1 Composició de funcions

Pàgina 136

1 **Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén les expressions de $f[g(x)]$ i $g[f(x)]$.**

Troba $f[g(4)]$ i $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2 = x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 30x + 9$

$f[g(4)] = 179;\ g[f(4)] = 1$

2 **Si $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x + 4$, obtén les expressions de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$.**

Troba el valor d'aquestes funcions en $x = 0$ i $x = 5$.

$f \circ g(x) = f(x + 4) = \sqrt{x+4}$

$g \circ f(x) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + 4$

$f \circ f(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

$g \circ g(x) = g(x + 4) = x + 4 + 4 = x + 8$

$f \circ g(0) = \sqrt{4} = 2$ $\qquad$ $f \circ g(5) = \sqrt{5+4} = 3$

$g \circ f(0) = 4$ $\qquad$ $g \circ f(5) = \sqrt{5} + 4$

$f \circ f(0) = 0$ $\qquad$ $f \circ f(5) = \sqrt[4]{5}$

$g \circ g(0) = 8$ $\qquad$ $g \circ g(5) = 13$

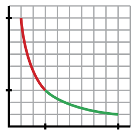
2 Funció inversa o recíproca d'una altra

Pàgina 137

3 Cert o fals?

a) La funció recíproca de $y = x$ és $y = \dfrac{1}{x}$.

b) Cadascuna de les funcions $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$ és recíproca de si mateixa.



c) La inversa de $y = \dfrac{9}{x}$, $x \in [3, 9]$ és $y = \dfrac{9}{x}$, $x \in [1, 3]$.

d) Si una funció és creixent, la recíproca és decreixent.

a) Fals. Les gràfiques d'aquestes funcions no són simètriques respecte de la bisectriu del primer quadrant, ja que una és recta i l'altra és corba.

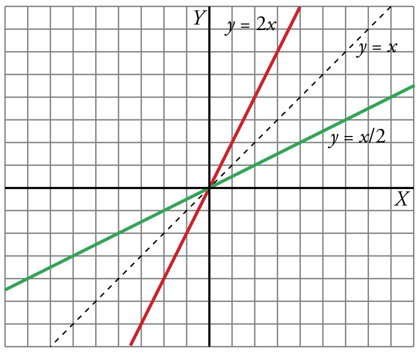
b) Cert. Si $f(x) = x$ i calculem $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(x) = x$, veiem que f és recíproca de si mateixa.

Anàlogament, si $g(x) = \dfrac{1}{x}$ i calculem $g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1/x} = x$, veiem que g és recíproca de si mateixa.

c) Cert. Podem comprovar-ho en la gràfica. La gràfica verda és simètrica, respecte de la bisectriu del primer quadrant, de la gràfica vermella.

d) Fals. Per exemple, la recíproca de la funció $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, és la funció $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, i totes dues són creixents.

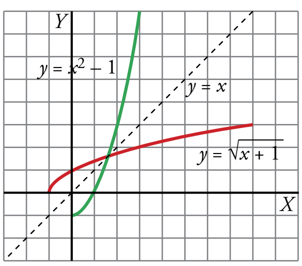
4 Representa $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$ i comprova que són inverses.



5 Comprova que s'ha de descompondre $y = x^2 - 1$ en dues branques per trobar-ne les inverses. Digues quines són.

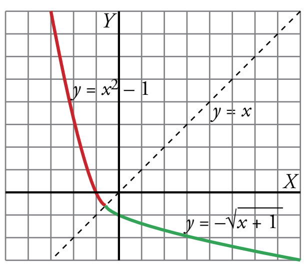
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x+1}$



b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x+1}$



6 **Comprova que la funció recíproca de $y = 2x + 4$ és $y = \frac{1}{2}x - 2$.**

Anomenem $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x + 4) = \frac{1}{2}(2x + 4) - 2 = x$$

Aleshores $g = f^{-1}$.

Pàgina 138

7 **Troba l'expressió analítica de la funció inversa de:**

a) $f(x) = \frac{x-5}{2},\ x \in [3, 13]$ **b)** $g(x) = \frac{2-x}{3},\ x \in [-7, 14]$

a) $y = \frac{x-5}{2} \to x = \frac{y-5}{2} \to y = 2x + 5$

$f(3) = \frac{3-5}{2} = -1;\ f(13) = \frac{13-5}{2} = 4$

Per tant, $f^{-1}(x) = 2x + 5,\ x \in [-1, 4]$

b) $y = \frac{2-x}{3} \to x = \frac{2-y}{3} \to y = 2 - 3x$

$g(-7) = \frac{2-(-7)}{3} = 3;\ g(14) = \frac{2-14}{3} = -4$

Per tant, $g^{-1}(x) = 2 - 3x,\ x \in [-4, 3]$

8 **La funció $y = x^2 - 2x$ té dues branques: una de decreixent per a $x \le 1$, i una altra de creixent per a $x \ge 1$.**

Expressa-la com dues funcions $f_1(x)$ y $f_2(x)$ i troba la funció inversa de cadascuna.

$$\left.\begin{array}{l} y = f_1(x) = x^2 - 2x,\ x \le 1 \\ y = f_2(x) = x^2 - 2x,\ x \ge 1 \end{array}\right\} f_1(1) = f_2(1) = -1$$

Ara calculem les seves inverses:

$$y = x^2 - 2x \to x = y^2 - 2y \to y^2 - 2y - x = 0 \to y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4x}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+x}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+x}$$

Per tant:

- La inversa de $y = f_1(x) = x^2 - 2x,\ x \le 1$ es $y = 1 - \sqrt{1+x},\ x \ge -1$
- La inversa de $y = f_2(x) = x^2 - 2x,\ x \ge 1$ es $y = 1 + \sqrt{1+x},\ x \ge -1$

3 Funcions exponencials

Pàgina 140

9 **La massa de fusta d'un bosc augmenta en un 40 % cada 100 anys. Si prenem com a unitat de massa vegetal (biomassa) la que hi havia l'any 1800, que considerem l'instant de partida, i com a unitat de temps 100 anys, la funció $M = 1{,}4^t$ ens dóna la quantitat de massa vegetal, M, en un instant qualsevol, t, expressat en *segles a partir de 1800* (raona per què).**

a) Esbrina quan hi haurà una massa de fusta que tripliqui la de l'any 1800 $(1{,}4^t = 3)$ i quan n'hi havia la tercera part. Observa que els dos períodes de temps són iguals.

b) Calcula la quantitat de fusta que hi haurà, o hi havia, el 1900, el 1990, el 2000, el 1600 i el 1550.

$M = 1{,}4^t$

a) • Busquem el valor de t per al qual $1{,}4^t = 3$:

$$1{,}4^t = 3 \rightarrow ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3) \rightarrow t\,ln\,(1{,}4) = ln\,(3) \rightarrow t = \frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx 3{,}27$$

Quan passin $3{,}27 \cdot 100 = 327$ anys, s'haurà triplicat la massa de fusta. És a dir, en l'any $1800 + 327 = 2127$.

• Busquem el valor de t per al qual $1{,}4^t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$:

$$1{,}4^t = 3^{-1} \rightarrow ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3)^{-1} \rightarrow t\,ln\,(1{,}4) = -ln\,(3) \rightarrow t = -\frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx -3{,}27$$

Fs $3{,}27 \cdot 100 = 327$ anys, hi havia la tercera part de massa de fusta. És a dir, en l'any $1800 - 327 = 1473$.

b) $1900 \rightarrow t = 1 \rightarrow M = 1{,}4^1 = 1{,}4$

$$1990 \rightarrow t = \frac{1990-1800}{100} = 1{,}9 \rightarrow M = 1{,}4^{1{,}9} \approx 1{,}90$$

$$2000 \rightarrow t = \frac{2000-1800}{100} = 2 \rightarrow M = 1{,}4^2 = 1{,}96$$

$$1600 \rightarrow t = \frac{1600-1800}{100} = -2 \rightarrow M = 1{,}4^{-2} \approx 0{,}51$$

$$1550 \rightarrow t = \frac{1550-1800}{100} = -2{,}5 \rightarrow M = 1{,}4^{-2{,}5} \approx 0{,}43$$

10 **Comprova que, en l'exemple anterior referent a la desintegració d'una substància radioactiva determinada, $M = m \cdot 0{,}76^t$ (t expressat en milers d'anys), el *període de semidesintegració* (temps que la substància radioactiva tarda a reduir-se a la meitat) és de, aproximadament, 2500 anys.**

Per a això, comprova que una quantitat inicial qualsevol es redueix a la meitat (aproximadament) al cap de 2500 anys $(t = 2{,}5)$.

