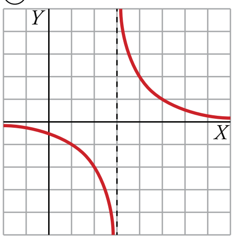
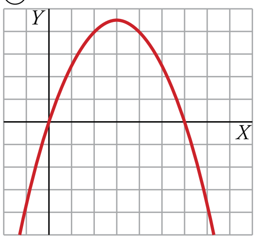
Resol

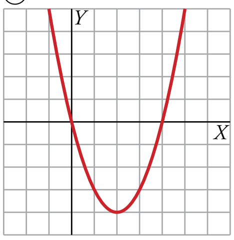
Pàgina 109

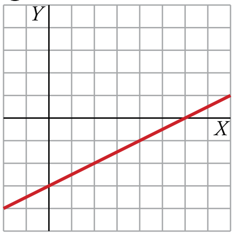
Famílies de funcions

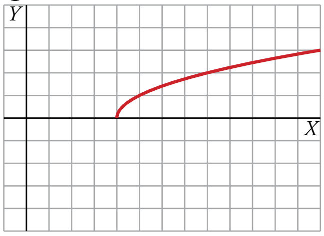
Associa a cadascun dels gràfics següents una de les expressions analítiques de sota:

A


B


C


D


E


I. $y = \dfrac{x-6}{2}$ **II.** $y = \sqrt{x-4}$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = \dfrac{2}{x-3}$ **V.** $y = 3x - \dfrac{x^2}{2}$

Assigna a cadascuna de les cinc funcions anteriors el nom de la família a la qual pertany. Totes són d'alguna d'aquestes quatre:

1. Lineal **2. Quadràtica** **3. Radical** **4. De proporcionalitat inversa**

A) $\to$ IV $\to$ De proporcionalitad inversa.

B) $\to$ V $\to$ Quadràtica.

C) $\to$ III $\to$ Quadràtica.

D) $\to$ I $\to$ Lineal.

E) $\to$ II $\to$ Radical.

1 Les funcions i el seu estudi

Pàgina 111

1 Cert o fals?

a) El domini de definició d'una funció no pot ser mai $\mathbb{R}$.

b) El domini de definició de $y = -\sqrt{x}$ és $[0, +\infty)$.

c) El domini de definició de $y = \sqrt{-x}$ és $(-\infty, 0]$.

a) Fals. Per exemple, el domini de la funció quadràtica $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ és $\mathbb{R}$.

b) Cert. Sempre que $x \geq 0$, la funció està definida.

c) Cert. Quan $x \leq 0$, tenim que $-x \geq 0$ i la funció està definida correctament.

2 Troba el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$ **d)** $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ **g)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ **h)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

i) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$ **j)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ **k)** $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **o)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ **p)** $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

q) L'àrea d'un cercle de radi variable, r, és $A = \pi r^2$.

a) Perquè estigui definida ha de passar que $x^2 - 1 \geq 0$. Ara resolem la inequació i tenim que $Dom = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

b) $[1, +\infty)$

c) $(-\infty, 1]$

d) $[-2, 2]$

e) L'arrel cúbica està definida independentment del signe del radicand. Com que aquest és un polinomi de 2n grau, també està sempre definit. Per tant, el domini de la funció és $\mathbb{R}$.

f) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

g) Per un costat, $x \geq 1$ perquè es pugui definir l'arrel. Però, a més, $x \neq 1$ perquè no es produeixi una divisió entre 0. Per tant, $Dom = (1, +\infty)$.

h) Raonant de manera anàloga a l'apartat anterior, $x \leq 1$ i $x \neq 1$. El domini de definició és $Dom = (-\infty, 1)$.

i) Aquest cop l'arrel cúbica sempre està definida, però, perquè ho estigui el quocient, el denominador no pot ser 0.

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$ i el domini de definició és $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

j) Per una part, $x^2 - 4 \geq 0$, que passa sempre que x estigui en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Però x no pot ser ni 2 ni –2 per no dividir entre 0. Aleshores el domini és $Dom = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

k) El seu domini és $\mathbb{R}$, ja que sempre està definida.

l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$

n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

o) Com que l'equació $x^2 + 4 = 0$ no té solució, el domini de definició és $Dom = \mathbb{R}$.

p) L'equació $x^3 + 1 = 0$ té una única solució: $x = -1$. Aleshores el domin és $Dom = \mathbb{R} - \{-1\}$.

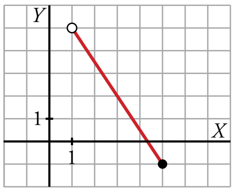
q) Pel context de la funció, estarà definida en $(0, +\infty)$, ja que el radi és sempre un número positiu.

2 Funcions lineals. Interpolació

Pàgina 113

3 **Representa la funció següent:**

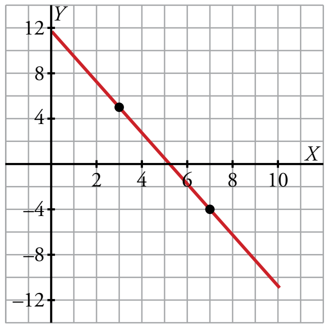
$$y = -2x + 7, \; x \in (1, 4]$$



4 **Una funció lineal f compleix: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $Dom(f) = [0, 10]$. Quina és l'expressió analítica? Representa-la.**

$$m = \frac{-4-5}{7-3} = -\frac{9}{4}$$

$$y = 5 - \frac{9}{4}(x-3) = -\frac{9}{4}x + \frac{47}{4}, \quad x \in [0, 10]$$



5 **En una universitat, l'any 2009 hi havia 10 400 alumnes matriculats, i 13 200 en el 2014. Estima quants n'hi havia:**

a) l'any 2010 **b) el 2012** **c) el 2007**

d) Quants hem d'esperar que n'hi hagi el 2017?

e) I el 2047?

$$f(x) = \frac{13\,200 - 10\,400}{2007 - 2002}(x - 2002) + 10\,400 = 560(x - 2002) + 10\,400$$

a) $f(2003) = 560 + 10\,400 = 10\,960$ alumnes.

b) $f(2005) = 1\,680 + 10\,400 = 12\,080$ alumnes.

c) $f(2000) = -1\,120 + 10\,400 = 9\,280$ alumnes.

d) $f(2010) = 4\,480 + 10\,400 = 14\,880$ alumnes.

e) $f(2040) = 21\,280 + 10\,400 = 31\,680$ alumnes, encara que l'extrapolació és massa gran.

6 **El consum de benzina d'un automòbil determinat, per cada 100 km, depèn de la velocitat que duu. A 60 km/h consumeix 5,7 *l* i a 90 km/h consumeix 7,2 *l*.**

a) Estima'n el consum si recorre 100 km a 80 km/h.

b) Quant consumirà a 100 km/h?

c) I a 200 km/h?

a) $f(x) = \frac{7{,}2 - 5{,}7}{90 - 60}(x - 60) + 5{,}7 = \frac{1{,}5}{30}(x - 60) + 5{,}7$

$f(70) = 0{,}5 + 5{,}7 = 6{,}2 \; l$

b) $f(100) = 2 + 5{,}7 = 7{,}7 \; l$

c) $f(200) = 7 + 5{,}7 = 12{,}7 \; l$, encara que l'extrapolació és massa gran.

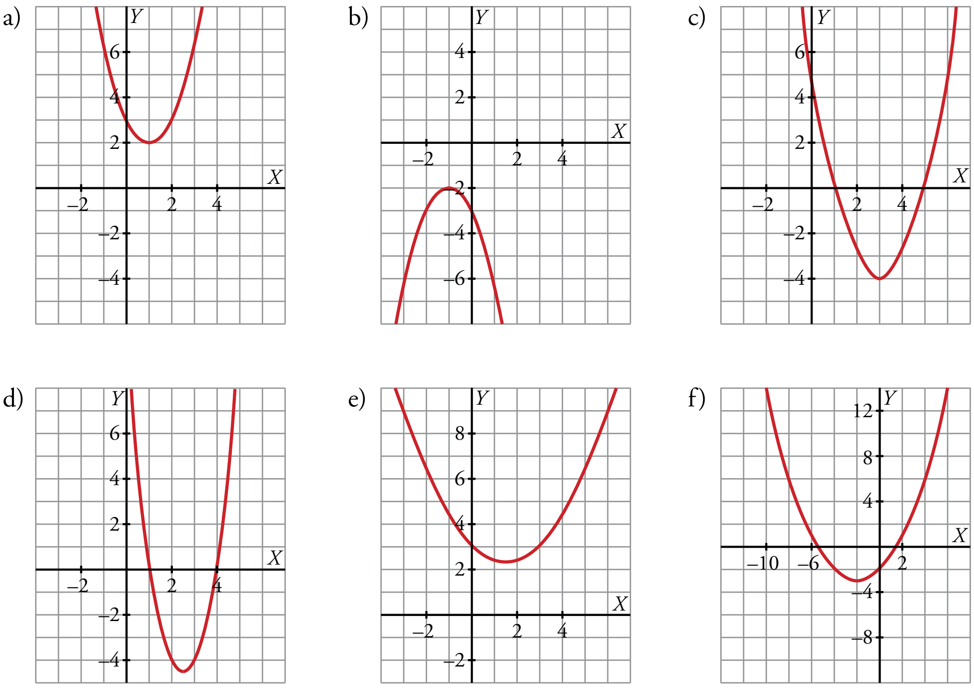
3 Funcions quadràtiques. Interpolació

Pàgina 114

7 Representa aquestes paràboles:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$ **c)** $y = x^2 - 6x + 5$

d) $y = 2x^2 - 10x + 8$ **e)** $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

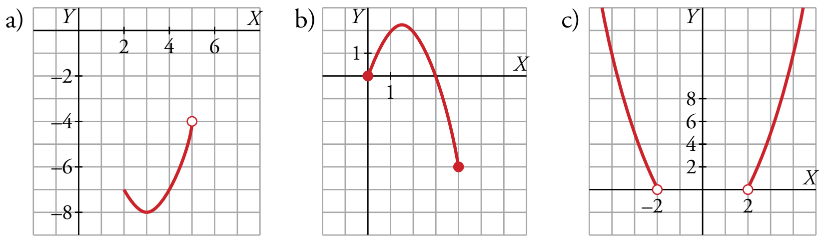


8 Representa les funcions següents:

a) $y = x^2 - 6x + 1,\ x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x,\ x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4,\ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



Pàgina 115

Fes-ho tu. Troba l'equació de la paràbola que passa per (0, 3), (2, –3) i (6, 9).

$y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l}(0,3) \to 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \to c = 3 \\ (2,-3) \to -3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 \to 4a + 2b = -6 \\ (6,9) \to 9 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 3 \to 36a + 6b = 6\end{array}\right\}$$

Resolem el sistema d'equacions: $a = 1,\ b = -5,\ c = 3$

La paràbola buscada és $y = x^2 - 5x + 3$.

Fes-ho tu. Troba, pel mètode de Newton, l'equació de la paràbola que passa per (0, 3), (2, –3) i (6, 9). Comprova que és la mateixa que s'obté en el *Fes-ho tu* anterior.

$y = p + m(x-0) + n(x-0)(x-2)$

$(0, 3) \rightarrow 3 = p + m \cdot (0-0) + n \cdot (0-0) \cdot (0-2) \rightarrow p = 3$

$(2, -3) \rightarrow -3 = 3 + m \cdot (2-0) + n \cdot (2-0) \cdot (2-2) \rightarrow 3 + 2m = -3 \rightarrow m = -3$

$(6, 9) \rightarrow 9 = 3 - 3 \cdot (6-0) + n \cdot (6-0) \cdot (6-2) \rightarrow 3 - 18 + 24n = 9 \rightarrow n = 1$

La paràbola buscada és:

$y = 3 - 3 \cdot (x-0) + 1(x-0)(x-2) = 3 - 3x + x^2 - 2x = x^2 - 5x + 3$

9 Troba l'equació de la paràbola que passa pels punts (–1, 0), (2, 12) i (8, –72) de les dues maneres següents:

a) Amb l'equació en forma general.

b) Pel mètode de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-1,0) \rightarrow 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \rightarrow a - b + c = 0 \\ (2,12) \rightarrow 12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \rightarrow 4a + 2b + c = 12 \\ (8,-72) \rightarrow -72 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c \rightarrow 64a + 8b + c = -72 \end{array}\right\}$$

Resolem el sistema: $a = -2,\ b = 6,\ c = 8$

La paràbola buscada és $y = -2x^2 + 6x + 8$.

b) $y = p + m(x+1) + n(x+1)(x-2)$

$(-1, 0) \rightarrow 0 = p + m \cdot (-1+1) + n \cdot (-1+1) \cdot (-1-2) \rightarrow p = 0$

$(2, 12) \rightarrow 12 = m \cdot (2+1) + n \cdot (2+1) \cdot (2-2) \rightarrow 3m = 12 \rightarrow m = 4$

$(8, -72) \rightarrow -72 = 4 \cdot (8+1) + n \cdot (8+1) \cdot (8-2) \rightarrow 36 + 54n = -72 \rightarrow n = -2$

La paràbola buscada és:

$y = 0 + 4(x+1) + (-2)(x+1)(x-2) = 4x + 4 + (-2)(x^2 - x - 2) = 4x + 4 - 2x^2 + 2x + 4 = -2x^2 + 6x + 8$

10 Troba els punts de la paràbola $y = x^2 + 6x + 5$ que té d'abscisses 0, 3 i 5.

Obtén, pel mètode de Newton, la paràbola que passa per aquests tres punts i comprova que és la mateixa.

El punts són (0, 5), (3, 32) i (5, 60).

$y = p + m(x-0) + n(x-0)(x-3)$

$(0, 5) \rightarrow 5 = p + m \cdot (0-0) + n \cdot (0-0) \cdot (0-3) \rightarrow p = 5$

$(3, 32) \rightarrow 32 = 5 + m \cdot (3-0) + n \cdot (3-0) \cdot (3-3) \rightarrow 5 + 3m = 32 \rightarrow m = 9$

$(5, 60) \rightarrow 60 = 5 + 9 \cdot (5-0) + n \cdot (5-0) \cdot (5-3) \rightarrow 5 + 45 + 10n = 60 \rightarrow n = 1$

La paràbola buscada és:

$y = 5 + 9(x-0) + 1(x-0)(x-3) = 5 + 9x + x^2 - 3x = x^2 + 6x + 5$

Pàgina 116

Fes-ho tu. El percentatge de desocupació a Espanya en alguns anys va ser:

ANY	1994	1997	2000
%	24,1	20,6	13,9

Estima, mitjançant una interpolació parabòlica, el percentatge de desocupació en 1998, 2001 i 2003 i compara'l amb els valors reals:

ANY	1998	2001	2003
%	18,6	10,63	11,37

Prenem com a any zero l'any 1994. Hem d'obtenir l'equació de la paràbola que passa pels punts (0; 24,1), (3; 20,6) i (6; 13,9).

$y = P(x) = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 3) \rightarrow y = P(x) = p + mx + nx(x - 3)$

$(0; 24{,}1) \rightarrow 24{,}1 = p + m \cdot 0 + n \cdot 0 \rightarrow p = 24{,}1$

$(3; 20{,}6) \rightarrow 20{,}6 = 24{,}1 + 3m + n \cdot 0 \rightarrow m = -\dfrac{3{,}5}{3} = -1{,}167$

$(6; 13{,}9) \rightarrow 13{,}9 = 24{,}1 - \dfrac{3{,}5}{3} \cdot 6 + n \cdot 6 \cdot 3 \rightarrow 18n = -3{,}2 \rightarrow n = -\dfrac{1{,}6}{9} = -0{,}178$

La paràbola buscada és:

$P(x) = y = 24{,}1 - 1{,}167x - 0{,}178x(x - 3) \rightarrow y = -0{,}178x^2 - 0{,}633x + 24{,}1$

Obtenim el valor de $P(x)$ en els punts demanats:

$1998 \rightarrow x = 4 \rightarrow P(4) = -0{,}178 \cdot 16 - 0{,}633 \cdot 4 + 24{,}1 = 18{,}72$ (és molt pròxim al valor real, 18,6).

$2001 \rightarrow x = 7 \rightarrow P(7) = -0{,}178 \cdot 49 - 0{,}633 \cdot 7 + 24{,}1 = 10{,}947$ (és molt pròxim al valor real, 10,63).

$2003 \rightarrow x = 9 \rightarrow P(9) = -0{,}178 \cdot 81 - 0{,}633 \cdot 9 + 24{,}1 = 3{,}985$ (molt allunyat del valor real, 11,37).

11 **En una universitat, l'any 2009 hi havia 10 400 estudiants, 11 300 el 2011 i 13 200 el 2014. Estima quants n'hi havia:**

a) l'any 2010. **b) el 2012.** **c) el 2007.**

d) Quants s'ha d'esperar que n'hi hagi el 2017?

Aquest enunciat és com el de l'exercici 5 de l'epígraf anterior, però enriquit amb una nova dada corresponent a l'any 2011; per això, ara, amb tres punts, es pot efectuar una interpolació parabòlica.

Tenim aquests tres punts: (0, 10 400), (2, 11 300) i (5, 13 200).

