

Resol

Pàgina 53

1 I. Una quantitat C augmenta un 10% i, després, disminueix un 5%.

II. Una quantitat C disminueix un 5% i, després, augmenta un 10%.

El resultat final de I, és major, igual o menor que el de II?

Ambdós resultats són iguals perquè la quantitat final podem calcular-la utilitzant els índexs de variació, de la manera següent:

$$I. C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 1,045C$$

$$II. C \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1,045C$$

2 Si una quantitat C augmenta un 10% i, després, el resultat disminueix un 10%, el que resulta, és més gran, igual o més petit que C ?

Utilitzant els índexs de variació, obtenim:

$$C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 0,99C$$

Com que el coeficient de C és un nombre menor que 1, la quantitat final és menor que C . Concretament, és el 99% de C .

3 En una reunió hi ha 30 persones, de les quals el 30% duen ulleres. Només el 20% de les dones duen ulleres, però el 35% dels homes les usen. Quants homes i quantes dones hi ha?

Anomenem x el nombre de dones i y el nombre d'homes que hi ha a la reunió. Com que el 30% del total utilitzen ulleres, $30\% \cdot 30 = 9$ persones en porten. Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 30 \\ \frac{20}{100}x + \frac{35}{100}y = 9 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 30 \\ 20x + 35y = 900 \end{array} \right\} \rightarrow x = 10, y = 20$$

A la reunió hi assisteixen 10 dones i 20 homes.

4 Ens han concedit un préstec de 20 000 € pel qual hem de pagar un 8% anual. Un any després tornem 10 000 €. En finalitzar el segon any volem saldar el deute. Quant haurem de pagar?

Els interessos de 20 000 € durant 1 any són $\frac{20000 \cdot 8}{100} = 1600$ €.

Dels 10 000 € tornats, 1 600 € són per pagar els interessos del primer any i la resta, és a dir, $10000 - 1600 = 8400$ €, es descompten dels diners que ens han deixat.

Per tant, encara queden per tornar $20000 - 8400 = 11600$ € més els interessos que generen en un any.

Aquests interessos són $\frac{11600 \cdot 8}{100} = 928$ €.

La quantitat final que hem de pagar, després de tornar els 10 000 €, és aquesta:

$$11600 + 928 = 12528 \text{ €}$$

1 Augments i disminucions percentuals

Pàgina 54

5 Una raqueta de tennis valia, al començament de temporada, 40 euros. Al llarg de l'any va experimentar les variacions següents: va pujar un 20 %, va baixar un 25 %, va pujar un 5 % i, finalment, va baixar un 12 %.

a) Quin ha estat l'índex de variació global?

b) Quant val al final de temporada?

c) Quin percentatge ha de pujar per tornar a costar 40 €?

a) Índex de variació = $1,2 \cdot 0,75 \cdot 1,05 \cdot 0,88 = 0,8316$ (baixa el preu un 16,84 %)

b) Preu final = $40 \cdot 1,2 \cdot 0,75 \cdot 1,05 \cdot 0,88 = 33,26$ €

c) Com que el preu final és de 33,26 €, fins a arribar als 40 € ha de pujar:

$$40 - 33,26 = 6,74 \text{ €} \rightarrow \frac{6,74}{33,26} \cdot 100 = 20,26 \%$$

Pàgina 55

Fes-ho tu

1 Esbrina en quant es queda un article de 100 € el preu del qual s'augmenta un r % i, a continuació, es rebaixa un r %, per a $r = 10$, $r = 20$, $r = 50$ i $r = 80$.

Quina és la pèrdua en cada cas?

• $r = 10 \rightarrow 100 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 100 \cdot 1,1 \cdot 0,9 = 99$ € \rightarrow La pèrdua de valor és d'1 €.

• $r = 20 \rightarrow 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 100 \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 96$ € \rightarrow La pèrdua és de 4 €.

• $r = 50 \rightarrow 100 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 75$ € \rightarrow La pèrdua de valor és de 25 €.

• $r = 80 \rightarrow 100 \cdot 1,8 \cdot 0,2 = 36$ € \rightarrow La pèrdua de valor és de 64 €.

2 Calcula quin serà el preu inicial en cada cas:

a) Després d'augmentar un article un 21 %, ara costa 332,75 €.

b) Després de rebaixar un article un 16 %, ara costa 18,48 €.

Quin percentatge d'augment o de rebaixa s'ha de fer per deixar els articles amb el preu inicial?

a) $\frac{332,75}{1,21} = 275$ € és el preu inicial.

Per deixar l'article amb el seu preu inicial, cal aplicar la rebaixa següent:

$$332,75 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) = 275 \rightarrow 57,75 = 3,3275 \cdot r \rightarrow r = 17,36 \%$$

b) $\frac{18,48}{0,84} = 22$ € és el preu inicial.

Per deixar l'article amb el seu preu inicial, cal aplicar l'augment següent:

$$18,48 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 22 \rightarrow 0,1848 \cdot r = 3,52 \rightarrow r = 19,05 \%$$

6 Després d'apujar un article un 20 %, ara val 45,60 euros. Quant valia abans de la pujada?

$$1,2x = 45,60 \rightarrow x = 38 \text{ €}$$

7 Després de rebaixar-lo un 35 %, ara val 81,90 euros. Quant valia abans de la rebaixa?

$$0,65x = 81,90 \rightarrow x = 126 \text{ €}$$

3 Interessos bancaris

Pàgina 57

Fes-ho tu. En quant es transforma un capital de 50 000 €, col·locat al 12% anual, en 1, 2, 3, 4 i 5 anys?

En 1 any es transforma en $50\,000 \cdot 1,12 = 56\,000$ €.

En 2 anys es transforma en $50\,000 \cdot 1,12^2 = 62\,720$ €.

En 3 anys es transforma en $50\,000 \cdot 1,12^3 = 70\,246,40$ €.

En 4 anys es transforma en $50\,000 \cdot 1,12^4 = 78\,675,97$ €.

En 5 anys es transforma en $50\,000 \cdot 1,12^5 = 88\,117,08$ €.

Fes-ho tu. Quants anys es necessiten perquè 50 000 € col·locats al 8% anual es converteixin en 125 000 €?

$$50\,000 \cdot 1,08^n = 125\,000 \rightarrow 1,08^n = \frac{125\,000}{50\,000} \rightarrow 1,08^n = 2,5 \rightarrow n = \frac{\log 2,5}{\log 1,08} = 11,91$$

Es necessiten 12 anys i s'obtindrà una quantitat lleugerament superior a 125 000 €.

Pàgina 58

8 Esbrina en quant es transforma un capital de 100 000 € al 6% anual durant 4 anys si els períodes de capitalització són:

a) anys

b) mesos

c) dies

d) trimestres

a) $100\,000 \cdot 1,06^4 = 126\,247,70$ €

b) $100\,000 \cdot 1,005^{48} = 127\,048,92$ €

c) $100\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{36\,500}\right)^{1460} = 127\,122,41$ €

d) $100\,000 \cdot 1,015^{16} = 126\,898,55$ €

4 Què és la "taxa anual equivalent" (TAE)?

Pàgina 59

9 Un banc ens concedeix un préstec de 10 000 € al 12 % anual. En el moment de la formalització ens cobra unes despeses de 500 €.

a) Si fem només un pagament al cap d'un any, quina és la TAE?

b) I si haguéssim de tornar el préstec íntegre al cap de dos anys?

(Per resoldre-ho, tingues en compte que encara que fem els pagaments sobre un préstec de 10 000 €, el que realment vam rebre eren 9 500 €.)

a) Ens van donar 9 500 € i hem de tornar $10\,000 \cdot 1,01^{12} = 11\,268,25$ €.

$$\frac{11\,268,25}{9\,500} = 1,18613\dots \text{ Per tant, la TAE serà del } 18,61 \%$$

b) Com que ens donen 9 500 € i n'hem de tornar $10\,000 \cdot 1,01^{24} = 12\,697,35$ l'augment en dos anys és:

$$\frac{12\,697,35}{9\,500} = 1,336563$$

$$\text{Anomenant } x \text{ la TAE: } \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 1,336563 \rightarrow 1 + \frac{x}{100} = 1,1561$$

En aquest cas, la TAE és del 15,61 %.

5 Amortització de préstecs

Pàgina 61

Fes-ho tu. Rebem un préstec de 25 000 € al 6% anual que hem d'amortitzar en 6 pagaments anuals de 4 067,25 €. Comprova que l'anualitat és la correcta.