$M = m \cdot 0{,}76^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } t = 0 \rightarrow M = m \cdot 0{,}76^0 = m \\ \text{Si } t = 0{,}25 \rightarrow M = m \cdot 0{,}76^{2{,}5} \approx m \cdot 0{,}5 = \frac{m}{2} \end{array}\right\}$$

La quantitat inicial s'ha reduït (aproximadament) a la meitat en 2 500 anys.

4 Funcions logarítmiques

Pàgina 141

11 Cert o fals?

La funció recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ és $y = \log_2 x$, $x > 1$.

Fals. La funció recíproca de $y = 2^x, x > 0$ és $y = log_2 x$, $x > 0$.

12 Troba la funció recíproca de:

$$y = log_2 x, \quad x \in [8, 32]$$

La funció recíproca és $y = 2^x$, $x \in [3, 5]$.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 146

1. Composició de funcions

Fes-ho tu. **Troba $f \circ g$ y $g \circ f$ sent $f(x) = 3x^2 - 5$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$.**

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{2x-1}) = 3\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 - 5 = 3(2x-1) - 5 = 6x - 8$$

$$g \circ f(x) = g\,[f(x)] = g(3x^2 - 5) = \sqrt{2(3x^2-5)-1} = \sqrt{6x^2-11}$$

2. Reconèixer funcions compostes

Fes-ho tu. **A partir de les funcions f, g, h definides aquí dalt, obtén:**

$$f(x) = 1 + 2^x \qquad g(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad h(x) = \frac{1}{x^2}$$

a) $q(x) = \sqrt{(1+2^x)^2+1}$

b) $r(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $q(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(1 + 2^x) = \sqrt{(1+2^x)^2+1}$

b) $r(x) = (h \circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}$

3. Funció inversa d'una altra

Fes-ho tu. **Obtén la funció inversa de:**

a) $p(x) = 3^{x-2}$ **b) $q(x) = log_2\,(x+1)$** **c) $r(x) = \dfrac{2}{x+4}$**

a) $y = 3^{x-2} \rightarrow x = 3^{y-2} \rightarrow log_3\, x = y - 2 \rightarrow y = 2 + log_3\, x \rightarrow p^{-1}(x) = 2 + log_3\, x$

b) $y = log_2\,(x+1) \rightarrow x = log_2\,(y+1) \rightarrow 2^x = y + 1 \rightarrow y = 2^x - 1 \rightarrow q^{-1}(x) = 2^x - 1$

c) $y = \dfrac{2}{x+4} \rightarrow x = \dfrac{2}{y+4} \rightarrow y + 4 = \dfrac{2}{x} \rightarrow y = \dfrac{2}{x} - 4 \rightarrow r^{-1}(x) = \dfrac{2-4x}{x}$

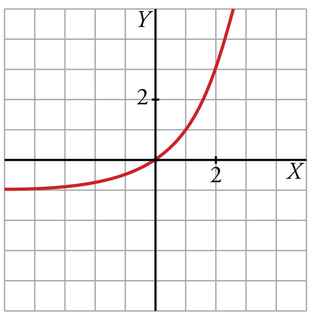
Pàgina 147

4. Gràfics de funcions exponencials i logarítmiques

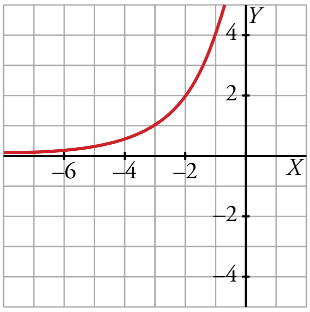
Fes-ho tu. **Representa:**

a) $y = 2^x - 1$ **b) $y = 2^{x+3}$** **c) $y = log_2\,(x-2)$** **d) $y = log_2\,(-x)$**

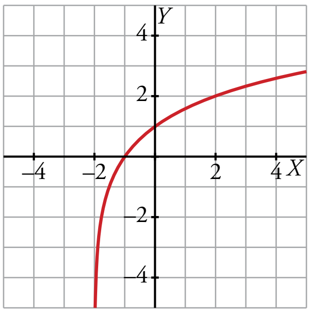
a) S'obté desplaçant $y = 2^x$ una unitat cap avall.



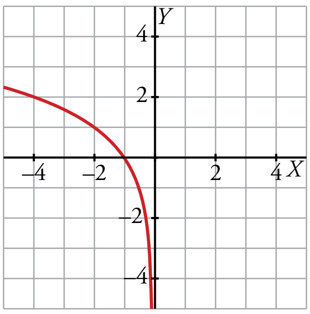
b) S'obté desplaçant $y = 2^x$ tres unitats cap a l'esquerra.



c) S'obté traslladant la funció $y = log_2\, x$ dues unitats a l'esquerra.



d) És la simètrica de la funció $y = log_2\, x$ respecte de l'eix Y.



6. Funció logarítmica

Fes-ho tu. Troba a i b perquè la gràfica de la funció $y = -2 + log_b\,(x + a)$ passi per (1, 0) i (–1, –1).

- Passa per (1, 0) $\rightarrow$ $0 = -2 + log_b\,(1 + a) \rightarrow log_b\,(1 + a) = 2 \rightarrow 1 + a = b^2$
- Passa per (–1, –1) $\rightarrow$ $-1 = -2 + log_b\,(-1 + a) \rightarrow log_b\,(-1 + a) = 1 \rightarrow -1 + a = b$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a = b^2 - 1 \\ a = b + 1 \end{array}\right\} \rightarrow b^2 - 1 = b + 1 \rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \rightarrow b = -1,\ b = 2$$

El resultat $b = -1$ no té sentit perquè la base d'un logaritme no pot ser negativa.

Si $b = 2 \rightarrow a = 3 \rightarrow$, la funció és $y = -2 + log_2\,(x + 3)$.

Pàgina 148

7. Graus i radians

Fes-ho tu.

a) Expressa en radians 150°, 180° y 240°.

b) Expressa en graus $\frac{3\pi}{2}$ rad y $\frac{5\pi}{4}$ rad.

a) $150° = 5 \cdot 30° = 5 \cdot \frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{5\pi}{6}$ rad

$180° = \pi$ rad

$240° = 8 \cdot 30° = 8 \cdot \frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{4\pi}{3}$ rad

b) $\frac{3\pi}{2}$ rad $= \frac{3}{2} \cdot 180° = 270°$

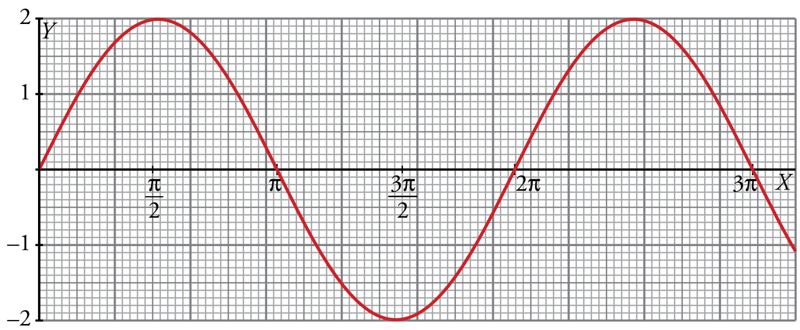
$\frac{5\pi}{4}$ rad $= \frac{5}{4} \cdot 180° = 225°$

8. Funció sinus

Fes-ho tu. **Representa la funció:**

$$y = 2 \sin x$$

Aquesta es la gràfica de la funció sinus estirada al doble en el sentit vertical.