$y = c + b(x - 0) + a(x - 0)(x - 2) \rightarrow y = c + bx + ax(x - 2)$

$x = 0 \rightarrow 10\,400 = c \rightarrow c = 10\,400$

$x = 2 \rightarrow 11\,300 = c + b \cdot 2 \rightarrow b = 450$

$x = 5 \rightarrow 13\,200 = c + b \cdot 5 + a \cdot 5 \cdot 3 \rightarrow a = 36{,}67$

$y = 10\,400 + 450x + 36{,}67x(x - 2) = P(x)$

a) $2010 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1) = 10\,400 + 450 \cdot 1 + 36{,}67 \cdot 1 \cdot (-1) = 10\,813{,}33$

b) $2012 \rightarrow x = 3 \rightarrow P(3) = 10\,400 + 450 \cdot 3 + 36{,}67 \cdot 3 \cdot 1 = 11\,960$

c) $2007 \rightarrow x = -2 \rightarrow P(-2) = 10\,400 + 450 \cdot (-2) + 36{,}67 \cdot (-2) \cdot (-4) = 9\,793{,}36$

d) $2017 \rightarrow x = 8 \rightarrow P(8) = 10\,400 + 450 \cdot 8 + 36{,}67 \cdot 8 \cdot 6 = 15\,760{,}16$

12 **El consum de benzina d'un cert automòbil, per cada 100 km, depèn de la seva velocitat. A 60 km/h consumeix 5,7 *l*; a 70 km/h, 6 *l*, i a 90 km/h consumeix 7,2 *l*. Calcula quant gastarà per cada 100 km recorreguts anant a les velocitats següents:**

a) 80 km/h

b) 100 km/h

c) 200 km/h

Aquest enunciat és com el de l'exercici 6 de l'epígraf anterior, però enriquit amb una nova dada corresponent al consum a 70 km/h, i per això, ara, amb tres punts, es pot efectuar una interpolació parabòlica.

Tenim aquests tres punts: (60; 5,7), (70; 6) i (90; 7,2).

$y = c + b(x - 60) + a(x - 60)(x - 70)$

$x = 60 \;\rightarrow\; 5{,}7 = c \;\rightarrow\; c = 5{,}7$

$x = 70 \;\rightarrow\; 6 = c + b \cdot (70 - 60) \;\rightarrow\; b = 0{,}03$

$x = 90 \;\rightarrow\; 7{,}2 = c + b \cdot (90 - 60) + a \cdot (90 - 60)(90 - 70) \;\rightarrow\; a = 0{,}001$

$y = c + 0{,}03 \cdot (x - 60) + 0{,}001 \cdot (x - 60)(x - 70)$

a) $y(80) = 6{,}5$

b) $y(100) = 8{,}1$

c) $y(200) = 28{,}1$

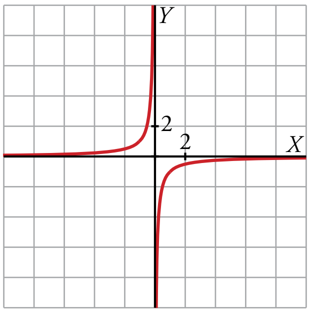
4 Funcions de proporcionalitat inversa

Pàgina 117

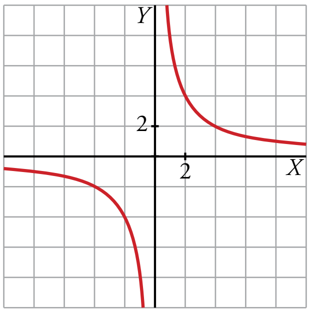
13 **Representa:** a) $y = -\dfrac{1}{x}$ b) $y = \dfrac{8}{x}$ c) $y = -\dfrac{6}{x}$ d) $y = \dfrac{12}{x}$ e) $y = -\dfrac{16}{x}$

En tots els casos, les asímptotes són els eixos coordenats. Podem calcular alguns punts de coordenades enteres per representar cada una de les funcions.

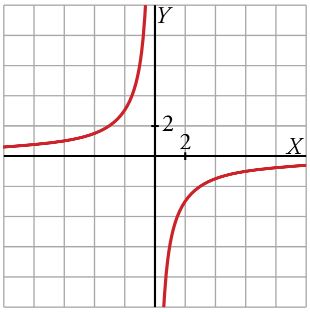
a)



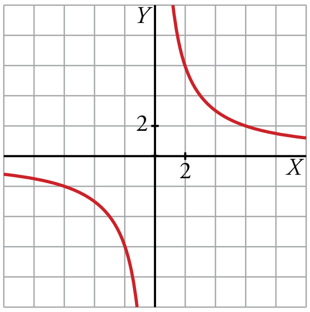
b)



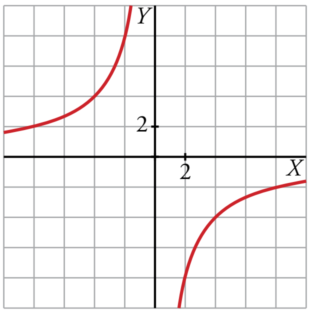
c)



d)



e)

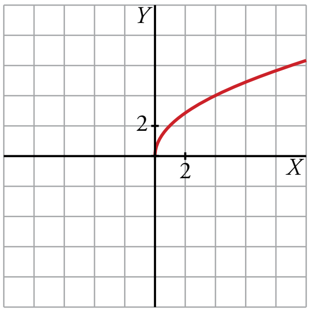


5 Funcions radicals

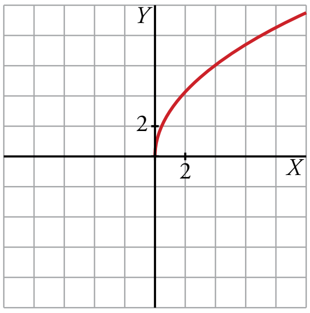
Pàgina 118

14 **Representa:** a) $y = \sqrt{4x}$ b) $y = \sqrt{9x}$ c) $y = -\sqrt{9x}$ d) $y = \sqrt{-9x}$ e) $y = \sqrt[3]{-8x}$

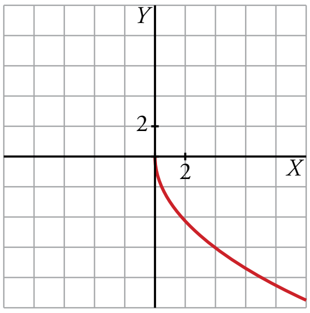
a)



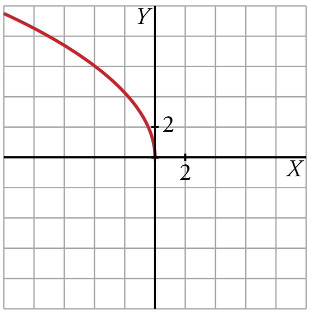
b)



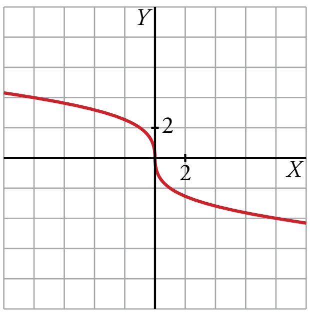
c)



d)

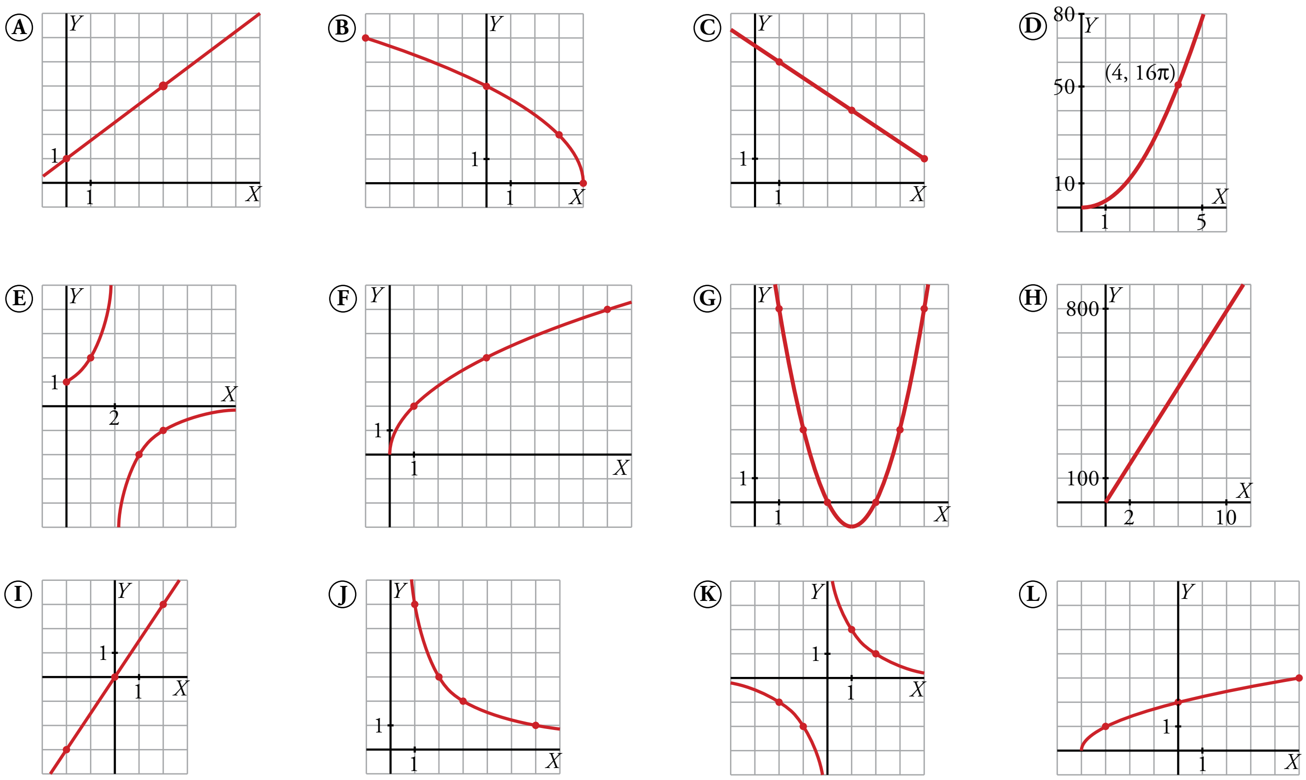


e)



Pàgina 119

15 **Associa a cada una de les gràfiques següents una de las equacions de sota. Observa que hi ha més equacions que gràfics.**



LINEALS	QUADRÀTIQUES	PROPORCIONALITAT INVERSA	RADICALS
L1 $y = \frac{3}{2}x$	C1 $y = x^2 - 8x + 15$	PI1 $y = \frac{1}{x}$	R1 $y = \sqrt{2x+4}$
L2 $y = -\frac{2}{3}(x-1) + 5$	C2 $y = (x+3)(x+5)$	PI2 $y = \frac{2}{2-x}$	R2 $y = \sqrt{x+4}$
L3 $y = 25\pi x$	C3 $y = x^2,\ x > 0$	PI3 $y = \frac{2}{x}$	R3 $y = 2\sqrt{4-x}$
L4 $y = \frac{3}{4}x + 1$	C4 $y = \pi x^2,\ x > 0$	PI4 $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	R4 $y = \sqrt{4x},\ x > 0$

A → L_4 B → R_3 C → L_2 D → C_4 E → PI_2 F → R_4

G → C_1 H → L_3 I → L_1 J → PI_4 K → PI_3 L → R_2

16 **Cada un dels enunciats següents es correspon amb una gràfica d'entre les de l'exercici anterior. Identifica-la.**

1. **Superfície, en centímetres quadrats, d'un cercle. Radi, en centímetres.**
2. **Augment d'una lupa. Distància a l'objecte, en centímetres.**
3. **Període d'un pèndol. Longitud, en metres.**
4. **Volum d'un cilindre, en centímetres cúbics. El radi del cercle de la base fa 5 cm. Altura, en centímetres.**
5. **Longitud d'una molla, en decímetres. Fa 1 dm i s'allarga 75 mm per cada quilo que s'hi penja.**
6. **Dimensions (llarg i ample, en centímetres) de rectangles amb una superfície de 6 cm^2.**

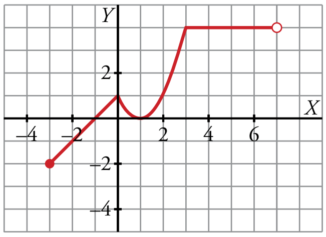
1 → D 2 → E 3 → F 4 → H 5 → A 6 → J

6 Funcions definides «a trossos»

Pàgina 120

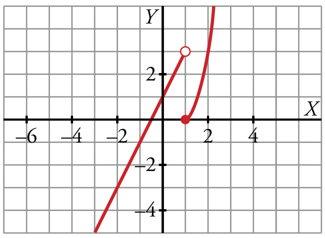
17 Representa aquesta funció:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & x\in[0,3] \\ 4 & x\in(3,7) \end{cases}$$

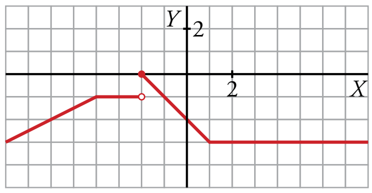


18 Fes la representació gràfica de la funció següent:

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$



19 Escriu l'expressió analítica que correspon a la gràfica següent:



Primer tram:

- Recta que passa pels punts $(-6,-2)$ i $(-4,-1)$.
- El pendent és $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)}=\dfrac{1}{2}$ i l'equació és $y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-(-4))$.

Segon tram:

- $y=-1$

Tercer tram:

- Pertany a una recta que passa per $(0,-2)$ i $(1,-3)$.
- El pendent és $\dfrac{-3-(-2)}{1-0}=-1$ i l'equació és $y-(-2)=-x$.

Quart tram: $y=-3$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{si } x<-4 \\ -1 & \text{si } -4\leq x<-2 \\ -x-2 & \text{si } -2\leq x<1 \\ -3 & \text{si } 1\leq x \end{cases}$$

Pàgina 121

Practica

***Ent*(7,5) = 7**

***Ent*(–4) = –4**

***Ent*(–5,3) = –6 atenció!**

Continua:

***Ent*(6,48)**	***Ent*(7)**	***Ent*(–3,9)**	***Ent*(–11,3)**	***Ent*(–8)**
$Ent(6{,}48) = 6$	$Ent(7) = 7$	$Ent(-3{,}9) = -4$	$Ent(-11{,}3) = -12$	$Ent(-8) = -8$

Practica

***Mant*(7,68) = 0,68**

***Mant*(–8) = 0**

***Mant*(–7,68) = 0,32**

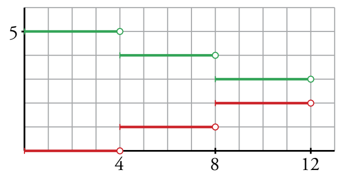
Continua:

***Mant*(3,791)**	***Mant*(–6,94)**	***Mant*(2)**	***Mant*(–4,804)**
$Mant(3{,}791) = 0{,}791$	$Mant(-6{,}94) = 0{,}06$	$Mant(2) = 0$	$Mant(-4{,}804) = 0{,}196$

20 Cert o fals?

a) La gràfica vermella correspon a la funció $y = Ent\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

b) La gràfica verda correspon a la funció $y = 5 + Ent\left(\dfrac{x}{4}\right)$.



a) Cert.

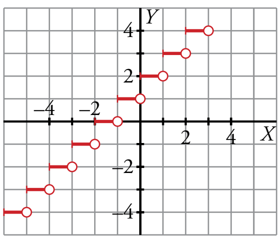
b) Fals. La gràfica verda és $y = 5 - Ent\left(\dfrac{x}{4}\right)$

21 Representa:

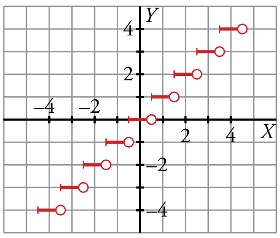
a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0{,}5)$

a) $y = Ent\,(x) + 2$



b) $y = Ent\,(x + 0{,}5)$

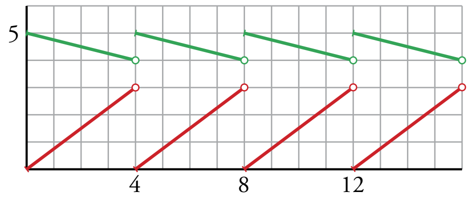


22 **Cert o fals?**

a) La gràfica vermella correspon a $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gràfica vermella correspon a $y = 3Mant(4x)$.

c) La gràfica verda correspon a $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Cert

b) Fals

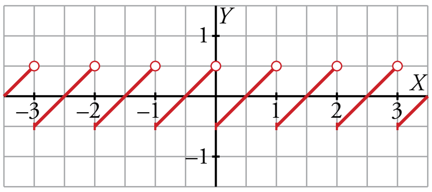
c) Cert

23 **Representa:**

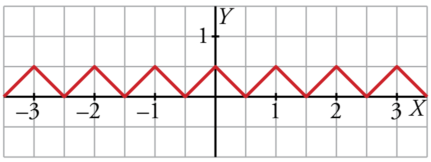
a) $y = Mant(x) - 0{,}5$

b) $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\,(x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\,(x) - 0{,}5|$



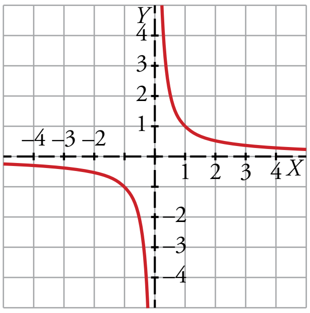
7 Transformacions elementals de funcions

Pàgina 122

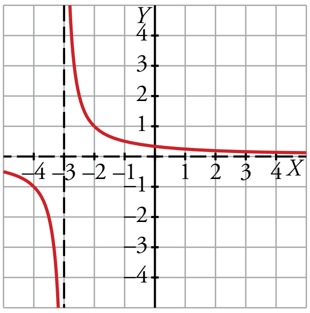
24 **Representa successivament:**

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+3}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x+3} + 8$

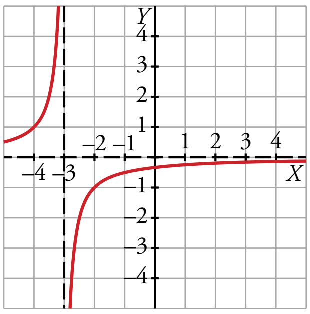
a)



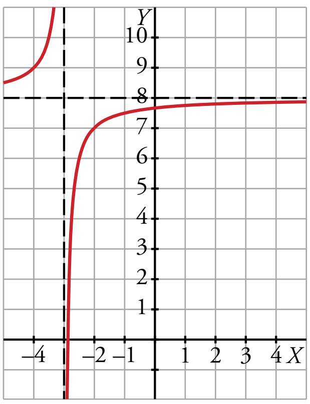
b) S'obté desplaçant la gràfica anterior tres unitat a l'esquerra.



c) És la simètrica de l'anterior respecte de l'eix X.



d) És igual a l'anterior traslladant-la 8 unitats cap amunt.