ANYS	DEUTE ABANS DEL PAGAMENT	INTERESSOS PENDENTS	PAGAMENT	QUANTITAT AMORTITZADA	DEUTE PENDENT
1	20 000	3 000	5 966,31	2 966,31	17 033,69
2	17 033,69	2 555,05	5 966,31	3 411,26	13 622,43
3	13 622,43	2 043,36	5 966,31	3 922,95	9 699,48
4	9 699,48	1 454,92	5 966,31	4 511,39	5 188,09
5	5 188,09	778,21	5 966,31	5 188,10	-0,01

Fes-ho tu. Rebem un préstec de 120 000 € al 7,5% anual. Hem pagat 25 000 € al final de cadascun dels quatre primers anys. Si volem saldar el deute al final del 5è any, quant hem de pagar?

ANYS	DEUTE ABANS DEL PAGAMENT	INTERESSOS PENDENTS	PAGAMENT	QUANTITAT AMORTITZADA	DEUTE PENDENT
1	50 000	5 000	15 000	10 000	40 000
2	40 000	4 000	15 000	11 000	29 000
3	29 000	2 900	15 000	12 100	16 900
4	16 900	1 690	x	16 900	0

L'últim pagament és la suma del deute més els interessos pendents:

$$x = 48\,433,25 + 3\,632,49 = 52\,065,74 \text{ €}$$

10 Comprova que podem amortitzar 10 000 € al 10% anual amb quatre pagaments trimestrals de 2 658,18 € cadascun.

10% anual = 2,5% trimestral

PAGAMENT TRIMESTRAL	DEUTE ABANS DEL PAGAMENT	INTERESSOS PENDENTS	PAGAMENT	QUANTITAT AMORTITZADA	DEUTE PENDENT
1	10 000	250	2 658,18	2 408,18	7 591,82
2	7 591,82	189,80	2 658,18	2 468,38	5 123,44
3	5 123,44	128,09	2 658,18	2 530,09	2 593,35
4	2 593,35	64,83	2 658,18	2 593,35	0,00

11 Amortitzarem un préstec de 500 000 € al 6% anual en 8 mesos. Els set primers pagaments són de 60 000 €. A quant puja el darrer pagament?

Com que els pagaments són mensuals, hem de tenir en compte l'interès mensual que correspon al 6% anual, és a dir, el 0,5% mensual.

MESOS	DEUTE ABANS DEL PAGAMENT	INTERESSOS PENDENTS	PAGAMENT	QUANTITAT AMORTITZADA	DEUTE PENDENT
1	500 000	2 500,00	60 000	57 500	442 500
2	442 500	2 212,50	60 000	57 787,50	384 712,50
3	384 712,50	1 923,56	60 000	58 076,44	326 636,06
4	326 636,06	1 633,18	60 000	58 366,82	268 269,24
5	268 269,24	1 341,35	60 000	58 658,65	209 610,59
6	209 610,59	1 048,05	60 000	58 951,95	150 658,64
7	150 658,64	753,29	60 000	59 246,71	91 411,94
8	91 411,94	457,06	x	91 411,94	0,00

L'últim pagament serà:

$$x = 91\,411,94 + 457,06 = 91\,869 \text{ €}$$

6 Progressions geomètriques

Pàgina 62

Fes-ho tu. L'1 de gener dipositem 20 000 € al 6 % anual amb pagament mensual d'interessos. Quin serà el valor dels nostres diners el dia 1 de cada mes d'aquest any si els interessos es van acumulant al capital?

Cada mes els diners es multipliquen per $1 + \frac{6}{1200} = 1,005$.

L'1 de febrer valdrà $20\,000 \cdot 1,005 = 20\,100$.

L'1 de març, $20\,000 \cdot 1,005^2 = 20\,200,5$.

L'1 d'abril, $20\,000 \cdot 1,005^3 = 20\,301,5$.

L'1 de maig, $20\,000 \cdot 1,005^4 = 20\,403,01$.

I així successivament.

Fes-ho tu. Durant 6 anys, cada any dipositem 3 000 € al 3 % anual amb pagament anual d'interessos. En quant es converteix cada dipòsit al final del 6è any?

El primer dipòsit estarà 6 anys al 3 % anual i es transforma en:

$$a_1 = 3\,000 \cdot 1,03^6 = 3\,582,16$$

Els següents:

$$a_2 = 3\,000 \cdot 1,03^5 = 3\,477,82$$

$$a_3 = 3\,000 \cdot 1,03^4 = 3\,376,53$$

$$a_4 = 3\,000 \cdot 1,03^3 = 3\,278,18$$

$$a_5 = 3\,000 \cdot 1,03^2 = 3\,182,7$$

$$a_6 = 3\,000 \cdot 1,03 = 3\,090$$

12 Dipositem 100 000 euros el dia 1 de gener, en un banc, al 8 % anual. Quin valor tindrem al final de cada trimestre de l'any? Aquestes quantitats són en progressió geomètrica. Quina és la raó?

8 % anual = 2 % trimestral

Al final del primer trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02 = 102\,000$ €.

Al final del segundo trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02^2 = 104\,040$ €.

Al final del tercer trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02^3 = 106\,120,80$ €.

Al final del cuarto trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02^4 = 108\,243,22$ €.

La razón es $r = 1,02$.

13 Dipositem una certa quantitat de diners al començament d'un any, en un banc, al 6 % anual. Cada mes aquesta quantitat augmenta en progressió geomètrica. Quina és la raó d'aquesta progressió?

6 % anual = 0,5 % mensual

La raó és $r = 1,005$.

Pàgina 63**14 Al començament de cada any dipositem 6 000 euros en un banc al 7 % anual.****Quants diners obtindrem en finalitzar el 10è any?**Pel primer ingrés acumulem $6000 \cdot 1,07^{10}$.Pel segon ingrés acumulem $6000 \cdot 1,07^9$.

...

Pel desè ingrés acumulem $6000 \cdot 1,07$.En total, tindrem $S_{10} = \frac{6000 \cdot 1,07^{11} - 6000 \cdot 1,07}{1,07 - 1} = 88701,60 \text{ €}$.**15 Al començament de cada mes dipositem 100 € en un banc al 6 % anual.****Quants en tindrem al final del 2n any?**Pel primer ingrés acumulem $100 \cdot 1,005^{24}$.Pel segon ingrés acumulem $100 \cdot 1,005^{23}$.

...

Pel vintiquatrè ingrés acumulem $100 \cdot 1,005$.En total, tindrem $S_{24} = \frac{100 \cdot 1,005^{25} - 100 \cdot 1,005}{1,005 - 1} = 2555,91 \text{ €}$.

7 Càlcul d'anualitats o mensualitats per amortitzar deutes

Pàgina 66

Fes-ho tu. Si l'interès fos del 8% i s'hagués de pagar en 11 anualitats, de quant seria la quantia de cada anualitat?

Apliquem la fórmula per a $i = 0,08$ i $n = 11$:

$$a = 500\,000 \cdot \frac{1,08^{11} \cdot 0,08}{1,08^{11} - 1} = 70\,038,17 \text{ €}$$

Fes-ho tu. El banc ens concedeix un préstec de 25 000 euros al 6% anual que s'ha d'amortitzar en un any amb 12 pagaments mensuals. Quina és la mensualitat que s'ha de pagar?

Prenem $i = \frac{6}{1200} = 0,005$ i $n = 12$ mesos:

$$m = 25\,000 \cdot \frac{1,005^{12} \cdot 0,005}{1,005^{12} - 1} = 2\,151,66 \text{ €}$$

Fes-ho tu. Volem amortitzar un deute de 120 000 €, en 5 anys, al 9% anual, amb pagaments quadrimestrals. Quant hem de pagar cada quadrimestre?

