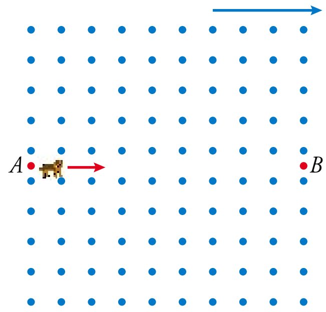
Resol

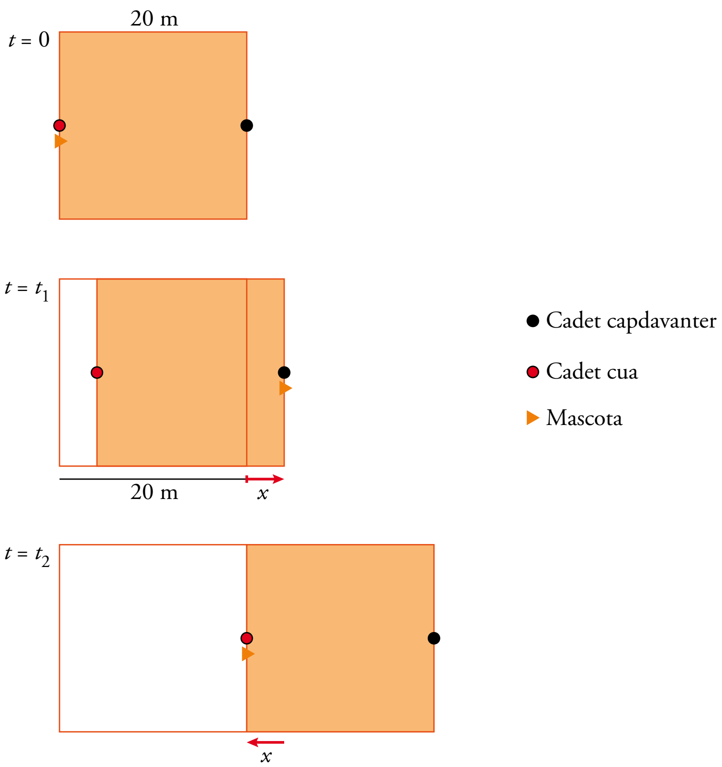
Pàgina 75

Els cadets que desfilen amb la seva mascota

Una companyia de cadets, formada en quadre de 20 metres de costat, avança amb pas regular. La mascota de la companyia, un gos petit, parteix del centre de l'última fila, punt A, camina en línia recta fins al centre de la primera fila, punt B, i torna de la mateixa manera fins al centre de l'última fila. En el moment de tornar a arribar a A, els cadets han recorregut exactament 20 metres. Suposant que el gos camina amb velocitat constant i que no perd temps en els girs, quants metres ha recorregut?



Representem esquemàticament el moviment de la mascota i dels cadets:



Anomenem x l'espai que recorre el soldat capdavanter fins que la mascota l'atrapa, i usarem la fórmula $temps = \dfrac{espai}{velocitat}$.

El temps que triga la mascota a arribar fins al soldat capdavanter, t_1, és el mateix que el que triga el soldat capdavanter a recórrer x metres.

Anomenem $v_{mascota}$ la velocitat de la mascota i v_{cadet} la velocitat dels cadets.

L'avantatge del cadet capdavanter és de 20 m.

t_1 = temps que triga la mascota a arribar fins al cadet capdavanter.

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadet}}$$

t_1 = temps que triga el cadet capdavanter a recórrer x metres

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadet}}$$

Aleshores tenim la igualtat:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadet}} = \frac{x}{v_{cadet}}$$

L'espai recorregut per la mascota quan avança amb els cadets és $20 + x$. L'espai recorregut per la mascota en tornar és x, ja que al final es queda a 20 m del principi. Aleshores l'espai total recorregut per la mascota és $e = 20 + 2x$.

El temps total durant el qual avança la companyia, t_2, és el mateix que el temps durant el qual la mascota corre.

t_2 = temps total durant el qual avança la companyia

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadet}}$$

t_2 = temps total durant el qual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Aleshores tenim la igualtat:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadet}} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadet}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operem en la igualtat I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadet}) = 20 \cdot v_{cadet} \rightarrow x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadet} + x v_{cadet} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot v_{mascota} = v_{cadet}(20 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{mascota} = v_{cadet}\frac{(20 + x)}{x} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadet}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hem obtingut la raó entre les dues velocitats. Usem aquesta relació en la igualtat II i obtenim:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operem i obtenim:

$$2x^2 = 400 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

L'espai recorregut per la mascota és $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 Les igualtats en àlgebra

Pàgina 76

1 Cert o fals?

a) La igualtat $x = 3$ és una equació perquè només es compleix per a $x = 3$.

b) La igualtat $x^2 + 4 = 0$ no és ni equació ni identitat, ja que no es compleix per a cap valor de x.

c) Si una igualtat es compleix per a $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$…, llavors és una identitat.

a) Cert, ja que la igualtat no és certa per a tots els nombres reals.

b) Fals. És una equació sense solucions.

c) Fals. La igualtat s'ha de complir per a tots els nombres reals, no solament per als naturals.

2 Factorització de polinomis

Pàgina 77

2 Aplica la regla de Ruffini per calcular el quocient i el residu de les divisions de polinomis següents:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$ **b)** $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$ **d)** $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & \boxed{-2} \end{array}$$

Quocient: $x^2 - 4x + 6$

Residu: -2

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 5 & 14 & -5 & -4 & 5 & -2 \\ -3 & & -15 & 3 & 6 & -6 & 3 \\ \hline & 5 & -1 & -2 & 2 & -1 & \boxed{1} \end{array}$$

Quocient: $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

Residu: 1

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -15 & -8 \\ 3 & & 6 & 18 & 9 \\ \hline & 2 & 6 & 3 & \boxed{1} \end{array}$$

Quocient: $2x^2 + 6x + 3$

Residu: 1

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -2 & \boxed{3} \end{array}$$

Quocient: $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Residu: 3

3 a) El polinomi $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ podria ser divisible per $x - a$ per als següents valors de a: 1, –1, 2, –2, 5, –5, 10, –10. Comprova que ho és per $x - 1$, $x - 2$ i $x - 5$.

b) Troba els divisors d'aquests polinomis:

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ **b)** $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

a) Pel teorema del residu, el residu de la divisió entre $x - a$ és igual a $P(a)$. Per tant, si $P(a) = 0$, el polinomi és divisible entre $x - a$.

$P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

$P(1) = 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 17 \cdot 1 - 10 = 0 \rightarrow P(x)$ és divisible per $x - 1$.

$P(2) = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 17 \cdot 2 - 10 = 0 \rightarrow P(x)$ és divisible per $x - 2$.

$P(5) = 5^3 - 8 \cdot 5^2 + 17 \cdot 5 - 10 = 0 \rightarrow P(x)$ és divisible per $x - 5$.

b) • $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$P(x)$ és divisible per $x - 2$, $x + 2$ i $x + 3$.

• $P(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & -7 & -29 & 30 \\ 2 & & 2 & 14 & 14 & -30 \\ \hline & 1 & 7 & 7 & -15 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & -12 & 15 & \\ \hline & 1 & 4 & -5 & \boxed{0} & \\ -5 & & -5 & 5 & & \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} & & \\ 1 & & 1 & & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

$P(x)$ és divisible per $x - 1$, $x - 2$, $x + 3$ i $x + 5$.

Pàgina 79

4 Descompon factorialment els polinomis següents:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -9 & 24 & -20 \\
2 & & 2 & -14 & 20 \\ \hline
 & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -10 & \\ \hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)\ 2\ (x - 5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\
2 & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\ \hline
 & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & 3 & 8 & \\ \hline
 & 1 & -3 & -2 & -8 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & 4 & 8 & & \\ \hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no té solució)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x - 1)\ (x + 1)\ (x - 4)\ (x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\
-1 & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\ \hline
 & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\ \hline
 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} & & \\
1 & & 1 & 0 & 1 & & & \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$ (no té solució)

$x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x + 3)^2\ (x + 1)\ (x - 1)\ (x^2 + 1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\ 2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\ \hline & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -4 & -4 & 3 & \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

5 **a) Intenta factoritzar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Fes-ho ara sabent que és divisible per $x^2 + x + 1$.

a) El polinomi donat no té arrels enteres (de fet, no té arrels reals).

b) Fem la divisió:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 & & & & x^2 + x + 1 \\ \hline -x^4 - x^3 - x^2 & & & & x^2 + 3x + 4 \\ 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 \\ -3x^3 - 3x^2 - 3x \\ 4x^2 + 4x + 4 \\ -4x^2 - 4x - 4 \\ 0 \end{array}$$

Els polinomis $x^2 + x + 1$ i $x^2 + 3x + 4$ són irreductibles (les equacions $x^2 + x + 1 = 0$ i $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tenen solució).

Per tant:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

6 **Intenta factoritzar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Torna a intentar-ho sabent que $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ són arrels seves.**

El polinomi donat no té arrels enteres.

Tenint en compte la dada addicional (que $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ són arrels), procedim així:

$$6x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$6(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \text{(no té solució)}$$

Per tant:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6(x^2 + x + 1) = (2x+1)(3x-1)(x^2 + x + 1)$$

3 Fraccions algebraiques

Pàgina 81

7 Cert o fals?

a) $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$

d) $\frac{x+1}{x} - 1 = \frac{1}{x}$

a) Per comprovar si són equivalents, multipliquem en creu: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$; aleshores és fals.

b) Per comprovar si són equivalents, multipliquem en creu: $(x-1)(x+1) = x^2-1$; aleshores és cert.

c) La primera fracció és el triple de $\frac{x-1}{x^2-1}$, i la segona és el triple de $\frac{1}{x+1}$, que són les fraccions de l'apartat anterior; aleshores és cert.

d) Operem en el membre de l'esquerra:

$$\frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Obtenim el membre de la dreta; aleshores és cert.

8 Redueix prèviament a comú denominador les fraccions algebraiques següents, i suma-les:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2+x = x(x+1) \\ x+1 = x+1 \end{array}\right\} \text{MCM} = x(x+1)$$

Reduïm a comú denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Les sumem:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

9 **Calcula:**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$

$=\dfrac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$

$=\dfrac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x=\dfrac{x+5x(x+1)}{x+1}=\dfrac{x(5x+6)}{x+1}=\dfrac{5x^2+6x}{x+1}$

10 **Efectua aquestes operacions:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)}=\dfrac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

11 **Calcula:**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{x+2}{x}:\dfrac{(x-1)(2x+1)}{3x}=\dfrac{(x+2)\,3x}{x(x-1)(2x+1)}=\dfrac{3(x+2)}{(2x+1)(x-1)}$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}=\dfrac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)\,x^4}=x^2-1$

4 Resolució d'equacions

Pàgina 82

Fes-ho tu. Resol aquesta equació:

$$\boldsymbol{x^4 - 2x^2 + 1 = 0}$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 2y + 1 = 0 \to y = 1 \to x = \pm\sqrt{1}$$

Solucions: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

12 Resol les equacions següents:

a) $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 12 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 8x^2 - 9 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \to x = \pm 2 \\ -3 \to \text{(no val)} \end{cases}$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \to x = \pm 3 \\ -1 \to \text{(no val)} \end{cases}$

Solucions: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

13 Resol:

a) $\boldsymbol{x^4 + 10x^2 + 9 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 2 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2} \begin{cases} -1 \to \text{(no val)} \\ -9 \to \text{(no val)} \end{cases}$

No té solució.

b) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x^2 = -1 \to \text{(no val)} \\ x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hi ha dues solucions: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$

Pàgina 83

Fes-ho tu. a) $\boldsymbol{\sqrt{19 - 6x} - 2 = x}$ **b)** $\boldsymbol{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5}$

a) $\sqrt{19-6x} - 2 = x \to \sqrt{19-6x} = x + 2$

Elevem al quadrat ambdós membres:

$19 - 6x = x^2 + 4x + 4 \to x^2 + 10x - 15 = 0 \to x_1 = -5 + 2\sqrt{10},\ x_2 = -5 - 2\sqrt{10}$ (no val)

Solució: $x = -5 + 2\sqrt{10}$

b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5 \to \sqrt{x-2} = 5 - \sqrt{x-3}$

Elevem al quadrat ambdós membres:

$x - 2 = x - 10\sqrt{x-3} + 22 \to 10\sqrt{x-3} = 24 \to x - 3 = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 \to x = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 + 3 = \dfrac{219}{25}$, que és vàlida.

Solució: $x = \dfrac{219}{25}$

14 Resol:

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$ **b)** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ **c)** $2+\sqrt{x}=x$

d) $2-\sqrt{x}=x$ **e)** $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

a) $1-x=\sqrt{2x-3}$

$1+x^2-2x=2x-3$

$x^2-4x+4=0;\ x=2$ (no val)

No té solució.

b) $2x-3=16+x+7+8\sqrt{x+7}$

$x-26=8\sqrt{x+7}$

$x^2+676-52x=64(x+7)$

$x^2+676-52x=64x+448$

$x^2-116x+228=0$

$x=\dfrac{116\pm12}{2}=\begin{cases}114\\ 2 \rightarrow \text{(no val)}\end{cases}$

$x=114$

c) $\sqrt{x}=x-2;\ x=x^2+4-4x;\ 0=x^2-5x+4$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm3}{2}=\begin{cases}4\\ 1 \rightarrow \text{(no val)}\end{cases}$

$x=4$

d) $2-x=\sqrt{x};\ 4+x^2-4x=x;\ x^2-5x+4=0$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm3}{2}=\begin{cases}4 \rightarrow \text{(no val)}\\ 1\end{cases}$

$x=1$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$

$3x+3=1+8-2x+2\sqrt{8-2x}$

$5x-6=2\sqrt{8-2x}$

$25x^2+36-60x=4(8-2x)$

$25x^2-52x+4=0$

$x=\dfrac{52\pm48}{50}=\begin{cases}2\\ 0{,}08 \rightarrow \text{(no val)}\end{cases}$

Así, $x=2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$16(3x+27)=4x^2-120\,x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \rightarrow x=39,\ x=3$

Comprovació:

$x=39 \rightarrow \sqrt{5\cdot39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot39} \rightarrow 14+2\neq12 \rightarrow$ (no val)

$x=3 \rightarrow \sqrt{5\cdot3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot3} \rightarrow 4+2=6$

15 Resol:

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ **b)** $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$ **c)** $\sqrt{x+3} + 3 = x$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ **e)** $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$ **f)** $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$

$\sqrt{4x+9} = 2 + \sqrt{2x+1}$

$4x+9 = 4 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x+1}$

$x + 2 = 2\sqrt{2x+1}$

$x^2 + 4 + 4x = 4(2x+1)$

$x^2 - 4x = 0;\ x(x-4) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 4$

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

$\sqrt{3x+4} = \sqrt{1-x} + 1$

$3x + 4 = 1 - x + 1 + 2\sqrt{1-x}$

$2\sqrt{1-x} = 4x + 2$

$4(1-x) = 16x^2 + 16x + 4$

$4x^2 + 5x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{-5}{4}$ (no val)

$x = 0$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$

$\sqrt{x+3} = x - 3$

$x + 3 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \rightarrow \text{(no val)} \end{cases}$

$x = 6$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

$\sqrt{x-2} = -\sqrt{x+1} + 3$

$x - 2 = (x+1) + 9 - 6\sqrt{x+1}$

$6\sqrt{x+1} = 12$

$36(x+1) = 144$

$x = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$3x = x + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x}$

$x - 1 = \sqrt{2}\sqrt{x}$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow \text{(no val)} \end{cases}$

$x = 2 + \sqrt{3}$

f) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$-5-7x+4+x+2\sqrt{-5-7x}\,\sqrt{4+x} = 7-6x$

$\sqrt{(-5-7x)(4+x)} = 4$

$7x^2 + 33x + 36 = 0$

$x = \dfrac{-33 \pm 9}{14} = \begin{cases} x = -\dfrac{12}{7} \\ x = -3 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{-12}{7},\ x_2 = -3$

Pàgina 84

Fes-ho tu

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

$3(x-2) + 3x = 4x(x-2)$

$2x^2 - 7x + 3 = 0;\ x = \dfrac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

Les dues solucions són vàlides.

