a}$

$\frac{a}{c} = \frac{1}{3}$; $\frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{a}{c} = 3$

7.79 ▲▲△ **Simplifica mitjançant les relacions fonamentals.**

$(sin\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sin\ \alpha - cos\ \alpha)^2$

$(sin\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sin\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = 2$

7.80 ▲▲△ **Demostra aquestes igualtats mitjançant les relacions fonamentals.**

a) $\frac{(sin\ \alpha)^3 + sin\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sin\ \alpha} = 1$

Calculem factor comú *sin* α: $\frac{sin\ \alpha\ [(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{sin\ \alpha} = (sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

b) $\frac{(sin\ \alpha)^3 + sin\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

Calculem factor comú *sin* α: $\frac{sin\ \alpha\ [(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{cos\ \alpha} = \frac{sin\ \alpha \cdot 1}{cos\ \alpha} = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

c) $1 + (tg\ \alpha)^2 = \frac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

Usant la igualtat $\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$: $1 + (tg\ \alpha)^2 = 1 + \left(\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}\right)^2 = \frac{(cos\ \alpha)^2 + (sin\ \alpha)^2]}{(cos\ \alpha)^2} = \frac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

7.81 ▲△△ **Pot existir un angle el sinus del qual sigui igual a 2? I un altre el cosinus del qual sigui igual a 3/2? Raona les respostes.**

No.

7.82 ▲▲△ **Dibuixa un triangle rectangle en què la tangent d'un dels seus angles aguts valgui 2. Quant val la tangent de l'altre angle agut?**

$tg\ \beta = \dfrac{1}{2}$

7.83 ▲▲△ **Indica, en cada cas, en quin quadrant es troba l'angle α:**

a) ***sin*** $\alpha > 0$, ***cos*** $\alpha < 0$ → 2n quadrant

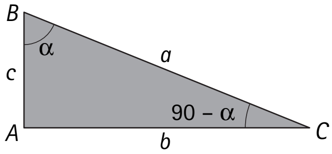
b) ***sin*** $\alpha < 0$, ***cos*** $\alpha > 0$ → 4t quadrant

c) ***tg*** $\alpha > 0$, ***sin*** $\alpha < 0$ → 3r quadrant

d) ***tg*** $\alpha > 0$, ***sin*** $\alpha > 0$ → 1r quadrant

Aprofundeix

7.84 ▲▲△ **Els dos angles aguts d'un triangle rectangle s'anomenen complementaris perquè entre tots dos sumen un angle recte. Com es poden calcular les raons trigonomètriques d'un angle si coneixem les del seu complementari? Observa la figura, completa la taula i expressa simbòlicament els resultats.**



$sin\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha$

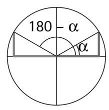
$cos\ (90° - \alpha) = sin\ \alpha$

$tg\ (90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

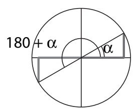
7.85 ▲▲△ **Sobre la circumferència goniomètrica indiquem un angle α en el primer quadrant i a partir d'aquest dibuixem aquests angles: 180° – α; 180° + α; 360° – α**

Cerca la relació que existeix entre:

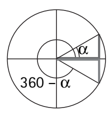
a) ***sin*** **(180° – α) i** ***sin*** **α**
cos **(180° – α) i** ***cos*** **α**
tg **(180° – α) i** ***tg*** **α**



b) ***sin*** **(180° + α) i** ***sin*** **α**
cos **(180° + α) i** ***cos*** **α**
tg **(180° + α) i** ***tg*** **α**



c) ***sin*** **(360° – α) i** ***sin*** **α**
cos **(360° – α) i** ***cos*** **α**
tg **(360° – α) i** ***tg*** **α**



a) $sin\ (180° - \alpha) = sin\ \alpha$; $cos\ (180° - \alpha) = -\ cos\ \alpha$; $tg\ (180° - \alpha) = -\ tg\ \alpha$

b) $sin\ (180° + \alpha) = -\ sin\ \alpha$; $cos\ (180° + \alpha) = -\ cos\ \alpha$; $tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$

c) $sin\ (360° - \alpha) = -sin\ \alpha$; $cos\ (360° - \alpha) = cos\ \alpha$; $tg\ (360° - \alpha) = -\ tg\ \alpha$