Pàgina 123

25 **Si $y = f(x)$ passa per (3, 8), digues un punt de:**

$$y = f(x) - 6,\ \ y = f(x+4),\ \ y = \frac{1}{2}f(x),\ \ y = 2f(x),\ \ y = -f(x),\ \ y = f(-x),\ \ y = -2f(-x) + 3$$

$y = f(x) - 6 \rightarrow (3, 2)$ $\quad$ $y = f(x+4) \rightarrow (-1, 8)$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}f(x) \rightarrow (3, 4)$

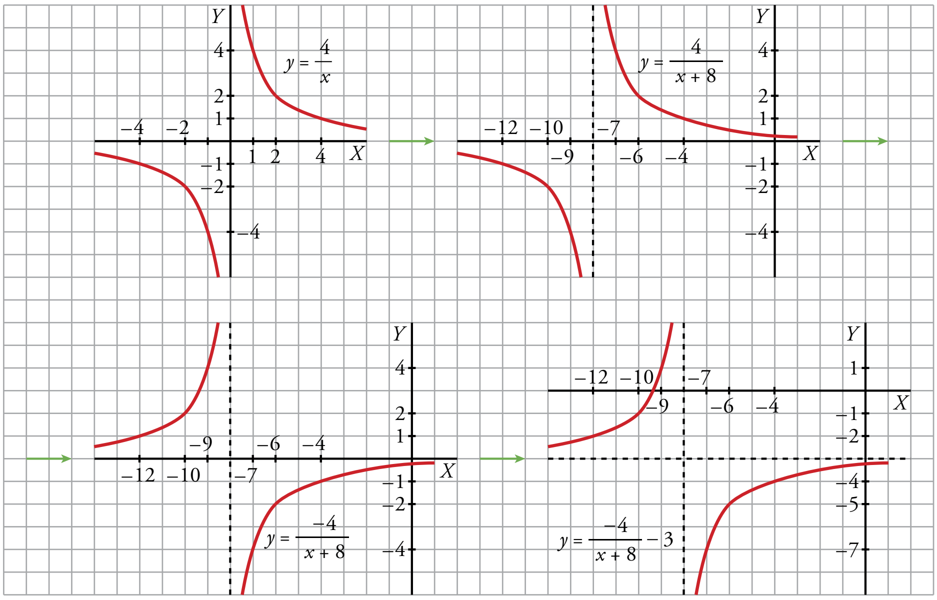
$y = 2f(x) \rightarrow (3, 16)$ $\quad$ $y = -f(x) \rightarrow (3, -8)$ $\quad$ $y = f(-x) \rightarrow (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \rightarrow (-3, -13)$

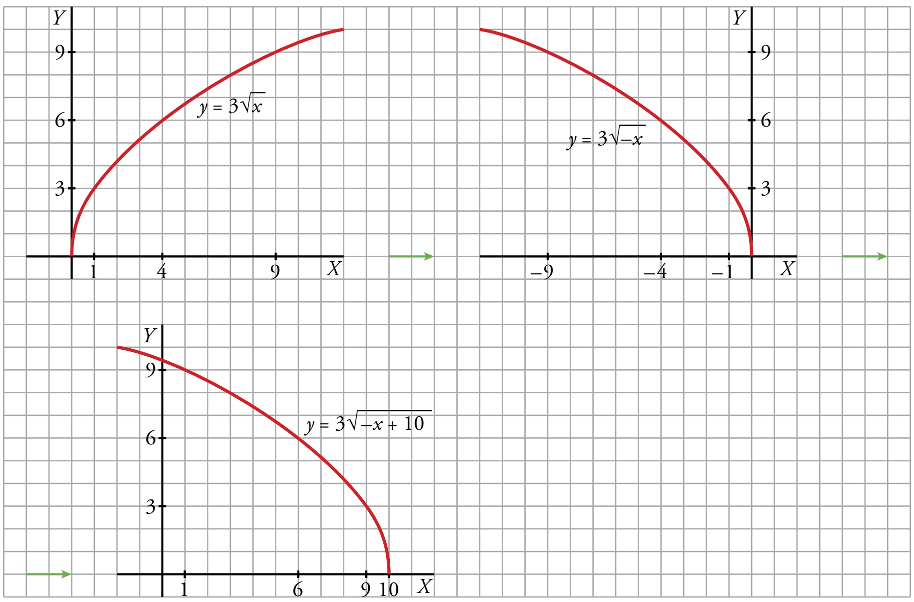
26 **Representa:**

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$ $\qquad$ **b)** $y = 3\sqrt{-x+10}$

a) Representem $y = \dfrac{4}{x} \rightarrow y = \dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$



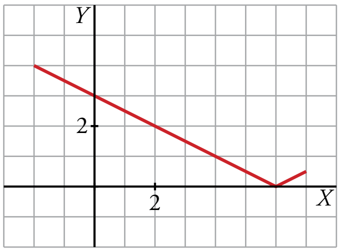
b) Representem $y = 3\sqrt{x} \rightarrow y = 3\sqrt{-x} \rightarrow y = 3\sqrt{-(x-10)}$



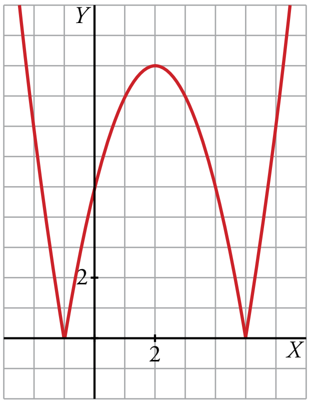
Pàgina 124

27 **Representa:** a) $y = \left|\frac{x}{2} - 3\right|,\ x \in [-2, 7]$ b) $y = |-x^2 + 4x + 5|$ c) $y = |x| - |x - 4|$ d) $y = |x + 2| + |x - 3|$

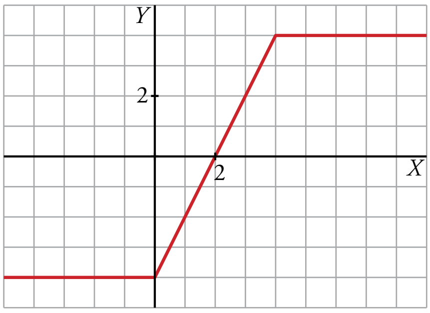
a)



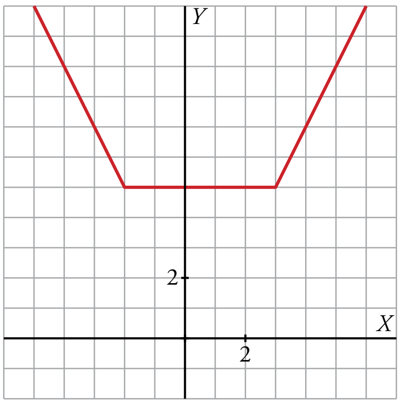
b)



c) $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $|x - 4| = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x \le 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ $|x| - |x - 4| = \begin{cases} -x - (-x + 4) = -4 & \text{si } x \le 0 \\ x - (-x + 4) = 2x - 4 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ x - (x - 4) = 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$



d) $|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \le -2 \\ x + 2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ $|x - 3| = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ $|x + 2| + |x - 3| = \begin{cases} -x - 2 - x + 3 = -2x + 1 & \text{si } x \le -2 \\ x + 2 - x + 3 = 5 & \text{si } -2 < x \le 3 \\ x + 2 + x - 3 = 2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



Exercicis i problemes resolts

Pàgina 125

1. Domini de definició

Fes-ho tu. **Troba el domini de definició d'aquesta funció:**

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

La funció està definida quan $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

Resolem la inequació buscant, en primer lloc, les solucions de l'equació:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -1;\ x = 5$$

Construïm la taula dels signes:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
SIGNE DE $x^2 - 4x - 5$	+	–	+

Per tant, el domini de definició de f és $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

2. Interpolació lineal

Fes-ho tu. **La població d'un municipi era de 23 442 habitants l'any 2000 i de 26 087 l'any 2012. Estima'n la població els anys 2005 i 2013.**

Trobem l'equació de la recta que passa pels punts (2 000, 23 442) i (2 012, 26 087).

Pendent: $m = \dfrac{26087 - 23442}{2012 - 2000} = 220{,}42$

Equació: $f(x) = 23442 + 220{,}42(x - 2000) = 220{,}42x - 417400$

La població estimada l'any 2005 és:

$$x = 2005 \rightarrow f(2005) = 220{,}42 \cdot 2005 - 417400 \approx 24542 \text{ persones}$$

La població estimada l'any 2013 és:

$$x = 2013 \rightarrow f(2013) = 220{,}42 \cdot 2013 - 417400 \approx 26305 \text{ personas}$$

3. Funció quadràtica

Fes-ho tu. **Representa la funció següent:**

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31,\ \ 4 \leq t \leq 7$$

La funció $f(t)$ és una paràbola amb les branques obertes cap avall.

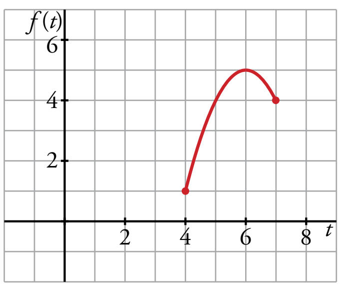
Calculem les coordenades del vèrtex:

$$t = \frac{-12}{-2} = 6 \rightarrow f(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 31 = 5 \rightarrow \text{El punt } (6, 5) \text{ és el vèrtex de la paràbola.}$$

Trobem els valors de la funció en els extrems de l'interval domini de definició:

$$f(4) = -4^2 + 12 \cdot 4 - 31 = 1 \rightarrow \text{Passa pel punt } (4, 1).$$

$$f(7) = -7^2 + 12 \cdot 7 - 31 = 4 \rightarrow \text{Passa pel punt } (7, 4).$$



S

Pàgina 126

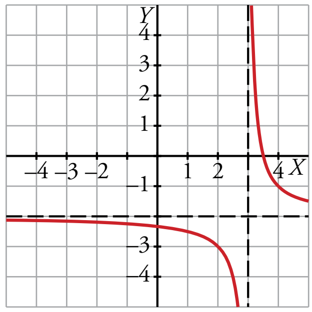
5. Hipèrboles

Fes-ho tu. **Representa aquesta funció:**

$$y = \frac{-2x+7}{x-3}$$

$y = \frac{-2x+7}{x-3} = -2 + \frac{1}{x-3}$ (efectuant la divisió entre el numerador i el denominador).

Per tant, la gràfica és com la de $y = \frac{1}{x}$ desplaçant-la 2 unitats cap avall i 3 unitats a la dreta.



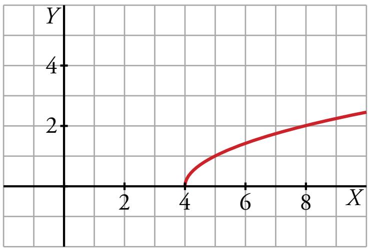
Pàgina 127

6. Transformacions d'una funció

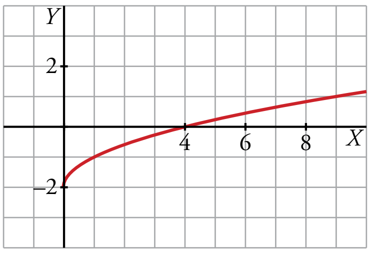
Fes-ho tu. **A partir de la gràfica de $f(x) = \sqrt{x}$, representa aquestes funcions:**

a) $g(x) = f(x-4)$ **b)** $h(x) = f(x) - 2$ **c)** $i(x) = \sqrt{2x}$

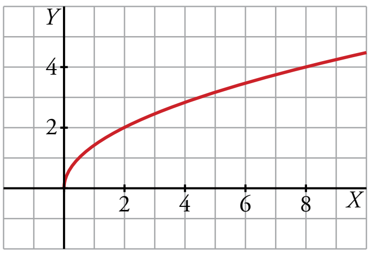
a) La gràfica de $g(x) = \sqrt{x-4}$ és com la de $f(x) = \sqrt{x}$, desplaçada 4 unitats a la dreta.



b) La gràfica de $h(x) = \sqrt{x} - 2$ és com la de $f(x)$, desplaçada 2 unitats cap avall.



c) La gràfica de $i(x) = \sqrt{2x}$ és com la de $f(x)$, contraient-la en sentit horitzontal, dividint entre 2.



7. Valor absolut d'una funció

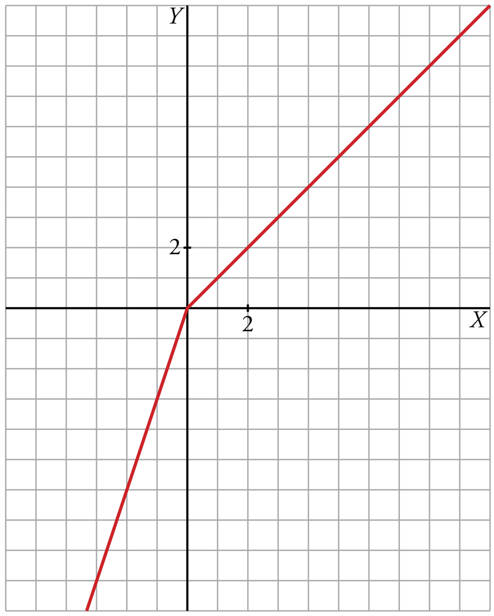
Fes-ho tu. Defineix per intervals i representa aquestes funcions:

a) $f(x) = 2x - |x|$

b) $f(x) = \left|2 - \dfrac{x^2}{2}\right|$

a) Tenint en compte com està definida la funció valor absolut,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - (-x) & \text{si } x < 0 \\ 2x - x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$



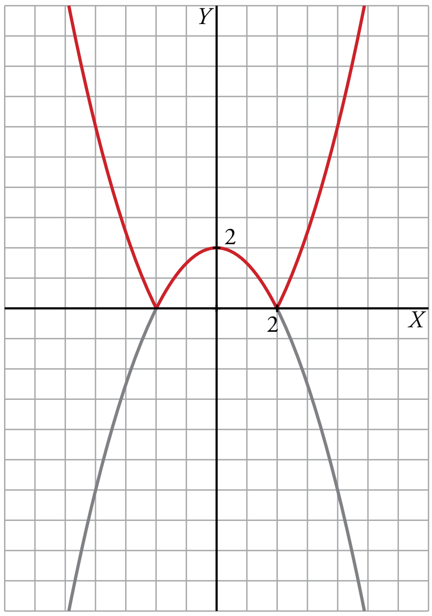
b) Aquesta funció és el valor absolut d'una paràbola. Per tant, la seva gràfica coincideix amb la part positiva de la paràbola i amb la reflectida de la part negativa respecte de l'eix OX.

Per definir-la per intervals, trobem primer els punts en què la paràbola val 0. També tenim en compte els signes d'aquesta.

$$2 - \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = -2;\ x = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} -\left(2 - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x < -2 \\ 2 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -\left(2 - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2 & \text{si } x < -2 \\ 2 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -2 \le x < 2 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Representem la gràfica de $f(x)$ (en vermell) a partir de la gràfica de la paràbola, reflectint respecte de l'eix horitzontal la part de la paràbola que hi ha per sota de l'eix.



Exercicis i problemes guiats

Pàgina 128

1. Funció definida a «trossos»

a) Escriu l'expressió analítica d'aquesta funció:

b) Quin és el seu domini de definició? I el seu recorregut?

a) Està formada per tres trossos, essent el segon horitzontal.