16 Resol les equacions següents:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$

b) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

a) $10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \dfrac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \dfrac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \dfrac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \dfrac{-2}{3}$

17 **Resol:**

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$ **b)** $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{26}{35}$

a) $x(x+1)+2x(x-1)=3(x^2-1)$

$x^2+x+2x^2-2x=3x^2-3$

$x=3$

b) $10(x+3)+2x(x+2)=3(x^2+5x+6)$

$10x+30+2x^2+4x=3x^2+15x+18$

$0=x^2+x-12$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

$x_1=3;\ x_2=-4$

c) $35(x+3)\,(x+1)-35(x^2+1)=26\,(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3)-35(x^2+1)=26(x^2-1)$

$35x^2+140x+105-35x^2-35=26x^2-26$

$26x^2-140x-96=0$

$x=\dfrac{70\pm\sqrt{70^2-4\cdot 13\cdot(-48)}}{26}=\dfrac{70\pm 86}{26}=\begin{cases}6\\-8/13\end{cases}$

$x_1=6;\ x_2=\dfrac{-8}{13}$

Pàgina 85

Fes-ho tu.

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}$ **b)** $7^{x^2+2x-15}=1$ **c)** $3^x+3^{x-1}=36$

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}\ \rightarrow\ 5^{6-x^2}=5^{-3}\ \rightarrow\ 6-x^2=-3\ \rightarrow\ x^2=9\ \rightarrow\ x_1=3,\ x_2=-3$

b) $7^{x^2+2x-15}=1\ \rightarrow\ 7^{x^2+2x-15}=7^0\ \rightarrow\ x^2+2x-15=0\ \rightarrow\ x_1=3,\ x_2=-5$

c) $3^x+3^{x-1}=36$

Fem el canvi de variable $3^x=y$. Ens queda:

$y+\dfrac{y}{3}=36\ \rightarrow\ y=27\ \rightarrow\ 3^x=27\ \rightarrow\ x=3$

18 **Resol les equacions següents:**

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$ **c)** $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}}=186$ **d)** $7^{x+2}=5\,764\,801$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2}\ \rightarrow\ 3x=-3x-2\ \rightarrow\ 6x=-2\ \rightarrow\ x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2}=3^{-2}\ \rightarrow\ 4-x^2=-2\ \rightarrow\ x^2=6\ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=186\ \rightarrow\ 2^{2x-2-x-2}=186\ \rightarrow\ 2^{x-4}=186\ \rightarrow$

$\rightarrow\ \log 2^{x-4}=\log 186\ \rightarrow\ (x-4)\log 2=\log 186\ \rightarrow\ x=4+\dfrac{\log 186}{\log 2}=11{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8\ \rightarrow\ x=6$

19 **Resol:**

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

c) $\dfrac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6}$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30 \;\rightarrow\; 3^x(10) = 30 \;\rightarrow\; 3^x = 3 \;\rightarrow\; x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \dfrac{5^x}{5} = \dfrac{31}{5} \;\rightarrow\; 5^x \cdot \dfrac{31}{5} = \dfrac{31}{5} \;\rightarrow\; x = 0$

c) $\dfrac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125 \;\rightarrow\; \dfrac{5^{x^2+1}}{5^{2(x+2)}} = 5^5 \;\rightarrow\; 5^{x^2+1-2(x+2)} = 5^5 \;\rightarrow$

$$\rightarrow x^2 + 1 - 2(x-2) = 5 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 8 = 0 \;\; \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6} \;\rightarrow\; 5^{2x} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-6} \;\rightarrow\; 5^{2x} = 5^{-(4x-6)} \;\rightarrow\; 2x = -(4x-6) \;\rightarrow\; 6x = 6 \;\rightarrow\; x = 1$

Pàgina 86

Fes-ho tu. **Resol:**

a) $\log x - \log 4 = 2$

b) $3 \log_5 (x-1) = \log_5 125$

c) $2 \ln x = \ln (2x+3)$

(Recorda: *ln* és logaritme neperià o logaritme en base *e*)

a) $\log x - \log 4 = 2 \;\rightarrow\; \log\left(\dfrac{x}{4}\right) = \log 10^2 \;\rightarrow\; \dfrac{x}{4} = 100 \;\rightarrow\; x = 400$

b) $3\log_5 (x-1) = \log_5 125 \;\rightarrow\; 3\log_5 (x-1) = 3\log_5 5 \;\rightarrow\; x - 1 = 5 \;\rightarrow\; x = 6$

c) $2\ln x = \ln(2x+3) \;\rightarrow\; \ln x^2 = \ln(2x+3) \;\rightarrow\; x^2 = 2x + 3 \;\rightarrow\; x_1 = 3,\; x_2 = -1$ (no vàlida)

Solució: $x = 3$

20 **Cert o fals?**

a) En resoldre una equació amb algun radical quadràtic sempre hi apareix alguna arrel falsa.

b) 4 **i** -4 **són solucions de l'equació** $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4$.

c) 4 **i** -4 **són solucions de l'equació** $\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = 2$.

a) Fals, hem resolt equacions d'aquest tipus en les quals totes les solucions eren vàlides.

Exemple: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ en la pàgina 83.

b) Cert; si substituïm x per 4 o per -4 obtenim una igualtat.

c) Fals; només és solució $x = 4$. En substituir x per -4 no surt una igualtat.

21 **Resol les equacions següents:**

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

d) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \rightarrow y = 4,\ y = -3$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 - 8y - 9 = 0 \rightarrow y = 9,\ y = -1$

Solucions: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 + 10y + 9 = 0 \rightarrow y = -1,\ y = -9$

Solucions: No n'hi ha

d) Fem $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y = 2,\ y = -1$

Solucions: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

22 **Resol les equacions següents:**

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$ **c)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$ **e)** $\frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$ **f)** $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$

a) $10(x + 3) + 10x = 3x(x + 3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \frac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x - 2) + 2x(x + 1) = 12x(x - 2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = \frac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{-2}{3}$

d) $x(x + 1) + 2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

e) $10(x + 3) + 2x(x + 2) = 3(x^2 + 5x + 6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = -4$

f) $35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ x_2 = \frac{-8}{13}$

23 **Resol:**

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$ **b)** $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$ **c)** $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$ **e)** $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3$

$x^2 - 4x + 4 = 0;\ x = 2$ (no val)

No té solució.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$x^2 - 116x + 228 = 0$

$$x = \frac{116 \pm 12}{2} = \begin{cases} 114 \\ 2 \to \text{(no val)} \end{cases}$$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2;\ x = x^2 + 4 - 4x;\ 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \to \text{(no val)} \end{cases}$$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x};\ 4 + x^2 - 4x = x;\ x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \to \text{(no val)} \\ 1 \end{cases}$$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8-2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} = \begin{cases} 2 \\ 0{,}08 \to \text{(no val)} \end{cases}$$

Així, $x = 2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$16(3x+27)=4x^2-120\,x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \rightarrow x=39,\ x=3$

Comprovació:

$x=39 \rightarrow \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \rightarrow 14+2\neq 12 \rightarrow$ (no val)

$x=3 \rightarrow \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \rightarrow 4+2=6$

24 Resol:

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$

b) $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}}=186$

d) $7^{x+2}=5\,764\,801$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2} \rightarrow 3x=-3x-2 \rightarrow 6x=-2 \rightarrow x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^4-x^2=3^{-2} \rightarrow 4-x^2=-2 \rightarrow x^2=6 \rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

$x_1=\sqrt{6};\ x_2=-\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x+2}}{2^{x+2}}=186 \rightarrow 2^{2x+2-x-2}=186 \rightarrow 2^x=186 \rightarrow$

$\rightarrow \log 2^x=\log 186 \rightarrow x\ \log 2=\log 186 \rightarrow$

$\rightarrow x=\dfrac{\log 186}{\log 2}=7{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8 \rightarrow x=6$

25 Resol les equacions següents:

a) $3^x+3^{x+2}=30$

b) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\dfrac{31}{5}$

c) $2\log x-\log(x+6)=3\log 2$

d) $4\log_2(x^2+1)=\log_2 625$

a) $3^x+3^x\cdot 9=30 \rightarrow 3^x(10)=30 \rightarrow 3^x=3 \rightarrow x=1$

b) $5\cdot 5^x+5^x+\dfrac{5^x}{5}=\dfrac{31}{5} \rightarrow 5^x\cdot\dfrac{31}{5}=\dfrac{31}{5} \rightarrow x=0$

c) $\log\dfrac{x^2}{x+6}=\log 8 \rightarrow x^2=8x+48 \rightarrow x^2-8x-48=0 \rightarrow x=\dfrac{8\pm 16}{2}=\begin{cases}12\\ -4 \rightarrow \text{(no val)}\end{cases}$

$x=12$

d) $\log_2(x^2+1)4=\log_2 5^4 \rightarrow x^2+1=5 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

$x_1=2;\ x_2=-2$

5 Resolució de sistemes d'equacions

Pàgina 88

26 Cert o fals?

a) **El sistema** $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ **té dues solucions:** $x = 4,\ i = 1$

b) **El sistema** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **només té dues solucions:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1]$ i $[x_2 = -2,\ y_2 = -1]$

c) **El sistema** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **té quatre solucions:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1]$; $[x_2 = 2,\ y_2 = -1]$

$[x_3 = -2,\ y_3 = 1]$; $[x_4 = -2,\ y_4 = -1]$

a) Fals, $x = 4$ i $y = 1$ no són dues solucions, sinó una solució per a cada incògnita; aleshores són una solució del sistema.

b) Fals; com que les dues incògnites estan al quadrat, també són solucions $x_3 = -2,\ y_3 = 1$ i $x_4 = 2,\ y_4 = -1$.

c) Cert, pel raonament de l'apartat anterior.

27 Resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2-7=y+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{xy} \\ xy=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2y+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2-x^2=16 \\ \sqrt{5-4y}-x=-(x+y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=x^2-9 \end{array}\right\}$

$x^2 - 9 = 2x - 1;\ x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ y_1 = 7$

$x_2 = -2;\ y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} y+x=xy-1 \\ xy=6 \end{array}\right\}$

$y = 5 - x$

$x(5 - x) = 6;\ 5x - x^2 = 6;\ x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ y_1 = 3$

$x_2 = 3;\ y_2 = 2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y-1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \rightarrow x = 17$

$y = 0$ (no val)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \left\langle \begin{array}{l} y = 1 \rightarrow \text{(no val)} \\ y = -5 \end{array} \right.$

$25 - x^2 = 16 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

28 Resol:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{array} \right.$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left. \begin{array}{l} \log \dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array} \right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \left\langle \begin{array}{l} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{array} \right.$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ log\,\dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\;\; 9y = 27;\;\; y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\;\; x = 10y;\;\; x = 30$

$x = 30;\;\; y = 3$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + log\,10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,10\,(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 10\,(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;\;\; y(y - 4) = 0;\;\; y = 4,\;\; y = 0$

$y = 4$ no és vàlida perquè apareixeria $log\,(-2)$ en la primera equació.

$x_1 = 10;\;\; y_1 = 0$

6 Mètode de Gauss per a sistemes lineals

Pàgina 89

29 Reconeix com a escalonats i resol:

a) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x-8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$

30 Resol els sistemes escalonats següents:

a) $\begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + \quad = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5-y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{5+z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 0 + 10 - 3 = 15 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{9}{3} = 3 \\ y = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$

Pàgina 90

31 **Resol pel mètode de Gauss:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{5} = 4 \\ y = \dfrac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$

32 **Resol:**

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) + 4 \cdot (2a) \\ (2a) \\ (3a) - 3 \cdot (2a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot (1a) + (3a) \\ (2a) \\ (3a) : 2 \end{array} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - (1a) \\ (3a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ z = \dfrac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \dfrac{2x + 4z + 1}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$

Pàgina 91

33 **Intenta resoldre pel mètode de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a) + (1a)} \\ \text{(3a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

Les equacions 2a i 3a diuen coses contradictòries (si $2x - y$ és igual a 1, no pot ser igual a 2). Per tant, el sistema és incompatible.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a) + (1a)} \\ \text{(3a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a) – (2a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$

Només queden dues equacions. Resolem el sistema obtenint y, z en funció de x:

(2a) $\rightarrow$ $y = 2x - 1$

(1a) $\rightarrow$ $z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Solucions: $\left\{\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{array}\right.$

Per a cada valor de x, s'obté una solució del sistema. Per exemple:

Per a $x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$ Per a $x = -2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{array}\right.$

34 **Resol:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a) + (3a)} \\ \text{(3a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 10 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a) – 3 · (1a)} \\ \text{(3a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$

La segona equació és absurda. No pot ser 0 = 1. Per tant, el sistema no té solució.

b) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a) + (3a)} \\ \text{(3a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a) – 3 · (1a)} \\ \text{(3a)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$

La segona equació no diu res. No és una equació. Per tant, només queden dues equacions: la 1a i la 3a.

Resolem el sistema resultant donant els valors de x i y en funció de z:

$\left\{\begin{array}{l} x + z = 3 \rightarrow x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \rightarrow y = 1 - x + z = 1(3 - z) + z = -2 + 2z \end{array}\right.$

Solucions: $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{array}\right.$

Per cada valor que donem a z, s'obté una solució del sistema. Per exemple:

Per a $z = 0 \rightarrow x = 3,\ y = -2$.

Per a $z = 4 \rightarrow x = -1,\ y = 6$.

7 Inequacions i sistemes d'inequacions amb una incògnita

Pàgina 92

35 Resol aquestes inequacions:

a) $\mathbf{3x - 2 \leq 10}$ **b)** $\mathbf{x - 2 > 1}$ **c)** $\mathbf{2x + 5 \geq 6}$ **d)** $\mathbf{3x + 1 \leq 15}$

a) $3x - 2 \leq 10 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$

Solucions: $\{x \,/\, x \leq 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Solucions: $\{x \,/\, x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \geq 6 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Solucions: $\left\{x \,/\, x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \leq 15 \rightarrow 3x \leq 14 \rightarrow x \leq \frac{14}{3}$

Solucions: $\left\{x \,/\, x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

36 Resol aquests sistemes d'inequacions:

a) $\begin{cases} 3x - 2 \leq 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

Observem que les inequacions que formen ambdós sistemes s'han resolt en l'exercici anterior.

a) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Solucions:* $\{x \,/\, 3 < x \leq 4\} = (3, 4]$

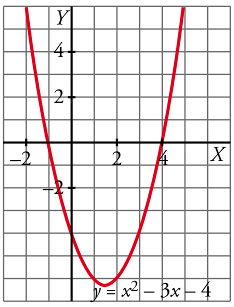
b) $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{14}{3} \end{cases}$ *Solucions:* $\left\{x \,/\, \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

Pàgina 93

37 Resol les inequacions següents:

a) $\mathbf{x^2 - 3x - 4 < 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - 3x - 4 \geq 0}$ **c)** $\mathbf{x^2 + 7 < 0}$ **d)** $\mathbf{x^2 - 4 \leq 0}$

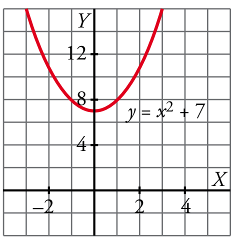
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ interval $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

c)



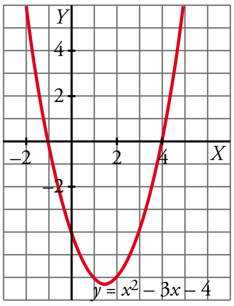
$x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No té solució.

d) $x^2 - 4 \leq 0$

La paràbola $y = x^2 - 4$ queda per sota de l'eix X en l'interval $(-2, 2)$; i talla l'eix X en $x = -2$ i en $x = 2$. Per tant, les solucions de la inequació són els punts de l'interval $[-2, 2]$.