L'interès trimestral és $\frac{9\%}{3} = 3\%$. Per tant, $i = \frac{3}{100} = 0,03$. En aquest cas, $n = 5 \cdot 3 = 15$:

$$p = 120\,000 \cdot \frac{1,03^{15} \cdot 0,03}{1,03^{15} - 1} = 10\,051,99 \text{ €}$$

16 Esbrina la mensualitat que s'ha de pagar per amortitzar en 3 anys (36 pagaments) un deute de 24 000 euros al 9% anual.

$$i = \frac{9}{1200} = 0,0075$$

$$m = 24\,000 \cdot \frac{1,0075^{36} \cdot 0,0075}{1,0075^{36} - 1} = 763,19 \text{ €}$$

17 Quant s'ha de pagar cada trimestre per amortitzar en 3 anys (12 pagaments) un deute de 24 000 euros al 9% anual?

$$i = \frac{9}{400} = 0,0225$$

$$\text{Així, cada trimestre haurem de pagar: } 24\,000 \cdot \frac{1,0225^{12} \cdot 0,0225}{1,0225^{12} - 1} = 2\,304,42 \text{ €}$$

18 Si compro a terminis una bicicleta de 3 000 € per pagar en 12 mesos al 15% anual, quant hauré de pagar al mes?

$$\text{Fem } i = \frac{15}{1200} = 0,0125 \text{ i } n = 12:$$

$$m = 3\,000 \cdot \frac{1,0125^{12} \cdot 0,0125}{1,0125^{12} - 1} = 270,77 \text{ €}$$

19 Si he de pagar 4 092,23 € a l'any durant els tres anys posteriors a un préstec que em va concedir el banc a l'11% d'interès anual, quina quantitat em va prestar?

En aquest cas coneixem l'anualitat i hem de calcular el capital. Per tant:

$$4\,092,23 = C \cdot \frac{1,11^3 \cdot 0,11}{1,11^3 - 1} \rightarrow C = 4\,092,23 \cdot \frac{1,11^3 - 1}{1,11^3 \cdot 0,11} = 10\,000 \text{ €}$$

20 Un banc m'ha prestat 15 000 € per tornar-los en 2 anys. Calcula quant hauré pagat si torno el préstec:

- a) Al final dels 2 anys.
- b) En 2 anualitats.
- c) En 8 trimestres.
- d) En 24 mensualitats.

Explica per què es paguen quantitats diferents.

Si el banc cobra un $r\%$ d'interès anual i prenem $i = \frac{r}{100}$:

- a) Al final dels dos anys, en un únic pagament de $15\,000 \cdot (1 + i)^2$.
- b) En 2 anualitats, cada una amb un valor de:

$$a = 15\,000 \cdot \frac{(1+i)^2 \cdot i}{(1+i)^2 - 1}$$

- c) En 8 trimestres, cada pagament seria:

$$p = 15\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{4}\right)^8 \cdot \frac{i}{4}}{\left(1 + \frac{i}{4}\right)^8 - 1}$$

perquè l'interès anual s'hauria de repartir en 4 trimestres l'any.

- d) En 24 mensualitats, cada una amb un valor de:

$$m = 15\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{24} \cdot \frac{i}{12}}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{24} - 1}$$

Es paguen quantitats diferents perquè amb cada pagament s'amortitza una quantitat de capital. Així, el capital i els interessos pendents van variant de diferent manera en cada cas.

21 La mensualitat que he de pagar per la compra d'una màquina per a la meva empresa és de 1 521,22 €. Si la financera em cobra el 12% anual durant tres anys, quant costava la màquina?

Les dades són aquestes: $m = 1\,521,22$ €, $i = \frac{12}{1200} = 0,01$ i $n = 36$ mesos (3 anys). Per tant:

$$1\,521,22 = C \cdot \frac{1,01^{36} \cdot 0,01}{1,01^{36} - 1} \rightarrow C = 1\,521,22 \cdot \frac{1,01^{36} - 1}{1,01^{36} \cdot 0,01} \approx 45\,800 \text{ €}$$

8 Productes financers

Pàgina 67

22 Cert o fals?

- a) **Si rebem 120 000 € per adquirir un pis, hem creat un fons d'inversió.**
 - b) **La diferència entre bons i obligacions només depèn del fet que el deute sigui a llarg o a curt termini.**
 - c) **Els sistemes d'estalvi per a la jubilació són drets de propietat d'una empresa denominats accions.**
- a) Fals. El que hem fet és contractar un crèdit hipotecari.
 - b) Cert. Ambdós són instruments de crèdit legal que només es diferencien en el termini d'emissió de deute.
 - c) Fals. Aquests sistemes són plans de pensions.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 68

1. Variació del poder adquisitiu d'un treballador

Fes-ho tu. Si la pujada de l'IPC el 2013 va ser d'un 0,3% i durant el 2014 l'SMI va quedar congelat, calcula la variació del poder adquisitiu del mateix treballador entre els anys 2010 i 2014.

Pujada acumulada de l'IPC entre començaments de 2010 i finals de 2013:

$$1,03 \cdot 1,024 \cdot 1,029 \cdot 1,003 = 1,0886 \rightarrow \text{Pujada del } 8,86\%$$

Si el salari mínim hagués pujat proporcionalment a l'IPC entre aquestes dades, hauria de ser de:

$$633,33 \cdot 1,0886 = 689,44 \text{ €}$$

Com que el SMI es va mantenir congelat l'any 2014, va ser realment de 645,30 €.

$$I_v = \frac{645,30}{689,44} = 0,936 \rightarrow 1 - 0,936 = 0,064 \rightarrow \text{Disminució del } 6,4\%$$

2. Dipòsit amb interès variable

Fes-ho tu. Resol aquest mateix exercici si les TAE associades a cada semestre són 1,0046%, 2,0184%, 3,0416% i 4,0742%, respectivament.

Plantegem el problema anàlogament a l'exercici resolt.

$$\text{TAE} = 1,0046\% \rightarrow r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{1,0046}{100}} - 1 \right) \cdot 1200 = 1 \rightarrow 1\%$$

$$\text{TAE} = 2,0184\% \rightarrow r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{2,0184}{100}} - 1 \right) \cdot 1200 = 2 \rightarrow 2\%$$

$$\text{TAE} = 3,0416\% \rightarrow r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{3,0416}{100}} - 1 \right) \cdot 1200 = 3 \rightarrow 3\%$$

$$\text{TAE} = 4,0742\% \rightarrow r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{4,0742}{100}} - 1 \right) \cdot 1200 = 4 \rightarrow 4\%$$

Ara, amb els interessos anuals que corresponen a cada període calculem el valor final del dipòsit:

$$C_{\text{final}} = 15000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1200}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{2}{1200}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{3}{1200}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^6 = 15768,08 \text{ €}$$

El benefici obtingut és de $15768,08 - 15000 = 768,08 \text{ €}$.

Pàgina 69

3. Taula d'amortització d'un préstec

Fes-ho tu. Ens concedeixen un préstec de 50000 €, al 5%, que hem de tornar en 5 anys, pagant cada any una cinquena part del capital pendent més els interessos de la quantitat deguda.

Calcula els pagaments anuals.

	CAPITAL PENDENT	PAGAMENT D'INTERESSOS	+	PAGAMENT DE CAPITAL	=	PAGAMENT ANUAL	DEUTE PENDENT
1r ANY	50000	2500	+	10000	=	12500	40000
2n ANY	40000	2000	+	10000	=	12000	30000
3r ANY	30000	1500	+	10000	=	11500	20000
4t ANY	20000	1000	+	10000	=	11000	10000
5è ANY	10000	500	+	10000	=	10500	0

Els pagaments anuals per amortitzar el préstec seran: 12500 €, 12000 €, 11500 €, 11000 € i 10500 €.

4. Comissió de cancel·lació d'un préstec

Fes-ho tu. Demanem un préstec de 100 000 €, al 5 % anual, que hem de tornar en 10 anys en quotes anuals. A més, ens imposen una comissió de cancel·lació anticipada del 2 %. Quina seria aquesta comissió si volguéssim cancel·lar-lo transcorreguts 2 anys?

Primer calculem el valor de cada anualitat:

$$a = 100\,000 \cdot \frac{1,05^{10} \cdot 0,05}{1,05^{10} - 1} = 12\,950,46 \text{ €}$$

Ara elaborem la taula d'amortització del préstec per als primers 2 anys.

	CAPITAL PENDENT	QUOTA ANUAL	-	PAGAMENT D'INTERESSOS	=	PAGAMENT CAPITAL	DEUTE PENDENT
1r ANY	100 000	12 950,46	-	5 000	=	7 950,46	92 049,54
2n ANY	92 049,54	12 950,46	-	4 602,48	=	8 347,98	83 701,56

El valor de la comissió de cancel·lació és el 2 % del deute pendent, és a dir:

$$83\,701,56 \cdot 0,02 = 1\,674,03 \text{ €}$$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 70

1. Augments acumulats

En el contracte laboral d'un administratiu es fixa una pujada anual del 3%. Si comença guanyant 1 000 € mensuals, quants anys han de passar perquè el sou sigui de 1 200 €?