- Primer tros: $m = \dfrac{20-10}{5-0} = 2;\ y = 2x + 10$
- Segon tros: $y = 20$
- Tercer tros:

  Passa per (20, 20) i (25, 0). Aleshores $m = \dfrac{0-20}{25-20} = -4;\ y = 20 - 4(x-20) \rightarrow y = 100 - 4x$

L'expressió de la funció és:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 20 & \text{si } 5 \le x < 20 \\ 100-4x & \text{si } 20 \le x \end{cases}$$

b) El domini de definició és l'interval [0, 25].

El recorregut és l'interval [0, 20].

2. Una funció quadràtica

Els costos de producció d'un producte (en euros) d'una empresa, vénen donats per:

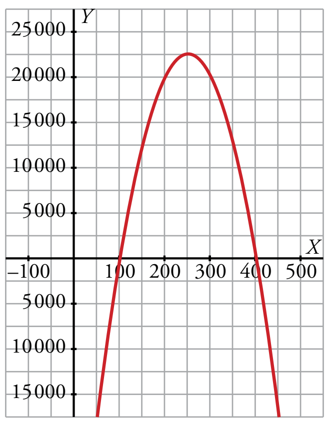
$$C = 40\,000 + 20q + q^2$$

sent q el nombre d'unitats produïdes. El preu de venda de cada unitat és de 520 euros.

a) Expressa en funció de q el benefici de l'empresa i representa'l gràficament.

b) Quantes unitats s'han de produir perquè el benefici sigui màxim?

a) $B(q) = 520q - (40\,000 + 20q + q^2) = -q^2 + 500q - 40\,000$



b) El benefici és màxim en el vèrtex de la paràbola anterior, ja que té les branques cap avall.

L'abscissa del vèrtex és $\dfrac{-500}{-2} = 250$ i el benefici serà:

$B(250) = -250^2 + 500 \cdot 250 - 40\,000 = 22\,500$ €

3. Una funció polinòmica

Considera tots els cons amb la generatriu de 15 cm.

a) Escriu la funció que ens dóna el volum del con segons el que mesura l'altura, x.

b) Quin és el seu domini de definició?

a) Usant el teorema de Pitàgores, tenim que:

$$R = \sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{225 - x^2}$$

Aleshores $V(x) = \frac{1}{3}\pi x\left(\sqrt{225 - x^2}\right)^2 = \frac{\pi(225x - x^3)}{3}$

b) L'altura és un número positiu que no pot ser més gran que la generatriu. Per tant, el domini de definició de $V(x)$ és $Dom = (0, 15)$.

4. Funcions lineals

Una empresa de lloguer de cotxes ofereix dues tarifes:

A: 50 € fixos més 0,25 € per quilòmetre recorregut.

B: 0,5 € per quilòmetre recorregut.

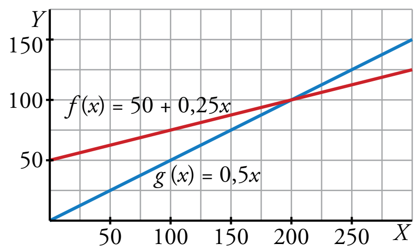
Analitza quina de les dues opcions és més avantatjosa segons els quilòmetres que recorreguem.

Si x representa els quilòmetres recorreguts, les funcions que descriuen les tarifes són:

A: $f(x) = 50 + 0{,}25x$

B: $g(x) = 0{,}5x$

Representem ambdues funcions.



Podem trobar el punt de tall analíticament resolent el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 50 + 0{,}25x \\ y = 0{,}5x \end{array}\right\} \rightarrow x = 200,\ y = 100$$

Observem que, si la distància és inferior a 200 km, és més avantatjosa l'opció B. Passa el contrari si recorrem una disància superior a 200 km; és a dir, és més avantatjosa l'opció A.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 129

Per practicar

Domini de definició

1 Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$ b) $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$ c) $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$ d) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

a) La funció no està definida quan $x = -5$. El seu domini és $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, té com a única solució $x = 0$. El domini és $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La funció no està definida quan $x^2 - x + 2 = 0$, que no té solució. Per tant, el domini és $Dom = \mathbb{R}$
.

d) Les fraccions no es poden avaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El domini és $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

2 Estudia el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{2x+5}$ b) $y = \sqrt{7-x}$ c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$ d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Perquè estigui definida ha de ser $2x + 5 \geq 0$, la solució de la qual és $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$. El seu domini és aquest interval, $Dom = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En aquest cas, $x \leq 7$. El domini de definició és $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R}$

d) Perquè ambdues arrels existeixin simultàniament, ha de complir-se alhora que $x \geq 1$ i $x \geq 2$. El domini és $Dom = [2, +\infty)$.

3 Digues quin és el domini de definició de:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

a) El radicand no pot ser negatiu ni tampoc 0 en aquest cas. Per tant,

$4 - x > 0 \rightarrow Dom = (-\infty, 4)$.

b) Anàlogament, $x^2 + 1 > 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R}$ perquè en el primer membre sumem al número 1 (que és positiu) una potència parella (que mai no és negativa).

c) Resolem $x^2 - 3x > 0$ mitjançant la taula dels signes del polinomi.

$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNE DE $x^2 - 3x$	+	–	+

Per tant, $Dom = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

d) $9 - x^2 > 0$ i resolem construint la taula dels signes:

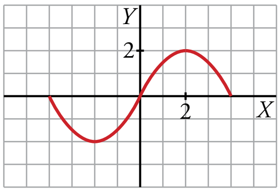
$9 - x^2 = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNE DE $9 - x^2$	–	+	–

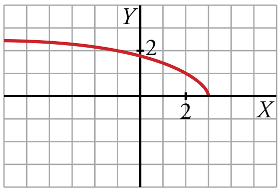
Per tant, $Dom = (-3, 3)$.

4 **Observa les gràfiques d'aquestes funcions i indica quin és el seu domini de definició i el seu recorregut:**

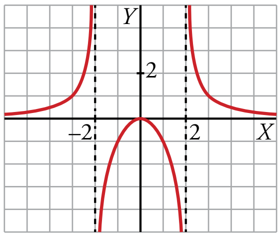
a)



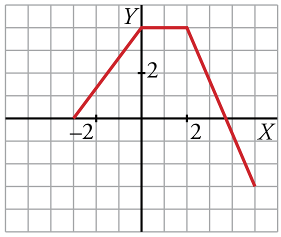
b)



c)



d)



a) Domini: $[-4, 4]$ Recorregut: $[-2, 2]$

b) Domini: $(-\infty, 3]$ Recorregut: $[0, +\infty)$

c) Domini: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Recorregut: $\mathbb{R}$

d) Domini: $[-3, 5]$ Recorregut: $[-3, 4]$

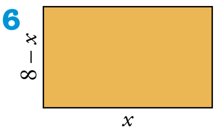
5 **La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ ens dóna l'altura a què està una pilota llançada cap amunt en l'instant t, fins que torna a terra. Quin és el domini de definició?**

Necessitem calcular el temps que tarda la pilota a arribar a terra. A tal fi, és necessari resoldre l'equació:

$80 + 64t - 16t^2 = 0$, que té una solució possible, $t = 5$.

Com que el temps no pot ser negatiu, el domini és $Dom = [0, 5]$.

6



Escriu l'àrea d'aquest rectangle de perímetre 16 cm en funció de la base x.

Quin és el domini de definició d'aquesta funció? Quin és el seu recorregut?

La funció àrea és $A(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$, que és un funció quadràtica.

El seu domini és $Dom = (0, 8)$.

El valor màxim l'assoleix en el vèrtex, l'abscissa del qual és $\frac{-8}{-2} = 4$. Aquest valor és $A(4) = 16$. Per tant, el recorregut de la funció és l'interval $(0, 16]$.

7 **La temperatura d'un pacient, des que comença la seva malaltia fins que torna a tenir 37 °C, ha evolucionat segons la funció $T = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, sent t el nombre de dies transcorreguts des de l'inici de la malaltia. Quin és el domini de definició? I el recorregut?**

Calculem els dies en què té 37 °C.

$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 12$

És a dir, al cap de 12 dies torna a tenir 37 °C de temperatura. El domini és l'interval $[0, 12]$.

Com que es tracta d'una funció quadràtica amb les branques cap avall, el valor màxim l'assoleix en el vèrtex, l'abscissa del qual és $\frac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura màxima és $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En conseqüència, el recorregut és l'interval $[37; 40{,}6]$.

Funcions lineals i quadràtiques. Interpolació

8 **Escriu les equacions de les rectes següents i representa-les gràficament:**

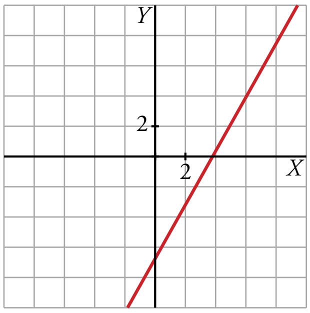
a) Passa per $P(1, -5)$ i $Q(10, 11)$.

b) Passa per (–7, 2) i el pendent és –0,75.

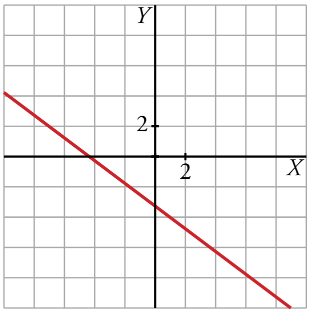
c) Talla els eixos en (3,5; 0) i (0, –5).

d) És paral·lela a la recta $3x - y + 1 = 0$ i passa per (–2, –3).

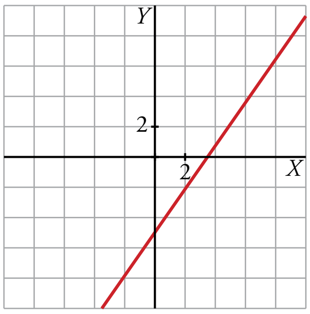
a) $m = \dfrac{11-(-5)}{10-1} = \dfrac{16}{9}$ $\qquad y = -5 + \dfrac{16}{9}(x-1) \rightarrow y = \dfrac{16x-61}{9}$



b) $y = 2 - 0{,}75[x - (-7)] \rightarrow y = -0{,}75x - 3{,}25$

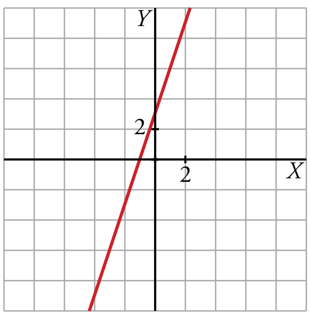


c) $m = \dfrac{-5-0}{0-3{,}5} = \dfrac{5}{3{,}5} = \dfrac{10}{7}$ $\qquad y = \dfrac{10}{7}x - 5$

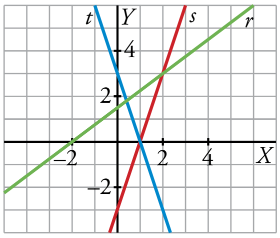


d) $3x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 3x + 1$

El pendent de la recta buscada és 3 perquè sigui paral·lela a la recta donada. Per tant, l'equació és $y = -3 + 3[x - (-2)] \rightarrow y = 3x + 3$.



9 **Calcula el pendent de les rectes r, s i t. Després escriu-ne l'equació.**



- Recta r:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{4} \\ \text{Passa per } (-2, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \text{L'equació de la recta és } y = \frac{3}{4}(x + 2) \rightarrow y = \frac{3x + 6}{4}.$$

- Recta s:

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ \text{Passa per } (0, -3) \end{array}\right\} \rightarrow \text{L'equació de la recta és } y = 3x - 3.$$

- Recta t:

$$\left.\begin{array}{l} m = -3 \\ \text{Passa per } (0, 3) \end{array}\right\} \rightarrow \text{L'equació de la recta és } y = -3x + 3.$$

10 **Calcula, mitjançant interpolació o extrapolació lineal, els valors de y que falten en cada taula:**

a)

x	0,45	0,5	0,6
y	2	...	0,25

b)

x	47	112	120
y	18	37	...

a) $y = 2 - 11,\widehat{6}(x - 0,45) \rightarrow y_0 = 2 - 11,\widehat{6}(0,5 - 0,45) = 1,42$

b) $y = 18 + 0,292(x - 47) \rightarrow y_0 = 18 + 0,292(120 - 47) = 39,32$

11 **Aquesta taula mostra la temperatura atmosfèrica presa a altures diferens:**

ALTURA (m)	0	500	1 000	1 500
TEMPERATURA (°C)	15	11,7	8,4	5,1

Calcula la temperatura a 1 200 m i a 2 000 m.

$y = 15 - 0,0066x \rightarrow f(1\,200) = 15 - 0,0066 \cdot 1\,200 = 7,08$

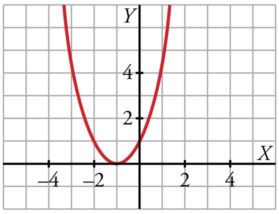
$f(2\,000) = 15 - 0,0066 \cdot 2\,000 = 1,8$

12 **Representa les funcions següents:**

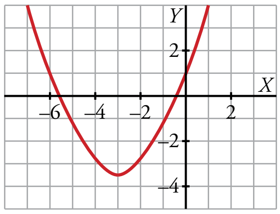
a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$ **e)** $y = -4x^2 + 1$ **f)** $y = -2x^2 - 3x + 0{,}5$

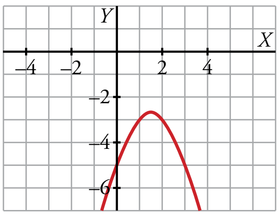
a)



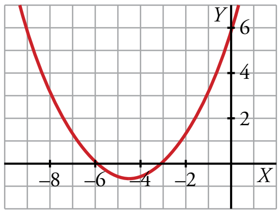
b)



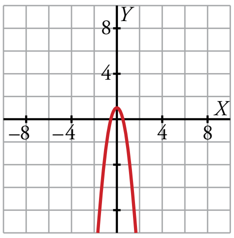
c)



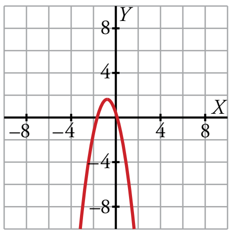
d)



e)



f)



13 **Troba l'equació de la paràbola que passa pels punts $(-2, -9)$, $(2, -5)$ i $(4\ , 0)$ de dues maneres:**

a) Usant l'expressió $y = ax^2 + bx + c$.

b) Pel mètode de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-2,-9) \to -9 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \to 4a - 2b + c = -9 \\ (2,-5) \to -5 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \to 4a + 2b + c = -5 \\ (4,0) \to 0 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \to 16a + 4b + c = 0 \end{array}\right\}$$

Resolem el sistema: $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 1$, $c = -8$

La paràbola buscada és $y = \dfrac{x^2}{4} + x - 8$.

b) $y = p + m(x + 2) + n(x + 2)(x - 2)$

$(-2, -9) \to -9 = p + m\cdot(-2 + 2) + n\cdot(-2 + 2)(-2 - 2) \to p = -9$

$(2, -5) \to -5 = -9 + m\cdot(2 + 2) + n\cdot(2 + 2)(2 - 2) \to 4m = 4 \to m = 1$

$(4, 0) \to 0 = -9 + (4 + 2) + n\cdot(4 + 2)(4 - 2) \to 0 = -3 + 12n \to n = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

La paràbola buscada és:

$$y = -9 + (x + 2) + \frac{1}{4}(x + 2)(x - 2) = -9 + x + 2 + \frac{1}{4}(x^2 - 4) = \frac{x^2}{4} + x - 8$$

14 **Troba, en cada cas, l'equació de la paràbola que passa pels punts donats:**

a) (1, –1), (3, 3), (5, –1)

b) (0, –4), (1, –6), (3, –4)

Completa els punts (4, …) i (–3, …) perquè pertanyin a cada una de les paràboles anteriors.

a) Usant l'equació general: $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (1,-1) \;\rightarrow\; -1 = a+b+c \;\rightarrow\; a+b+c=-1 \\ (3,3) \;\rightarrow\; 3 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \;\rightarrow\; 9a+3b+c=3 \\ (5,-1) \;\rightarrow\; -1 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c \;\rightarrow\; 25a+5b+c=-1 \end{array}\right\}$$

Resolent el sistema: $a = -1,\;\; b = 6,\;\; c = -6$

La paràbola buscada és $y = -x^2 + 6x - 6$.

Els punts (4, 2) i (–3, –33) pertanyen a aquesta paràbola.

b) Pel mètode de Newton: $y = p + m(x-0) + n(x-0)(x-1) = p + mx + nx(x-1)$

$(0,-4) \;\rightarrow\; -4 = p + m\cdot 0 + n\cdot 0(0-1) \;\rightarrow\; p = -4$

$(1,-6) \;\rightarrow\; -6 = -4 + m\cdot 1 + n\cdot 1(1-1) \;\rightarrow\; m = -2$

$(3,-4) \;\rightarrow\; -4 = -4 - 2\cdot 3 + n\cdot 3(3-1) \;\rightarrow\; 6n = 6 \;\rightarrow\; n = 1$

La paràbola buscada és:

$y = -4 - 2x + x(x-1) = -4 - 2x + x^2 - x = x^2 - 3x - 4$

Els punts (4, 0) i (–3, 14) pertanyen a aquesta paràbola.