38 Resol els sistemes d'inequacions següents:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a) 

$2x - 7 > 5 \;\rightarrow\; 2x > 12 \;\rightarrow\; x > 6 \;\rightarrow\; (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solució: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{array}\right\}$

- Les solucions de la primera inequació són els punts de l'interval $[-2, 2]$. (Vegeu apartat d) de l'exercici anterior).
- Les solucions de la segona inequació són aquestes:

$$x - 4 > 1 \;\rightarrow\; x > 5 \;\rightarrow\; (5, +\infty)$$

- Les solucions del sistema seran els punts en comú dels dos intervals. Per tant, el sistema no té solució.

8 Inequacions lineales amb dues incògnites

Pàgina 94

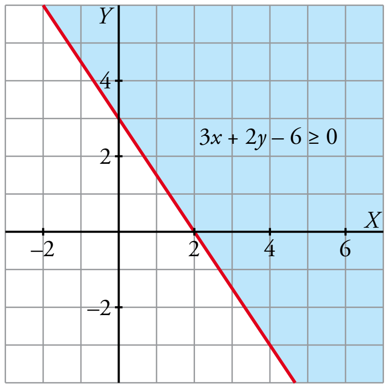
39 **Resol:**

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibuixem la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

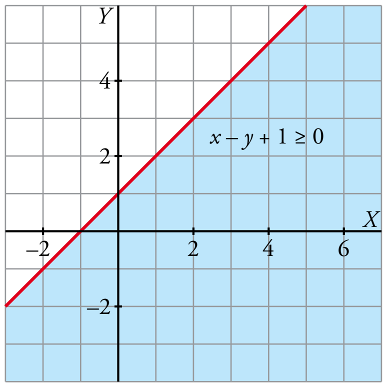
La solució és el semiplà que no conté O.



b) Dibuixem la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solució és el semiplà que conté O.



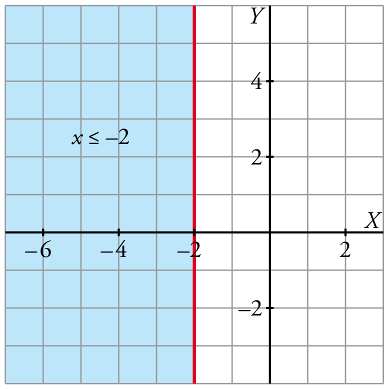
40 **Resol:**

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibuixem la recta $r: x = -2$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat: $0 + 2 \leq 0$.

La solució és el semiplà que no conté O.

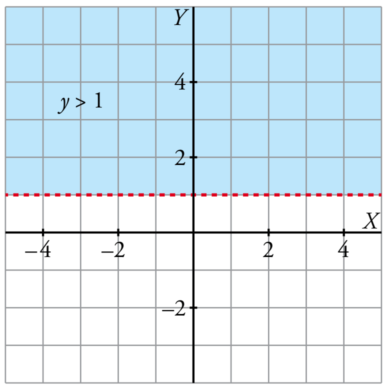


b) Dibuixem la recta $r: y = 1$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat: $0 \geq 1$.

La solució és el semiplà que no conté O.

La recta $y = 1$ no pertany al conjunt de solucions.



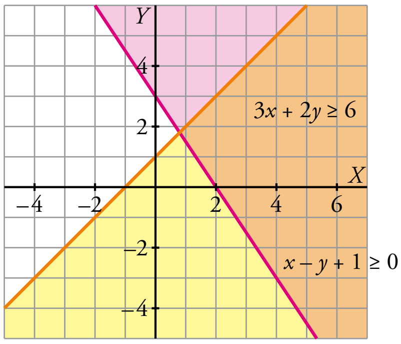
Pàgina 95

41 **Resol els sistemes d'inequacions següents:**

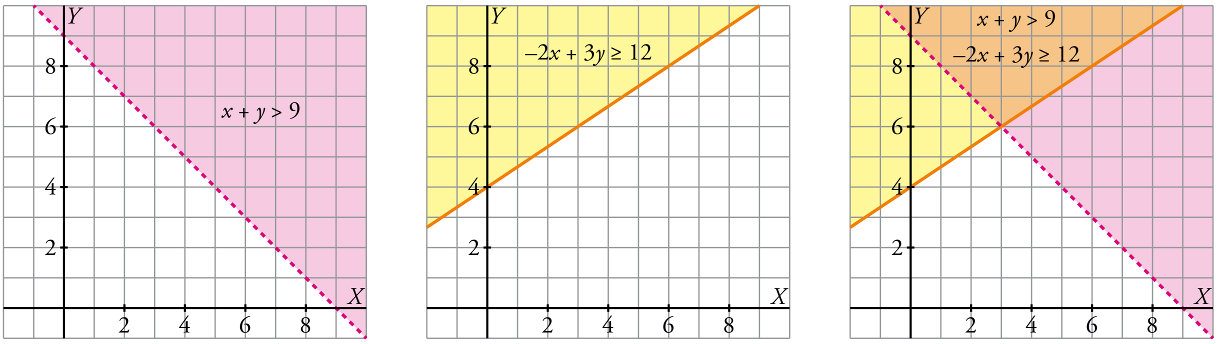
a) $\begin{cases} 3x+2y \geq 6 \\ x-y+1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y>9 \\ -2x+3y \geq 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y \geq 11 \\ -x+2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y \leq 11 \\ -x+2y \geq 10 \\ y<9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y<11 \\ -x+2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-3y \leq -3 \\ x+y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x-3y>-3 \\ x+y>11 \\ x \leq 2 \end{cases}$

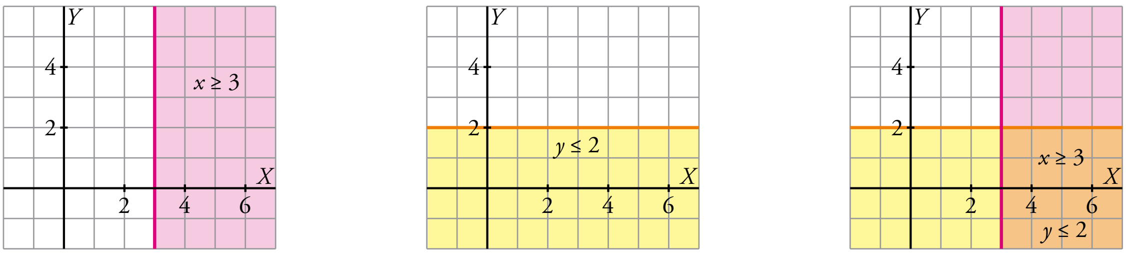
a) Ambdues inequacions han estat resoltes en l'exercici 1 anterior. El recinte solució del sistema és la intersecció dels semiplans solucions d'ambdues inequacions. És a dir, és el recinte de color marró.



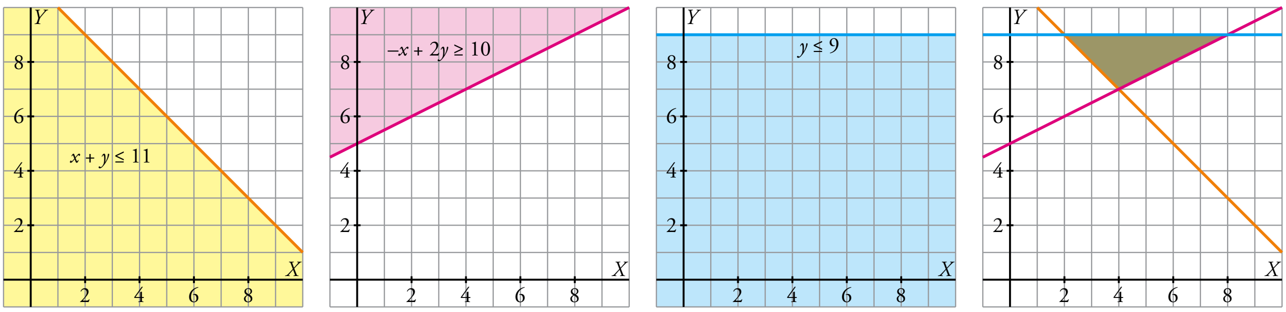
b) Resolem cada una de les inequacions. El recinte solució és la intersecció d'ambdós semiplans. La solució es el recinte marró.



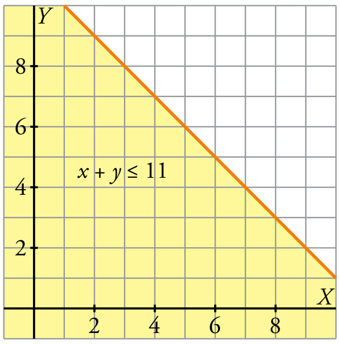
c) Resolem cada una de les inequacions. El recinte solució és la intersecció d'ambdós semiplans. La solució és el recinte marró.

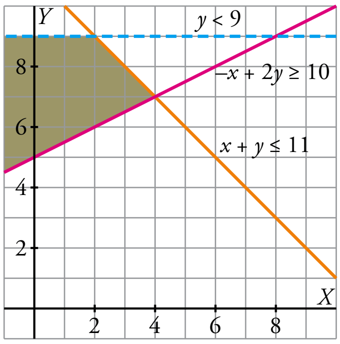


d) Resolem cada una de les inequacions. El recinte solució és la intersecció dels semiplans. La solució és el triangle d'intersecció.

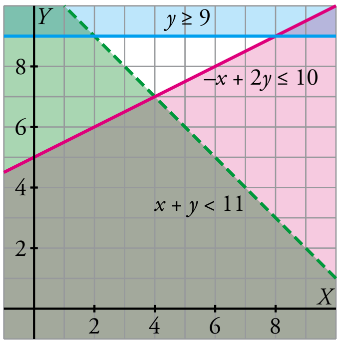


e) Resolem cada una de les inequacions. El recinte solució és la intersecció dels tres semiplans. Els semiplans de la segona i tercera inequacions coincideixen amb els de l'apartat d). Representem el semiplà de la primera inequació. La solució és la regió comuna als recintes.

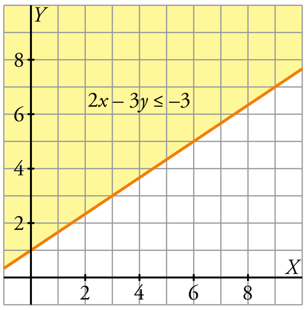


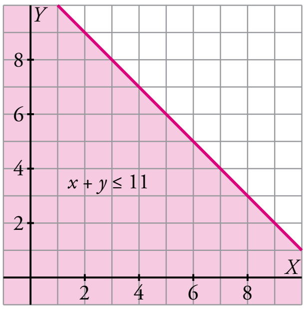


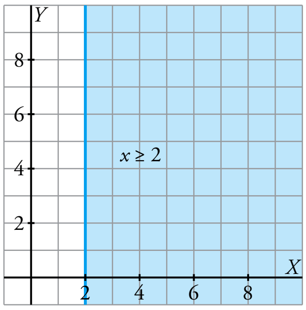
f) Resolem cada una de les inequacions. No hi ha cap punt que estigui en la intersecció dels tres semiplans. Aleshores no hi ha solució.

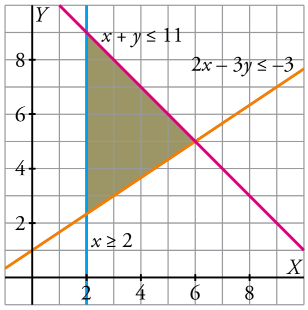


g) Resolem cada una de les inequacions. El recinte solució és la intersecció dels tres semiplans. La solució és el triangle comú als semiplans.

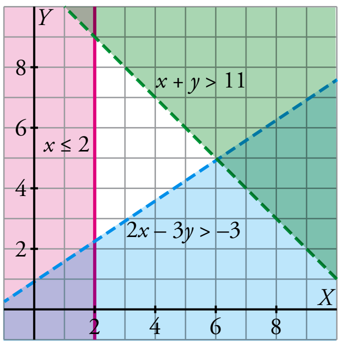








h) Resolem cada una de les inequacions. No hi ha cap punt que estigui en la intersecció dels tres semiplans. Aleshores no hi ha solució.



Exercicis i problemes resolts

Pàgina 96

1. Equacions polinòmiques de grau tres o superior

Fes-ho tu. **Resol aquesta equació:**

$$\mathbf{12x^4 + 14x^3 - 2x = 0}$$

Com que no té terme independent, traiem factor comú $2x$:

$$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$$

Busquem ara les arrels enteres del nou polinomi entre els divisors del terme independent i factoritzem.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$$

Com que no hi ha més arrels enteres, per descompondre el polinomi de segon grau resolem l'equació associada i, com que el coeficient principal és 6, ens queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Solucions: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Equacions amb valors absoluts

Fes-ho tu. **Resol aquestes equacions:**

a) $|x^2 - 2| = 2$ **b)** $|3x + 1| = |2x + 4|$

a) Seguim les indicacions de l'exercici resolt 2, apartat a).

$x^2 - 2 = 2 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \to x_3 = 0$

b) Seguim les indicacions de l'exercici resolt 2, apartat b).

$3x + 1 = 2x + 4 \to x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \to x_2 = -1$

3. Inequacions amb fraccions algebraiques

Fes-ho tu. **Resol aquesta inequació:**

$$\frac{x-1}{x} \le 0$$

Perquè la fracció segui negativa, el numerador i el denominador han de tenir diferent signe. Calculem les arrels d'ambdós polinomis. Aquestes determinen els intervals en què s'ha d'estudiar el signe de la fracció:

$x - 1 = 0 \to x_1 = 1;\ x_2 = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	–	–	+
x	–	+	+
$\frac{x-1}{x}$	+	–	+

La solució és l'interval (0, 1]. Afegim $x = 1$ perquè anul·la la fracció.

Pàgina 97

4. Equacions tipus $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Fes-ho tu. **Resol aquesta equació:**

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0$$

Fem el canvi de variable: $x^4 = y$

L'equació queda: $y^2 - 15y - 16 = 0 \rightarrow y_1 = 16,\ y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existeix.

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

5. Equacions exponencials

Fes-ho tu. **Resol les equacions:**

a) $3^{x^2+1} = 9^x$

b) $2^{x+1} = 5$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

a) $3^{x^2+1} = 9^x \rightarrow 3^{x^2+1} = 3^{2x} \rightarrow x^2 + 1 = 2x \rightarrow x = 1$

b) $2^{x+1} = 5 \rightarrow x + 1 = log_2 5 \rightarrow x = log_2 5 - 1 = 1{,}3219$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

Fem el canvi de variable $2^x = y$.

$y^2 - 3y + y + 2 = 0 \rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0$, que no té solució.