7.86 ▲▲△ **Busca amb la calculadora dos angles compresos entre 0° i 360°, de manera que:**

a) El sinus sigui 0,7. α = 44° 25' 37"; β = 135° 34' 22"

b) El cosinus sigui 0,54. α = 57° 18' 59"; β = 302° 41' 1"

c) La tangent sigui 1,5. α = 56° 18' 35; β = 236° 18' 35"

d) El sinus sigui –0,3. α = 342° 32' 32"; β = 197° 27' 27"

e) El cosinus sigui −2/3. $\alpha = 131° 48' 37''$; $\beta = 228° 11' 23''$
f) La tangent sigui −2. $\alpha = 296° 33' 54''$; $\beta = 116° 33' 54''$

7.87 ▲▲△ **Recorda les raons de 30°, 45° i 60° i completa la taula sense utilitzar la calculadora.**

	120°	**135°**	**150°**	**210°**	**225°**	**240°**	**315°**	**330°**
sin	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$
cos	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$

7.88 ▲▲▲ Exercici resolt.

7.89 ▲▲▲ **Resol les equacions següents sabent que $0° \leqslant x \leqslant 360°$.**
a) $(\sin x)^2 - \sin x = 0 \rightarrow x = 0$; $x = 180°$; $x = 90°$
b) $2(\cos x)^2 - \sqrt{3}\cos x = 0 \rightarrow x = 90°$; $x = 270°$; $x = 30°$; $x = 330°$
c) $3\,tg\,x + 3 = 0 \rightarrow x = 135°$; $x = 315°$
d) $4(\sin x)^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 30°$; $x = 150°$; $x = 210°$; $x = 330°$
e) $2(\cos x)^2 - \cos x - 1 = 0 \rightarrow x = 0°$; $x = 120°$; $x = 240°$

Problemes d'estratègia

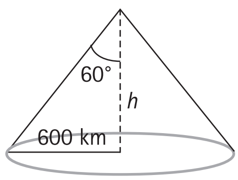
Tales i la catapulta

$$x = \frac{v(a + h)}{h}$$

Fotos via satèl·lit

$$tg\,60° = \frac{600}{h} \rightarrow h = \frac{600}{tg\,60°} = 200\sqrt{3} \approx 346{,}4 \text{ km}$$

Ha de situar-se a una altura de 346,4 km.



Quadrat a trossos

$$\begin{cases} S_{\text{GROGA}} = 36 \text{ cm}^2 \\ S_{\text{BLAVA}} = 48 \text{ cm}^2 \\ S_{\text{MORADA}} = 12 \text{ cm}^2 \\ S_{\text{VERDA}} = 24 \text{ cm}^2 \\ S_{\text{VERMELLA}} = 24 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

El pollastre s'apuja

$44 \times 10\,\% = 4{,}4$ $\quad 44 - 4{,}5 = 39{,}6$ pollets

Jocs per pensar

Qui és qui?

A B C

1. Si A diu la veritat $\begin{cases} \text{B no diu la veritat} \rightarrow \text{La Maria sap trigonometria} \\ \text{C no diu la veritat} \rightarrow \text{sap trigonometria} \end{cases}$

Conclusió: $\begin{cases} \text{A sap trigonometria} \\ \text{La Maria no sap trigonometria} \\ \text{C sap trigonometria} \end{cases}$

Aquest cas no pot ser, perquè n'hi ha dues que saben trigonometria i només pot ser una.

2. Si B diu la veritat $\begin{cases} \text{A no diu la veritat} \rightarrow \text{A no sap trigonometria} \\ \text{C no diu la veritat} \rightarrow \text{C sap trigonometria} \end{cases}$

Conclusió: $\begin{cases} \text{A no sap trigonometria} \\ \text{La Maria no sap trigonometria} \\ \text{C sap trigonometria} \end{cases}$

Deduïm que B diu la veritat, C sap trigonometria i A és la Maria.

3. Si C diu la veritat $\begin{cases} \text{A no diu la veritat} \rightarrow \text{A no sap trigonometria} \\ \text{C no diu la veritat} \rightarrow \text{La Maria sap trigonometria} \end{cases}$

Conclusió: $\begin{cases} \text{A no sap trigonometria} \\ \text{La Maria sap trigonometria} \\ \text{C no sap trigonometria} \end{cases}$

Llavors B només pot ser la Maria, que és impossible perquè no parla d'ella mateixa, sinó de les altres dues.

El resultat vàlid és el de l'apartat 2: $\begin{cases} \text{A és la Maria} \\ \text{B diu la veritat} \\ \text{C sap trigonometria} \end{cases}$

Espiral i successió

Els termes següents són:

8 + 13 = 21

13 + 21 = 34

21 + 44 = 65