El sou del treballador després de n anys és de $1\,000 \cdot 1,03^n$ € al mes. Perquè el sou sigui de 1 200 €:

$$1\,200 = 1\,000 \cdot 1,03^n \rightarrow \frac{1\,200}{1\,000} = 1,03^n \rightarrow 1,2 = 1,03^n \rightarrow n = \frac{\log 1,2}{\log 1,03} = 6,17$$

Han de passar més de 6 anys, és a dir, 7 anys.

2. Càlcul de la TAE

Col·loquem en un dipòsit bancari a 2 anys un capital inicial de 10 000 € al 3% anual. Troba'n la TAE associada i fes-la servir per obtenir el capital final si:

a) els períodes de capitalització són mensuals.

b) els períodes de capitalització són quadrimestrals.

a) L'interès mensual és $i_m = \frac{3}{1200} = 0,0025$.

L'índex de variació mensual és $I_{vm} = 1 + 0,0025 = 1,0025$.

Com que aquesta pujada es produeix cada mes, l'índex de variació anual és:

$$I_v = 1,0025^{12} = 1,0304156 \rightarrow \text{T.A.E.} = 3,0416\%$$

El capital després de 2 anys és $C_{\text{final}} = 10\,000 \cdot 1,030416^2 = 10\,617,57$ €.

b) L'interès quadrimestral és $i_c = \frac{3}{300} = 0,01$.

L'índex de variació quadrimestral és $I_{vc} = 1 + 0,01 = 1,01$.

Com que aquesta pujada es produeix cada quadrimestre, l'índex de variació anual és:

$$I_v = 1,01^3 = 1,030301 \rightarrow \text{T.A.E.} = 3,0301\%$$

El capital després de dos anys és $C_{\text{final}} = 10\,000 \cdot 1,030301^2 = 10\,615,20$ €.

3. Plans de pensions

Un treballador contracta un pla de pensions 35 anys abans de la jubilació, amb aportacions anuals de 2 400 € al 4%.

De quina quantitat de diners disposarà en el moment de la jubilació?

La primera anualitat es convertirà en $a_1 = 2\,400 \cdot 1,04^{35}$.

La segona, en $a_2 = 2\,400 \cdot 1,04^{34}$ en quedar dipositada un any menys.

La tercera, en $a_3 = 2\,400 \cdot 1,04^{33}$.

...

L'última (35a), com que estarà dipositada només un any, es convertirà en $a_{35} = 2\,400 \cdot 1,04$.

Es tracta de sumar 35 termes d'una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{1,04}$.

$$S_{35} = \frac{\frac{1}{1,04} \cdot 2\,400 \cdot 1,04 - 2\,400 \cdot 1,04^{35}}{\frac{1}{1,04} - 1} = 183\,835,95 \text{ € (diners de què disposarà en jubilar-se)}$$

Interès variable

Una hipoteca està contractada amb un interès anual variable d'Euribor + 0,65. En el contracte s'estableix una clàusula sòl que impedeix que aquest interès baixi del 2,9%.

Quan queden 239 mensualitats per pagar i un capital pendent de 169 349,20 €, l'Euribor té un valor de 0,528.

Calcula la quota actual de la hipoteca i quina seria aquesta quota si se n'eliminés la clàusula sòl.

Com que Euribor + 0,65 = 0,528 + 0,65 = 1,178 no arriba a 2,9, en aplicar la clàusula sòl, calculem la mensualitat d'aquesta manera:

$$\left. \begin{array}{l} i = \frac{2,9}{1200} \\ n = 239 \\ C = 169\,349,20 \end{array} \right\} \rightarrow m = 169\,349,20 \cdot \frac{\left(1 + \frac{2,9}{1200}\right)^{239} \cdot \frac{2,9}{1200}}{\left(1 + \frac{2,9}{1200}\right)^{239} - 1} = 933,63 \text{ €}$$

Si s'eliminés la clàusula sòl, la mensualitat seria:

$$m = 169\,349,20 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1,178}{1200}\right)^{239} \cdot \frac{1,178}{1200}}{\left(1 + \frac{1,178}{1200}\right)^{239} - 1} = 795,29 \text{ €}$$

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 71

Per practicar

■ Percentatges

1 Després d'apujar l'IVA cultural del 8 % al 21 %, el preu de les entrades en dos cines ha passat de 8 a 9 euros, i de 6,70 a 7,50 euros, respectivament. Quin ha estat el percentatge de pujada de les entrades de cada cine? Es correspon amb la pujada de l'IVA?

- En el primer cas, el preu ha pujat de 8 € (IVA 8 % inclòs) a 9 € (IVA 21 % inclòs).

El percentatge de pujada l'obtenim calculant $\frac{9}{8} = 1,125 \rightarrow 12,5\%$.

L'IVA del 8 % es correspon amb l'índex de variació $1 + \frac{8}{100} = 1,08$.

Per tant, el preu de l'entrada sense el 8 % d'IVA és $\frac{8}{1,08} = 7,41$ €.

Ara, apliquem el 21 % d'IVA i obtenim el preu final: $7,41 \cdot 1,21 = 8,97$ €, que es correspon amb els 9 €.

- Raonem anàlogament en el segon cas.

El percentatge de pujada l'obtenim calculant $\frac{7,50}{6,70} = 1,1194 \rightarrow 11,94\%$.

El preu de l'entrada sense el 8 % d'IVA és $\frac{7,50}{1,08} = 6,94$ €.

Ara, apliquem el 21 % d'IVA i obtenim el preu final: $6,94 \cdot 1,21 = 8,40$ €.

El preu cobrat, (7,50 €), és més baix que el que hauria de ser aplicant la pujada de l'IVA cultural.

2 Si el preu d'un article ha passat de 35 € a 100 € en uns quants anys, quin és l'índex de variació? Quin ha estat l'augment expressat en percentatges?

Índex de variació = $\frac{100}{35} = 2,8571$. Ha augmentat un 185,71 %.

3 El nombre total d'hipoteques a Espanya el 2009 va ascendir a 1 082 587. El 2012 hi va haver 458 937 hipoteques. Calcula l'índex de variació i el percentatge de baixada.

L'índex de variació és $I_v = \frac{458937}{1082587} = 0,4239$.

Per trobar el percentatge de baixada, calculem:

$$1 - 0,4239 = 0,5761 \rightarrow 57,61\% \text{ de baixada}$$

4 El 2008 hi havia 7 033 filials d'empreses estrangeres a Espanya. El 2009 el nombre va ascendir a 8 064. Quin és l'índex de variació? Quin percentatge suposa aquesta pujada?

L'índex de variació és $I_v = \frac{8064}{7033} = 1,1466$.

Per trobar el percentatge de pujada, calculem:

$$1,1466 - 1 = 0,1466 \rightarrow 14,66\% \text{ de pujada}$$

5 Troba l'índex de variació del preu d'un televisor que costava 450 €, després d'apujar-lo un 15 % i rebaixar-lo posteriorment un 25 %. Quin és el preu actual?

$$\text{Índex de variació} = 1,15 \cdot 0,75 = 0,8625$$

$$\text{Preu actual} = 450 \cdot 0,8625 = 388,13 \text{ €}$$

6 La quantitat d'aigua d'un embassament ha disminuït en un 35 % respecte a la que hi havia el mes passat. Ara conté 74,25 milions de litres. Quants litres tenia el mes passat?

$$0,65x = 74,25 \rightarrow x = 114,23 \text{ milions de litres}$$

7 En la taula següent es mostra, en milions d'euros, la recaptació a Espanya de l'AEAT en tres anys diferents:

	2003	2005	2008
TOTAL	28 892	47 721	51 577
ENERGIA/AIGUA	1 150	4 838	3 834
COMERÇ	9 853	18 633	21 245

- a) Calcula el percentatge de la recaptació total que suposa la procedent del comerç en aquests anys.
- b) Esbrina l'índex de variació de la recaptació procedent d'energia i aigua entre els anys 2003 i 2005, 2005 i 2008 i entre 2003 i 2008. Expressa-ho també usant percentatges.

a) Any 2003 $\rightarrow \frac{9853}{28892} = 0,3410 \rightarrow 34,10\%$ de la recaptació total

Any 2004 $\rightarrow \frac{18633}{47721} = 0,3905 \rightarrow 39,05\%$

Any 2005 $\rightarrow \frac{21245}{51577} = 0,4119 \rightarrow 41,19\%$

b) Entre els anys 2003 i 2005:

$$I_v = \frac{4838}{1150} = 4,207 \rightarrow 4,207 - 1 = 3,207 \rightarrow \text{Pujada del } 320,7\%.$$

Entre els anys 2005 i 2008:

$$I_v = \frac{3834}{4838} = 0,7924 \rightarrow 1 - 0,7924 = 0,2076 \rightarrow \text{Baixada del } 20,76\%.$$

Entre els anys 2003 i 2008:

$$I_v = \frac{3834}{1150} = 3,3339 \rightarrow 3,3339 - 1 = 2,3339 \rightarrow \text{Pujada del } 233,39\%.$$

8 Entre els anys 2004 i 2012 el nombre de matrimonis a Espanya va disminuir un 21,89 %. Si el 2012 hi va haver 168 835 matrimonis, quants n'hi va haver el 2004?