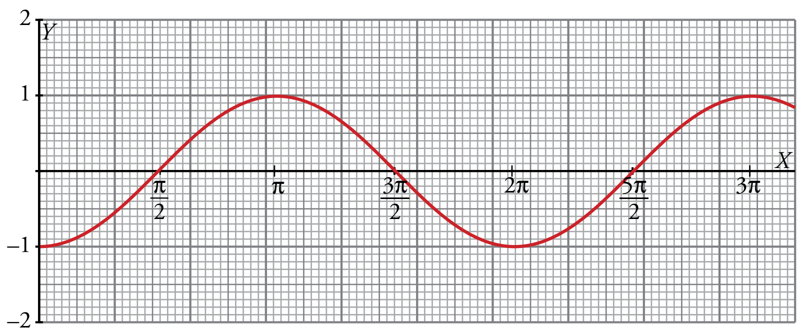


9. Funció cosinus

Fes-ho tu. **Representa la funció:**

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Aquesta es la gràfica de la funció sinus desplaçada $\frac{\pi}{2}$ unitats a la dreta.

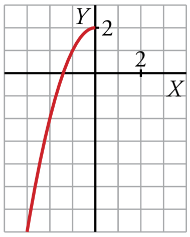


Exercicis i problemes guiats

Pàgina 149

1. Funció inversa

Aquesta és la gràfica de la funció $f(x) = 2 - x^2,\ x \le 0$



a) Dóna'n el domini de definició i el seu recorregut.

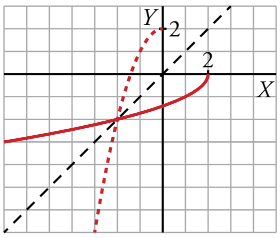
b) Representa'n la funció inversa.

c) Troba l'expressió analítica de $f^{-1}(x)$.

a) Domini de $f = (-\infty, 0]$

Recorregut de $f = (-\infty, 2]$

b)



c) $y = 2 - x^2 \ \rightarrow\ x = 2 - y^2 \ \rightarrow\ y^2 = 2 - x \ \rightarrow\ y = \pm\sqrt{2 - x}$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{2 - x},\ x \le 2$

2. Interès compost

Dipositem en un banc 5 000 € al 4,8 % anual amb un pagament trimestral d'interessos.

a) Quin serà el capital acumulat al cap de 3 anys?

b) Escriu la funció que ens diu en quant es transforma aquest capital al cap de t anys.

a) $i = \dfrac{4,8}{100} \ \rightarrow\ i_t = \dfrac{4,8}{400} = 0,012 \ \rightarrow$ Índex de variació trimestral = 1 + 0,012 = 1,012

Com que 3 anys, són 12 trimestres, $C_{final} = 5\,000 \cdot 1,012^{12} = 5\,769,50$ €

b) Com que t anys té $4t$ trimestres, la funció que ens dóna el capital final és:

$f(t) = 1\,000 \cdot 1,012^{4t} = 1\,000 \cdot (1,012^4)^t = 1\,000 \cdot 1,049^t$

3. Depreciació

Una màquina que va costar 20 000 € es deprecia a un ritme del 10 % anual.

a) Quin serà el valor d'aquí a 4 anys?

b) Quants anys han de passar perquè el valor sigui de 12 000 €?

c) Escriu la funció que dóna el nombre d'anys que han de passar per arribar a un valor x.

a) L'índex de variació d'una depreciació del 10 % és $1 - \dfrac{10}{100} = 0,9$.

Al cap de 4 anys el valor serà $5\,000 \cdot 0,9^4 = 3\,280,50$ €.

b) La funció que ens dóna el valor depreciat és $f(t) = 5\,000 \cdot 0,9^t$.

Ara resolem l'equació:

$$12\,000 = 20\,000 \cdot 0,9^t \ \rightarrow\ \frac{12\,000}{20\,000} = 0,9^t \ \rightarrow\ 0,6 = 0,9^t \ \rightarrow\ \log 0,6 = t\log 0,9 \ \rightarrow\ t = \frac{\log 0,6}{\log 0,9} = 4,85$$

Per tant, han de passar 5 anys.

c) $$x = 20\,000 \cdot 0,9^t \ \rightarrow\ \frac{x}{20\,000} = 0,9^t \ \rightarrow\ \log \frac{x}{20\,000} = t\log 0,9 \ \rightarrow\ t = \frac{\log \frac{x}{20\,000}}{\log 0,9} \ \rightarrow\ t = \frac{\log x - \log 20\,000}{\log 0,9}$$

4. Funció logística

La funció

$$f(x) = \frac{12\,000}{1 + 499(1{,}09^{-x})}$$

dóna les vendes totals d'un videojoc x dies després de ser llançat. Quin dia es va arribar a 6 000 jocs venuts?

Hem de trobar el valor de x tal que:

$$\frac{12\,000}{1+499\,(1{,}09^{-x})} = 6\,000 \rightarrow \frac{12\,000}{6\,000} = 1 + 499(1{,}09^{-x}) \rightarrow 2 - 1 = 499(1{,}09^{-x}) \rightarrow \frac{1}{499} = 1{,}09^{-x}$$

Prenent logaritmes i aïllant:

$$\frac{\log 499}{\log 1{,}09} = x \rightarrow x = 72 \text{ dies}$$

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 150

Per practicar

Composició de funcions

1 **Donades les funcions $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x^2$, troba:**

a) $f[g(2)]$ **b)** $g[f(-4)]$ **c)** $f[g(x)]$ **d)** $g[f(x)]$

a) $f[g(2)] = f(2 \cdot 2^2) = f(8) = 8 + 3 = 11$

b) $g[f(-4)] = g(-4 + 3) = g(-1) = 2 \cdot (-1)^2 = 2$

c) $f[g(x)] = f(2x^2) = 2x^2 + 3$

d) $g[f(x)] = g(x + 3) = 2(x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 18$

2 **Considera les funcions f i g definides per $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Calcula:**

a) $(f \circ g)(2)$ **b)** $(g \circ f)(-3)$ **c)** $(g \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

b) $(g \circ f)(-3) = g[f(-3)] = g[(-3)^2 + 1] = g(10) = \frac{1}{10}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

d) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1 + x^2}{x^2}$

3 **Si $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = x^2 - 2x$, obtén l'expressió de les funcions següents:**

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ f$ **d)** $g \circ g$

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2x^2 - 4x + 3$

b) $g \circ f(x) = g[2x + 3] = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

c) $f \circ f(x) = f(2x + 3) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

d) $g \circ g(x) = g(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$

4 **Donades les funcions $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, troba:**

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$ **c)** $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = 3\sqrt{x} + 2$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x + 2) = \sqrt{3x + 2}$

c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

5 **Donades les funcions**

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{3}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x-3}$$

obtén les expressions de:

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ h$

d) $g \circ h$ **e)** $h \circ f$ **f)** $h \circ g$

Troba, si és possible, el valor de les funcions obtingudes per a $x = 5$ i $x = 0$.

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \left(\dfrac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \dfrac{9}{(x-2)^2} + 1 = \dfrac{x^2 - 4x + 13}{(x-2)^2}$

$f \circ g(5) = \dfrac{5^2 - 4 \cdot 5 + 13}{(5-2)^2} = 2$

$f \circ g(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 + 13}{(0-2)^2} = \dfrac{13}{4}$

b) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = \dfrac{3}{x^2 + 1 - 2} = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$g \circ f(5) = \dfrac{3}{5^2 - 1} = \dfrac{1}{8}$

$g \circ f(0) = \dfrac{3}{0^2 - 1} = -3$

c) $f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\sqrt{x-3}\right) = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 + 1 = x - 2$

$f \circ h(5) = 5 - 2 = 3$

$f \circ h(0) = 0 - 2 = -2$

d) $g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\sqrt{x-3}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{x-3} - 2}$

$g \circ h(5) = \dfrac{3}{\sqrt{5-3} - 2} = \dfrac{3}{\sqrt{2} - 2}$

$g \circ h(0)$ no existeix.

e) $h \circ f(x) = h[f(x)] = h(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 3} = \sqrt{x^2 - 2}$

$h \circ f(5) = \sqrt{5^2 - 2} = \sqrt{23}$

$h \circ f(0)$ no existeix.

f) $h \circ g(x) = h[g(x)] = h\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2} - 3} = \sqrt{\dfrac{-3x+9}{x-2}}$

$h \circ g(5)$ no existeix.

$h \circ g(0)$ no existeix.