Página 130

Representació de funcions elementals

15 **Associa a cada gràfica la seva expressió analítica.**

a) $y = -0{,}5x^2 + 3$

b) $y = \sqrt{x+2}$

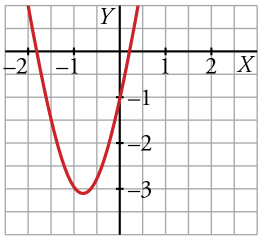
c) $y = 3x^2 + 5x - 1$

d) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

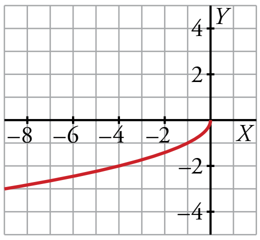
e) $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$

f) $y = -\sqrt{-x}$

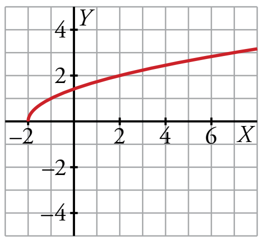
I



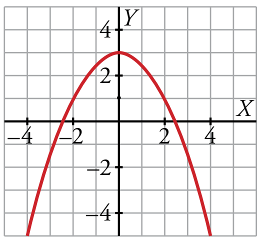
II



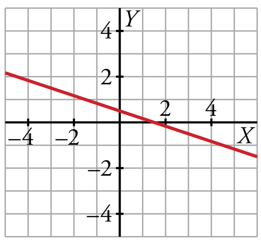
III



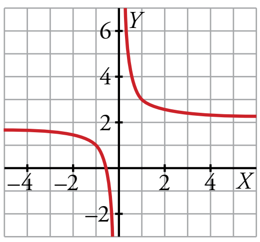
IV



V



VI



a) IV

b) III

c) I

d) VI

e) V

f) II

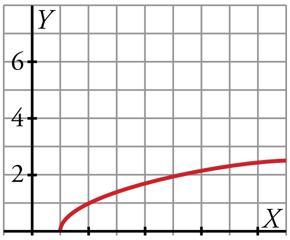
16 **Representa les funcions següents:**

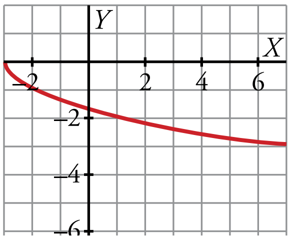
a) $y = \sqrt{x-1}$

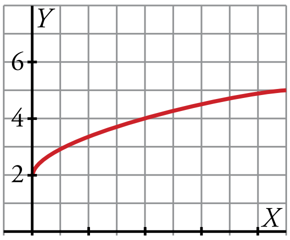
b) $y = -\sqrt{x+3}$

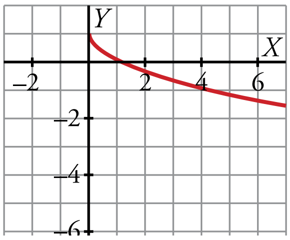
c) $y = 2 + \sqrt{x}$

d) $y = 1 - \sqrt{x}$

a)


b)


c)


d)


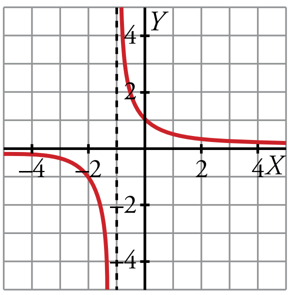
17 **Representa les funcions següents:**

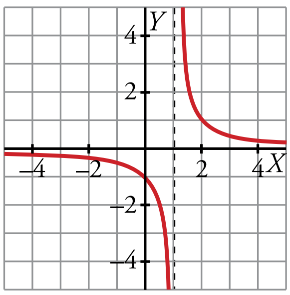
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

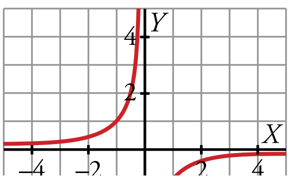
b) $y = \dfrac{1}{x-1}$

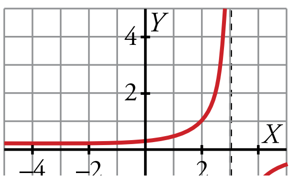
c) $y = \dfrac{-1}{x}$

d) $y = \dfrac{-1}{x-3}$

a)


b)


c)


d)


18 **Representa aquestes funcions en l'interval indicat:**

a) $y = 2x^2 - 4$, $[0, 2]$

b) $y = -\dfrac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$

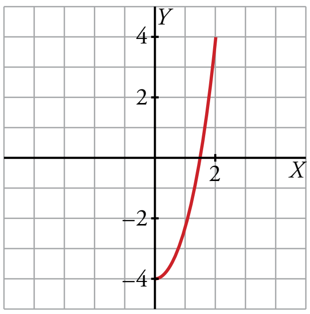
c) $y = \dfrac{1}{x}$, $x < 0$

d) $y = \dfrac{3x - 30}{5}$, $[-5, 5]$

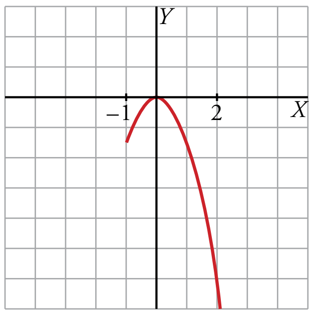
e) $y = \dfrac{1}{x - 2}$, $[-2, 2)$

f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$

a) $y = 2x^2 - 4$, $[0, 2]$

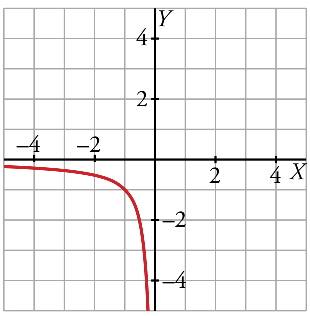


b) $y = -\dfrac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$



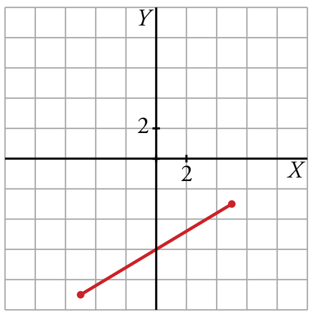
c) $y = \dfrac{1}{x}$, $x < 0$

Es tracta d'una branca de la funció de proporcionalitat inversa i la seva gràfica és:

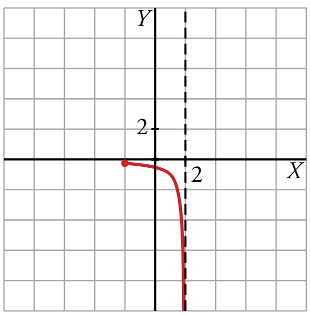


d) $y = \dfrac{3x - 30}{5}$, $[-5, 5]$

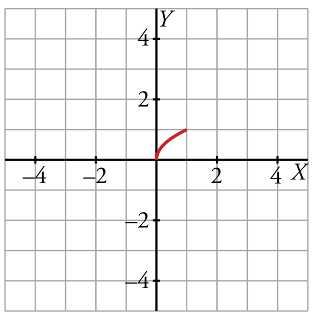
És un tros d'una funció lineal.



e) $y = \dfrac{1}{x - 2}$



f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$



Funcions definides «a trossos»

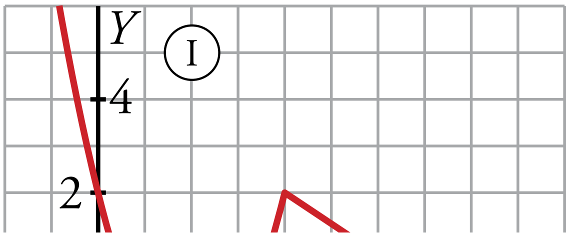
19 **Associa a cada gràfica l'expressió analítica que li correspon:**

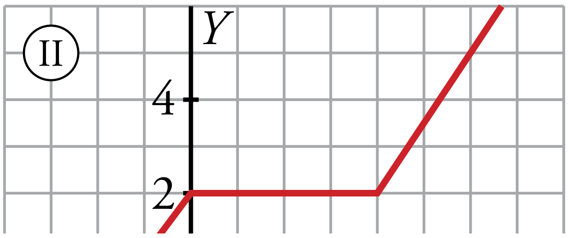
a) $y = \begin{cases} 2 - \dfrac{2x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 8 - \dfrac{3x}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{14 - 2x}{3} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2 + \dfrac{4x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \dfrac{3x}{2} - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$



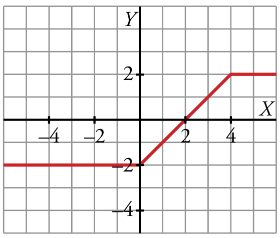


a) III b) IV c) I d) II

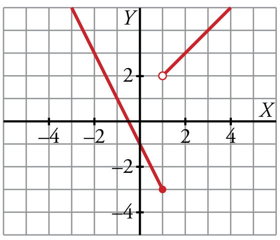
20 **Representa gràficament les funcions següents:**

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2} + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

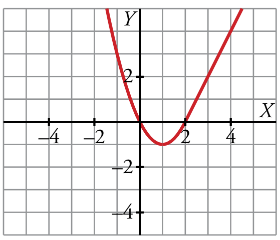
a)



b) Construïm una taula de valors per a cada recta i obtenim la gràfica.



c) Trobem el vèrtex de la paràbola, (1, –1), i els punts de tall, (0, 0) i (2, 0) (primer tros). Construïm una taula de valors per al segon tros i obtenim:



d) La funció està formada per un tros de paràbola oberta cap avall i un tros de recta.

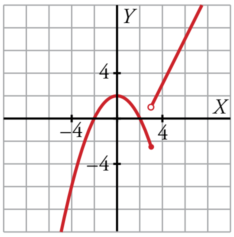
- 1a branca:

  El seu vèrtex és el punt (0, 2) i talla l'eix horitzontal en els punts d'abscisses $x = -2$, $x = 2$.

  Avaluem en el punt de ruptura: $x = 3 \rightarrow y = \dfrac{-3^2}{2} + 2 = -\dfrac{5}{2}$

- 2a branca:

  És un tros de recta que podem representar trobant dos punts pels quals passa.

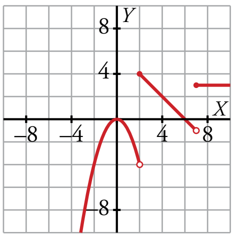


21 **Representa.**

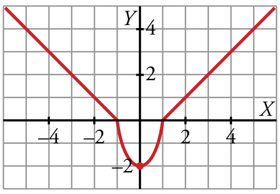
a) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \le 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • 1a branca: paràbola oberta cap avall, la gràfica de la qual és la reflectida de $y = x^2$ respecte de l'eix *OX*.

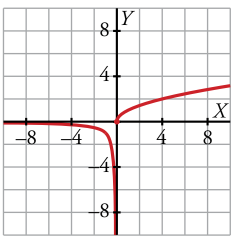
- 2a branca: tros de recta que podem representar trobant dos punts pels quals passa.
- 3a branca: tros de funció constant.



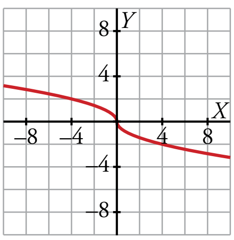
b)



c) Els dos trossos són parts de gràfiques representades en exercicis anteriors.

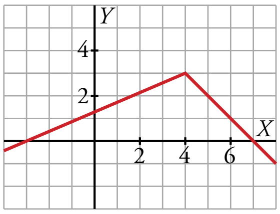


d) Són dos trossos de funció arrel situats a ambdós costats de l'origen de coordenades.

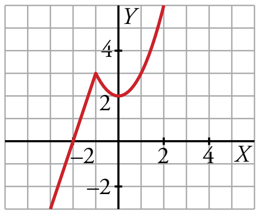


22 **Obtén l'expressió analítica d'aquestes funcions:**

a)



b)



a) El primer tros pertany a una recta que passa pels punts (–3, 0) i (4, 3). Trobem la seva equació:

$$m = \frac{3-0}{4-(-3)} = \frac{3}{7} \rightarrow y = \frac{3}{7}(x+3) = \frac{3x+9}{7}$$

El segon tros pertany a una recta que passa pels punts (7, 0) i (4, 3). Trobem la seva equació:

$$m = \frac{3-0}{4-7} = -1 \rightarrow y = -(x-7) = 7-x$$

Per tant, la funció és:

$$y = \begin{cases} \dfrac{3x+9}{7} & \text{si } x < 4 \\ 7-x & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

b) El primer tros pertany a una recta de pendent 3 i que passa pel punt (–2, 0). La seva equació és $y = 3(x+2)$.

El segon tros forma part de la paràbola $y = x^2$ desplaçada 2 unitats cap amunt. Per tant, la funció és:

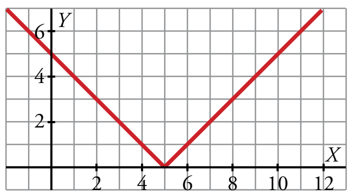
$$y = \begin{cases} 3x+6 & \text{si } x < -1 \\ x^2+2 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$$

Pàgina 131

Valor absolut d'una funció

23 **Representa la funció $y = |x-5|$ i comprova que la seva expressió analítica en intervals és:**

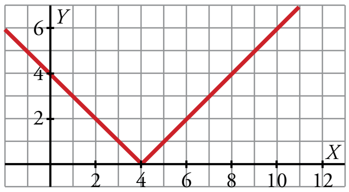
$$y = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x < 5 \\ x-5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$



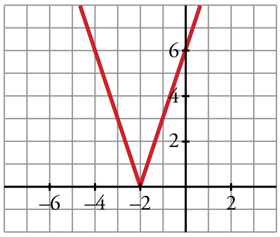
24 **Representa les funcions següents i defineix-les com a funcions «a trossos»:**

a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |3x + 6|$ **c)** $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

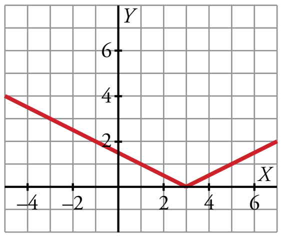
a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



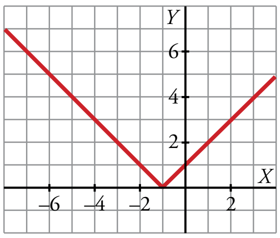
b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



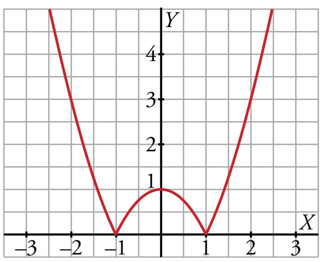
d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$



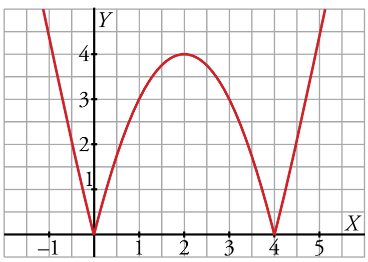
25 **Representa aquestes funcions:**

a) $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 4x|$ **c)** $y = |x^2 + 2x - 3|$ **d)** $y = |x^2 - 2x + 1|$

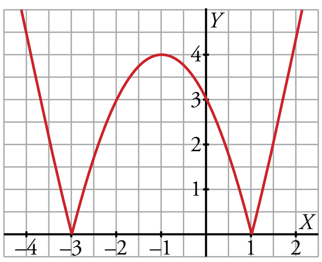
a)



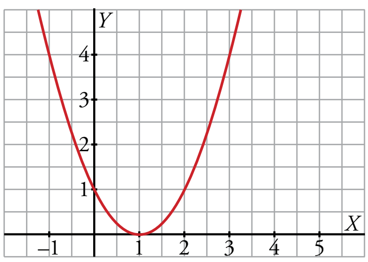
b)



c)



d)



26 **Representa.**

a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

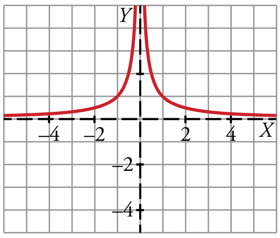
b) $y = 1 + |x|$

c) $y = \dfrac{|x|}{x}$

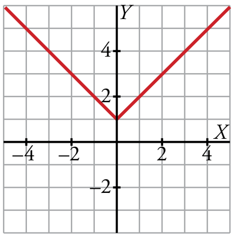
d) $y = 2|x| + x$

La funció valor absolut de $f(x)$ manté la part positiva de la gràfica i converteix la part negativa de $f(x)$ en $-f(x)$; és a dir, en la simètrica de $f(x)$ respecte de l'eix horitzontal.