L'índex de variació que correspon a la baixada és $I_v = 1 - 0,2189 = 0,7811$.

El nombre de matrimonis que hi va haver l'any 2004 va ser: $\frac{168835}{0,7811} \approx 216 150$.

9 En un centre escolar, per cada 5 alumnes que aproven totes les assignatures, n'hi ha 4 que en suspenen alguna. Quina fracció i quin percentatge del total suposa cadascun dels dos tipus?

Els alumnes que aproven totes les assignatures són $\frac{5}{9}$ del total, que es correspon amb el 55,56 %.

Els alumnes que suspenen alguna assignatura són $\frac{4}{9}$ del total, que es correspon amb el 44,44 %.

■ Nombres índex

10 Pel març del 2014 l'IPC es calculava en base a l'any 2011. En la taula següent es mostren els 12 grups que formaven la cistella de consum i les ponderacions respectives en el càlcul de l'IPC en base a l'any 2011:

GRUP	SECTORS	PONDERACIONS (%)	ÍNDEX MARÇ 2014	% VARIACIÓ MENSUAL
1	Alimentació i begudes no alcohòliques	18,95	104,7	-0,7
2	Begudes alcohòliques i tabac	2,81	113,9	0,1
3	Vestit i calçat	7,61	95,2	4,2
4	Habitatge	12,46	107,6	0,0
5	Parament	6,36	101,4	0,2
6	Medicina	3,26	110,9	0,2
7	Transport	15,33	104,4	0,0
8	Comunicacions	3,74	88,7	0,0
9	Oci i cultura	7,27	99,8	0,3
10	Ensenyament	1,54	114,9	0,0
11	Hotels, cafès i restaurants	11,22	101,1	0,3
12	Altres	9,45	105,3	0,0

- Quins són els sectors amb un major i un menor pes en el càlcul de l'IPC? Quin percentatge representen?
- Quant ha augmentat la despesa en transport des del 2011 fins al març del 2014?
- L'índex associat a l'habitatge en aquest mes de març del 2014 era 107,6 i el de l'ensenyament era de 114,9. Quin significat tenen aquestes quantitats?
- Tenint en compte les ponderacions de cada grup, calcula l'índex general de l'IPC d'aquest mes i la variació percentual mensual.

a) Els sectors amb més pes en l'IPC són:

- Alimentació i begudes no alcohòliques.
- Transport.
- Habitatge.
- Hotels, cafès i restaurants.

Representen el $18,95 + 15,33 + 12,46 + 11,22 = 57,96\%$ de l'IPC.

Els sectors amb menys pes són:

- Ensenyament.
- Begudes alcohòliques i tabac.
- Medicina.
- Comunicacions.

Representen el $1,54 + 2,81 + 3,26 + 3,74 = 11,35\%$ de l'IPC.

b) La despesa en transport ha augmentat el 4,4%.

c) El primer índex indica que la despesa en habitatge ha augmentat un 7,6% des de l'any 2011 fins al març de 2014.

El segon reflecteix un augment de la despesa en l'ensenyament del 14,9% entre les mateixes dates.

d) L'índex general és la suma ponderada dels índexs per sectors, és a dir:

$$\frac{18,95 \cdot 104,7 + 2,81 \cdot 113,9 + 7,61 \cdot 95,2 + 12,46 \cdot 107,6 + 6,36 \cdot 101,4 + 3,26 \cdot 110,9 + 15,33 \cdot 104,4}{100} + \frac{3,74 \cdot 88,7 + 7,27 \cdot 99,8 + 1,54 \cdot 114,9 + 11,22 \cdot 101,1 + 9,45 \cdot 105,3}{100} = 103,4$$

Anàlogament, la variació mensual serà:

$$\frac{18,95 \cdot (-0,7) + 2,81 \cdot 0,1 + 7,61 \cdot 4,2 + 12,46 \cdot 0,0 + 6,36 \cdot 0,2 + 3,26 \cdot 0,2 + 15,33 \cdot 0,0 + 3,74 \cdot 0,0}{100} + \frac{7,27 \cdot 0,3 + 1,54 \cdot 0,0 + 11,22 \cdot 0,3 + 9,45 \cdot 0,0}{100} = 0,26$$

■ Interessos bancaris. TAE

11 El 2008 un banc oferia als seus clients un dipòsit a 1 any a un interès anual del 5% amb pagament mensual d'interessos. El 2013, el mateix dipòsit s'oferia a un interès del 2% anual. Si el producte s'hagués contractat amb 50 000 €, quins haurien estat els beneficis en cada un dels anys?

• Any 2008

Un interès del 5% anual es correspon amb un $\frac{5\%}{12}$ d'interès mensual. Com que els pagaments d'interessos són mensuals, el capital final és:

$$C_{\text{final}} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12} = 52\,558,09 \text{ €}$$

Els beneficis són:

$$52\,558,09 - 50\,000 = 2\,558,09 \text{ €}$$

• Any 2013

$$C_{\text{final}} = 50\,000 \cdot 1,02 = 51\,000 \text{ €}$$

Els beneficis són:

$$51\,000 - 50\,000 = 1\,000 \text{ €}$$

12 En quant es transforma un capital de 3 500 € dipositat durant tres mesos al 8,5% anual? I si s'hi manté 5 anys amb períodes de capitalització trimestrals?

En tres mesos:

$$8,5\% \text{ anual} \rightarrow \frac{8,5}{4} = 2,125 \text{ trimestral}$$

$$3\,500 \cdot 1,02125 = 3\,574,38 \text{ €}$$

En cinc anys (20 trimestres):

$$3\,500 \cdot 1,02125^{20} = 5\,329,78 \text{ €}$$

Pàgina 72

13 Un banc ens ofereix dos tipus de dipòsits a 10 anys. El dipòsit A, amb un rèdit del 3% i pagament mensual d'interessos, i el dipòsit B, amb un rèdit del 3,5% i pagament anual d'interessos. Quina opció és més avantatjosa? Quin benefici obtindrem en cada dipòsit si hi col·loquem 15 000 euros?

- Per elegir l'opció més avantatjosa podem calcular la TAE del dipòsit A i comparar-la amb la del B (el valor de la qual és 3,5%, en ser el pagament d'interessos anual).

$$i = \frac{3}{100} \rightarrow i_m = \frac{3}{1200} = 0,0025 \rightarrow I_{vm} = 1,0025$$

$$TAE = 1,0025^{12} - 1 = 0,030416 \rightarrow 3,0416\%$$

Per tant, el dipòsit B és més avantatjós que el dipòsit A.

- Calculem els beneficis:

Dipòsit A

El capital al cap de 10 anys (120 mesos) és:

$$C_{\text{final}} = 15\,000 \cdot 1,0025^{120} = 20\,240,30 \rightarrow \text{Benefici} = 20\,240,30 - 15\,000 = 5\,240,30 \text{ €}$$

Dipòsit B

El capital al cap de 10 anys és:

$$C_{\text{final}} = 15\,000 \cdot 1,035^{10} = 21\,158,98 \rightarrow \text{Benefici} = 21\,158,98 - 15\,000 = 6\,158,98 \text{ €}$$

14 Un capital col·locat al 2,5% anual durant quatre anys s'ha convertit en 11 038,13 €. A quant puja aquest capital?

Si C representa el capital inicial, aleshores:

$$11\,038,13 = C \cdot \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^4 \rightarrow 11\,038,13 = C \cdot 1,025^4 \rightarrow C = \frac{11\,038,13}{1,025^4} = 10\,000 \text{ €}$$

15 Quants anys ha d'estar dipositat un capital de 15 000 €, al 4,7% anual, per convertir-se en 18 000 €?

$$18\,000 = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{4,7}{100}\right)^n \rightarrow n \approx 4$$

Ha d'estar dipositat 4 anys.