6 **Amb les funcions $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ i $g(x) = x - 2$, hem obtingut, per composició, les funcions $p(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ i $q(x) = \dfrac{1}{x^2} - 2$. Indica quina correspon a $f \circ g$ i quina a $g \circ f$.**

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x-2) = \dfrac{1}{(x-2)^2} = p(x)$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2} - 2 = q(x)$

7 **Explica com, a partir de les funcions**

$$f(x) = 2^{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

es poden obtenir aquestes altres:

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$ b) $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$ c) $p(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$ e) $r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ f) $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$

a) $m(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x} + 2) = 2^{\sqrt{x}+2-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

c) $p(x) = g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3}-1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = h \circ g(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{x} + 2) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2-3} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

f) $s(x) = h \circ g \circ f(x) = h \circ g[f(x)] = h \circ g(2^{x-1}) = h(\sqrt{2^{x-1}} + 2) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}+2-3} = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

8 **Considera aquestes funcions:**

$$f(x) = x - 5 \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = \frac{1}{x+2}$$

Explica com, a partir de *f*, *g* i *h*, es poden obtenir, per composició, *p*, *q* i *r*:

$$p(x) = \sqrt{x-5}; \quad q(x) = \sqrt{x} - 5; \quad r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x-5) = \sqrt{x-5} = p(x)$

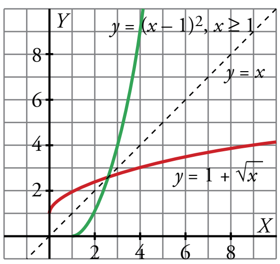
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} - 5 = q(x)$

$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = r(x)$

Funció inversa d'una altra

9 **Donada $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, troba $f^{-1}(x)$. Representa f i f^{-1} i comprova'n la simetria respecte de $y = x$.**

$y = 1 + \sqrt{x} \;\rightarrow\; x = 1 + \sqrt{y} \;\rightarrow\; (x-1)^2 = y \;\rightarrow\; f^{-1}(x) = (x-1)^2$



10 **Troba la funció inversa de les funcions següents:**

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = \dfrac{x+3}{2}$

c) $y = \sqrt{2x+1}$ **d)** $y = 1 + 2^x$

e) $y = 2 + \log_3 x$ **f)** $y = 4 - x^2,\ x \geq 0$

a) $y = 3x - 2 \ \rightarrow\ x = 3y - 2 \ \rightarrow\ y = \dfrac{x+2}{3}$

b) $y = \dfrac{x+3}{2} \ \rightarrow\ x = \dfrac{y+3}{2} \ \rightarrow\ y = 2x - 3$

c) $y = \sqrt{2x+1} \ \rightarrow\ x = \sqrt{2y+1} \ \rightarrow\ y = \dfrac{x^2-1}{2}$

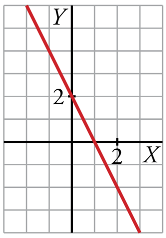
d) $y = 1 + 2^x \ \rightarrow\ x = 1 + 2^y \ \rightarrow\ y = \log_2(x-1)$

e) $y = 2 + \log_3 x \ \rightarrow\ x = 2 + \log_3 y \ \rightarrow\ y = 3^{x-2}$

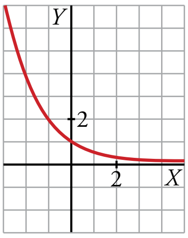
f) $y = 4 - x^2,\ x > 0 \ \rightarrow\ x = 4 - y^2 \ \rightarrow\ y = \sqrt{4-x},\ x \leq 4$

11 **Representa gràficament la funció inversa en cada cas:**

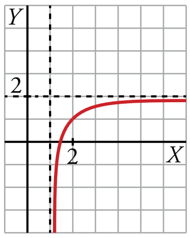
a)



b)

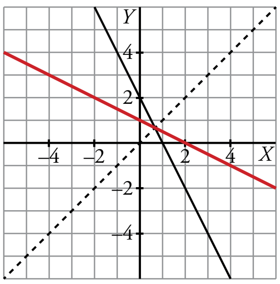


c)

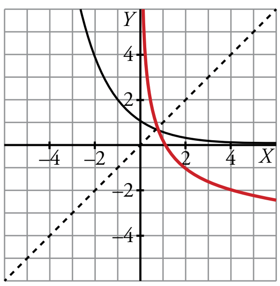


Fem una simetria respecte de la bisectriu del primer quadrant per dibuixar la funció inversa.

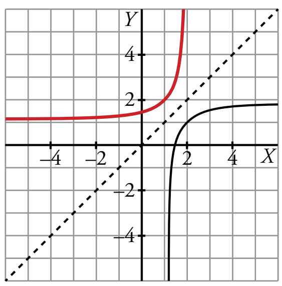
a)



b)



c)



12 **Comprova si cada parell de funcions són una inversa de l'altra. Per a això calcula $f \circ f^{-1}$ o bé $f^{-1} \circ f$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2};\ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3};\ f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + \log_2 \dfrac{x}{3};\ f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

a) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - 2 + 2} = x$

b) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\ [f(x)] = f(\sqrt{2x+3}) = \dfrac{(\sqrt{2x+3})^2 + 2}{3} = \dfrac{2x+5}{3}$

En aquest cas no és cert que les funcions siguin recíproques. f^{-1} és incorrecta.

c) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(1 + \log_2 \dfrac{x}{3}\right) = 3 \cdot 2^{1 + \log_2[(x/3) - 1]} = 3 \cdot 2^{\log_2 (x/3)} = 3 \cdot \dfrac{x}{3} = x$

13 **Considera la funció $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2, 7]$.**

a) Quin és el recorregut?

b) Obtén-ne la funció inversa i determina el domini de definició i el recorregut d'aquesta.

a) Com que la funció és creixent, calculem els valors en els extrems de l'interval.

$x = -2 \rightarrow y = \sqrt{-2+2} = 0$

$x = 7 \rightarrow y = \sqrt{7+2} = 3$

El recorregut és l'interval [0, 3].

b) $y = \sqrt{x+2} \rightarrow x = \sqrt{y+2} \rightarrow y = x^2 - 2,\ x \in [0, 3]$ és la funció inversa.

El seu domini és l'interval [0, 3] i el recorregut és l'interval [–2, 7].

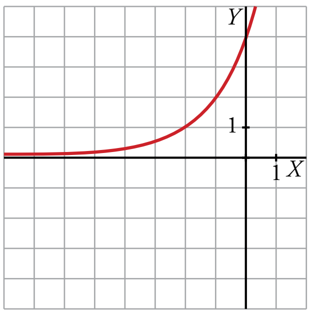
Funcions exponencials i logarítmiques

14 **Representa aquestes funcions a partir de la gràfica de $y = 2^x$:**

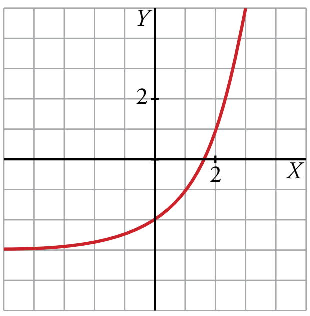
a) $y = 2^{x+2}$ **b)** $y = 2^x - 3$ **c)** $y = 2^{x/2}$

d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ **e)** $y = 1 - 2^x$ **f)** $y = 2^{2-x}$

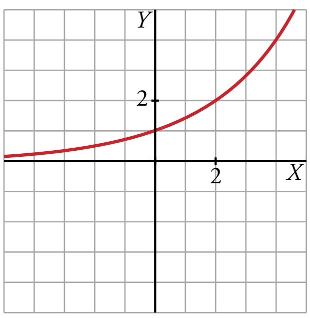
a) És la gràfica de la funció $y = 2^x$ desplaçada dues unitats a l'esquerra.



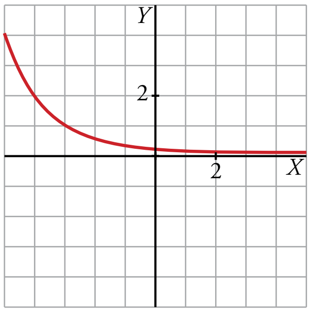
b) És la gràfica de la funció $y = 2^x$ desplaçada tres unitats cap avall.