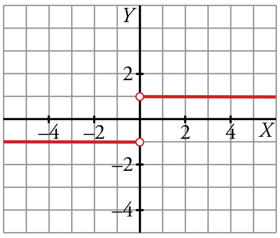
a)



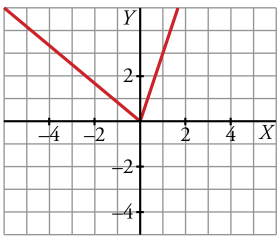
b) La gràfica d'aquesta funció és la de $y = |x|$ desplaçada una unitat cap amunt.



c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

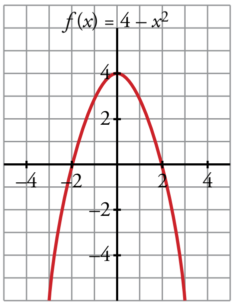


Transformacions d'una funció

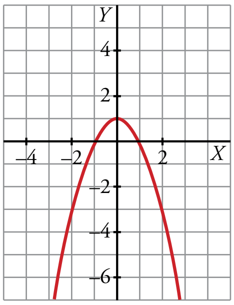
27 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ i, a partir d'aquesta, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 3$

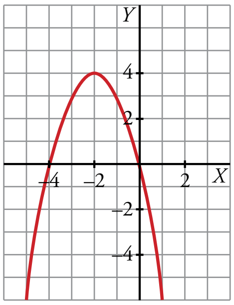
b) $h(x) = f(x + 2)$



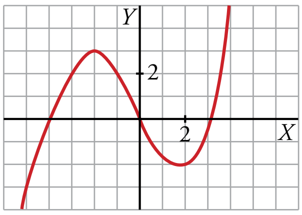
a)



b)



28 **Aquesta és la gràfica de la funció $y = f(x)$:**

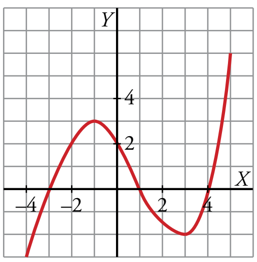


Representa, a partir d'aquesta, les funcions:

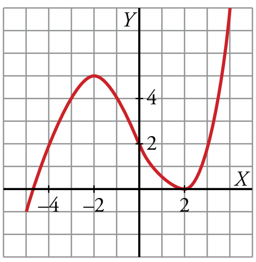
a) $y = f(x - 1)$

b) $y = f(x) + 2$

a)

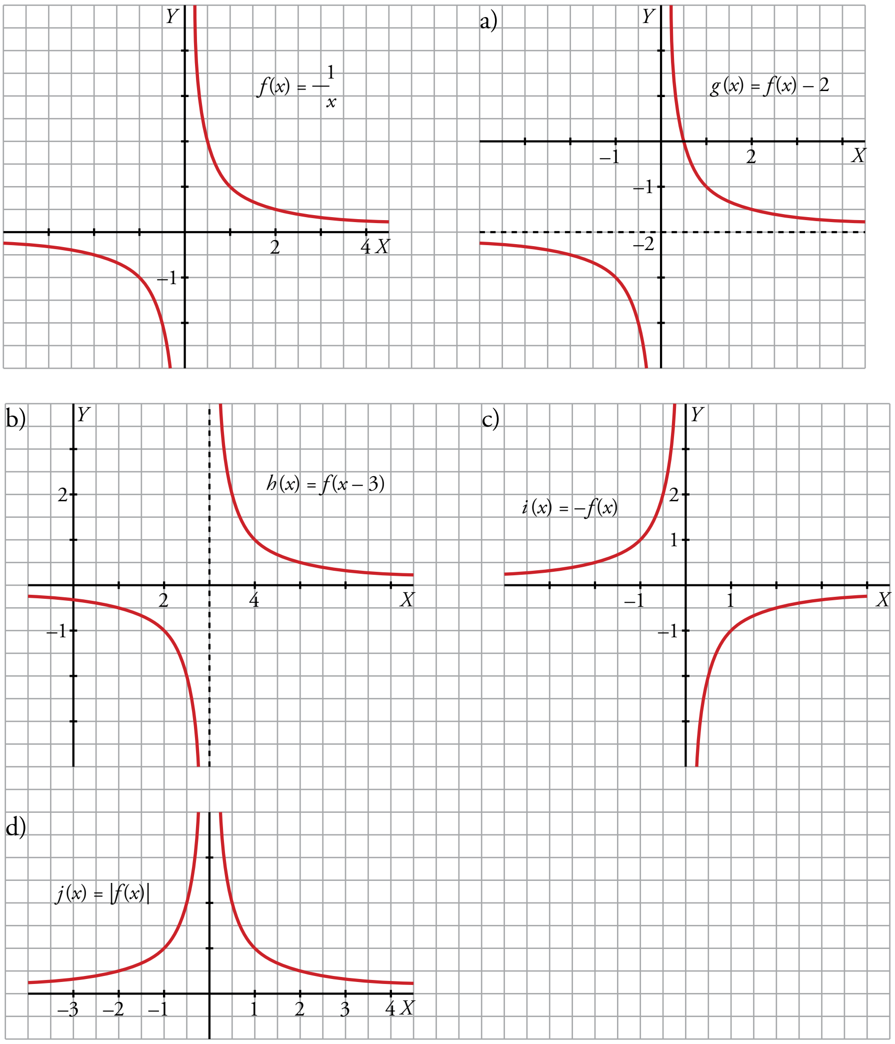


b)



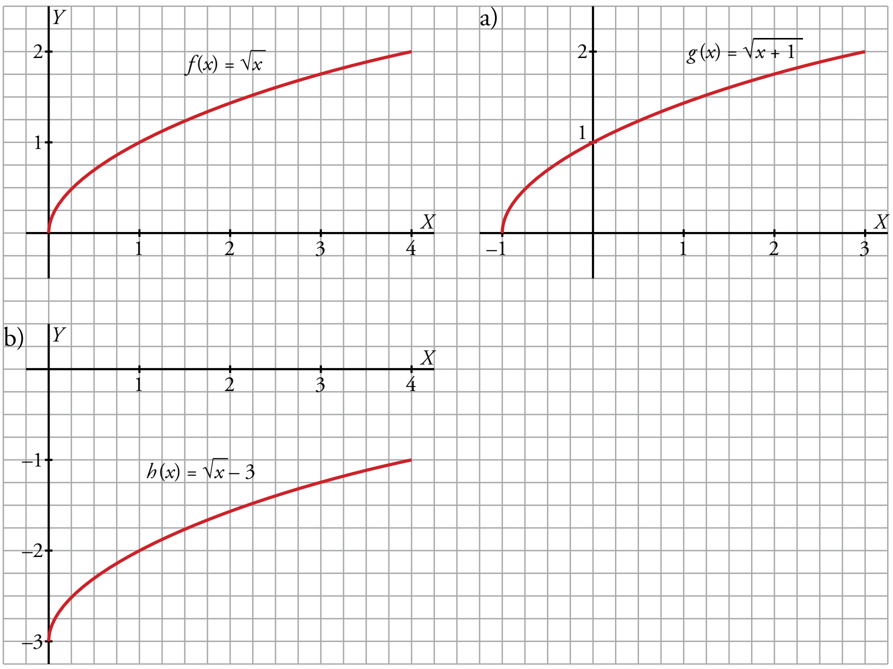
29 **A partir de la gràfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 2$ b) $h(x) = f(x - 3)$ c) $i(x) = -f(x)$ d) $j(x) = |f(x)|$



30 **Representa la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i dibuixa a partir d'aquesta:**

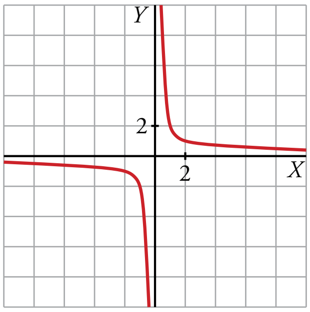
a) $g(x) = f(x + 1)$ b) $h(x) = f(x) - 3$



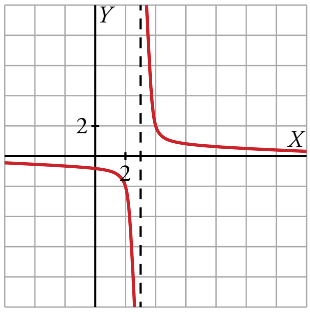
31 **Representa successivament:**

$$y = \frac{2}{x};\quad y = \frac{2}{x-3};\quad y = \frac{2}{x} + 1;\quad y = -\frac{2}{x-3}$$

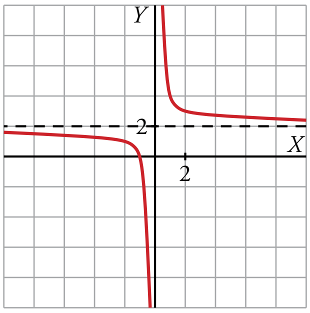
$y = \dfrac{2}{x}$



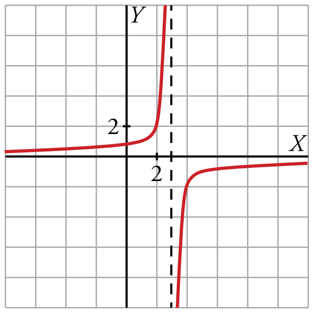
$y = \dfrac{2}{x-3}$



$y = \dfrac{2}{x} + 1$



$y = -\dfrac{2}{x-3}$



32 **A partir de la gràfica de $f(x) = x^2$, representa:**

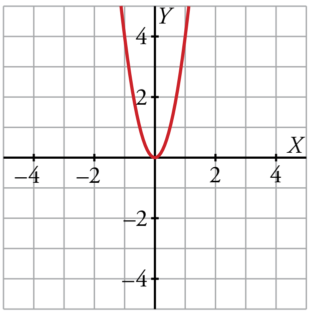
a) $y = f(2x)$

b) $y = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

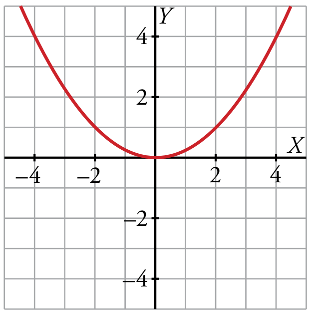
c) $y = 3f(x)$

d) $y = \dfrac{f(x)}{2}$

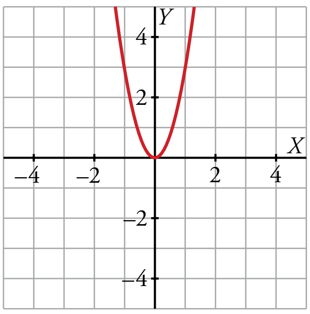
a)



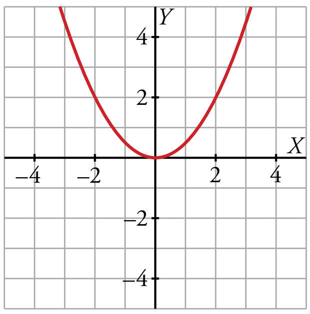
b)



c)



d)



Per resoldre

33 **El percentatge de cases que tenien telèfon mòbil era, el 2006, del 80,5 % i el 2009, del 88,2 %. Estima el percentatge que hi havia el 2008.**

Calculem l'equació de la recta que passa pels punts (2 006; 80,5) i (2 009; 88,2):

$$m = \frac{88,2 - 80,5}{2009 - 2006} = \frac{7,7}{3} = \frac{77}{30} \;\rightarrow\; y = 80,5 + \frac{77}{30}(x - 2006)$$

Avaluem el 2 008 i obtenim l'estimació demanada:

$$x = 2008 \;\rightarrow\; y = 80,5 + \frac{77}{30}(2008 - 2006) = 85,6$$

El 2008, el 85,6 % de les llars tenien telèfon mòbil.

34 **El preu del bitllet d'una línia de rodalies depèn dels quilòmetres recorreguts. Per 57 km he pagat 2,85 euros, i per 168 km, 13,4 euros. Calcula el preu d'un bitllet per a una distància de 100 km.**

$y = 2,85 + 0,095(x - 57)$

$y(100) = 6,94$ euros.

35 **Amb unes despeses en publicitat de 3 000 €, les vendes obtingudes per una empresa han estat de 28 000 €; amb 5 000 € invertits en publicitat, les vendes han pujat a 39 000 €.**

a) Estima, mitjançant interpolació lineal, quines serien les vendes si s'invertissin 4 000 € en publicitat.

b) Si sabem que amb una despesa de 6 000 € s'han obtingut unes vendes de 40 000 €, estima mitjançant interpolació parabòlica las vendes que s'obtindrien invertint 4 000 € en publicitat.

a) Per a una major comoditat, treballarem en milers d'euros.

Calculem l'equació de la recta que passa pels punts (3, 28) i (5, 39):

$$m = \frac{39 - 28}{5 - 3} = \frac{11}{2} \;\rightarrow\; y = 28 + \frac{11}{2}(x - 3)$$

Avaluem en $x = 4$ i obtenim l'estimació demanada:

$$x = 4 \;\rightarrow\; y = 28 + \frac{11}{2} = 33,5$$

Si s'invertissin 4 000 € en publicitat, s'estimarien unes vendes de 33 500 €.

b) Busquem una paràbola que passi pels punts (3, 28), (5, 39) i (6, 40).

Equació de la paràbola: $y = p + m(x - 3) + n(x - 3)(x - 5)$

Passa per (3, 28) $\rightarrow$ $28 = p$

Passa per (5, 39) $\rightarrow$ $39 = p + m(5 - 3)$ $\rightarrow$ $39 = p + 2m$

Passa per (6, 40) $\rightarrow$ $40 = p + m(6 - 3) + n(6 - 3)(6 - 5)$ $\rightarrow$ $40 = p + 3m + 3n$

Obtenim les solucions: $p = 28$, $m = \frac{11}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$

Equació de la paràbola: $y = 28 + \frac{11}{2}(x - 3) - \frac{3}{2}(x - 3)(x - 5)$

$$y(4) = 28 + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}(-1) = 28 + \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 35$$

Si s'invertissin 4 000 € en publicitat, s'estimarien unes vendes de 35 000 €.

36 **Mesurant la temperatura a altures diferents, s'ha observat que per cada 180 m d'ascens el termòmetre baixa 1 °C. Si a la base d'una muntanya de 800 m estem a 10 °C, quina serà la temperatura al cim?**

Representa gràficament la funció *altura-temperatura* i cerca'n l'expressió analítica.

Anomenem x l'altura respecte de la base de la muntanya. La funció que descriu la temperatura en funció de l'altura és una funció lineal que passa pels punts (0, 10) i (180, 9). Per tant:

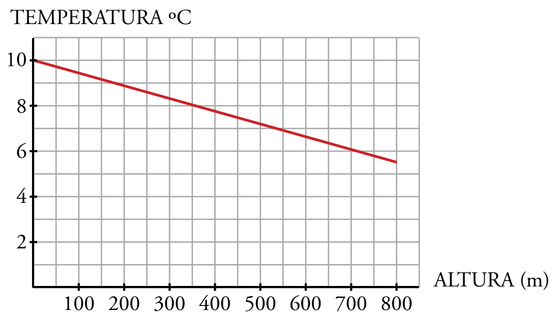
$$m = \frac{9-10}{180} = -\frac{1}{180} \rightarrow y = -\frac{1}{180}x + 10$$

Per obtenir l'altura en el cim avaluem en 800.

$$x = 800 \rightarrow y = -\frac{1}{180}\cdot 800 + 10 = 5{,}56$$

La temperatura en el cim és de 5,56 ºC.

Representem la funció $y = -\frac{1}{180}x + 10$:



37 **A la cuina d'un restaurant, un equip de 2 cuiners és capaç de preparar les comandes per a 30 comensals. Si l'equip és de 4 cuiners, la capacitat s'eleva fins als 50 comensals. I si l'equip arribés a 8 cuiners, es destorbarien els uns als altres i no hi hauria focs per a tots, i per això la capacitat es mantindria en 50 comensals. Estima mitjançant interpolació parabòlica quants comensals podria atendre un equip de 5 cuiners.**

Busquem una paràbola que passi pels punts (2, 30), (4, 50) i (8, 50).

Equació de la paràbola: $y = p + m(x-2) + n(x-2)(x-4)$

Passa per (2, 30) $\rightarrow$ $30 = p$

Passa per (4, 50) $\rightarrow$ $50 = p + m(4-2)$ $\rightarrow$ $50 = p + 2m$

Passa per (8, 50) $\rightarrow$ $50 = p + m(8-2)(8-4)$ $\rightarrow$ $50 = p + 6m + 24n$

Obtenim les solucions: $p = 30,\ \ m = 10,\ \ n = -\frac{5}{3}$

Equació de la paràbola: $y = 30 + 10(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)(x-4)$

$y(5) = 30 + 30 - 5 = 55$

Cinc cuiners podrien atendre 55 comensals.

38 **Un opositor s'enfronta a un temari de 3 100 pàgines. Sap que si estudia 4 hores diàries és capaç de memoritzar 4 pàgines per dia. Si hi dedica 8 hores, aprèn el contingut de 7 pàgines; i si hi dedica 12 hores, arriba a 9 pàgines. Es planteja una jornada diària de 10 hores i vol saber el nombre de dies que li suposarà fer una repassada per primer cop al temari complet. Usa la interpolació parabòlica per respondre-li.**

Busquem una paràbola que passi pels punts (4, 4), (8, 7) i (12, 9).

Equació de la paràbola: $y = p + m(x-4) + n(x-4)(x-8)$

Passa per (4, 4) $\rightarrow$ $4 = p$

Passa per (8, 7) $\rightarrow$ $7 = p + m(8-4)$ $\rightarrow$ $7 = p + 4m$

Passa per (12, 9) $\rightarrow$ $9 = p + m(12-4) + n(12-4)(12-8)$ $\rightarrow$ $9 = p + 8m + 32n$

Obtenim les solucions: $p = 4$, $m = \frac{3}{4}$, $n = -\frac{1}{32}$

Equació de la paràbola: $y = 4 + \frac{3}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)(x-8)$

$y(10) = 4 + \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{1}{32} \cdot 12 = \frac{65}{8}$

$3\,100 : \frac{65}{8} = 381{,}54$

Per fer una primera repassada a les 3 100 pàgines, amb jornades de 10 hores, necessita, aproximadament, 382 dies.