6. Equacions logarítmiques

Fes-ho tu. **Resol les equacions:**

a) $ln\ (2x) = 1$

b) $log_x 16 = 2$

c) $log\ 3 + log\ x = log\ 15 - log\ 5$

a) $ln\ (2x) = 1 \rightarrow ln\ (2x) = ln\ e \rightarrow 2x = e \rightarrow x = \frac{e}{2}$

b) $log_x 16 = 2 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

Com que la base d'un logaritme no pot ser negativa, la solució és $x = 4$.

c) $log\ 3 + log\ x = log\ 15 - log\ 5 \rightarrow log\ 3x = log\ 75 \rightarrow 3x = 75 \rightarrow x = 25$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 98

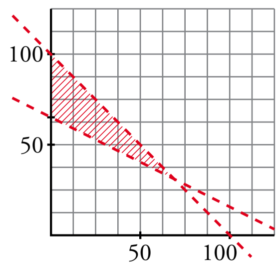
1. Resolució d'un problema mitjançant un sistema d'inequacions

A una exposició hi assisteixen menys de 100 persones i es recapten més de 260 € amb entrades de 2 € i de 4 €. Quantes entrades de cada tipus s'han pogut vendre?

$x \rightarrow$ nombre d'entrades venudes de 2 €

$y \rightarrow$ nombre d'entrades venudes de 4 €

$$\begin{cases} x + y < 100 \\ 2x + 4y > 260 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Qualsevol punt de coordenades enteres del recinte intersecció és una solució. Els punts de les rectes $x + y = 100$ y $2x + 4y = 260$ no formen part de la solució.

2. Resolució d'un problema mitjançant un sistema de dues equacions amb dues incògnites

Un pelegrí que recorre el Camí de Sant Jaume avança a una velocitat de 3,5 km/h. S'adona que, a aquest pas, arribarà a l'alberg 1 hora més tard del que preveia.

Llavors, accelera el pas i recorre la resta del camí a 5 km/h, i hi arriba mitja hora abans del temps fixat.

Quina distància li faltava per recórrer aquest dia fins a l'alberg?

$x \rightarrow$ distància que falta per recórrer

$t \rightarrow$ temps que tardarà si va a 3,5 km/h

$$\left.\begin{array}{l} x = 3,5t \\ x = 5(t - 1,5) \end{array}\right\} \rightarrow t = 5,\ x = 17,5$$

Li falten 17,5 km per recórrer.

3. Resolució d'un problema mitjançant un sistema de tres equacions amb tres incògnites

Un corredor puja els pendents a 8 km/h, els baixa a 16 km/h i marxa pel pla a 11,5 km/h.

En la darrera marató va tardar 3 hores i mitja, i si el recorregut hagués estat en sentit invers, el temps hauria estat de 4 hores i quart. Sabent que una marató té un recorregut de 42 km, quina va ser la longitud del recorregut pla en aquesta marató?

$x \rightarrow$ trams de pujada en la marató original

$y \rightarrow$ part plana en la marató original

$z \rightarrow$ trams de baixada en la marató original

$$\begin{cases} x+y+z=42 \\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{11,5}+\dfrac{z}{16}=3,5 \\ \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{11,5}+\dfrac{z}{8}=4,25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=42 \\ 23x+16y+11,5z=644 \\ 11,5x+16y+23z=782 \end{cases} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a)-(2a) \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y+z=42 \\ 23x+16y+11,5z=644 \\ -11,5x+11,5z=138 \end{cases} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a)\ /\ 11,5 \end{array} \qquad \begin{cases} x+y+z=42 \\ 23x+16y+11,5z=644 \\ -x+z=12 \end{cases} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-16\cdot(1a) \\ (3a) \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y+z=42 \\ 7x-4,5z=-28 \\ -x+z=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=42 \\ 2,5z=56 \\ -x+z=12 \end{cases} \begin{array}{l} (2a) \\ (3a) \\ (1a) \end{array} \qquad \begin{cases} z=22,4 \\ x=10,4 \\ y=9,2 \end{cases}$$

Hi ha 9,2 km de recorregut pla.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 99

Per practicar

Divisió de polinomis. Regla de Ruffini

1 Calcula el quocient i el residu en cada cas:

a) $(4x^5 - 4x + 1) : (2x^2 + 1)$ **b)** $x^6 : (x^3 + x)$

c) $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$ **d)** $(x^4 - 81) : (x + 3)$

a) Quocient: $2x^3 - x$ Residu: $-3x + 1$

b) Quocient: $x^3 - x$ Residu: x^2

c) Quocient: $x^3 - 2x^2 + 5x - 30$ Residu: 60

d) Quocient: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$ Residu: 0

2 Espressa en la forma $\frac{D}{d} = C + \frac{r}{d}$.

a) $\frac{x-1}{x+3}$ **b)** $\frac{3x-1}{x-2}$ **c)** $\frac{3x^3-2x^2+1}{x^2+2}$

d) $\frac{2x^5-3x^2+1}{x^3-1}$ **e)** $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$ **f)** $\frac{x^5}{x^2+3}$

a) $\frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$

b) $\frac{3x-1}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}$

c) $\frac{3x^3-2x^2+1}{x^2+2} = 3x - 2 - \frac{6x-5}{x^2+2}$

d) $\frac{2x^5-3x^2+1}{x^3-1} = 2x^2 - \frac{x^2-1}{x^3-1}$

e) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} = x + 1$

f) $\frac{x^5}{x^2+3} = x^3 - 3x + \frac{9x}{x^2+3}$

3 Troba el polinomi $P(x)$ sabent que:

$$\frac{4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 1}{P(x)} = x - 1$$

Aïllant $P(x)$ obtenim:

$$P(x) = \frac{4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 1}{x - 1} = 4x^3 - 4x^2 + 1$$

4 Esbrina, usant la regla de Ruffini, si el polinomi $2x^4 - 3x + 1$ és divisible entre $(x - 1)$ i $(x + 1)$.

- Per a $x = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & & 2 & 2 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

El residu és zero; aleshores és divisible entre $x - 1$.

- Per a $x = -1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & & -2 & -2 & -2 & -5 \\ \hline & 2 & -2 & -2 & -5 & \boxed{-4} \end{array}$$

El residu no és zero; aleshores no és divisible entre $x + 1$.

5 **Calcula el valor de m perquè sigui exacta la divisió $(2x^3 - 9x^2 + 2x + m) : (x - 4)$.**

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -9 & 2 & m \\ 4 & & 8 & -4 & -8 \\ \hline & 2 & -1 & -2 & \boxed{m-8} \end{array}$$

$m - 8 = 0 \rightarrow m = 8$

Factorització de polinomis

6 **Factoritza cada polinomi i assenyala'n les arrels:**

a) $2x^2 - 8x - 10$
b) $4x^2 - 9$
c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$
d) $x^4 + x^2 - 20$
e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$
f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$
g) $x^5 - 16x$
h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x$

a) $2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x - 5)(x + 1)$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ Arrels: $x_1 = 5,\ x_2 = -1$

b) $4x^2 - 9 = 4 \cdot \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}$ Arrels: $x_1 = \dfrac{3}{2},\ x_2 = -\dfrac{3}{2}$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x^2 - 5) = (x + 1)\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$ Arrels: $x_1 = -1,\ x_2 = \sqrt{5},\ x_3 = -\sqrt{5}$

d) $x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5)$ Arrels: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3\,(x + 3)(x - 1)(x - 2)$ Arrels: $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (3x + 2)(2x - 1)(x + 1)$ Arrels: $x_1 = -\dfrac{2}{3};\ x_2 = \dfrac{1}{2};\ x_3 = -1$

g) $x^5 - 16x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ Arrels: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x = 2x(x - 1)(x + 3)(x - 3)$ Arrels: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

7 **Treu factor comú i usa les identitats notables per factoritzar:**

a) $x^7 - 4x^5$
b) $9x^4 - 6x^3 + x^2$
c) $2x^3 - 18x$
d) $12x^3 + 36x^2 + 27x$
e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5$
f) $6x^9 - 54x$
g) $25x^{15} - 15x^8 + \dfrac{1}{4}x$
h) $\dfrac{x^6}{4} - x^4 + x^2$

a) $x^7 - 4x^5 = x^5(x - 2)(x + 2)$

b) $9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(3x - 1)^2$

c) $2x^3 - 18x = 2x(x - 3)(x + 3)$

d) $12x^3 + 36x^2 + 27x = 3x(2x + 3)^2$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5 = 2x^3(2x - 7)^2$

f) $6x^9 - 54x = 6x(x^4 - 3)(x^4 + 3)$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \dfrac{1}{4}x = \dfrac{1}{4}x(100x^{14} - 60x^7 + 1)$

h) $\dfrac{x^6}{4} - x^4 + x^2 = \dfrac{1}{4}x^2\,(x^2 - 2)^2$

Fraccions algebraiques

8 **Descompon en factors i simplifica les fraccions següents:**

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}=\dfrac{x-2}{x+2}$

9 **Redueix al mínim comú denominador i opera:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}+3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)^2-3(x-1)+(x-2)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}=\dfrac{(1-x)(x-2)+2x(x+3)-(x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)}=$

$=\dfrac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{4x+8}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}+3=\dfrac{x^2(x-1)-(2x-3)(x+1)^2+3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}=$

$=\dfrac{x^3-x^2-(2x-3)(x^2+2x+1)+3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}=$

$=\dfrac{x^3-x^2-2x^3-4x^2-2x+3x^2+6x+3+3x^3-3x^2+6x^2-6x+3x-3}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{2x^3+x^2+x}{(x+1)^2(x-1)}$

10 **Opera i simplifica:**

a) $\dfrac{3}{x}:\dfrac{x-3}{x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{3}\cdot\dfrac{15}{x^2-1}$ **c)** $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^2$ **d)** $\dfrac{x-2}{x}:\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\dfrac{3}{x}:\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{3x}{x(x-3)}=\dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x+1}{3}\cdot\dfrac{15}{x^2-1}=\dfrac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)}=\dfrac{5}{x-1}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^3=\dfrac{x^6}{36}\cdot\dfrac{27}{x^3}=\dfrac{27x^6}{36x^3}=\dfrac{3x^3}{4}$

d) $\dfrac{x-2}{x}:\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2=\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{-1}=\dfrac{x}{x-2}$

11 Opera i simplifica.

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}$

b) $\left[\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)$

c) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$

d) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)$

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-2x}{x^2-1}:\frac{x}{x+1}=\frac{-x+1}{x^2-1}:\frac{x}{x+1}=$

$=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}:\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{x+1}:\frac{x}{x+1}=\frac{-(x+1)}{x(x+1)}=\frac{-1}{x}$

b) $\left[\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)=\left[\frac{x-1}{x}:\frac{x+1}{x}\right]:(x^2-1)=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}:(x^2-1)=$

$=\frac{x-1}{x+1}:(x^2-1)=\frac{x-1}{(x+1)(x^2-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$

c) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x-1-x-1}{x^2-1}:\frac{x+1+x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{x^2-1}:\frac{2x}{x^2-1}=\frac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)}=\frac{-1}{x}$

d) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right](x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right](x-1)=\frac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)}\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)=\frac{x^2-4x+4-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-2)}:\frac{x-2+x+3}{(x-3)(x-2)}=\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}:\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}=1$

Equacions de primer i segon grau

12 Resol les equacions següents:

a) $(3x+1)(2x-3)-(x-3)(6x+4)=9x$

b) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{2}{3}(x+1)=\frac{(2x-3)^2-(13x-5)}{16}$

c) $\frac{1}{6}[(13-2x)-2(x-3)^2]=-\frac{1}{3}(x+1)^2$

d) $\frac{x^2-1}{3}+(x-2)^2=\frac{x^2+2}{2}$

e) $0{,}5(x-1)^2-0{,}25(x+1)^2=4-x$

f) $(0{,}5x-1)(0{,}5x+1)=(x+1)^2-9$

a) $6x^2-9x+2x-3-6x^2-4x+18x+12=9x$

$2x=9$

$x=\frac{9}{2}$

b) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{(2x+2)}{3}=\frac{4x^2+9-12x-13x+5}{16}$

$12x^2-12-32x-32=12x^2+27-36x-39x+15$

$-44-32x=42-75x$

$43x=86$

$x=2$

c) $\frac{1}{6}(13-2x-2x^2-18+12x)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$\frac{1}{6}(-2x^2+10x-5)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-\frac{2x^2}{6}+\frac{10x}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-2x^2+10x-5=-2x^2-2-4x$

$14x=3$

$x=\frac{3}{14}$

d) $2x^2-2+6x^2+24-24x=3x^2+6$

$5x^2-24x+16=0$

$x=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{10}$

$x=\frac{24\pm 16}{10}$ $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=4/5 \end{cases}$

e) $\frac{1}{2}(x^2+1-2x)-\frac{1}{4}(x^2+1+2x)=4-x$

$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-x-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}=4-x$

$2x^2+2-4x-x^2-1-2x=16-4x$

$x^2-2x-15=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}$ $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

f) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)=x^2+1+2x-9$

$\frac{x^2}{4}-1=x^2+1+2x-9$

$x^2-4=4x^2+4+8x-36$

$0=3x^2+8x-28$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6}$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-14/3 \end{cases}$

13 **Resol aquestes equacions incompletes de segon grau sense aplicar-hi la fórmula general**

a) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

b) $\frac{x^2-2x+5}{2}-\frac{x^2+3x}{4}=\frac{x^2-4x+15}{6}$

c) $\frac{3x+1}{3}-\frac{5x^2+3}{2}=\frac{x^2-1}{2}-\frac{x+2}{3}$

d) $\frac{3x^2-1}{4}+\frac{1}{2}\left[x^2-2-\frac{1}{2}x\right]=\frac{x^2-5}{4}$

a) $x^2+1+2x-x^2-4+4x=x^2+9+6x+x^2-20$

$6x-3=2x^2+6x-11$

$8=2x^2$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x(x - 13) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 13 \end{cases}$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x$

$2x(9x - 4) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$

d) $\dfrac{3x^2 - 1}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$

$4x^2 - x = 0$

$x(4x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1/4 \end{cases}$

Pàgina 100

14 Resol aquestes equacions (una no té solució i l'altra en té d'infinites):

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x - 1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x + 2)^2$

c) $(5x - 3)^2 - 5x(4x - 5) = 5x(x - 1)$

d) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2}$

a) $x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x = x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$

$0 = 0$

Té infinites solucions.

b) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{(x^2 + 1 - 2x)}{4} = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{x^2}{4} - 4 - 2x$

$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = 25x - 5x^2 - 80 - 40x$

$29x = -87$

$x = -\dfrac{87}{29}$

$x = -3$

c) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$

$9 = 0$

No té solució.

d) $4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$

$x = \dfrac{58}{24} = \dfrac{29}{12}$

15 **Resol les equacions següents expressant prèviament els decimals en forma de fracció:**

a) $0,\widehat{3}x^2 - x - 1,\widehat{3} = 0$

b) $0,\widehat{1}x^2 - 1 = 0$

c) $0,\widehat{1}x^2 - 0,\widehat{5}x = 0$

d) $0,\widehat{1}x^2 - 1,\widehat{7} = x - 4$

a) $\frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

b) $\frac{1}{9}x^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{9}x = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{9} = x - 4 \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Equacions biquadrades

16 **Resol i comprova'n les solucions:**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ **c)** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d)** $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$

e) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$ **f)** $x^4 - 4x^2 = 0$ **g)** $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ **h)** $9x^4 - x^2 = 0$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \quad \begin{cases} z = 4 \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = 1 \quad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

b) $x^2 = z$

$z^2 + 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \quad \begin{cases} z = -4 \quad \text{(no val)} \\ z = 1 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \quad \text{(no val)} \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

c) $x^2 = z$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad \begin{cases} z = -2 \quad \text{(no val)} \\ z = -1 \quad \text{(no val)} \end{cases} \quad \text{(no té solució)}$$

d) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 36 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-144}}{2} \quad \text{(no té solució)}$$

e) $x^2 = z$

$9z^2 - 46z + 5 = 0$

$$z = \frac{46 \pm \sqrt{2\,116-180}}{18} \quad \begin{cases} z = \frac{90}{18} = 5 \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \end{cases} \\ z = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \quad \begin{cases} x_3 = 1/3 \\ x_4 = -1/3 \end{cases} \end{cases}$$

f) $x^2(x^2-4)=0 \;\rightarrow\; x_1=0,\; x_2=2,\; x_3=-2$

g) $4x^4-17x^2+4=0$

$z=x^2$

$4z^2-17z+4=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8} \begin{cases} z=4 \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases} \\ z=\dfrac{1}{4} \begin{cases} x_3=1/2 \\ x_4=-1/2 \end{cases} \end{cases}$$

h) $9x^4-x^2=0$

$x^2(9x^2-1)=0 \;\rightarrow\; x_1=0,\; x_2=\frac{1}{3},\; x_3=-\frac{1}{3}$

17 **Resol aquestes equacions del tipus $ax^{2n}+bx^n+c=0$ fent el canvi de variable $y=x^n$:**

a) $x^6+16x^3+64=0$

b) $8x^6-7x^3-1=0$

c) $x^8-82x^4+81=0$

d) $x^8+x^4-2=0$

a) $x^6+16x^3+64=0$

Fem el canvi $x^3=y$.