16 Calcula el tant per cent anual a què s'han de col·locar 600 € perquè en dos anys es converteixin en 699,84 €.

$$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = 699,84 \rightarrow r = 8\%$$

17 Dipositem 32 500 € en un banc durant un any i mig i es converteixen en 32 720 €. Quin tant per cent mensual ens dona el banc?

$$32\,720 = 32\,500 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{18} \rightarrow r = 0,037\% \text{ mensual}$$

18 Calcula la TAE per a un rèdit anual del 10% amb pagaments mensuals d'interessos.

$$10\% \text{ anual} = \frac{10}{12}\% \text{ mensual}$$

$$\text{Un capital } C \text{ es transforma en un any en } C \cdot \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{12}.$$

És a dir, $C \cdot 1,1047$.

Per tant, la TAE serà del 10,47%.

- 19** Col·loquem en un dipòsit a 3 anys 10 000 € al 4,5 % anual, amb els períodes de capitalització mensuals. Calcula la TAE associada. En quant es transforma el capital inicial?

$$i = \frac{4,5}{100} \rightarrow i_m = \frac{4,5}{1200} = 0,00375 \rightarrow I_{vm} = 1,00375$$

$$\text{TAE} = 1,00375^{12} - 1 = 0,04594 \rightarrow 4,594\%$$

El capital inicial es transforma en 3 anys (36 mesos) en:

$$C_{\text{final}} = 10\,000 \cdot 1,00375^{36} = 11\,442,48 \text{ €}$$

- 20** Calcula en quant es transformen 5 000 euros en un any al 10 % si els períodes de capitalització són: a) semestres; b) trimestres; c) mesos. Digues, en cada cas, quina és la TAE corresponent.

* a) 10 % anual \rightarrow 5 % durant 2 semestres \rightarrow
 \rightarrow TAE: $(1 + 5/100)^2 \rightarrow 10,25\%$.

a) 10 % anual = 5 % semestral

$$5\,000 \cdot 1,05^2 = 5\,000 \cdot 1,1025 = 5\,512,50 \text{ €} \rightarrow \text{T.A.E. del } 10,25\%$$

b) 10 % anual = 2,5 % trimestral

$$5\,000 \cdot 1,025^4 = 5\,000 \cdot 1,1038 = 5\,519,06 \text{ €} \rightarrow \text{T.A.E. del } 10,38\%$$

c) 10 % anual = $\frac{10}{12}$ % mensual = $\frac{5}{6}$ % mensual

$$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{600}\right)^{12} = 5\,000 \cdot (1,008\overline{3})^{12} = 5\,000 \cdot 1,1047 = 5\,523,57 \text{ €} \rightarrow \text{T.A.E. del } 10,47\%$$

■ Amortització de préstecs

- 21** Un comerciant demana un préstec de 5 000 euros per tornar en un sol pagament al cap de tres mesos. A quant ha de pujar aquest pagament si el preu dels diners està al 12 % anual?

12 % anual és un 3 % trimestral. El pagament serà de:

$$5\,000 \cdot 1,03 = 5\,150 \text{ €}$$

- 22** Rebem un préstec de 8 500 € al 15 % anual, que hem de tornar en un sol pagament. Quants anys han transcorregut si en liquidar-lo paguem 14 866,55 €?

$$8\,500 \cdot (1,15)^t = 14\,866,55 \rightarrow t = 4 \text{ anys}$$

- 23** Calcula la quota mensual d'un préstec de 6 000 € amb un rèdit del 8 % que hem de tornar en 1 any. Si el temps per a la devolució fóra de 2 anys, quina seria la nova quota?

Com que tornem el préstec en un any, hem de pagar 12 mensualitats. Per tant:

$$m = 6\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{12} \cdot \frac{8}{1200}}{\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{12} - 1} = 521,93 \text{ €}$$

Si el tornéssim en 2 anys, pagaríem 24 mensualitats; aleshores:

$$m = 6\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{24} \cdot \frac{8}{1200}}{\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{24} - 1} = 271,36 \text{ €}$$

24 Hem d'amortitzar 50 000 € en 5 anys, amb un interès del 15 %, de manera que cada any es paguen els interessos del capital pendent més la cinquena part del capital total. Calcula el que s'ha de pagar cada any.

	CAPITAL PENDENT	PAGAMENT D'INTERESSOS	+ PAGAMENT DE CAPITAL	=	PAGAMENT ANUAL	DEUTE PENDENT
1r ANY	50 000	$50\,000 \cdot 0,15$	+ 10 000	=	17 500	40 000
2n ANY	40 000	$40\,000 \cdot 0,15$	+ 10 000	=	16 000	30 000
3r ANY	30 000	$30\,000 \cdot 0,15$	+ 10 000	=	14 500	20 000
4t ANY	20 000	$20\,000 \cdot 0,15$	+ 10 000	=	13 000	10 000
5è ANY	10 000	$10\,000 \cdot 0,15$	+ 10 000	=	11 500	0

25 Una entitat bancària ens concedeix un préstec de 20 000 € que amortitzarem en 5 anys amb un interès anual del 9 %. Calcula les quotes del préstec si:

- a) els pagaments són mensuals.
- b) els pagaments són trimestrals.
- c) els pagaments són anuals.

a) $i = 9\% \text{ anual} \rightarrow i_m = \frac{9}{1200} = 0,0075 \rightarrow I_{vm} = 1,0075$

5 anys \rightarrow 60 mesos

$$m = 20\,000 \cdot \frac{1,0075^{60} \cdot 0,0075}{1,0075^{60} - 1} = 415,17 \text{ €}$$

b) $i = 9\% \text{ anual} \rightarrow i_t = \frac{9}{400} = 0,0225 \rightarrow I_{vt} = 1,0225$

5 anys \rightarrow 20 trimestres

$$p = 20\,000 \cdot \frac{1,0225^{20} \cdot 0,0225}{1,0225^{20} - 1} = 1\,252,84 \text{ €}$$

c) $a = 20\,000 \cdot \frac{1,09^5 \cdot 0,09}{1,09^5 - 1} = 5\,141,85 \text{ €}$

26 Una persona paga un cotxe en seixanta mensualitats de 333,67 €. Si el preu dels diners està al 12 % anual, quin seria el preu del cotxe si es pagués al comptat?

* Coneixem m i hem de calcular C . Substitueix les dades en la fórmula i aïlla C .

$$C = \frac{1,01^{60} - 1}{1,01^{60} \cdot 0,01} \cdot 333,67 \approx 15\,000 \text{ €}$$

27 Comprem un electrodomèstic de 750 € i el paguem en 24 terminis mensuals amb un interès del 13 %. Quina serà la quota mensual?

$$m = 750 \cdot \frac{\left(1 + \frac{13}{1200}\right)^{24} \cdot \frac{13}{1200}}{\left(1 + \frac{13}{1200}\right)^{24} - 1} = 35,66 \text{ €}$$

28 Un banc ens concedeix un préstec al 6 %, que hem d'amortitzar en 7 anualitats de 14 330,80 € cadascuna. Quants diners ens ha prestat?

$$a = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \rightarrow C = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$C = 14\,330,80 \cdot \frac{1,06^7 - 1}{1,06^7 \cdot 0,06} = 80\,000 \text{ €}$$

Per resoldre

29 En un examen de francès han aprovat el 60% dels estudiants. En la recuperació dels suspesos n'aproven el 30%, que sumen 18. Quin és el percentatge total d'aprovats? Quants estudiants fan francès?

* Tingues en compte que només el 40% es presenta a la recuperació. Suma els percentatges dels que aproven.

Com que suspenen el 40% dels estudiants, els que recuperen seran: $\frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$ del total.

El percentatge final d'aprovats és $60\% + 12\% = 72\%$ del total.

Estudien francès $\frac{18}{0,12} = 150$ estudiants.

30 Si el preu del lloguer d'un apartament puja un 10% cada any, quants anys tardaria a duplicar-se?

L'índex de variació anual és $1 + \frac{10}{100} = 1,1$. Si anomenem n el nombre d'anys que tarda a duplicarse, cal fer el següent:

$$2 = 1,1^n \rightarrow \log 2 = n \log 1,1 \rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,1} = 7,27$$

Per tant, han de passar 8 anys perquè es dupliqui.

31 La taula següent recull l'evolució del salari mínim interprofessional (SMI) i l'IPC anual a Espanya des de l'inici del 2006 fins a l'inici del 2011:

	SMI (€/MES)	IPC (%)
2006	540,90	2,7
2007	570,60	4,2
2008	600,00	1,4
2009	624,00	0,8
2010	633,30	3,0
2011	641,40	

- Calcula el percentatge de pujada anual i l'acumulat, en aquest període de temps, de l'SMI.
- Calcula el percentatge de pujada acumulat de l'IPC en els 5 anys.
- Un treballador que cobra l'SMI, ha perdut o ha guanyat poder adquisitiu en aquest període de temps?