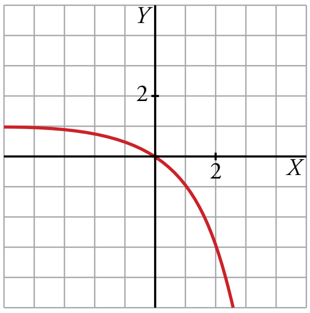
c) És la gràfica de la funció $y = 2^x$ estirada el doble en el sentit horitzontal.



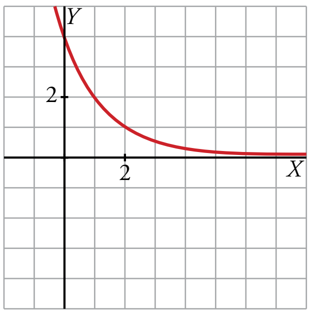
d) És la simètrica respecte a l'eix Y de la gràfica de la funció $y = 2^x$, i desplaçada tres unitats a l'esquerra.



e) És la simètrica respecte a l'eix X de la gràfica de la funció $y = 2^x$, i desplaçada una unitat cap amunt.



f) És la simètrica respecte a l'eix Y de la gràfica de la funció $y = 2^x$, i desplaçada dues unitats cap a la dreta.



15 **Representa les funcions següents a partir de la gràfica de $y = log_2\, x$:**

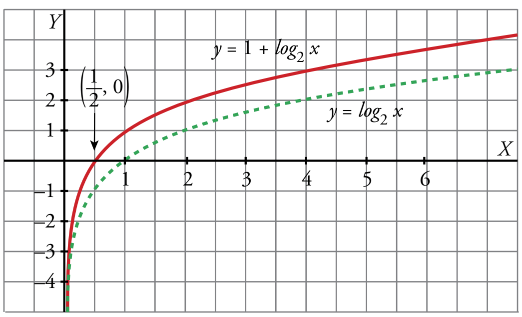
a) $y = 1 + log_2\, x$

b) $y = log_2\, (x - 1)$

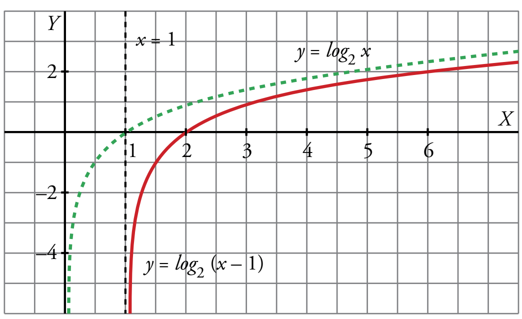
c) $y = 2 - log_2\, x$

d) $y = log_2\, (-x)$

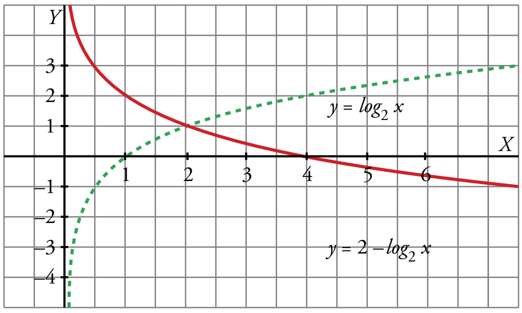
a)



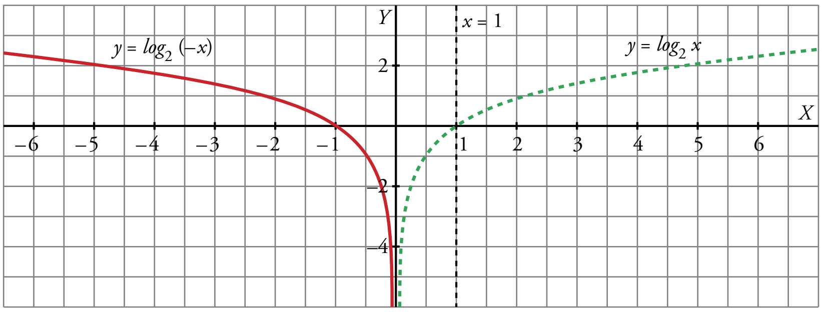
b)



c)



d)



16 **Amb ajuda de la calculadora, representa aquestes funcions:**

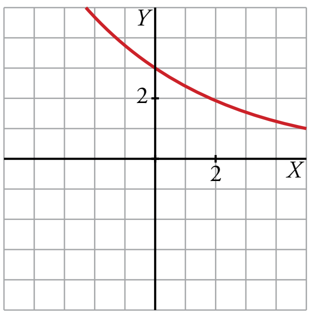
a) $y = 3 \cdot 0{,}8^x$

b) $y = (1/2) \cdot 1{,}8^x$

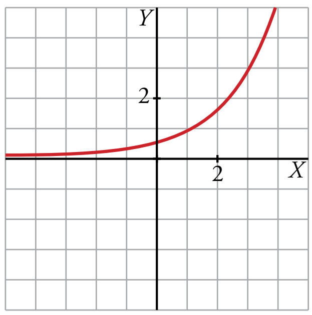
c) $y = ln\,(2x)$

d) $y = ln\,(x + 1)$

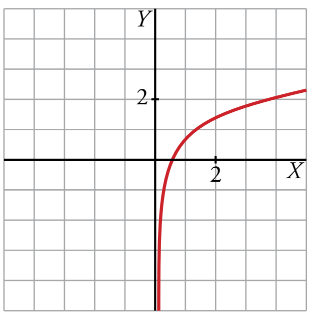
a)



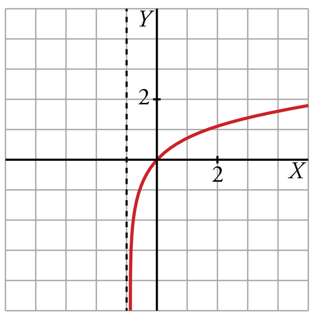
b)



c)



d)

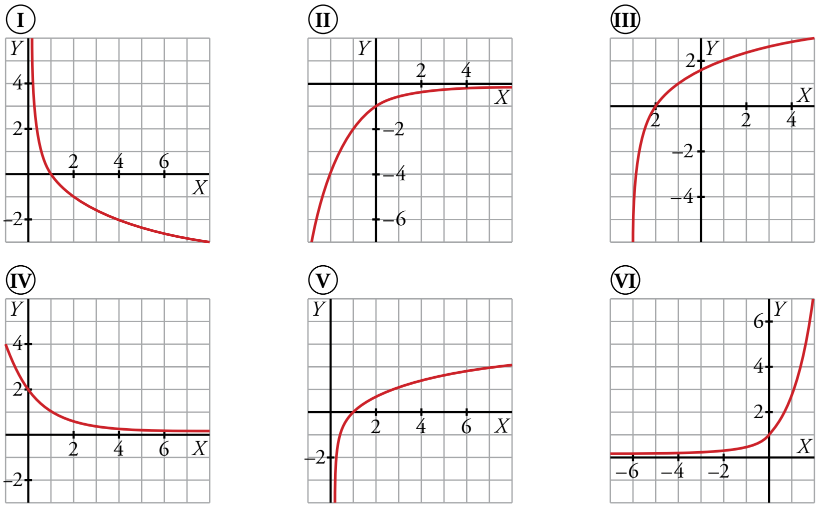


Pàgina 151

17 **Associa cada una de les expressions següents amb la gràfica que li correspon:**

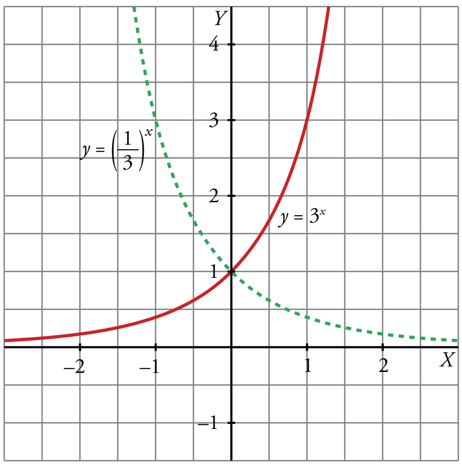
a) $y = \ln x$ b) $y = 2^{1-x}$ c) $y = e^x$

d) $y = -\log_2 x$ e) $y = -(1/2)^x$ f) $y = \log_2 (x+3)$



a) $\rightarrow$ V b) $\rightarrow$ IV c) $\rightarrow$ VI d) $\rightarrow$ I e) $\rightarrow$ II f) $\rightarrow$ III

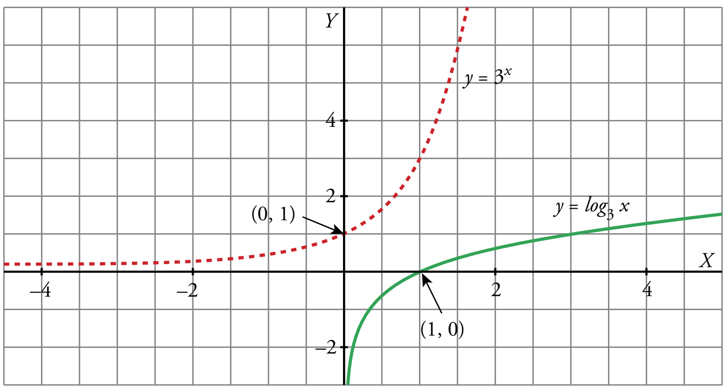
18 **Comprova que les gràfiques de** $y = 3^x$ **i** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **són simètriques respecte a l'eix** OY.