$y^2+16y+64=0 \;\rightarrow\; y=-8$

$x=\sqrt[3]{-8}=-2$

Solució: $x=-2$

b) $8x^6-7x^3-1=0$

Fem el canvi $x^3=y$.

$8y^2-7y-1=0 \;\rightarrow\; y_1=1,\; y_2=-\frac{1}{8}$

Solucions: $x_1=\sqrt[3]{1}=1,\; x_2=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$

c) $x^8-82x^4+81=0$

Fem el canvi $x^4=y$.

$y^2-82y+81=0 \;\rightarrow\; y_1=81,\; y_2=1$

$x=\pm\sqrt[4]{81},\; x=\pm\sqrt[4]{1}$

Solucions: $x_1=3,\; x_2=-3,\; x_3=1,\; x_4=-1$

d) $x^8+x^4-2=0$

Fem el canvi $x^4=y$.

$y^2+y-2=0 \;\rightarrow\; y_1=1,\; y_2=-2$

$x=\pm\sqrt[4]{1}$

Solucions: $x_1=1,\; x_2=-1$

18 **Troba les solucions d'aquestes equacions:**

a) $(2x^2 + 1)(x^2 - 3) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 8$

b) $\frac{1}{4}(3x^2 - 1)(x^2 + 3) - (2x^2 + 1)(x^2 - 3) = 4x^2$

a) $2x^4 - 6x^2 + x^2 - 3 = x^4 - x^2 + x^2 - 1 - 8$

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

$x^2 = z$

$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ $\begin{cases} z = 3 \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \\ z = 2 \begin{cases} x_3 = \sqrt{2} \\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

b) $\frac{3x^4 + 9x^2 - x^2 - 3}{4} - 2x^4 + 6x^2 - x^2 + 3 = 4x^2$

$3x^4 + 8x^2 - 3 - 8x^4 + 20x^2 + 12 = 16x^2$

$-5x^4 + 12x^2 + 9 = 0$

$x^2 = z \rightarrow z = \frac{-12 \pm \sqrt{144+180}}{-10}$ $\begin{cases} z = -3/5 \text{ (no val)} \\ z = 3 \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \text{(no val)} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$

Equacions amb radicals

19 **Resol les equacions següents:**

a) $\sqrt{5x+6} = 3 + 2x$

b) $x + \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{2-5x} + x\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$

e) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$

f) $x - \sqrt{7-3x} = 1$

g) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$

h) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$4x^2 + 7x + 3 = 0$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8}$ $\begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$ $\begin{cases} x = 2 \text{ (no val)} \\ x = -3 \end{cases}$

c) $2 - 5x = \left(-x\sqrt{3}\right)^2$

$2 - 5x = x^2 \cdot 3$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6}$ $\begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \text{ (no val)} \end{cases}$

d) $\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(4-\sqrt{2x}\right)^2$

$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$\left(8\sqrt{2x}\right)^2 = (-3x + 22)^2$

$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$

$128x = 9x^2 + 484 - 132x$

$0 = 9x^2 - 260x + 484$

$x = \dfrac{260 \pm \sqrt{67\,600 - 17\,424}}{18}$ $\begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \text{ (no val)} \\ x = 2 \end{cases}$

e) $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (4 - 2x)^2$

$3x + 4 = 16 + 4x^2 - 16x$

$4x^2 - 19x + 12 = 0$

$x = \dfrac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8}$ $\begin{cases} x = 4 \text{ (no val)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$

f) $(x - 1)^2 = \left(\sqrt{7-3x}\right)^2$

$x^2 + 1 - 2x = 7 - 3x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$ $\begin{cases} x = -3 \text{ (no val)} \\ x = 2 \end{cases}$

g) $\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1$

h) $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = \left(\sqrt{3-x}\right)^2$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -1$

20 Resol:

a) $\dfrac{\sqrt{10+x}}{3} - \dfrac{\sqrt{1-3x}}{2} = 0$

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} + \dfrac{x}{4} = x - 1$

a) $2\sqrt{10+x} = 3\sqrt{1-3x}$

Elevem al quadrat ambdós membres:

$4(10 + x) = 9(1 - 3x) \rightarrow x = -1$, solució vàlida.

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} - \dfrac{x}{4} = x - 1 \rightarrow 2\sqrt{x^2+5} = 3x + 12(x-1) \rightarrow 2\sqrt{x^2+5} = 15x - 12$

Elevem al quadrat ambdós membres:

$4(x^2 + 5) = (15x - 12)^2 \rightarrow 4x^2 + 20 = 225x^2 - 360x + 144 \rightarrow 221x^2 - 360x + 124 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (vàlida), $x_2 = \dfrac{180 - 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (no vàlida)

Solució: $x = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$

21 **Resol i comprova'n les solucions:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{6}{\sqrt{10x+6}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{2}{x-1}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{\sqrt{5x+5}}{x+1}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2 = \sqrt{1-x}$

Elevem al quadrat ambdós membres: $4 = 1 - x \rightarrow x = -3$, solució vàlida.

b) $\dfrac{3}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{6}{\sqrt{10x+6}} \rightarrow 3\sqrt{10x+6} = 6\sqrt{x+3} \rightarrow \sqrt{10x+6} = 2\sqrt{x+3} \rightarrow$

$\rightarrow 10x + 6 = 4(x + 3) \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$, solució vàlida.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{2}{x-1} \rightarrow x - 1 = 2\sqrt{x+2}$

Elevem al quadrat ambdós membres: $x^2 - 2x + 1 = 4x + 8 \rightarrow x_1 = 7$ (vàlida), $x_2 = -1$ (no vàlida).

Solució: $x = 7$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{\sqrt{5x+5}}{x+1} \rightarrow 3(x+1) = \sqrt{x+5}\,\sqrt{5x+5}$

Elevem al quadrat ambdós membres:

$(3x + 3)^2 = (x + 5)(5x + 5) \rightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 5x^2 + 30x + 25 \rightarrow 4x^2 - 12x - 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 4$ (vàlida), $x_2 = -1$ (no vàlida).

Solució: $x = 4$

22 **Resol aïllant el radical i elevant al cub:**

a) $\sqrt[3]{x^2-28} + 3 = 0$

b) $\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{13-5x}} = -1$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 4$

a) $\sqrt[3]{x^2-28} = -3 \rightarrow x^2 - 28 = -27 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$

b) $\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0 \rightarrow \sqrt[3]{x+1} = 2 \rightarrow x + 1 = 8 \rightarrow x = 7$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{13-5x}} = -1 \rightarrow 3 = -\sqrt[3]{13-5x} \rightarrow 27 = -13 + 5x \rightarrow 5x = 40 \rightarrow x = 8$, solució vàlida.

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 4 \rightarrow 2 = 4\sqrt[3]{x} \rightarrow 1 = 2\sqrt[3]{x} \rightarrow 1 = 8x \rightarrow x = \dfrac{1}{8}$, solució vàlida.

Equacions factoritzades i factoritzables

23 Resol les equacions factoritzades següents:

a) $(3x-6)^5 = 0$

b) $4x^2(x+1)^2(x-2) = 0$

c) $(x+2)(x^2+1)(x^2+5) = 0$

a) $(3x-6)^5 = 0 \rightarrow 3x-6=0 \rightarrow x=2$

b) $4x^2(x+1)^2(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$

Solucions: $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=2$

c) $(x+2)(x^2+1)(x^2+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ x^2+1=0 \rightarrow \text{No té solució} \\ x^2+5=0 \rightarrow \text{No té solució} \end{cases}$

Solució: $x=-2$

24 Resol aquestes equacions identificant-hi identitats notables:

a) $x^2+6x+9=0$

b) $x^4-2x^2+1=0$

c) $x^6+2x^3+1=0$

d) $x^4-16=0$

a) $x^2+6x+9=0 \rightarrow (x+3)^2=0 \rightarrow x=-3$

b) $x^4-2x^2+1=0 \rightarrow (x-1)^2(x+1)^2=0 \rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$

c) $x^6+2x^3+1=0 \rightarrow (x+1)^2(-x+x^2+1)^2=0$

Només té arrel el factor $(x+1)^2$.

Solució: $x=-1$

d) $x^4-16=0 \rightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

Solucions: $x_1=2,\ x_2=-2$

25 Les equacions següents tenen totes les solucions enteres. Troba-les usant la regla de Ruffini:

a) $x^3+6x^2+11x+6=0$

b) $x^3-5x^2-2x+24=0$

c) $x^4-x^3-7x^2+13x-6=0$

d) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8=0$

a) $x^3+6x^2+11x+6=0 \rightarrow (x+3)(x+2)(x+1)=0$

Solucions: $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=-1$

b) $x^3-5x^2-2x+24=0 \rightarrow (x-3)(x-4)(x+2)=0$

Solucions: $x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=-2$

c) $x^4-x^3-7x^2+13x-6=0 \rightarrow (x+3)(x-2)(x-1)^2=0$

Solucions: $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=1$

d) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8=0 \rightarrow (x+2)(x-1)(x-2)^2=0$

Solucions: $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=2$

26 **Descompon en factors i resol:**

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^3 - 9x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 5x^2 + 4x = 1$

f) $-x^3 + 13x = 12$

g) $x^3 - 5x^2 + 7x = 3$

h) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

a) $x(x-2)(x+3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

b) $x^2(x-1)^2 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$

c) $x(x-3)(x+3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$

d) $(x-1)(x+2)(x+3) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -3$

e) $2(x-1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 1/2$

f) $-(x+4)(x-1)(x-3) = 0$

$x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$

g) $(x-1)^2(x-3) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

h) $(x-2)(x+2)^2 = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Equacions racionals

27 **Resol.**

a) $\frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} - 1$

c) $\frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{x-2}$

d) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2}$

$x = 2$

b) $3 + 6 + 9 = x^2 - 3x$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

c) $600x - 1\,200 + 80x^2 - 160x = 600x$

$80x^2 - 160x - 1\,200 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

d) $8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$

$2x^2 - 14x - 60 = 0$

$x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196+480}}{4} \begin{cases} x_1 = (14+26)/4 = 10 \\ x_2 = (14-26)/4 = -3 \end{cases}$

28 **Resol les equacions següents:**

a) $\frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$ **b)** $\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$

a) $10x^2 - 250 + 15x - 3x^2 - 75 + 15x = 3x^2 + 15x + 15x + 75$

$4x^2 = 400$

$x^2 = 100 \quad \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$

b) $x(x + 3) + 2x(x - 3) = 6$

$x^2 + 3x + 2x^2 - 6x = 6$

$3x^2 - 3x - 6 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

29 **Resol.**

a) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{x+4}$ **b)** $\frac{3}{x+3} = \frac{x+2}{2-x}$ **c)** $\frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{2x}$ **d)** $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{x^2+1}$

a) $x^2 + 4x = 4x + 4 \rightarrow x^2 = 4 \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

b) $6 - 3x = x^2 + 3x + 2x + 6 \rightarrow x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(x + 8) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -8 \end{cases}$

c) $4x^2 = 3x^2 + 2x + 6x + 4 \rightarrow x^2 - 8x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64+16}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{5} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$

d) $x^2(x^2 + 1) = x(x + 1) \rightarrow x^4 + x^2 - x^2 - x = 0 \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

30 **Resol aquesta equació simplificant prèviament les fraccions algebraiques que hi apareixen. Comprova les solucions:**

$$\frac{x^2+4x+4}{x+2} + \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$$

$$\frac{x^2+4x+4}{x+2} + \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{x^2+3x+2}{x+1} \rightarrow \frac{(x+2)^2}{x+2} + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 2 + (x - 1)(x + 1) = x + 2 \rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$

Solucions: $x_1 = 1, \; x_2 = -1$

Pàgina 101

Equacions exponencials i logarítmiques

31 **Troba la solució de les equacions següents aplicant logaritmes a cada membre:**

a) $7^x = 20$

b) $1{,}2^x = 10$

a) $7^x = 20 \rightarrow x = log_7 20$

b) $1{,}2^x = 10 \rightarrow x = log_{1,2} 10$

32 **Resol expressant ambdós membres de cada equació com a potències de la mateixa base:**

a) $2^{x^2-1} = 64$

b) $3^{x+2} = 6561$

c) $(0,2)^x = 25$

d) $\sqrt{2^x} = 0,25$

a) $2^{x^2-1} = 2^6 \rightarrow x^2 - 1 = 6 \rightarrow x_1 = -\sqrt{7},\ x_2 = \sqrt{7}$

b) $3^{x+2} = 6561 = 3^8 \rightarrow 3^{x+2} = 3^8 \rightarrow x + 2 = 8 \rightarrow x = 6$

c) $(0,2)^x = 25 \rightarrow \left(\dfrac{2}{10}\right)^x = 5^2 \rightarrow 5^{-x} = 5^2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$

d) $\sqrt{2^x} = 0,25 \rightarrow 2^{x/2} = \dfrac{1}{4} \rightarrow \dfrac{x}{2} = -2 \rightarrow x = -4$

33 **Resol les equacions següents mitjançant un canvi de variable:**

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

b) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

c) $3^x - 3^{-x} = \dfrac{728}{27}$

a) $2^x = z;\ z^2 - 5z + 4 = 0 \rightarrow z_1 = 4,\ z_2 = 1 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 0$

b) $3^x = z;\ z - \dfrac{z}{3} + \dfrac{z}{9} = 21 \rightarrow z = 27 \rightarrow x = 3$

c) $3^x = z;\ z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{728}{27} \rightarrow z^2 - 1 = \dfrac{728}{27}z \rightarrow 27z^2 - 728z - 27 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z_1 = 27,\ z_2 = -\dfrac{2}{54}$ (no val) $\rightarrow x = 3$

34 **Resol aplicant la definició de logaritme:**

a) $\log_x 25 = 2$ **b)** $\log x = -1$ **c)** $\log_x 27 = 3$ **d)** $\log_2 x = 3$

a) Com que la base ha de ser positiva, $x = 5$.

b) $\log x = -1 \rightarrow 10^{-1} = x \rightarrow x = \dfrac{1}{10}$

c) $\log_x 27 = 3 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x = 3$

d) $\log_2 x = -3 \rightarrow 2^{-3} = x \rightarrow x = \dfrac{1}{8}$

35 **Troba la solució de les equacions següents:**

a) $\log x = \log 9 + \log 2$

b) $\ln x = 2 \ln 10$

c) $\dfrac{1}{2}\log (x + 1) = \log 3$

d) $\dfrac{1}{3}\log_2 x = -3$

a) $\log x = \log 9 + \log 2 \rightarrow \log x = \log (9 \cdot 2) \rightarrow x = 18$

b) $\ln x = 2\ln 10 \rightarrow \ln x = \ln 10^2 \rightarrow x = 100$

c) $\dfrac{1}{2}\log (x+1) = \log 3 \rightarrow \log \sqrt{(x+1)} = \log 3 \rightarrow \sqrt{(x+1)} = 3 \rightarrow x + 1 = 9 \rightarrow x = 8$

d) $\dfrac{1}{3}\log_2 x = -3 \rightarrow \log_2 \sqrt[3]{x} = \log_2 2^{-3} \rightarrow \sqrt[3]{x} = 2^{-3} \rightarrow x = 2^{-9} \rightarrow x = \dfrac{1}{512}$

Sistemes d'equacions

36 **Resol els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $y = 1 - 23x$

$2x - 11 + 253x = -11$

$0 = 255x$

$x = 0,\ y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y \rightarrow y = 2$

$x = 0,\ y = 2$

c) $\left.\begin{aligned} x + 1 + 3y &= 3 \\ x - 3 + 8y &= 4 \end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ x + 8y &= 7 \end{aligned}\right\}$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7 \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1$

$x = -1,\ y = 1$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 24 \\ 2x - \ \ y &= 8 \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} -2x + 3y &= -24 \\ 2x - \ \ y &= 8 \end{aligned}$

$2y = -16 \rightarrow y = -8$

$x = 0,\ y = -8$

37 **Resol.**

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{2} = 15 \rightarrow y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = 5 \\ y = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$

$x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{aligned} 6y + 6x &= 5xy \\ y &= \dfrac{2 - 2x}{3} \end{aligned}\right\}$

$4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2 - 2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0 \rightarrow 5x^2 - 2x + 6 = 0 \rightarrow$ No té solució.