* Fixat en el problema resolt 1 de la pàgina 68.

a) Per calcular el percentatge de pujada, per exemple, entre l'any 2006 i el 2007, ho fem així:

$$I_v = \frac{570,60}{540,90} = 1,0549 \rightarrow \text{Pujada del } 5,49\%$$

D'aquesta manera, obtenim la taula següent:

	SMI (€/MES)	PUJADA (%)
2006	540,90	5,49
2007	570,60	5,15
2008	600,00	4,00
2009	624,00	1,49
2010	633,30	1,28
2011	641,40	

El percentatge acumulat l'obtenim a partir dels índexs de variació:

$$1,0549 \cdot 1,0515 \cdot 1,04 \cdot 1,0149 \cdot 1,0128 = 1,1858 \rightarrow 18,58\% \text{ acumulat entre inicis de 2006 i inicis de 2011.}$$

- b) El percentatge de pujada acumulat de l'IPC l'obtenim de la mateixa manera:
 $1,027 \cdot 1,042 \cdot 1,014 \cdot 1,008 \cdot 1,03 = 1,1266 \rightarrow 12,66\%$ acumulat en el mateix període.
- c) Ha guanyat poder adquisitiu a la vista dels percentatges anteriors. Si la pujada hagués estat proporcional a l'IPC en aquest període, l'SMI hauria estat de $540,90 \cdot 1,1266 = 609,38$ €, que és una quantitat inferior a l'SMI de l'any 2011.

Pàgina 73

32 **Calcula la TAE associada a un rèdit anual del 6% amb períodes de capitalització mensuals. Quina seria la TAE si el pagament d'interessos fos trimestral?**

Si els períodes de capitalització són mensuals:

$$i = 6\% \text{ anual} \rightarrow i_m = \frac{6}{1200} = 0,005 \rightarrow I_{vm} = 1,005$$

$$\text{TAE} = 1,005^{12} - 1 = 0,06168 \rightarrow 6,168\%$$

Si són trimestrals:

$$i = 6\% \text{ anual} \rightarrow i_t = \frac{6}{400} = 0,015 \rightarrow I_{vt} = 1,015$$

$$\text{TAE} = 1,015^4 - 1 = 0,06136 \rightarrow 6,136\%$$

33 **Un dipòsit ens ofereix un 5% TAE. Si els períodes de capitalització són mensuals, quin és el rèdit associat?**

* Si r és el rèdit, $\left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{12} = 1,05$

Suposem que el rèdit és de l' $r\%$ i els períodes de capitalització són mensuals.

$$i = r\% \text{ anual} \rightarrow I_m = \frac{r}{1200}$$

$$5\% \text{ TAE} \rightarrow I_v = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$$

Per tant:

$$1,05 = \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{12} \rightarrow \sqrt[12]{1,05} = 1 + \frac{r}{1200} \rightarrow r = (\sqrt[12]{1,05} - 1) \cdot 1200 = 4,89 \text{ és el rèdit associat.}$$

34 **Un banc paga el 2% trimestral. Quants anys han d'estar dipositats 2000 euros per convertir-se en 2536,48 €?**

Anomenem n el nombre d'anys que han d'estar dipositats. Aleshores, el nombre de trimestres és $4n$.

Per tant:

$$2536,48 = 2000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{4n} \rightarrow \frac{2536,48}{2000} = 1,02^{4n} \rightarrow 1,26824 = 1,02^{4n} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log 1,26824 = 4n \log 1,02 \rightarrow n = \frac{\log 1,26824}{4 \log 1,02} = 3 \text{ anys}$$

35 **Una família paga una quota mensual de 644,30 € per la hipoteca de la casa. Si el préstec va ser a 25 anys amb un rèdit del 6%, quin va ser el capital inicial sol·licitat?**

Les dades del problema són:

$$m = 644,30; n = 25 \cdot 12 = 300 \text{ mensualitats}; I = \frac{6}{100} \rightarrow I_m = \frac{6}{1200} = 0,005 \rightarrow I_{vm} = 1,005$$

Substituint en la fórmula de les anualitats d'amortització, obtenim:

$$644,30 = C \cdot \frac{1,005^{300} \cdot 0,005}{1,005^{300} - 1} \rightarrow C = 644,30 \cdot \frac{1,005^{300} - 1}{1,005^{300} \cdot 0,005} = 100\,000 \text{ €}$$

36 Vull demanar una hipoteca per comprar una casa. La meva nòmina és de 1500 € i l'entitat bancària no vol que el meu nivell d'endeutament sigui superior a un terç d'aquesta. Si em concedeixen una hipoteca a 30 anys amb un rèdit del 4,5%, quina és la quantitat màxima que puc demanar al banc?

Hem de calcular la quantitat tenint en compte que el banc ens permet una mensualitat màxima de $\frac{1500}{3} = 500$ €.

$$I = \frac{4,5}{100} \rightarrow I_m = \frac{4,5}{1200} = 0,00375 \rightarrow I_{vm} = 1,00375$$

30 anys $\rightarrow 30 \cdot 12 = 360$ mensualitats

La relació entre la mensualitat i el capital és:

$$500 = C \cdot \frac{1,00375^{360} \cdot 0,00375}{1,00375^{360} - 1} \rightarrow C = 500 \cdot \frac{1,00375^{360} - 1}{1,00375^{360} \cdot 0,00375} = 98\,680,58 \text{ €}$$

Per tant, el banc ens permetria demanar un màxim de 98 680,58 €.

37 El banc ens concedeix un préstec personal de 15 000 € al 12% anual per tornar en 24 mensualitats. Si ens fixa una comissió de cancel·lació anticipada de l'1%, a quant pujaria aquesta comissió si volem cancel·lar el préstec al cap de 6 mesos?

Per resoldre el problema construïm la taula d'amortitzacions del préstec. Així podrem saber quin és el capital pendent sobre el qual s'aplica la comissió de l'1%.

Primer calculem la mensualitat:

$$i = \frac{12}{100} \rightarrow i_m = \frac{12}{1200} = 0,01 \rightarrow I_{vm} = 1,01$$

$$m = 15\,000 \cdot \frac{1,01^{24} \cdot 0,01}{1,01^{24} - 1} = 706,10 \text{ €}$$

Ara calculem la taula d'amortitzacions:

MESOS	DEUTE ABANS DEL PAGAMENT	INTERESSOS PENDENTS	PAGAMENT	QUANTITAT AMORTITZADA	DEUTE PENDENT
1	15 000,00	150,00	706,10	556,10	14 443,90
2	14 443,90	144,44	706,10	561,70	13 882,24
3	13 882,24	138,82	706,10	567,28	13 314,96
4	13 314,96	133,15	706,10	572,95	12 742,01
5	12 742,01	127,42	706,10	578,68	12 163,33
6	12 163,33	121,63	706,10	584,47	11 578,86

La comissió de cancel·lació serà: $\frac{1}{100} \cdot 11\,578,86 = 115,79$ €.

38 Ingresso en un banc 3500 € al principi de cada any al 8% durant 5 anys. Quants diners tindrè al final del cinquè any?

El primer any els diners es convertiran en $a_1 = 3\,500 \cdot 1,08^5$ €.

El segon any, en $a_2 = 3\,500 \cdot 1,08^4$ €, ja que els diners estaran un any menys en el banc.

...

El cinquè, en $a_5 = 3\,500 \cdot 1,08$ €, en estar només un any en el banc.

Es tracta de calcular la suma dels elements d'una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{1,08}$. Per tant:

$$S_5 = \frac{r \cdot a_5 - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{1,08} \cdot 3\,500 \cdot 1,08 - 3\,500 \cdot 1,08^5}{\frac{1}{1,08} - 1} = 22\,175,75 \text{ € tindrem al final del 5è any.}$$

- 39** Un estalviador ingressa cada any en la mateixa data 1 500 € en un compte que li produeix el 6% anual. Quina quantitat haurà acumulat al cap de 3 anys?

Al final haurà acumulat els diners invertits més els interessos que hauran generat. En aquest cas:

- El primer any els diners es convertiran en $a_1 = 1\,500 \cdot 1,06 = 1\,590$ €.
- El segon, en $a_2 = 1\,500 \cdot 1,06^2 = 1\,685,40$ €, ja que els diners estaran un any més en el banc.
- El tercer, en $a_3 = 1\,500 \cdot 1,06^3 = 1\,786,52$ €.