19 **Fes una taula de valors de la funció** $y = 3^x$. **A partir d'aquesta, representa la funció** $y = \log_3 x$.

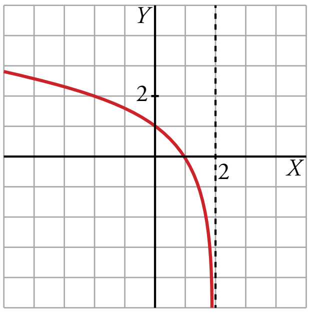
x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$\log_3 x$	–2	–1	0	1	2



20 **Quin és el domini de $y = log_2\,(2 - x)$? Representa-la.**

$2 - x > 0 \;\rightarrow\; Dom = (-\infty, 2)$



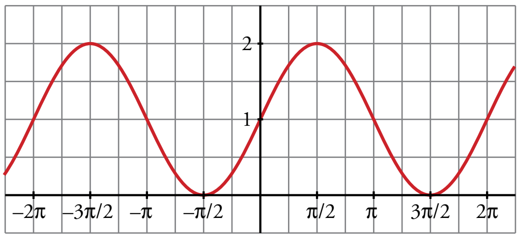
Funcions trigonomètriques

21 **Representa aquestes funcions:**

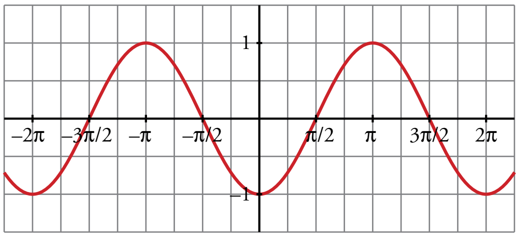
a) $y = 1 + sin\,x$

b) $y = -cos\,x$

a)

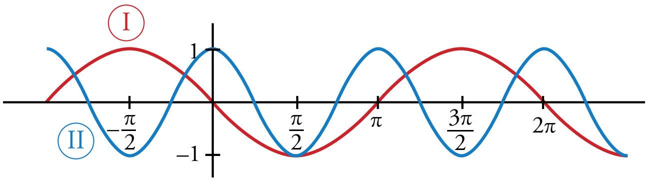


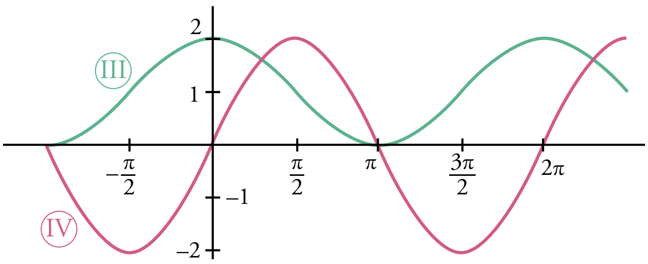
b)



22 **Associa cada una de les funcions següents amb la gràfica que li correspon:**

a) $y = cos\,2x$ **b)** $y = -sin\,x$ **c)** $y = 2sin\,x$ **d)** $y = 1 + cos\,x$





a) → II b) → I c) → IV d) → III

Per resoldre

23 **Troba la funció inversa de les funcions següents i digues-ne, en cada cas, el domini de definició:**

a) $y = \dfrac{3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ **c)** $y = 1 + \dfrac{2}{x}$

d) $y = \sqrt{x^2+4},\ x \ge 0$ **e)** $y = 2x^3 - 1$ **f)** $y = x^2 - 4,\ x \le 0$

a) $y = \dfrac{3}{x+2} \rightarrow x = \dfrac{3}{y+2} \rightarrow y + 2 = \dfrac{3}{x} \rightarrow y = \dfrac{3}{x} - 2$

Per tant, $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x} - 2,\ x \ne 0$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}} \rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{y-3}} \rightarrow y - 3 = \dfrac{1}{x^2} \rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} + 3$

Per tant, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3,\ x \ne 0$

c) $y = 1 + \dfrac{2}{x} \rightarrow x = 1 + \dfrac{2}{y} \rightarrow x - 1 = \dfrac{2}{y} \rightarrow y = \dfrac{2}{x-1}$

Per tant, $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x-1},\ x \ne 1$

d) $y = \sqrt{x^2+4} \rightarrow x = \sqrt{y^2+4} \rightarrow x^2 = y^2 + 4 \rightarrow y = \pm\sqrt{x^2-4}$

Per tant, $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-4},\ x \ge 2$

e) $y = 2x^3 - 1 \rightarrow x = 2y^3 - 1 \rightarrow x + 1 = 2y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$

Per tant, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}},\ x \in \mathbb{R}$

f) $y = x^2 - 4 \rightarrow x = y^2 - 4 \rightarrow x + 4 = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{x+4}$

Per tant, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4},\ x \ge -4$

24 **Representa i troba la funció inversa en cada cas.**

a) $y = 3 + 2^{x-1}$

b) $y = 0{,}2 \cdot 2^{3-x}$

c) $y = 1{,}8 \cdot 5^{0{,}2x}$

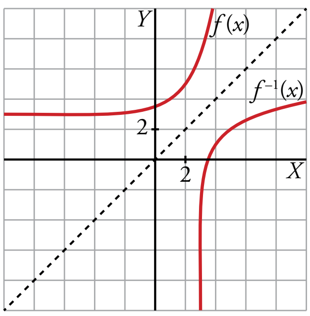
d) $y = 1 + \log_2 (x+4)$

e) $y = \ln (3x+2)$

f) $y = 2{,}5 \cdot e^{-x/2}$

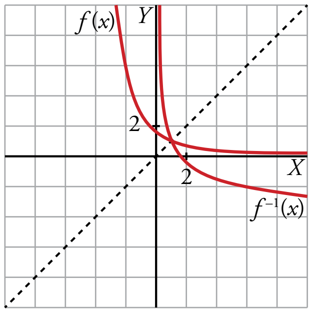
a) $y = 3 + 2^{x-1} \rightarrow x = 3 + 2^{y-1} \rightarrow x - 3 = 2^{y-1} \rightarrow y = \log_2 (x-3) + 1$

$f^{-1}(x) = \log_2 (x-3) + 1$



b) $y = 0{,}2 \cdot 2^{3-x} \rightarrow x = 0{,}2 \cdot 2^{3-y} \rightarrow \dfrac{x}{0{,}2} = 2^{3-y} \rightarrow y = 3 - log_2\,(5x)$

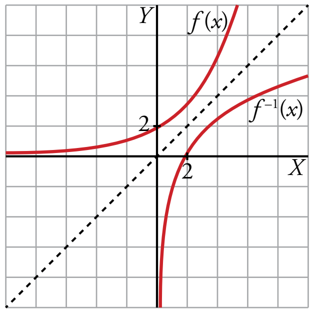
$f^{-1}(x) = 3 - log_2\,(5x) = 3 - log_2\,5 - log_2\,x$



c) $y = 1{,}8 \cdot 5^{0{,}2x} \rightarrow x = 1{,}8 \cdot 5^{0{,}2y} \rightarrow \dfrac{x}{1{,}8} = 5^{0{,}2y} \rightarrow$