39 **La dosi diària d'un fàrmac és de 10 mg i cada dia ha d'augmentar 2 mg fins a arribar a 20 mg. S'ha de seguir 15 dies amb aquesta quantitat i a partir de llavors anar-la disminuint 4 mg cada dia.**

a) Representa la funció que descriu aquest enunciat i determina'n l'expressió analítica.

b) Digues quins són el domini i el recorregut.

a) En el 5è dia la dosi assoleix els 20 mg i aquest ja és el primer dels 15 dies de tractament amb la dosi màxima. Per tant, el 19è dia és l'últim que pren 20 mg.

L'expressió és $f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 19 \\ 96 - 4x & \text{si } 19 < x \end{cases}$

b) El domi és l'interval [0, 24].

El recorregut és l'interval [0, 20].

Pàgina 132

40 **En les funcions d'oferta i demanda, s'anomena *quantitat d'equilibri* el nombre d'unitats que fa falta produir perquè l'oferta i la demanda s'igualin, $o(x) = d(x)$; i s'anomena *preu d'equilibri* el preu amb el qual s'aconsegueix aquesta igualtat.**

a) Troba el preu i la quantitat d'equilibri d'un producte que té aquestes funcions d'oferta i demanda: $o(x) = 2{,}5x - 100$ i $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d i o en milers d'unitats del producte).

b) Si el preu del producte és de 80 €, n'hi haurà escassetat o excés? I si el preu fos de 120 €?

c) Quin seria el preu i quina la quantitat d'equilibri si les funcions d'oferta i demanda fossin $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ i $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x)$ $\rightarrow$ $2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x$ $\rightarrow$ $x = 100$ € és el preu d'equilibri.

La quantitat d'equilibri és $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ milers d'unitats.

b) Si $x = 80$, hi ha escassetat, perquè la demanda supera l'oferta. Efectivament:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hi ha excés, perquè l'oferta supera la demanda. Efectivament:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

c) $o(x) = d(x) \rightarrow 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ dóna lloc a una única solució possible: $x = 30$ €.

La quantitat d'equilibri és $o(30) = d(30) = 125$ milers d'unitats.

41 **El cost de producció de x unitats d'un producte és igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros i el preu de venda d'una unitat és $50 - (x/4)$ euros.**

a) Escriu la funció que ens dóna el benefici total si es venen les x unitats produïdes, i representa-la.

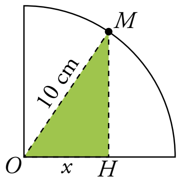
b) Troba el nombre d'unitats que s'han de vendre perquè el benefici sigui màxim.

a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El màxim s'assoleix en el vèrtex de la paràbola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$.

S'han de vendre 15 unitats.

42 **En un quart de circumferència de 10 cm de radi prenem un punt M i construïm el triangle rectangle OMH.**



Expressa l'àrea d'aquest triangle segons la mesura del catet x. Quin és el domini de definició?

Utilizant el teorema de Pitàgores, $\overline{MH} = \sqrt{100 - x^2}$

L'àrea del triangle és la funció $A(x) = \dfrac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$ i el seu domini és l'interval (0, 10) perquè la construcció tingui sentit.

43 **Un fabricant ven mensualment 100 electrodomèstics a 400 euros cada un i sap que per cada 10 euros de pujada vendrà 2 electrodomèstics menys.**

a) Quins seran els ingressos si apuja els preus 50 euros?

b) Escriu la funció que relaciona la pujada de preu amb els ingressos mensuals.

c) Quina ha de ser la pujada perquè els ingressos siguin màxims?

a) En aquest cas vendria 90 electrodomèstics a 450 euros cada un; aleshores els ingressos serien de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

c) El màxim s'assoleix en el vèrtex de la paràbola:

$x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 5$ euros

44 **S'estima que els beneficis mensuals d'una fàbrica de llaminadures, en milers d'euros, vénen donats per la funció $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, quan es venen x tones de producte.**

a) Representa la funció.

b) Calcula la quantitat mínima que s'ha de vendre per no tenir pèrdues.

c) Quantes tones s'han de vendre perquè el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici?

a) La funció és una paràbola oberta cap avall.

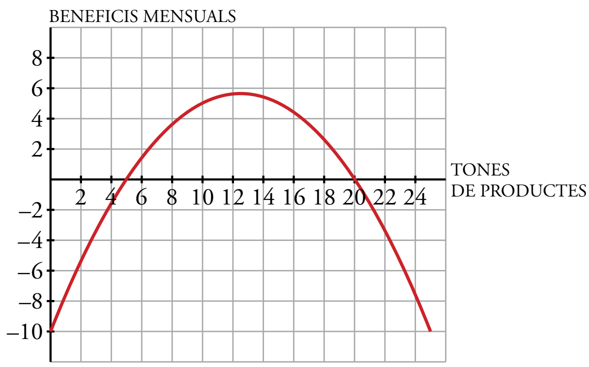
El seu vèrtex és: $x_0 = \dfrac{-2{,}5}{-0{,}2} = 12{,}5 \;\rightarrow\; f(12{,}5) = -0{,}1 \cdot 12{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 12{,}5 - 10 = 5{,}625$

Trobem els punts de tall amb l'eix OX per saber per a quins valors no s'obtenen beneficis.

$y = 0 \;\rightarrow\; -0{,}1 \cdot x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \;\rightarrow\; x = 5,\;\; x = 20$

Talla l'eix vertical en el punt $x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = -10$.

La seva gràfica és:



b) Ha de vendre, com a mínim, 5 tones de producte per no tenir pèrdues.

c) El benefici màxim l'obté venent 12,5 tones de producte i és de 5 625 €.

45 **Una discoteca obre a les 10 de la nit i tanca quan se'n van tots els clients. La funció que ens dóna el nombre de clients, N, segons el nombre d'hores que està oberta, t, és $N(t) = 80t - 10t^2$.**

a) Representa la funció.

b) A quina hora el nombre de clients és màxim?

c) A quina hora tancarà la discoteca?

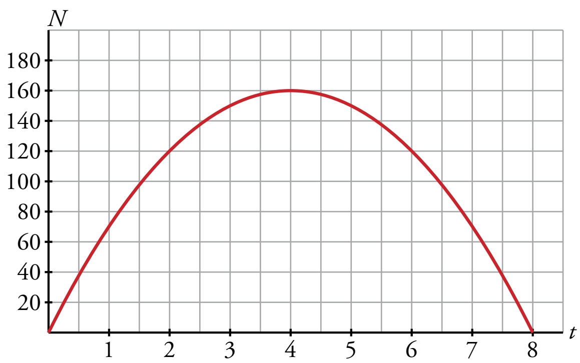
a) La funció és una paràbola oberta cap avall.

El seu vèrtex és: $t_0 = \dfrac{-80}{-20} = 4 \;\rightarrow\; N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$

Trobem els punts de tall amb l'eix OX per saber quan no hi ha clients.

$N(t) = 0 \;\rightarrow\; 80t - 10t^2 = 0 \;\rightarrow\; t = 0,\;\; t = 8$

La seva gràfica és:



b) El nombre de clients és màxim, 160, quan fa 4 hores que està oberta, a les 2 del matí.

c) La discoteca tancarà 8 hores després d'obrir; és a dir, a les 6 del matí.

46 **El percentatge d'alumnes que assisteixen a un curs d'anglès de 10 mesos de durada ve donat per la funció:**

$$P(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases} \quad t, \text{ en mesos}$$

Sabem que, inicialment, el 100 % dels alumnes assisteix al curs; que, transcorregut un mes, hi assisteix el 60 % i que en complir-se el tercer mes, l'assistència es redueix al 28 %. Calcula a, b, c i representa la funció.

Les dades del problema reflecteixen que $P(0) = 100$, $P(1) = 60$ i $P(3) = 28$. Per tant,

$$\left.\begin{aligned} a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 100 \\ a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 60 \\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 28 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} c = 100 \\ a + b + c = 60 \\ 9a + 3b + c = 28 \end{aligned}\right\} \to a = 8,\ b = -48,\ c = 100$$

La funció és:

$$P(t) = \begin{cases} 8t^2 - 48t + 100 & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases}$$

El primer tros és part d'una paràbola el vèrtex de la qual és:

$$t_0 = \frac{48}{16} = 3 \to P(3) = 28; \text{ és a dir, el punt } (3, 28).$$

El segon tros és una funció constant.

La gràfica és:

47 **Els beneficis esperats d'una empresa en els pròxims 10 anys, en milions d'euros, vénen donats per la funció $G(t) = -2t^2 + 20t + 5$; t, en anys.**

a) Representa la funció. b)Quan seran màxims els beneficis?

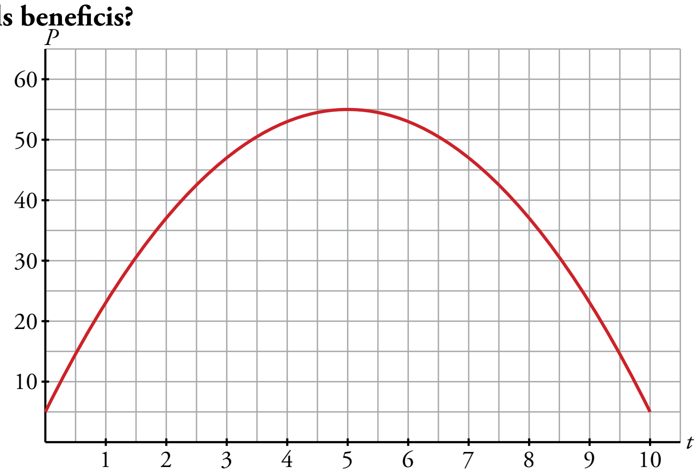
a) La funció és una paràbola amb les branques obertes cap avall. El seu vèrtex és:

$$t_0 = \frac{-20}{-4} = 5 \to G(5) = -2\cdot 5^2 + 20\cdot 5 + 5 = 55$$

Avaluem en els extrems de l'interval de definició:

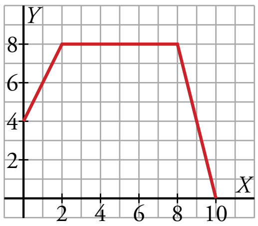
$G(0) = 5$

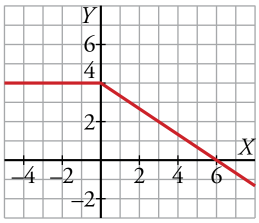
$G(10) = -2\cdot 10^2 + 20\cdot 10 + 5 = 5$

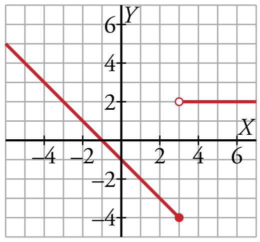


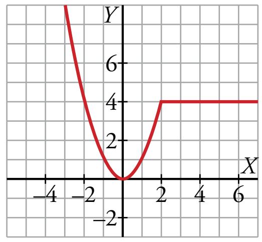
b) Els beneficis seran màxims d'aquí a 5 anys i tindran un valor de 55 milions d'euros.

48 Obtén l'expressió analítica de les funcions següents:

a) 

b) 

c) 

d) 

a) Primer tros: $m = 2 \rightarrow y = 2x + 4$

Segon tros: $y = 8$

Tercer tros: $m = -4 \rightarrow y = 8 + (-4)(x - 8) \rightarrow y = 40 - 4x$

La funció és: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 8 & \text{si } 2 \le x < 8 \\ 40 - 4x & \text{si } 8 \le x \le 10 \end{cases}$

b) Primer tros: $y = 4$

Segon tros: $m = -\dfrac{2}{3} \rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + 4$

La funció és: $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{2x}{3} + 4 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

c) Primer tros: $m = -1 \rightarrow y = -x - 1$

Segon tros: $y = 2$

La funció és: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) Primer tros: $y = x^2$

Segon tros: $y = 4$

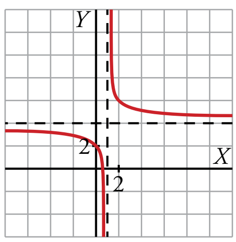
La funció és: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

49 Representa les funcions següents partint d'una de més senzilla i realitzant-hi transformacions:

a) $y = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$ **b)** $y = \dfrac{x - 2}{x - 4}$ **c)** $y = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

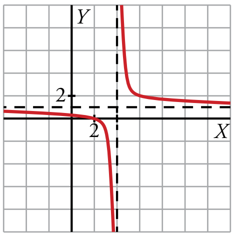
a) $y = \dfrac{3x - 2}{x - 1} = 3 + \dfrac{1}{x - 1}$

Es representa $\dfrac{1}{x} \rightarrow$ Es trasllada una unitat a la dreta i s'obté $\dfrac{1}{x - 1} \rightarrow$ Es trasllada tres unitats cap amunt i s'obté $y = 3 + \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$.



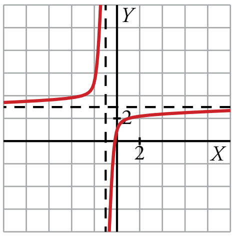
b) $y = \dfrac{x-2}{x-4} = 1 + \dfrac{2}{x-4}$

Es representa $\dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ Es traslladа 4 unitats a la dreta i s'obté $\dfrac{1}{x-4}$ $\rightarrow$ S'estira en sentit vertical multiplicant per 2 i s'obté $\dfrac{2}{x-4}$ $\rightarrow$ Finalment es trasllada una unitat cap amunt i s'obté $y = 1 + \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{x-2}{x-4}$.



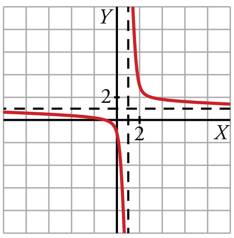
c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1} = 3 + \dfrac{-1}{x+1}$

Es representa $\dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ Es trasllada una unitat a l'esquerra i s'obté $\dfrac{1}{x+1}$ $\rightarrow$ Es fa la seva simètrica respecte a l'eix X i s'obté $\dfrac{-1}{x+1}$ $\rightarrow$ Finalment es trasllada 3 unitats cap amunt i s'obté $y = 3 + \dfrac{-1}{x+1} = \dfrac{3x+2}{x+1}$.



d) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

Es representa $\dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ Es trasllada una unitat a la dreta i s'obté $\dfrac{1}{x-1}$ $\rightarrow$ S'estira en sentit vertical multiplicant per 2 i s'obté $\dfrac{2}{x-1}$ $\rightarrow$ Finalment es trasllada una unitat cap amunt i s'obté $y = 1 + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

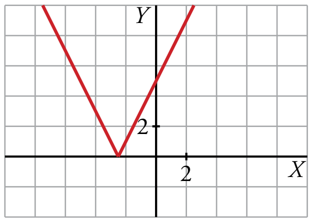


50 **Representa les funcions següents i defineix-les com a funcions «a trossos»:**

a) $y = |2x + 5|$ **b)** $y = |4 - x^2|$ **c)** $y = \left|\frac{3}{2}x - 3\right|$ **d)** $y = |-x^2 + 2x + 3|$

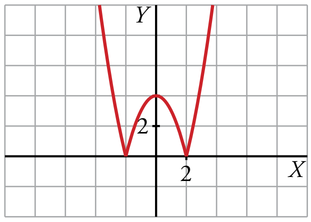
a) $2x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

$$y = |2x+5| = \begin{cases} -(2x+5) & \text{si } x < -\frac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \ge -\frac{5}{2} \end{cases} = \begin{cases} -2x-5 & \text{si } x < -\frac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \ge -\frac{5}{2} \end{cases}$$



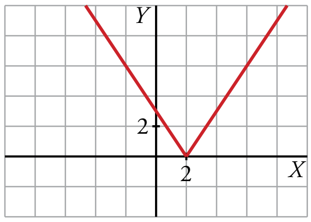
b) $4 - x^2 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$$y = |4-x^2| = \begin{cases} -(4-x^2) & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -(4-x^2) & \text{si } 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} -4+x^2 & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -4+x^2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



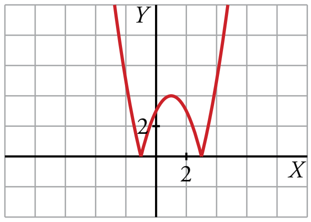
c) $\frac{3}{2}x - 3 = 0 \rightarrow x = 2$

$$y = \left|\frac{3}{2}x-3\right| = \begin{cases} -\left(\frac{3}{2}x-3\right) & \text{si } x < 2 \\ \frac{3}{2}x-3 & \text{si } 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} -\frac{3}{2}x+3 & \text{si } x < 2 \\ \frac{3}{2}x-3 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



d) $-x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 3$

$$y = |-x^2+2x+3| = \begin{cases} -(-x^2+2x+3) & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ -(-x^2+2x+3) & \text{si } 3 \le x \end{cases} = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x^2-2x-3 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$$



Pàgina 133

Qüestions teòriques

51 **Cert o fals?**

a) La funció $y = \sqrt{a - x}$ **no existeix si** $a < 0$**.**

b) Una funció no pot tallar l'eix Y **en dos punts.**

c) Podem obtenir la gràfica de $y = \sqrt{x+3}$ **traslladant tres unitats cap amunt la gràfica de** $y = \sqrt{x}$**.**

d) La gràfica de $y = mx^2 + n$ **és una recta.**

e) La paràbola $y = 3x^2$ **és més estreta que** $y = x^2$**.**

a) Fals. Perquè aquesta funció existeixi, el seu radicand ha de ser més gran o igual que 0. Per tant:

$a - x \ge 0 \rightarrow x \le a \rightarrow Dom = (-\infty, a]$

La funció té aquest domini de definició al marge del signe de a.

b) Cert. Una funció pren un únic valor de y per a cada valor de x. Prendrà un únic valor quan $x = 0$ i, per tant, només pot tallar en un punt l'eix Y.

c) Fals. La gràfica de $y = \sqrt{x+3}$ és la gràfica de $y = \sqrt{x}$ desplaçada 3 unitats a l'esquerra.

d) Fals. Si $m = 0$, la gràfica sí que és una recta paral·lela a l'eix X; però, si és $m \ne 0$, la seva gràfica és una paràbola pel fet de ser una funció quadràtica.

e) Cert.