Al cap de tres anys haurà acumulat 1 786,52 €.

- 40** He rebut un préstec d'una financera pel qual he de pagar 10 anualitats de 1 413,19 €. Quina és la quantitat prestada si el rèdit és el 10,5%?

$$C = 1\,413,19 \cdot \frac{1,105^{10} - 1}{1,105^{10} \cdot 0,105} = 8\,500 \text{ €}$$

- 41** Comprova que, si ingresem al final de cada any una anualitat de 2 500 € durant 8 anys al 5%, acumulem en total 23 872,77 €.

$$1\text{a anualitat: } 2\,500 \text{ en } 7 \text{ anys} \rightarrow 2\,500 \cdot 1,05^7$$

$$2\text{a anualitat: } 2\,500 \text{ en } 6 \text{ anys} \rightarrow 2\,500 \cdot 1,05^6$$

...

$$7\text{a anualitat: } 2\,500 \text{ en } 1 \text{ any} \rightarrow 2\,500 \cdot 1,05$$

$$8\text{a anualitat: } 2\,500 \rightarrow 2\,500$$

En total:

$$S = 2\,500 [1 + 1,05 + \dots + 1,05^6 + 1,05^7] = 2\,500 \cdot \frac{1,05^8 - 1}{1,05 - 1} = 23\,872,77 \text{ €}$$

- 42** Un treballador estalvia 5 000 € anuals que ingressa al banc al principi de cada any. Si el banc li dona un 9,5% d'interès, quina quantitat hi tindrà al cap de 10 anys?

$$5\,000 \cdot 1,095 \cdot \frac{1,095^{10} - 1}{0,095} = 85\,192,59 \text{ €}$$

Per aprofundir

- 43** Una persona inicia un pla de pensions a 45 anys, amb quotes mensuals de 200 € al 9% anual, amb períodes de capitalització mensuals. De quin capital disposarà a 65 anys?

$$9\% \text{ anual} = 0,75\% \text{ mensual}$$

$$20 \text{ anys} = 240 \text{ mensualitats}$$

$$C = 200 \cdot 1,0075 \cdot \frac{1,0075^{240} - 1}{0,0075} = 134\,579,20 \text{ €}$$

- 44** Rebem un préstec de 10 000 € al 12% anual que hem de pagar en un any a terminis mensuals. El banc ens cobra 350 € per la gestió del préstec en el moment de la concessió. Comprova que la TAE corresponent a aquest préstec és d'un 16,77%.

* El banc ens cobra 10 000 € a l'1% mensual, però el que realment rebem és 9 650 €, que a l'r% anual ($r = \text{TAE}$) serà igual al que el banc ens cobra. Planteja l'equació corresponent i aïlla r .

$$12\% \text{ anual} = 1\% \text{ mensual}$$

En realitat, rebem 9 650 €.

$$\text{Tornem } 10\,000 \cdot 1,01^{12} = 11\,268,25 \text{ €.}$$

$$\frac{11\,268,25}{9\,650} = 1,1677 \rightarrow \text{La TAE serà del } 16,77\%.$$

Autoavaluació

- 1** En un control de qualitat fet en una fàbrica de bombetes LED, el 5% no va superar les 12 000 hores de vida. De les restants, un 2% no va passar de les 15 000 hores. Si 13 965 bombetes varen passar el control, quin percentatge de bombetes no va superar la prova? Quantes bombetes es testaren?

El percentatge de bombetes que no va superar les 15 000 h de vida és el $\frac{2}{10} \cdot \frac{95}{100} = \frac{19}{1000} = 1,9\%$ del total.

Per tant, el percentatge de bombetes que no va superar la prova és el $5\% + 1,9\% = 6,9\%$ del total.

El percentatge de bombetes que va passar la prova és el $100\% - 6,9\% = 93,1\%$ del total, que representa les 13 965 bombetes que sí que van superar la prova.

Aleshores el nombre de bombetes testades és: $\frac{13965}{0,931} = 15\,000$.

- 2** El sou d'un treballador va augmentar, a principis d'any, de 1450 € a 1508 €. Quin va ser l'índex de variació? I el percentatge de pujada?

L'índex de variació va ser: $I_v = \frac{1508}{1450} = 1,04$

El percentatge de pujada va ser: $1,04 - 1 = 0,04 = 4\%$

- 3** Uns pantalons que costen 50 € tenen un descompte de 10 € a les rebaixes. Posteriorment, es tornen a rebaixar un 40%. Calcula'n el preu final i l'índex de variació.

Índex de variació de la primera rebaixa: $I_1 = \frac{40}{50} = 0,80$

Índex de variació de la segona rebaixa: $I_2 = 1 - 0,40 = 0,60$

Índex de variació total: $I = I_1 \cdot I_2 = 0,80 \cdot 0,60 = 0,48$

Preu final: $50 \cdot 0,48 = 24$ €

- 4** Posem 60 000 € en un banc al 3% anual. Quants anys hem de deixar aquests diners al banc per obtenir-ne 93 478,04 € de benefici?

Quan passin n anys, hem de tenir $60\,000 + 33\,478,04 = 93\,478,04$ €.

$$60\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n = 93\,478,04 \rightarrow 60\,000 \cdot (1,03)^n = 93\,478,04 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,03^n = \frac{93\,478,04}{60\,000} \rightarrow n = \frac{\log 1,56}{\log 1,03} \rightarrow n = 15 \text{ anys}$$

- 5** Un banc ofereix un 7% anual. Hi ingresem 12 000 € i els mantenim 2 anys. Calcula els diners que hi tindrem després dels 2 anys si els períodes de capitalització són mensuals. I si són semestrals? Calcula la TAE en ambdós casos.

- Períodes de capitalització mensuals.

— Càlcul de la TAE:

Al 7% anual li correspon un $\frac{7}{12} = 0,58333\%$ mensual.

En un any, el capital es multiplicarà per:

$$1,0058333^{12} = 1,07229... \approx 1,0723 = 1 + \frac{7,23}{100}$$

La TAE és del 7,23%.

— Càlcul del capital final després de 2 anys:

$$12\,000 \cdot (1,0723)^2 = 13\,797,93 \text{ €}$$

- Períodes de capitalització semestral:

— Càlcul de la TAE:

Al 7% anual le correspon un $\frac{7}{2} = 3,5\%$ semestral.

En un any, el capital es multiplica per $1,035^2 = 1,071225 \approx 1 + \frac{7,12}{100}$

La TAE és del 7,12%.

— Càlcul del capital final després de 2 anys:

$$12\,000 \cdot (1,0712)^2 = 13\,769,63 \text{ €}.$$

- 6 Demanem un préstec de 5 000 € al 5% d'interès semestral, que s'ha de tornar al cap de 3 anys en un sol pagament. Quin serà l'import d'aquest pagament?**

Com que 3 anys són 6 semestres, el pagament ascendirà a:

$$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 5\,000 \cdot (1,05)^6 = 6\,700,48 \text{ €}$$

- 7 Hem d'amortitzar 15 000 € en 3 anys, a un interès anual del 10%, de manera que cada any es paguen els interessos del capital pendent més la tercera part del capital total. Calcula l'import que s'ha de pagar cada any.**

	CAPITAL PENDENT	INTERESSOS	A PAGAR
1r ANY	15 000 €	$15\,000 \cdot 0,1 = 1\,500 \text{ €}$	$5\,000 + 1\,500 = 6\,500 \text{ €}$
2n ANY	10 000 €	$10\,000 \cdot 0,1 = 1\,000 \text{ €}$	$5\,000 + 1\,000 = 6\,000 \text{ €}$
3r ANY	5 000 €	$5\,000 \cdot 0,1 = 500 \text{ €}$	$5\,000 + 500 = 5\,500 \text{ €}$

El primer any pagarem 6 500 €; el segon any, 6 000 €, i el tercer, 5 500 €.

- 8 Per a la compra d'un cotxe de 19 000 €, demanem un préstec al 7% d'interès anual que pagarem en quotes mensuals durant 6 anys. Quina serà aquesta quota?**

Aplicarem la següent fórmula per calcular la mensualitat, m :

$$m = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}, \text{ on } C = 19\,000, i = \frac{7}{1200} \text{ i } n = 6 \cdot 12 = 72$$

$$m = 19\,000 \cdot \frac{(1,00583)^{72} \cdot 0,00583}{(1,00583)^{72} - 1} = 323,89 \text{ €}$$