$\rightarrow log_5\,\dfrac{x}{1{,}8} = 0{,}2y \rightarrow y = 5log_5\,\dfrac{x}{1{,}8}$

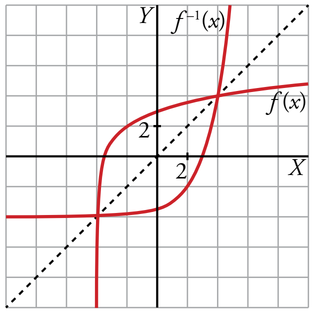
$f^{-1}(x) = 5log_5\,\dfrac{x}{1{,}8} = 5(log_5\,x - log_5\,1{,}8)$



d) $y = 1 + log_2\,(x + 4) \rightarrow x = 1 + log_2\,(y + 4) \rightarrow$

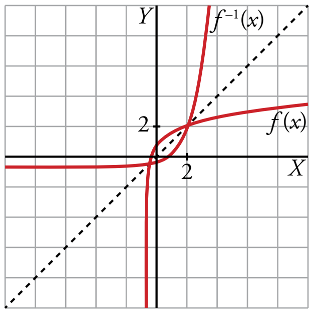
$\rightarrow x - 1 = log_2\,(y + 4) \rightarrow y = 2^{x-1} - 4$

$f^{-1}(x) = 2^{x-1} - 4$



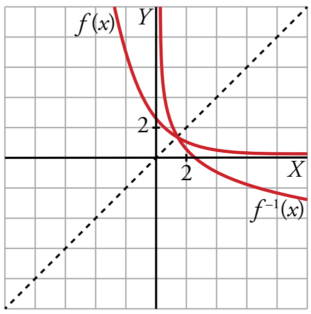
e) $y = ln\,(3x + 2) \rightarrow x = ln\,(3y + 2) \rightarrow e^x = 3y + 2 \rightarrow y = \dfrac{e^x - 2}{3}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 2}{3}$



f) $y = 2{,}5 \cdot e^{-x/2} \rightarrow x = 2{,}5 \cdot e^{-y/2} \rightarrow \dfrac{x}{2{,}5} = e^{-y/2} \rightarrow y = -2ln\left(\dfrac{x}{2{,}5}\right)$

$f^{-1}(x) = -2ln\left(\dfrac{x}{2{,}5}\right) = -2(ln\,x - ln\,2{,}5)$

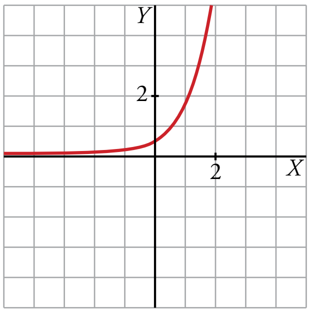


25 **La gràfica d'una funció exponencial del tipus $y = ka^x$ passa pels punts (0; 0,5) i (1; 1,7). Calcula k i a, i representa'n la funció.**

Passa pel punt (0; 0,5) $\rightarrow$ $0{,}5 = k \cdot a^0$ $\rightarrow$ $k = 0{,}5$

Passa pel punt (1; 1,7) $\rightarrow$ $1{,}7 = 0{,}5 \cdot a^1$ $\rightarrow$ $a = \dfrac{1{,}7}{0{,}5} = 3{,}4$

La funció és $y = 0{,}5 \cdot 3{,}4^x$.



26 **Els punts (1; 1,2) i (2; 0,48) pertanyen a la gràfica de la funció $y = k \cdot a^x$.**

a) Calcula k i a.

b) Troba el valor de x per al qual $y = 120$.

a) Passa pel punt (1; 1,2) $\rightarrow$ $1{,}2 = k \cdot a$

Passa pel punt (2; 0,48) $\rightarrow$ $0{,}48 = k \cdot a^2$

Dividint la segona equació entre la primera, obtenim que $a = \dfrac{0{,}48}{1{,}2} = 0{,}4$ i $k = 3$.

La funció és $y = 3 \cdot 0{,}4^x$.

b) $120 = 3 \cdot 0{,}4^x \rightarrow 40 = 0{,}4^x \rightarrow x = \dfrac{log\, 40}{log\, 0{,}4} = -4{,}026$

27 **La gràfica de la funció logarítmica $y = -2 + log_b\,(x + a)$ talla els eixos de coordenades en els punts (0, –2) i (8, 0).**

a) Calcula a i b.

b) Per a quins valors de x és $y = 3$?

a) Passa per (0, –2) $\rightarrow$ $-2 = -2 + log_b\, a$ $\rightarrow$ $log_b\, a = 0$ $\rightarrow$ $a = 1$

Passa per (8, 0) $\rightarrow$ $0 = -2 + log_b\, 9$ $\rightarrow$ $log_b\, 9 = 2$ $\rightarrow$ $b = 3$

Aleshores $y = -2 + log_3\,(x + 1)$.

b) $3 = -2 + log_3\,(x + 1) \rightarrow 5 = log_3\,(x + 1) \rightarrow x = 242$

28 **La funció $y = a + b\, ln\, x$ passa pels punts (e, 5) i (1/e, –1).**

a) Calcula a i b.

b) Quina és la seva funció inversa?

a) Passa per (e, 5) $\rightarrow$ $5 = a + bln\, e$ $\rightarrow$ $a + b = 5$

Passa per $\left(\dfrac{1}{e}, -1\right) \rightarrow -1 = a + bln\left(\dfrac{1}{e}\right) \rightarrow a - b = -1$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 5 \\ a - b = -1 \end{array}\right\} \; a = 2,\; b = 3 \rightarrow y = 2 + 3ln\, x$$

b) $y = 2 + 3ln\, x \rightarrow x = 2 + 3ln\, y \rightarrow \dfrac{x-2}{3} = ln\, y \rightarrow y = e^{(x-2)/3}$

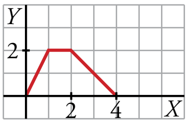
29 **La funció $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ converteix graus Fahrenheit en graus centígrads. Troba la funció per convertir graus centígrads en graus Fahrenheit.**

La funció demanada és la funció inversa de la donada.

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \rightarrow x = \frac{5}{9}(y - 32) \rightarrow \frac{9}{5}x = y - 32 \rightarrow y = \frac{9}{5}x + 32$$

La funció que converteix graus centígrads en graus Fahrenheit és $y = \frac{9}{5}x + 32$.

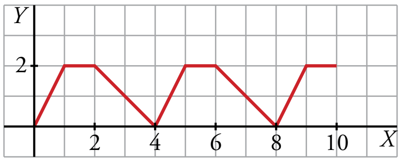
30 **Aquesta gràfica representa la variació d'un moviment que es repeteix periòdicament.**



a) Representa'l en l'interval [0, 10].

b) Calcula $f(7)$, $f(10)$ i $f(20)$.

a)



b) $f(7) = 1$; $f(10) = 2$, $f(20) = 0$

31 **Un cultiu de bacteris creix segons la funció $y = 1 + 2^{x/10}$ (y: milers de bacteris, x: hores). Quants n'hi havia en el moment inicial? I al cap de 10 hores? Quant tardaran a duplicar-se?**

En el moment inicial, $x = 0 \rightarrow y = 2$, hi havia dos mil bacteris.

Al cap de 10 hores, $x = 10 \rightarrow y = 1 + 2^{10/10} = 3$, hi havia tres mil bacteris.

Perquè es dupliquin els que hi havia en el moment inicial ha de ser $y = 4$:

$$4 = 1 + 2^{x/10} \rightarrow 2^{x/10} = 3 \rightarrow \log_2 3 = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10 \cdot \log_2 3 = 15{,}85 \text{ hores}$$

Pàgina 152

32 **La concentració d'un fàrmac a la sang ve donada per $y = 100 \cdot (0{,}94)^t$ (y en mg, t en h).**

a) Digues quina és la concentració inicial i la que té el pacient al cap de 3 hores.

b) Representa'n la funció.