38 **Resol per substitució:**

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (x^2+1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 + y \\ (6+y)^2 + y^2 = 20 \to 2y^2 + 12y + 36 = 20 \to y_1 = -2,\ y_2 = -4 \end{array}$

$\begin{cases} y_1 = -2 \to x_1 = 4 \\ y_2 = -4 \to x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 4,\ y_1 = -2;\ x_2 = 2,\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - y \\ (2-y)y = 1 \to 2y - y^2 - 1 = 0 \to y = 1 \to x = 1 \end{array}$

$x = 1,\ y = 1$

c) $\left.\begin{array}{l} (x^2+1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 4x \\ (x^2+1)(4x)^2 = 5 \to 16x^4 + 16x^2 - 5 = 0 \to x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \to y_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \to y_2 = -2 \end{cases}$

$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -2$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \to \left(\frac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \to -\frac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \to -\frac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \to \\ xy = 6 \to x = \frac{6}{y} \end{cases}$

$\to y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \to y_1 = 2,\ y_2 = -2$

$y_1 = 2,\ x_1 = 3;\ y_2 = -2,\ x_2 = -3$

39 **Resol per reducció:**

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$

a) $\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ -3x^2 + 6y^2 = -21 \\ \hline y^2 = 9 \end{array} \to y = \pm 3$

$x^2 = 25 \to x = \pm 5$

$x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = 3;\ x_3 = 5,\ y_3 = -3;\ x_4 = -5,\ y_4 = -3$

b) $$\begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4} \\ \hline 2x^2 \qquad\qquad = \dfrac{2}{4} \end{array} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$$

- Si $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 + 2y = 3$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $x = -\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 - 2y = 3$$

$$4y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{2},\ y_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ y_2 = \dfrac{1}{2};\ x_3 = -\dfrac{1}{2},\ y_3 = 1;\ x_4 = -\dfrac{1}{2},\ y_4 = -\dfrac{1}{2}$

40 **Resol els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 = 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x = y - y^2 \end{array}\right\}$

$$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3 \rightarrow 2x - 3y = 1 \rightarrow x = \frac{1+3y}{2}$$

$$\frac{1 + 9y^2 + 6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2 \rightarrow 1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 13y^2 - 10y - 3 = 0 \rightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100+156}}{26} = \frac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$$

$x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{2}{13},\ y_2 = -\dfrac{3}{13}$

b) $x = \dfrac{28}{y}$

$$\left(\frac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65 \rightarrow 784 + y^4 = 65y^2 \rightarrow y^4 - 65y^2 + 784 = 0$$

$$y^2 = z \rightarrow z = \frac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \rightarrow y = \pm 7 \\ 16 \rightarrow y = \pm 4 \end{cases}$$

$x_1 = 7,\ y_1 = 4;\ x_2 = -7,\ y_2 = -4;\ x_3 = 4,\ y_3 = 7;\ x_4 = -4,\ y_4 = -7$

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrrrrl} x^2 + & y^2 - & 5x - & 5y + & 10 & = 0 \\ -x^2 + & y^2 + & 5x - & 5y - & 2 & = 0 \\ \hline & 2y^2 - & & 10y + & 8 & = 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 3,\ y_1 = 4;\ x_2 = 3,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = 4;\ x_4 = 2,\ y_4 = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\}$

$\dfrac{16y^2}{9} - y^2 = 7 \rightarrow 16y^2 - 9y^2 = 63 \rightarrow y^2 = 9$

$x_1 = 4,\ y_1 = 3;\ x_2 = -4,\ y_2 = -3$

41 Resol:

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y \rightarrow 8y = 24 \rightarrow y = 3$

$x = 4,\ y = 3$

b) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x-6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \text{ (no val)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$

$x = 6,\ y = 6$

42 Resol per substitució:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \log x + \log y = \log 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 + y \\ 2^{1+y} + 2^y = 6 \rightarrow 2 \cdot 2^y + 2^y = 6 \rightarrow 2^y \cdot 3 = 6 \rightarrow 2^y = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2 \end{array}$

$x = 2,\ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 5 - y \\ (5 - y)y = 6 \rightarrow 5y - y^2 = 6 \rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \end{array}$

$y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 2$

Mètode de Gauss

43 **Resol pel mètode de Gauss:**

a) $\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

a)
$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + 2 \cdot (2a) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 7x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

c)
$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + 2 \cdot (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 36 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) : 3 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x + z = 12 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ z = x - 6 = 3 \\ y = 18 - x - z = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array}$$

d)
$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + 6 \cdot (2a) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = \dfrac{69}{23} = 3 \\ y = 7 - 3z = 7 - 9 = -2 \\ x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

e)
$$\left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = \dfrac{-5}{2} \\ x = \dfrac{13 - 2z}{3} = 6 \\ y = 9 - x + 2z = 9 - 6 - 5 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{-5}{2} \end{array}$$

f) $$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 3x+6y-2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+2\cdot(1a) \\ (3a)+(1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 7x=0 \\ 6x-2y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

44 **Resol aplicant el mètode de Gauss:**

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+6y-5z=-4 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+5z=5 \\ 5x-2y+17z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=1 \\ -2x-y-8z=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ 3x-2y-2z=2 \\ -5x+3y+5z=-1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+2y+z=5 \\ x+4y+3z=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ 3x+2y-z=0 \\ -x+4y+z=2 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ 2x+6y-5z=-4 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-5\cdot(3a) \\ (3a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ -3x+y=-4 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+3\cdot(1a) \\ (3a) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ -2y=-1 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\ x=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \\ z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=2 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ x-2y+5z=5 \\ 5x-2y+17z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+(1a) \\ (3a)+(1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ 2x+6z=8 \\ 6x+18z=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a):2 \\ (3a):6 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ x+3z=4 \\ x+3z=4/6 \end{array}\right\}$$ Les equacions 2a i 3a diuen coses contradictòries.

El sistema és incompatible, no té solució.

c) $$\left.\begin{array}{l} x+y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=1 \\ -2x-y-8z=-7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-3\cdot(1a) \\ (3a)+(1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+3z=2 \\ -x-5z=-5 \\ -x-5z=-5 \end{array}\right\}$$

Hi ha dues equacions iguals. El sistema és compatible indeterminat. Busquem les solucions en funció de z:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2-3z \\ -x=-5+5z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to (5-5z)+y=2-3z \to y=2z-3 \\ \to x=5-5z \end{array}$$

$x=5-5z,\ y=2z-3,\ z=z$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x-y-z=2 \\ 3x-2y-2z=2 \\ -5x+3y+5z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-2\cdot(1a) \\ (3a)+5\ (1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y-z=2 \\ -x=-2 \\ 5x-2y=9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=\dfrac{5x-9}{2}=\dfrac{1}{2} \\ z=2x-y-2=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$x=2,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{3}{2}$

e) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ -x+2y+z=5 \\ x+4y+3z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+(1a) \\ (3a)-(1a) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 3y+2z=8 \\ 3y+2z=-2 \end{array}\right\}$$

Les equacions 2a i 3a obtingudes diuen coses contradictòries. Per tant, el sistema és incompatible.

f) $\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ x + 3y \quad = 1 \\ x + 3y \quad = 1 \end{array}\right\}$

Hi ha dues equacions iguals. El sistema és compatible indeterminat. Busquem les solucions en funció del paràmetre y:

$\left.\begin{array}{l} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{array}\right\} \to -2(1-3y) + z = 1 - y \to z = 3 - 7y$

$x = 1 - 3y, \; z = 3 - 7y$

Pàgina 102

Inequacions

45 **Resol les inequacions següents:**

a) $2x - 3 < x - 1$

b) $\dfrac{3x-2}{2} \le \dfrac{2x+7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2$; $(-\infty, 2)$

b) $9x - 6 \le 4x + 14 \to 5x \le 20 \to x \le 4$; $(-\infty, 4]$

c) $-6x - 4 < 10 - x \to -14 < 5x \to x > -\dfrac{14}{5}$; $\left(-\dfrac{14}{5}, +\infty\right)$

d) $3x - 5x > -10 \to -2x > -10 \to 2x < 10 \to x < 5$; $(-\infty, 5)$

46 **Resol els sistemes d'inequacions següents:**

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x < 4 \to x < 1 \\ x > -4 \end{array}\right\} (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x > -5 \to x > -5/3 \\ x > 4 \end{array}\right\} (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} x > 17 \\ 5x > 19 \to x > 19/5 \end{array}\right\} (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l} x > 3/2 \\ x < -1/5 \end{array}\right\}$ No té solució

47 **Resol.**

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$

b) $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$

d) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

f) $x^2 - 7x + 6 > 0$

a) $-(x + 3)(x + 1) \geq 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $\left(\sqrt{5} - x\right)\left(\sqrt{5} + x\right) < 0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

c) $x(x + 3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

d) $-(x - 1)(x - 5) \leq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0 \rightarrow [1, 6]$

f) $x^2 - 7x + 6 > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

48 **Resol aquests sistemes:**

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 & \rightarrow \text{ Solucions: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 & \rightarrow \text{ Solucions: } (-2, \infty) \end{cases}$

Les solucions comunes són: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 & \rightarrow \text{ Solucions: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 & \rightarrow \text{ Solucions: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Les solucions comunes són: $[1, 4] \cap (-\infty, 3) = [1, 3)$

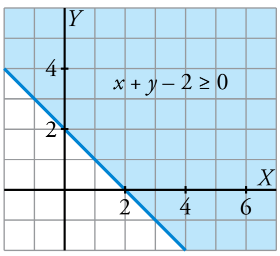
49 **Resol gràficament:**

a) $x + y - 2 \geq 0$ **b)** $2x - 3y \leq 6$ **c)** $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3$ **d)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1$

a) Dibuixem la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que no es verifica la desigualtat $0 + 0 - 2 \geq 0$.

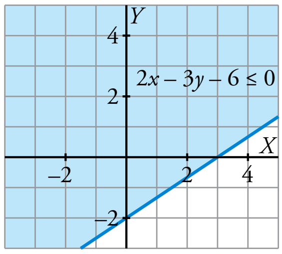
La solució es el semiplà que no conté O.



b) Dibuixem la recta r: $2x - 3y - 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat $0 - 0 - 6 \leq 0$.

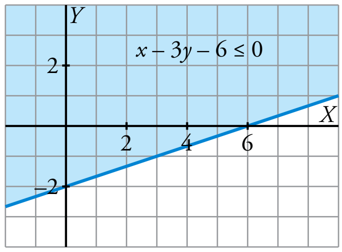
La solució és el semiplà que conté O.



c) $\dfrac{x-3y}{2} \leq 3 \rightarrow x - 3y - 6 \leq 0$. Dibuixem la recta r: $x - 3y - 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat $0 - 0 - 6 \leq 0$.

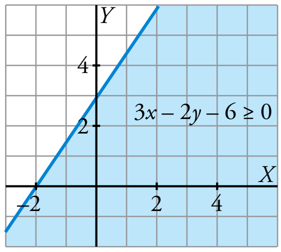
La solució és el semiplà que conté O.



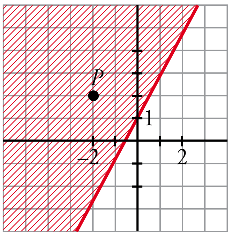
d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1 \rightarrow 3x - 2y + 6 \geq 0$. Dibuixem la recta r: $3x - 2y + 6 = 0$.

Prenem el punt $O = (0, 0) \notin r$, substituïm en la inequació i comprovem que es verifica la desigualtat $0 - 0 + 6 \geq 0$.

La solució és el semiplà que conté O.



50



a) Comprova que el punt P verifica la inequació $2x - y \leq -1$.

b) Tria tres punts qualssevol de la zona ratllada i prova que són solucions de la inequació.

a) Les coordenades de P són (–2, 2).

Substituint en la inequació, queda: $2 \cdot (-2) - (-2) = -2 \leq -1$

b) Per exemple, (–2, 0), (0, 2), (–1, –1).

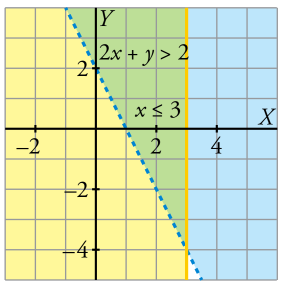
Tots els punts de la zona ratllada compleixen la inequació.

51 **Resol gràficament els sistemes següents:**

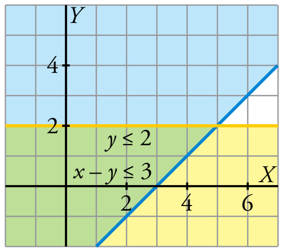
a) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ y \leq x + 1 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x \geq 2 \\ 3x + y \geq 7 \\ 2x - y \geq -7 \end{cases}$

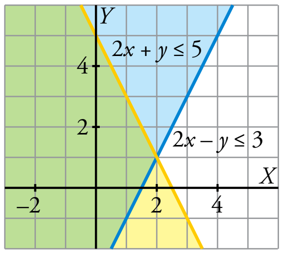
a) Resolem cada una de les inequacions. El recinte *solució* es la intersecció d'ambdós semiplans. La recta $2x + y = 2$ no pertany al recinte solució.



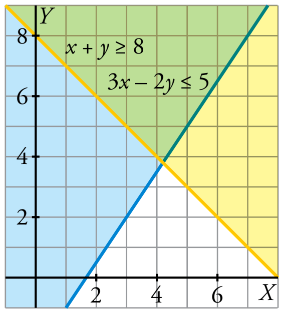
b) Resolem cada una de las inequacions. El recinte *solució* és la intersecció d'ambdós semiplans.



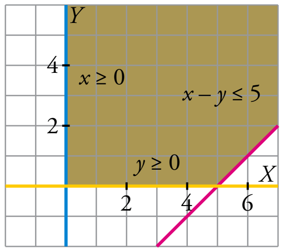
c) Resolem cada una de las inequacions. El recinte *solució* és la intersecció d'ambdós semiplans.