52 **Quants punts de tall poden tenir les funcions donades en cada cas? Justifica la resposta amb exemples gràfics.**

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 1/x \\ y = ax + b \end{cases}$

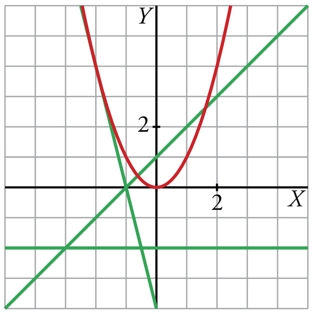
a) Pot tenir com a màxim dues solucions, depenent de la posició relativa de la paràbola i la recta. És a dir, el sistema pot tenir 0, 1 o 2 solucions.

Des d'un altre punt de vista, l'equació $x^2 = ax + b$ pot tenir 0, 1 o 2 solucions.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No té solució.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Té una solució, (–2, 4).

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Té dues solucions, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.



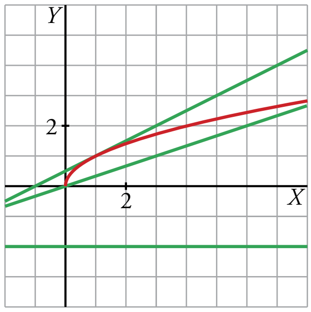
b) Aquest cas és anàleg a l'anterior. En funció de la posició relativa de la semiparàbola i la recta, el sistema pot tenir 0, 1 o 2 solucions.

L'equació $\sqrt{x} = ax + b$ pot tenir, com a màxim, dues solucions.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No té solució.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{2}(x+1) \end{array}\right\}$ Té una solució, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Té dues solucions, (0, 0) i (9, 3).



c) El sistema dóna lloc a una equació de segon grau, com podem veure.

$\frac{1}{x} = ax + b \rightarrow x(ax + b) = 1 \rightarrow ax^2 + bx - 1 = 0$

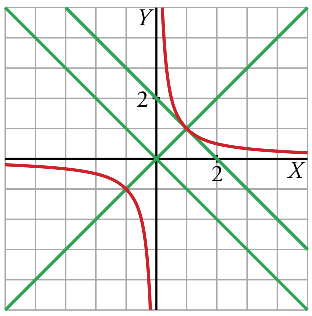
Per tant, igual que en els casos anteriors, pot tenir, com a màxim, dues solucions.

També pot interpretar-se des del punt de vista de la posició relativa d'una hipèrbola i una recta.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\}$ No té solució.

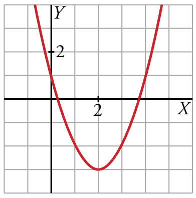
$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Té una solució, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\}$ Té dues solucions, (1, 1) i (–1, –1).



53 **L'expressió analítica d'aquesta funció és del tipus $y = (x - m)^2 + n$.**

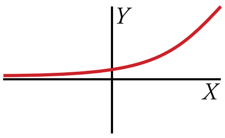
Observa la gràfica i digues el valor de m i n.



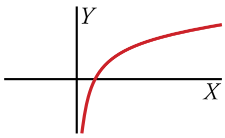
Com que el vèrtex de la funció és el punt (2, –3), la gràfica és el resultat de desplaçar la gràfica de la funció $y = x^2$ tres unitats cap avall i dues unitats cap a la dreta. Per tant, $m = 2$ i $n = -3$.

54 **Quin és el domini de definició i el recorregut d'aquestes funcions?:**

a)



b)



a) Domini: $\mathbb{R}$

Recorregut: $(0, +\infty)$

b) Domini: $(0, +\infty)$

Recorregut: $\mathbb{R}$

Per aprofundir

55 **Defineix per intervals i representa.**

a) $y = |x - 4| - |x|$

b) $y = |x + 1| + |x - 3|$

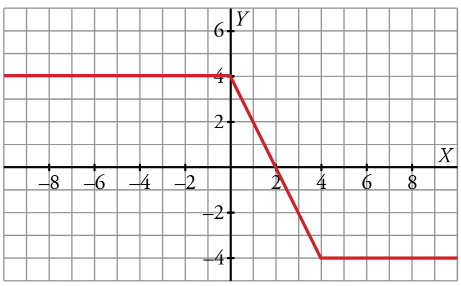
c) $y = |2x - 4| - |x - 1|$

a) Estudiem la funció en els intervals els extrems dels quals són els punts on s'anul·la cada un dels valors absoluts que se sumen:

	$x \le 0$	$0 \le x \le 4$	$4 \le x$
$\|x - 4\|$	$-x + 4$	$4 - x$	$x - 4$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x - 4\| - \|x\|$	4	$-2x + 4$	-4

Per tant:

$$y = |x - 4| - |x| = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 0 \\ -2x + 4 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ -4 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

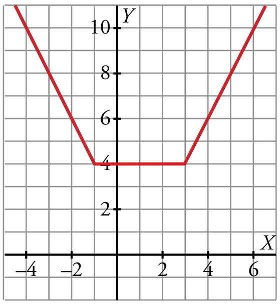


b) Estudiem la funció en els intervals els extrems dels quals són els punts on s'anul·la cada un dels valors absoluts que s'operen.

	$x \le -1$	$-1 \le x \le 3$	$3 \le x$
$\lvert x+1 \rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-3 \rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\lvert x+1 \rvert + \lvert x-3 \rvert$	$-2x+2$	4	$2x-2$

Per tant:

$$y = |x+1| + |x-3| = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x \le -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x-2 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$$

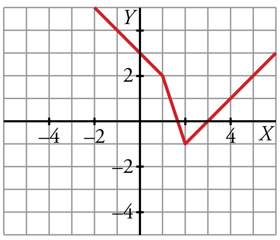


c) Estudiem la funció en els intervals els extrems dels quals són els punts on s'anul·la cada un dels valors absoluts que s'operen.

	$x \le 1$	$1 \le x \le 2$	$2 \le x$
$\lvert 2x-4 \rvert$	$-2x+4$	$-2x+4$	$2x-4$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\lvert 2x-4 \rvert - \lvert x-1 \rvert$	$-x+3$	$-3x+5$	$x-3$

Per tant:

$$y = |2x-4| - |x-1| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \le 1 \\ -3x+5 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x-3 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



56 Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) Hem de resoldre la inequació $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$, tenint en compte, a més, que $x \neq 2$ perquè no es produeixi una divisió entre 0 en avaluar la funció:

	$(-\infty, -3]$	$[-3, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 2$	–	–	+
$\dfrac{x+3}{x-2}$	+	–	+

$\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0 \rightarrow Dom = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) Anàlogament, hem de resoldre la inequació $\dfrac{x-9}{x} \geq 0$ tenint en compte, a més, que $x \neq 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 9]$	$[9, +\infty)$
$x - 9$	–	–	+
x	–	+	+
$\dfrac{x-9}{x}$	+	–	+

$\dfrac{x-9}{x} \geq 0 \rightarrow Dom = (-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

57 L'evolució mensual del nombre de socis d'un club, durant un any, ve donada per la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 50 & \text{si } 6 < x \leq 8 \\ x^2 - 20x + 146 & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases} \quad x, \text{ en mesos}$$

a) Troba a sabent que el club es va fundar amb 50 socis.

b) Representa la funció i digues en quin mes el nombre de socis va ser màxim i en quin mes va ser mínim.

c) Si per cobrir despeses el club necessita tenir més de 47 socis, en quin mes va tenir pèrdues?

a) Com que el club es va fundar amb 50 socis, tenim que $f(0) = 50$. Per tant, $f(0) = a = 50$.

b) • El primer tros és una paràbola oberta cap avall el vèrtex de la qual és:

$x_0 = \dfrac{-6}{-2} = 3 \rightarrow f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 50 = 59 \rightarrow (3, 59)$

Avaluem en els extrems de l'interval de definició: $f(0) = 50$, $f(6) = 50$

• El segon tros és constant, $y = 50$.

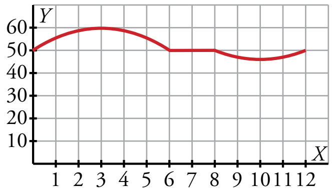
• El tercer tros és una paràbola oberta cap amunt el vèrtex de la qual és:

$x_0 = \dfrac{20}{2} = 10 \rightarrow f(10) = 10^2 - 20 \cdot 10 + 146 = 46 \rightarrow (10, 46)$

Avaluem en els extrems de l'interval de definició:

$f(8) = 8^2 - 20 \cdot 8 + 146 = 50$, $f(12) = 50$

La gràfica és:



El nombre de socis va ser màxim en el mes número 3, amb 59 socis, i mínim en el mes número 10, amb 46 socis.

c) Va obtenir pèrdues en el mes número 10.

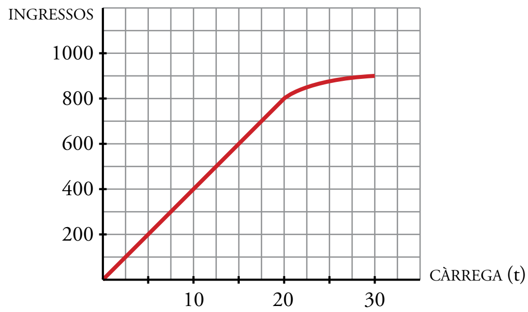
58 **Las tarifes d'una empresa de transports són:**

- **40 € per tona de càrrega si aquesta és menor o igual a 20 t.**
- **Si la càrrega és més gran que 20 t, es restarà, dels 40 euros, tants euros com tones sobrepassin les 20.**

a) Dibuixa la funció *ingressos de l'empresa segons la càrrega que transporti* (càrrega màxima: 30 t).

b) Obtén-ne l'expressió analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si} \quad 0 \le x \le 20 \\ [40 - (x - 20)] & \text{si} \quad 20 < x \le 30 \end{cases}$

És a dir:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si} \quad 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2 & \text{si} \quad 20 < x \le 30 \end{cases}$$

Autoavaluació

1 Troba el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = x^3 - x^2$ **b)** $y = \dfrac{3x}{(2x-6)^2}$ **c)** $y = \sqrt{4-2x}$ **d)** $y = \sqrt{5x - x^2}$

a) En ser una funció polinòmica, el seu domini és tot $\mathbb{R}$.

b) El seu domini és tot $\mathbb{R}$, excepte els punts que anul·len el denominador.

$(2x-6)^2 = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

Per tant: $Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

c) El seu domini són els punts que fan que el radicand no sigui negatiu.

$4 - 2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq \dfrac{4}{2} = 2$

Per tant: $Dom\ y = (-\infty, 2]$

d) Igual que en l'apartat anterior:

$5x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(5-x) \geq 0$

Això passa si:

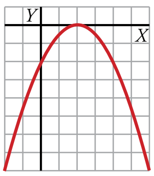
- $x \geq 0$ y $5 - x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$ y $x \leq 5 \rightarrow x \in [0, 5]$
- $x \geq 0$ y $5 - x \leq 0 \rightarrow x \leq 0$ y $x \geq 5 \rightarrow$ Això no és possible.

Per tant: $Dom\ y = [0, 5]$

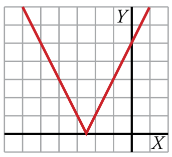
2 Representa les funcions següents:

a) $y = -0{,}5x^2 + 2x - 2$ **b)** $y = |5 + 2x|$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

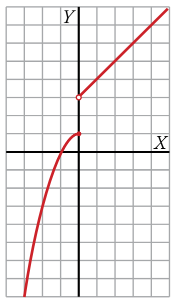
a)



b)



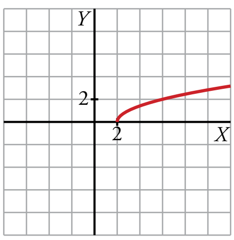
c)



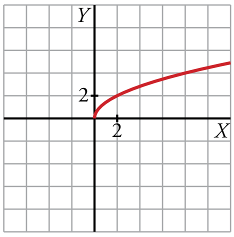
3 A partir de les gràfiques de $y = \sqrt{x}$ i $y = \dfrac{1}{x}$, representa:

a) $y = \sqrt{x-2}$ **b)** $y = \sqrt{2x}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x+2}$ **d)** $y = \dfrac{x-2}{x-3}$

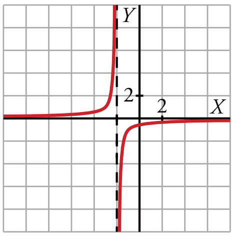
a) Es trasllada $\sqrt{x}$ dues unitats a la dreta.



b) S'estira en sentit vertical $\sqrt{x}$, multiplicant per 2.

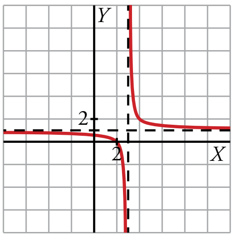


c) Es trasllada $\frac{1}{x}$ dues unitats a l'esquerra i s'obté $\frac{1}{x+2}$ $\rightarrow$ Es fa la seva simètrica respecte de l'eix X i s'obté $y = \frac{-1}{x+2}$.



d) $y = \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$

Es trasllada $\frac{1}{x}$ tres unitats a la dreta i s'obté $\frac{1}{x-3}$ $\rightarrow$ Es trasllada una unitat cap amunt i s'obté $y = 1 + \frac{1}{x-3} = \frac{x-2}{x-3}$.



4 **Assistir a un gimnàs durant 6 mesos ens costa 246 €. Si hi assistim 15 meses, el preu és 570 €. Quant haurem de pagar si hi volem anar durant un any?**

Fem una interpolació lineal. Trobem la recta que passa pels punts (6, 246) i (15, 570).

El seu pendent és $m = \frac{570-246}{15-6} = \frac{324}{9} = 36$

Per tant, l'equació de la recta és:

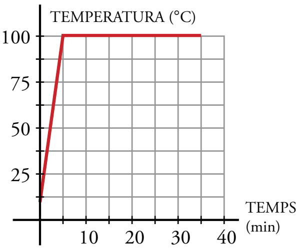
$$y = 36(x-6) + 246 \rightarrow y = 36x + 30$$

D'aquesta manera, si volem saber quant s'ha de pagar si anem al gimnàs durant un any (12 mesos), fem:

$$y(12) = 36 \cdot 12 + 30 = 462$$

Caldrà pagar 462 €.

5 Posem al foc un perol amb aigua a 10 °C. En 5 minuts arriba als 100 °C i es manté així durant mita hora, fins que l'aigua s'evapora totalment. Representa la funció que descriu aquest fenomen i troba'n l'expressió analítica.



- La gràfica passa pels punts (0, 10) i (5, 100).
- Trobem l'equació d'aquesta recta:

Pendent: $\dfrac{100-10}{5-0} = 18 \rightarrow y = 18(x-0) + 10$

- Per a valors de x més grans que 5, la temperatura es manté constant $\rightarrow y = 100$

Expressió analítica: $f(x) = \begin{cases} 18x+10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$

6 El preu de venda d'un article ve donat per l'expressió $p = 12 - 0{,}01x$ (x = nombre d'articles fabricats; p = preu, en centenars d'euros).

a) Si es venen 500 articles, quins seran els ingressos?

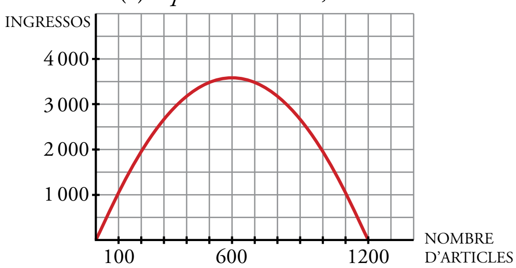
b) Representa la funció *nombre d'articles-ingressos*.

c) Quants articles s'han de fabricar perquè els ingressos siguin màxims?

a) Si es venen 500 articles, el seu preu serà:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ centenars d'euros $\rightarrow$ Ingressos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Trobem el vèrtex de la paràbola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ articles} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ centenars d'euros} \end{cases}$$

S'han de fabricar 600 articles per obtenir uns ingressos màxims (360 000 euros).