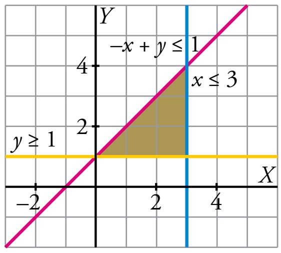
d) Resolem cada una de las inequacions. El recinte *solució* és la intersecció d'ambdós semiplans.



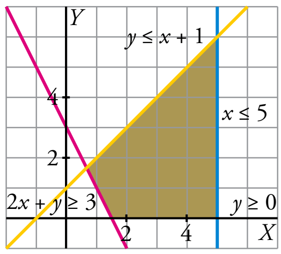
e) Resolem cada una de les inequacions. El recinte *solució* és la intersecció dels tres semiplans.



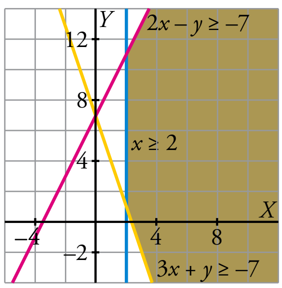
f) Resolem cada una de les inequacions. El recinte *solució* és el triangle intersecció dels tres semiplans.



g) Resolem cada una de les inequacions. El recinte *solució* es la intersecció dels quate semiplans.



h) Resolem cada una de las inequacions. El recinte *solució* és la intersecció dels tres semiplanss.



Per resoldre

52 El residu de la divisió $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$ és igual a –7. Quant val k?

El residu en dividir $P(x) = -x^3 + 3x^2 + kx + 7$ entre $x + 2$ és igual a $P(-2)$. Per tant, volem que $P(-2) = -7$:

$P(-2) = -(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + k(-2) + 7 = 27 - 2k$

$27 - 2k = -7 \rightarrow k = 17$

53 Resol les equacions següents:

a) $\frac{x+3}{2} - \frac{(x+1)^2}{6} = \frac{(x-1)(x+1)}{3} - 2x$ **b)** $\sqrt{3x+3} - \sqrt{2x} = 1$

c) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ **d)** $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **e)** $\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = 1$

a) $\frac{x+3}{2} - \frac{(x+1)^2}{6} = \frac{(x-1)(x+1)}{3} - 2x$

Reduïm a comú denominador:

$3(x + 3) - (x + 1)^2 = 2(x - 1)(x + 1) - 12x \rightarrow -x^2 + x + 8 = 2x^2 - 2 - 12x \rightarrow -3x^2 + 13x + 10 = 0$

Solucions: $x_1 = 5,\ x_2 = -\frac{2}{3}$

b) $\sqrt{3x+3} - \sqrt{2x} = 1 \rightarrow \sqrt{3x+3} = 1 + \sqrt{2x} \rightarrow 3x + 3 = 2x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 1 \rightarrow x + 2 = 2\sqrt{2}\sqrt{x} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 4x + 4 = 8x \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

Solució: $x = 2$

c) $2x^4 + 3x^3 - x = 0 \rightarrow x(2x^3 + 3x^2 - 1) = 0 \rightarrow x(2x - 1)(x + 1)^2 = 0$

Solucions: $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -1$

d) $x^4 - x^2 - 12 = 0$. Equació biquadrada. Fem el canvi $x^2 = y$.

$y^2 - y - 12 = 0 \rightarrow y_1 = 4,\ y_2 = -3$ (no vàlida) $\rightarrow x^2 = 4$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = 1$

Reduïm a comú denominador:

$\frac{-x^2+3x+1}{x^2-1} = 1 \rightarrow -x^2 + 3x + 1 = x^2 - 1 \rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$

54 Resol aquestes equacions amb valor absolut:

a) $|x + 1| = 3$ **b)** $|x^2 - 3| = 1$ **c)** $\left|\frac{x+1}{2}\right| = 2$ **d)** $|x + 2| = |3x - 2|$

a) $|x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} x+1=3 \rightarrow x=2 \\ x+1=-3 \rightarrow x=-4 \end{cases}$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -4$

b) $|x^2 - 3| = 1 \rightarrow \begin{cases} x^2-3=1 \rightarrow x_1=2,\ x_2=-2 \\ x^2-3=-1 \rightarrow x_3=\sqrt{2},\ x_4=-\sqrt{2} \end{cases}$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

c) $\left|\frac{x+1}{2}\right| = 2 \rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 2 \rightarrow x = 3 \\ \frac{x+1}{2} = -2 \rightarrow x = -5 \end{cases}$

Solucions: $x_1 = 3,\ x_2 = -5$

d) $|x+2| = |3x-2| \rightarrow \begin{cases} x+2 = 3x-2 \rightarrow x = 2 \\ x+2 = -(3x-2) \rightarrow x = 0 \end{cases}$

Solucions: $x_1 = 2,\ x_2 = 0$

55 Resol pel mètode més adequat:

a) $5^{2x-4} = 1$

b) $3^x = 30$

c) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2^2 = 0$

d) $(0{,}25)^{x+1} = 1\,024$

a) $5^{2x-4} = 1 \rightarrow 5^{2x-4} = 5^0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

b) $3^x = 30 \rightarrow x = log_3 30$

c) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2^2 = 0$

Fem el canvi $2^x = y$.

$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y_1 = 4,\ y_2 = 1$

$\begin{cases} y_1 = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

d) $(0{,}25)^{x+1} = 1\,024 \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 2^{10} \rightarrow 2^{-2(x+1)} = 2^{10} \rightarrow -2x - 2 = 10 \rightarrow x = -6$

56 Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} log\ x + log\ y = 3 \\ log\ x - log\ y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \sqrt{x+y+2} = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} log\ x + log\ y = 3 \\ log\ x - log\ y = -1 \end{array}\right\}$

Sumem ambdues equacions: $2log\,x = 2 \rightarrow log\,x = 1 \rightarrow x = 10$

Restem les equacions: $2log\,y = 4 \rightarrow log\,y = 2 \rightarrow y = 100$

Solució: $x = 10,\ y = 100$

b) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5^{x+y} = 5^0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow x = 1,\ y = -1$

Solució: $x = 1,\ y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y = 2\sqrt{x+1} - 1 \\ 2x - 3\left(2\sqrt{x+1} - 1\right) = 1 \rightarrow 2x - 6\sqrt{x+1} + 3 = 1 \rightarrow \end{array}$

$\rightarrow 2x + 2 = 6\sqrt{x+1} \rightarrow x + 1 = 3\sqrt{x+1} \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 9x + 9 \rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = -1$

$\begin{cases} x_1 = 8 \rightarrow y_1 = 5 \\ x_2 = -1 \rightarrow y_2 = -1 \end{cases}$

Solucions: $x_1 = 8,\ y_1 = 5;\ x_2 = -1,\ y_2 = -1$

d) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}+2=x+1\\ 2x-y=5\end{array}\right\}\begin{array}{l}y=2x-5\\ \sqrt{x+2x-5}+2=x+1 \rightarrow \sqrt{3x-5}=x-1 \rightarrow 3x-5=x^2-2x+1 \rightarrow x_1=3,\ x_2=2\end{array}$

$\begin{cases}x_1=3 \rightarrow y_1=1\\ x_2=2 \rightarrow y_2=-1\end{cases}$

Solucions: $x_1=3,\ y_1=1;\ x_2=2,\ y_2=-1$

57 Resol.

a) $\begin{cases}2(x-y)=3z+14\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{6}=5+y\\ 2(x+y)-3(y+z)=10\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2y-z}{2}=y+1\\ x+y+z-6=0\\ 3(x+z)=y-2\end{cases}$

a) $\begin{cases}2(x-y)=3z+14\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{6}=5+y\\ 2(x+y)-3(y+z)=10\end{cases}$ $\begin{cases}2x-2y-3z=14\\ 2x-6y+z=30\\ 2x-y-3z=10\end{cases}$ $\begin{array}{l}(1a)\\ (2a)-(1a)\\ (3a)-(1a)\end{array}$ $\begin{cases}2x-2y-3z=14\\ -4y+4z=16\\ y=-4\end{cases}$ $\begin{cases}y=-4\\ z=0\\ x=3\end{cases}$

Solució: $x=3,\ y=-4,\ z=0$

b) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2y-z}{2}=y+1\\ x+y+z-6=0\\ 3(x+z)=y-2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-z=2\\ x+y+z=6\\ 3x-y+3z=-2\end{cases}$ $\begin{array}{l}(1a)\\ (2a)-(1a)\\ (3a)-3\cdot(1a)\end{array}$ $\begin{cases}x+y-z=2\\ 2z=4\\ -4y+6z=-8\end{cases}$ $\begin{cases}z=2\\ y=5\\ x=-1\end{cases}$

Solució: $x=-1,\ y=5,\ z=2$

58 Comprova que una d'aquestes inequacions té per solució el conjunt $\mathbb{R}$ i l'altra és incompatible:

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1$

b) $3(x-2)+7<x+2(x-5)$

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1 \rightarrow -3x-14<-3x+1 \rightarrow -14<1$ que és cert per a qualsevol valor de $x \in \mathbb{R}$.

b) $3(x-2)+7<x+2(x-5) \rightarrow 3x+1<3x-10 \rightarrow 1<-10$ que és fals; aleshores no es verifica mai la desigualtat.

59 Resol.

a) $\dfrac{1}{x+3}<0$

b) $\dfrac{x^2+1}{x+5}>0$

c) $\dfrac{x+3}{x-3}\leq 0$

d) $\dfrac{x^2-4}{x}\geq 0$

a) Perquè la fracció sigui negativa, el numerador i el denominador han de tenir diferent signe. Calculem les arrels d'ambdós polinomis. Aquestes determinen els intervals en els quals cal estudiar el signe de la fracció:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, +\infty)$
1	+	+
$x+3$	–	+
$\dfrac{1}{x+3}$	–	+

Solució: $(-\infty, -3)$

b) Perquè la fracció sigui positiva, el numerador i el denominador han de tenir el mateix signe. Calculem les arrels d'ambdós polinomis. Aquestes determinen els intervals en els quals cal estudiar el signe de la fracció:

$x^2 + 1 = 0$ no té solució.

Solució: $(-5, +\infty)$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
$x^2 + 1$	+	+
$x + 5$	–	+
$\frac{x^2+1}{x+5}$	–	+

c) Perquè la fracció sigui negativa, el numerador i el denominador han de tenir diferent signe. Calculem les arrels d'ambdós polinomis. Aquestes determinen els intervals en els quals cal estudiar el signe de la fracció:

	$(-\infty, -3]$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 3$	–	–	+
$\frac{x+3}{x-3}$	+	–	+

Solució: $[-3, 3)$; $x = 3$ no és solució perquè fa zero el denominador.

d) Perquè la fracció sigui positiva, el numerador i el denominador han de tenir el mateix signe. Calculem les arrels d'ambdós polinomis. Aquestes determinen els intervals en els quals cal estudiar el signe de la fracció:

	$(-\infty, -2]$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$[2, +\infty)$
$x^2 - 4$	+	–	–	+
x	–	–	+	+
$\frac{x^2-4}{x}$	–	+	–	+

Solució: $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$; $x = 0$ no és solució perquè fa zero el denominador.

60 **Contractem una hipoteca pel gener del 2014 amb revisió semestral del tipus d'interès. Pel juliol ens apugen la quota un 4 % i en la revisió següent ens l'abaixen un 1% respecte al juliol. Si el mes de gener del 2015 paguem 19,24 € mensuals més que en el mateix mes de l'any anterior, quina era la quota inicial?**

x = Quota inicial

Utilitzant els índexs de variació, tenim:

$x \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}99 = x + 19{,}24 \rightarrow x = 650$

La quota inicial era de 650 €.

Pàgina 103

61 **En la primera prova d'una oposició queden eliminats el 52 % dels participants. En la segona prova s'elimina el 25 % dels restants. Si el nombre total de persones suspeses és 512, quantes persones es van presentar a l'oposició?**

x = nre. de participants

En la primera prova s'eliminen $0{,}52x$.

Després de la primera prova queden $x - 0{,}52x$.

Després de la segona prova s'eliminen $0{,}25(x - 0{,}52x)$.

Han suspès: $0{,}52x + 0{,}25(x - 0{,}52x) = 0{,}64x = 512$

$0{,}64x = 512 \rightarrow x = 800$

Es van presentar 800 persones.

62 **Una piscina tarda a omplir-se 5 hores usant la presa d'aigua habitual, i 20 hores si emprem una mànega. Quin temps necessitarem per omplir-la si emprem ambdós mètodes de manera simultània?**

En una hora, la presa d'aigua habitual ompliria $\frac{1}{5}$ de la piscina. En una hora la mànega ompliria $\frac{1}{20}$ de la piscina.

Entre tots dos, en una hora omplirien $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$ de la pisicina.

Aleshores necessiten 4 hores per omplir la piscina.

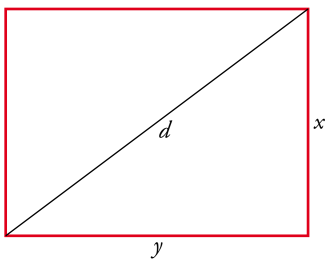
63 **En una botiga es ven te blanc a 18 €/kg i te verd a 14 €/kg. També s'hi ven una mescla d'ambdós productes a 16,4 €/kg. Quina és la composició de la mescla?**

	PREU	QUANTITAT DE TE PUR EN 1 KG DE BARREJA	TOTAL
TE BLANC	18 €/kg	x	$18x$
TE VERD	14 €/kg	y	$14y$
BARREJA	16,40 €/kg	$1 = x + y$	$18x + 14y = 16{,}40$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 18x+14y=16{,}40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0{,}6 \\ y=0{,}4 \end{array}$$

La barreja té 60 % de te blanc i 40 % de te verd.

64 **Calcula les dimensions d'una finca rectangular sabent que el perímetre fa 140 m i la diagonal és de 50 m.**



$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 140 = 2x + 2y \\ 50 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 70 = x + y \\ 2\,500 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Solucions: $x_1 = 30,\ y_1 = 40;\ x_2 = 40,\ y_2 = 30$

Un costat mesura 30 m i l'altre 40 m.

65 **Una botiga ha venut 60 ordinadors, a un preu original de 1 200 €, amb un descompte del 20 % en uns i del 25 % en uns altres. Si s'han recaptat 56 400 €, calcula quants ordinadors es van rebaixar un 25 %.**

x = nre. d'ordinadors venuts amb un 20 % de descompte

y = nre. d'ordinadors venuts amb un 25 % de descompte

Expressem les condicions mitjançant un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 0{,}8 \cdot 1\,200x + 0{,}75 \cdot 1\,200y = 56\,400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 60 \\ 960x + 900y = 56\,400 \end{cases} \rightarrow x = 40,\ y = 20$$

S'han venut 20 ordinadors amb un 25 % de descompte.

66 **Hem necessitat 10 dm^2 de cartó per construir una capsa de base quadrada de 2 dm^3 de volum. Quines són les dimensions de la capsa?**

l = costat de la base; h = altura

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{h}$

$A_{\text{TOTAL}} = 2l^2 + 4 \cdot l \cdot \text{h}$

Tenim aleshores el següent sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} l^2 \cdot \text{h} = 2 \\ 2l^2 + 4 \cdot l \cdot \text{h} = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{h} = \dfrac{2}{l^2} \\ 2l^2 + 4 \cdot l \cdot \dfrac{2}{l^2} = 10 \rightarrow 2l^2 + \dfrac{8}{l} = 10 \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow 2l^3 + 8 = 10l \rightarrow 2l^3 - 10l + 8 = 0 \rightarrow 2(l-1)(l^2 + l - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{17} - \dfrac{1}{2} \\ l_3 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{17} - \dfrac{1}{2} \quad \text{no es válida porque es negativa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_1 = 1 \rightarrow \text{h}_1 = 2 \\ l_2 = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2} \rightarrow \text{h}_2 = \dfrac{\sqrt{17} + 9}{16} \end{cases}$$

Solucions: $l_1 = 1$ dm, $\text{h}_1 = 2$ dm; $l_2 = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$ dm, $\text{h}_2 = \dfrac{\sqrt{17} + 9}{16}$ dm

67 **La suma de les edats, en el moment actual, de tres germans és de 15 anys. D'aquí a un any, l'edat del menor serà la meitat que l'edat del mitjà. Fa 2 anys, l'edat del gran era el doble que la del mitjà. Troba les edats dels tres germans.**

	EDAT ACTUAL	EDAT D'AQUÍ A 1 ANY	EDAT FA 2 ANYS
GERMÀ 1	x	$x + 1$	$x - 2$
GERMÀ 2	y	$y + 1$	$y - 2$
GERMÀ 3	z	$z + 1$	$z - 2$
TOTAL	$x + y + z = 15$	$2(z + 1) = y + 1$	$x - 2 = 2(y - 2)$

Tenim el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ 2(z+1) = y + 1 \\ x - 2 = 2(y - 2) \end{array}\right\} \rightarrow x = 8,\ y = 5,\ z = 2$$

El gran té 8 anys, el segon té 5 anys i el menor té 2 anys.

68 **En una caixa registradora trobem bitllets de 50 €, 100 € i 200 €. El nombre total de bitllets és igual a 21 i la quantitat total de diners és de 1 800 €. Sabent que el nombre de bitllets de 50 € és el quíntuple dels de 200 €, calcula el nombre de bitllets de cada classe.**

x = nre. de bitllets de 50 €

y = nre. de billets de 100 €

z = nre. de bitllets de 200 €

Expressem les condicions en funció de les incògnites i obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=21 \\ 50\,x+100y+200\,z=1\,800 \\ x=5z \end{array}\right\} \textit{Solució: } x=10,\ y=9,\ z=2$$

Hi ha 10 bitllets de 50 €, 9 bitllets de 100 € i 2 bitllets de 200 €.

69 **En una funció de teatre es recapten 5 200 €, venent 200 entrades de tres preus diferents: 30 €, 25 € i 10 €. Si sabem que el nombre de localitats més econòmiques suposa un 25 % del nombre de localitats de 25 €, calcula el nombre de localitats de cada tipus.**

x = nre. de localitats a 10 €

y = nre. de localitats a 25 €

z = nre. de localitats a 30 €

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=200 \\ 10x+25y+30z=5\,200 \\ 4x=y \end{array}\right\} \textit{Solució}:\ x=20,\ y=80,\ z=100$$

S'han venut 20 localitats de 10 €, 80 de 25 € i 100 de 30 €.

70 **Preparem un assortiment amb dos tipus de bombons de 10 €/kg i 15 €/kg. El nostre pressupost és de 600 € i volem preparar-ne, almenys, 40 kg. Quines restriccions té la composició de l'assortiment?**

x = quilos de bombons de 10 €/kg

y = quilos de bombons de 15 €/kg

Restriccions:

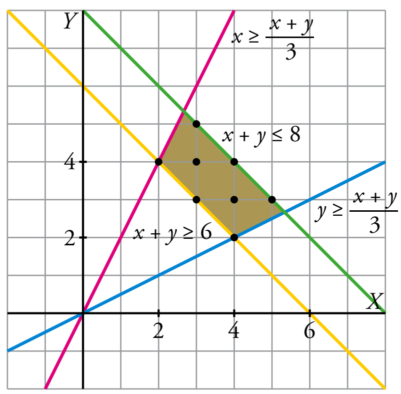
$$\begin{cases} x+y\geq 40 \\ 10x+15y\leq 600 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

71 **En un comitè d'una comunitat de veïns, que ha d'estar format per un grup d'entre 6 i 8 persones, ni el nombre d'homes ni el de dones no pot ser inferior a un terç del grup. Quantes combinacions possibles hi ha?**

Anomenem x el nre. de dones i y el nre. d'homes. Les condicions són aquestes:

$$\begin{cases} 6\leq x+y\leq 8 \\ x\geq \dfrac{x+y}{3} \\ y\geq \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representem la regió solució:



Les diferents possibilitats són $(x=4,\ y=2)$, $(x=3,\ y=3)$, $(x=2,\ y=4)$, $(x=4,\ y=3)$, $(x=3,\ y=4)$, $(x=5,\ y=3)$, $(x=4,\ y=4)$, $(x=3,\ y=5)$, les quals corresponen als punts de la regió comuna les coordenades de la qual són enteres.

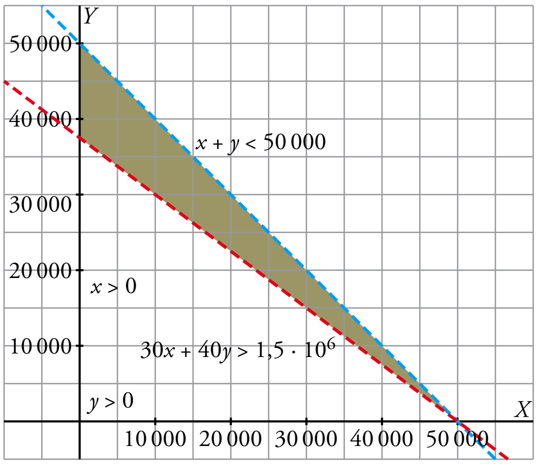
72 **La recaptació d'un partit de futbol en què es van vendre menys de 50 000 entrades va ser superior a 1,5 milions d'euros. Si es van vendre entrades de 30 € i de 40 €, quantes localitats de cada tipus van ser venudes?**

x = nre. d'entrades de 30 €

y = nre. d'entrades de 40 €

Restriccions:

$$\begin{cases} x + y < 50\,000 \\ 30x + 40y > 1{,}5 \cdot 10^6 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Les possibles solucions són els punts de coordenades enteres que hi ha en la regió intersecció dels quatre semiplans.

Autoavaluació

1 **Factoritza els polinomis següents i assenyala'n les arrels:**

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ **b)** $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Apliquem Ruffini:

	1	1	−4	−4
−1		−1	0	4
	1	0	−4	0
2		2	4	
	1	2	0	
−2		−2		
	1	0		

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Les arrels de $P(x)$ són −2, −1 i 2.

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Traient factor comú: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicant la fórmula per resoldre equacions de 2n grau a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 1 \end{array} \right. \qquad Q(x) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Les arrels de $Q(x)$ són $-\frac{1}{2}$, 0 i 1.

2 Opera i simplifica el resultat:

a) $\dfrac{(x+5)^2-2x(x+5)}{(x+5)^4}$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+2}\right):\left(1+\dfrac{x}{x+2}\right)$

a) $\dfrac{(x+5)^2-2x(x+5)}{(x+5)^4}=\dfrac{(x+5)-2x}{(x+5)^3}=\dfrac{5-x}{(x+5)^3}$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+2}\right):\left(1+\dfrac{x}{x+2}\right)=\left(\dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)}\right):\left(\dfrac{x+2+x}{x+2}\right)=$

$=\left(\dfrac{x^2+3x+2-x^2}{x(x+2)}\right):\left(\dfrac{2x+2}{x+2}\right)=$

$=\left(\dfrac{3x+2}{x(x+2)}\right)\cdot\left(\dfrac{x+2}{2x+2}\right)=\dfrac{3x+2}{x(2x+2)}=\dfrac{3x+2}{2x^2+2x}$

3 Resol les equacions següents:

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

b) $x^4-8x^2-9=0$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

Multiplicant pel MCM(2, 3) = 6 $\rightarrow$

$\rightarrow 2(3x+1)-3(5x^2+3)=3(x^2-1)-2(x+2)\rightarrow$

$\rightarrow 6x+2-15x^2-9=3x^2-3-2x-4\rightarrow -15x^2+6x-7=3x^2-2x-7\rightarrow$

$\rightarrow 18x^2-8x=0\rightarrow 2x(9x-4)=0 \begin{cases} 2x=0\rightarrow x_1=0\\ 9x-4=0\rightarrow x_2=4/9\end{cases}$

b) $x^4-8x^2-9=0 \xrightarrow{x^2=y} y^2-8y-9=0$

$y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-9)\cdot(1)}}{2}=\dfrac{8\pm10}{2} \begin{cases} y=9\rightarrow x^2=9\rightarrow x=\pm 3\\ y=-1 \text{ (no val)}\end{cases}$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x\rightarrow(2x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2\rightarrow 4x^2-4x+1=2x-1\rightarrow 4x^2-6x+2=0\rightarrow 2x^2-3x+1=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(2)\cdot(1)}}{4}=\dfrac{3\pm1}{4} \begin{cases} x_1=1\\ x_2=1/2\end{cases}$ (Són vàlides ambdues solucions.)

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}\rightarrow(x+1)\cdot x-(x-3)(x+3)=x^2-3\rightarrow x^2+x-(x^2-9)=x^2-3\rightarrow$

$\rightarrow x^2+x-x^2+9=x^2-3\rightarrow x+9=x^2-3\rightarrow x^2-x-12=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-12)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{1\pm7}{2} \begin{cases} x_1=4\\ x_2=-3\end{cases}$

4 **Resol les equacions següents:**

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x}$

c) $log\, x + log\, 2 = 1$

d) $log_x\, 49 = 2$

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9 \rightarrow 3^{x^2-2} = 3^2 \rightarrow x^2 - 2 = 2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x} \rightarrow 5^{x^2} \cdot (5^2)^{x-1} = 5^{3x} \rightarrow 5^{x^2} \cdot 5^{2x-2} = 5^{3x} \rightarrow 5^{x^2+2x-2} = 5^{3x} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x - 2 = 3x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (1) \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

c) $log\, x + log\, 2 = 1 \rightarrow log\, 2x = log\, 10 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$

d) $log_x\, 49 = 2 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = 7,\ x = -7$

Com que la base no pot ser negativa, $x = 7$.

5 **Resol aquests sistemes d'equacions:**

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = -2 \rightarrow x = -\dfrac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \rightarrow -\frac{6}{y} + 2y = -1 \rightarrow -6 + 2y^2 = -y \rightarrow 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} y_1 = \dfrac{3}{2} \rightarrow x_1 = -\dfrac{4}{3} \\ y_2 = -2 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

Hi ha dos parells de *solucions*:

$x_1 = -\dfrac{4}{3},\ y_1 = \dfrac{3}{2};\ x_2 = 1,\ y_2 = -2$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \rightarrow x = 4 + 2y \end{cases}$

$$\sqrt{-2(4 + 2y)} + y = 1 \rightarrow \left(\sqrt{-8 - 4y}\right)^2 = (-1 - y)^2 \rightarrow -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \rightarrow y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{-6}{2} \rightarrow y = -3$$

$x = 4 + 2(-3) \rightarrow x = -2$

Solució: $x = -2,\ y = -3$

6 **Resol pel mètode de Gauss:**

a) $\left\{\begin{aligned} 3x - 5y + \ \ z &= 11 \\ x + 2y - 3z &= -10 \\ x + \ \ y - 2z &= -6 \end{aligned}\right.$

b) $\left\{\begin{aligned} x - \ \ 5y + \ \ 9z &= 4 \\ 2x + \ \ \ \ y - \ \ 3z &= 2 \\ x + 17y - 33z &= 0 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\left\{\begin{aligned} 3x - 5y + \ \ z &= 11 \\ x + 2y - 3z &= -10 \\ x + \ \ y - 2z &= -6 \end{aligned}\right.\right\}$ $\begin{matrix} (1a) - 3 \cdot (3a) \\ (2a) - (3a) \\ (3a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} -8y + 7z &= 29 \\ y - \ \ z &= -4 \\ x + y - 2z &= -6 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1a) + 8 \cdot (2a) \\ (2a) \\ (3a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} -z &= -3 \\ y - \ \ z &= -4 \\ x + y - 2z &= -6 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} z &= 3 \\ y &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$

Solució: $x = 1, \ y = -1, \ z = 3$

b) $\left.\left\{\begin{aligned} x - \ \ 5y + \ \ 9z &= 4 \\ 2x + \ \ \ \ y - \ \ 3z &= 2 \\ x + 17y - 33z &= 0 \end{aligned}\right.\right\}$ $\begin{matrix} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) \cdot (1a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} x - 5y + \ \ 9z &= 4 \\ 11y - 21z &= -6 \\ 22y - 42z &= -4 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - 2 \cdot (2a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} x - 5y + \ \ 9z &= 4 \\ 11y - 21z &= -6 \\ 0 &= 8 \end{aligned}\right\}$

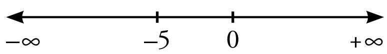
El sistema no té solució.

7 **Resol:**

a) $x^2 + 5x \geq 0$ **b)** $x^2 - 25 < 0$ **c)** $\left\{\begin{aligned} &2x + 1 \geq 7 \\ &x + 1 \leq 8 \end{aligned}\right.$ **d)** $\left\{\begin{aligned} &x + y \geq 1 \\ &y - 2x \geq 3 \\ &y \leq 3 \end{aligned}\right.$

a) $x^2 + 5x \geq 0 \ \rightarrow \ x(x + 5) \geq 0$

Les arrels de $x(x + 5) = 0$ són 0 i 5:

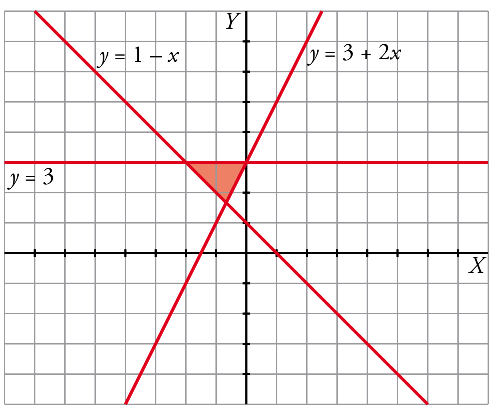


$\left.\begin{aligned} &\text{Si } x = -6 \rightarrow -6(-6 + 5) > 0 \\ &\text{Si } x = -1 \rightarrow -1(-1 + 5) < 0 \\ &\text{Si } x = 1 \rightarrow 1(1 + 5) > 0 \end{aligned}\right\}$ *Solució*: $(-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$

b) $x^2 - 25 < 0 \ \rightarrow \ x^2 < 25 \ \rightarrow \ -5 < x < 5 \ \rightarrow$ *Solució*: $(-5, 5)$

c) $\left.\left\{\begin{aligned} &2x + 1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3 \\ &x + 1 \leq 8 \rightarrow x \leq 7 \end{aligned}\right.\right\}$ *Solució*: $[3, 7]$

d) $\left\{\begin{aligned} &x + y \geq 1 \\ &y - 2x \geq 3 \\ &y \leq 3 \end{aligned}\right.$ La solució és la regió ombrejada:



8 **Un botiguer inverteix 125 € en la compra d'una partida de pomes. En rebutja 20 quilos perquè són defectuoses i ven la resta per 147 €, obtenint un guany de 0,40 € per cada quilo sobre el preu de compra. Quants quilos en va comprar?**

Anomenem x el nombre de quilos que va comprar el botiguer.

Anomenem y el preu al qual compra cada quilo de pomes.

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x-20)(y+0,4) = 147 \end{cases}$$

Resolent el sistema (ens quedem només amb la solució positiva):

$x = 125,\; y = 1$

Per tant, el botiguer va comprar 125 kg.