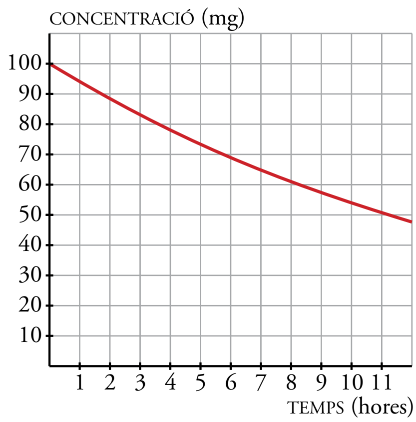
c) Si volem que la concentració no baixi de 60 mg/ml, al cap de quant temps haurem d'injectar-li'n de nou?

a) Dosi inicial: $t = 0 \rightarrow y = 100$ mg

Al cap de tres hores:

$t = 3 \rightarrow y = 100 \cdot 0{,}94^3 = 83{,}06$ mg

b)



c) $60 = 100 \cdot 0{,}94^t \rightarrow t = \frac{\log 0{,}6}{\log 0{,}94} = 8{,}26$

Haurem d'injectar-li'n al cap de 8 h 15 min, aproximadament.

33 **La quantitat de material radiactiu que queda al cap de t anys en una mostra de 75 grams, es pot calcular mitjançant l'equació $C(t) = 75(0{,}62)^t$.**

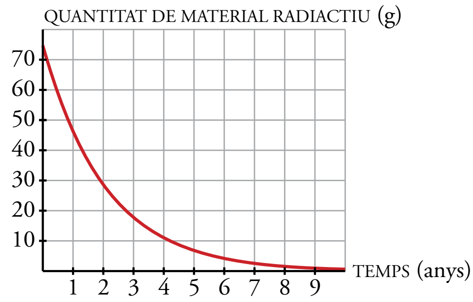
a) Quants anys han de transcórrer perquè hi quedin 10 grams de material radiactiu?

b) Representa'n la funció.

a) $10 = 75 \cdot 0{,}62^t \rightarrow t = \dfrac{log \dfrac{10}{75}}{log\, 0{,}62} = 4{,}2$

Han de passar 4,2 anys.

b) $y = 75 \cdot 0{,}62^x$



34 **Un alumne d'un curs de psicologia sap que el percentatge de coneixements que recordarà t mesos després d'acabar el curs es pot calcular mitjançant la funció:**

$$R(t) = 94 - 46{,}8\ log\,(t-1)$$

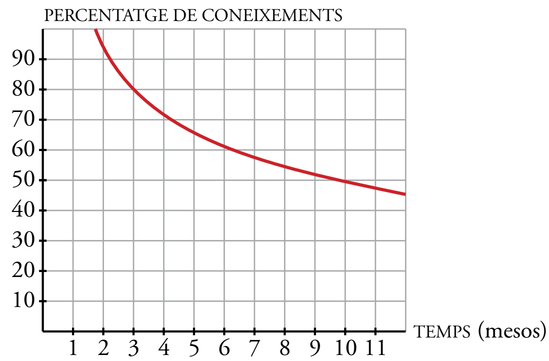
a) Calcula el percentatge que recordarà 6 mesos després d'acabar el curs.

b) Representa'n la funció.

a) $R(6) = 94 - 46{,}8\ log\, 5 = 61{,}3$

Després de 6 mesos recordarà un 61,3 % dels seus coneixements.

b)



35 **Sabem que la pressió amosfèrica varia amb l'altura. L'equació $h(x) = 41{,}97(0{,}996)^x$ ens dóna l'altura d'una muntanya, en quilòmetres, si en coneixem la pressió atmosfèrica, x, en mil·libars.**

a) Si al cim de l'Everest la pressió és de 389 mil·libars, quina és l'altura de l'Everest?

b) Quina serà la pressió al cim d'una muntanya de 3 500 metres d'altura?

a) $h(389) = 41{,}97 \cdot 0{,}996^{389} = 8{,}827$

L'Everest té, aproximadament, 8 827 m d'altura.

b) $3{,}5 = 41{,}97 \cdot 0{,}996^x \rightarrow x = 620$ mil·libars

36 La funció $y = 80 \cdot 2^{-0,4t}$ ens dóna la quantitat (en grams) d'estronci radioactiu en una mostra d'aigua en l'instant t (en anys).

a) Quina quantitat hi haurà al cap de 10 anys?

b) Quan s'haurà reduït al 50 % la quantitat actual ?

a) $t = 10 \rightarrow y = 80 \cdot 2^{-4} = 5$ g

Al cap de 10 anys hi haurà 5 g d'estronci radiactiu.

b) En l'instant actual la mostra té 80 g d'estronci radiactiu. Per tant, perquè es redueixi a la meitat,

$40 = 80 \cdot 2^{-0,4x} \rightarrow \dfrac{1}{2} = 2^{-0,4x} \rightarrow x = 2,5$

Han de passar 2,5 anys.

37 El nombre d'exemplars que es venen d'un llibre depèn dels diners que es dediquen a fer-ne publicitat. La funció que representa aquesta relació és:

$$y = 2 + 0,5\, ln\,(x + 1);\ x \text{ en milers d'euros, } y \text{ en milers}$$

a) Calcula quants exemplars se'n venen si s'inverteixen 20 000 € en publicitat.

b) Quant farà falta invertir per vendre 5 000 llibres?

a) $x = 20 \rightarrow y = 2 + 0,5\, ln\, 21 = 3,522$

Es vendran 3 522 llibres.

b) $5 = 2 + 0,5\, ln\,(x + 1) \rightarrow 3 = 0,5\, ln\,(x + 1) \rightarrow 6 = ln\,(x + 1) \rightarrow x = e^6 - 1 = 402,42879$

S'han d'invertir 402 429 €.

38 Un capital de 10 000 € es diposita en un banc al 6 % d'interès anual amb pagament mensual d'interessos. Escriu la funció que ens diu en quant es transforma aquest capital en m mesos. Calcula quant tarda a duplicar-se el capital.

$i = \dfrac{6}{100} \rightarrow i_m = \dfrac{6}{1200} = 0,005 \rightarrow$ Índex de variació mensual = 1,005

El capital final al cap de m mesos és $C(m) = 10\,000 \cdot 1,005^m$

$20\,000 = 10\,000 \cdot 1,005^m \rightarrow 2 = 1,005^m \rightarrow m = \dfrac{log\, 2}{log\, 1,005} = 138,98$

Per tant, han de passar 139 mesos perquè el capital inicial es dupliqui.

39 La població mundial ha crescut de forma exponencial des del 1650. La funció $P(t) = 0,5 \cdot e^{0,0072t}$ (t en anys, $P(t)$ en milers de milions) ens dóna una bona aproximació de la població mundial fins al 2015.

a) Quina era la població mundial el 1920?

b) Estima la població mundial el 2020, suposant que el creixement es mantingui estable.

a) L'any 1650 es correspon amb $t = 0 \rightarrow$ L'any 1920 es correspon amb $t = 1920 - 1650 = 270$.

$P(270) = 0,5 \cdot e^{0,0072 \cdot 270} = 3,493$ milers de milions de persones

b) L'any 2020 es correspon amb $t = 2020 - 1650 = 370$.

La població estimada és $P(370) = 0,5 \cdot e^{0,0072 \cdot 370} = 7,177$ milers de milions d'habitants.

40 **El carboni 14 serveix per calcular l'edat dels fòssils i altres objectes. La fórmula que s'usa és $Q = Q_0 \cdot e^{-t\, ln\, 2/5730}$, on Q_0 és la quantitat de carboni 14 que tenia l'organisme quan va morir i Q la quantitat que tindrà d'aquí a t anys.**

a) Si en un cert fòssil $C_0 = 500$ g, quants grams de carboni 14 tindrà d'aquí a 2000 anys?

b) S'anomena període de semidesintegració el temps necessari perquè la quantitat inicial de nuclis atòmics d'un isòtop radioactiu es redueixi a la meitat. Calcula el període de semidesintegració del carboni 14.

a) Al cap de 2000 anys, $C = 500 \cdot e^{-2000 \cdot ln\, 2/5730} = 392{,}6$ g de carboni 14.

b) $\dfrac{C_0}{2} = C_0 \cdot e^{-t \cdot ln\, 2/5730} \rightarrow e^{t \cdot ln\, 2/5730} = 2 \rightarrow \dfrac{t\, ln\, 2}{5730} = ln\, 2 \rightarrow t = 5730$ anys

41 **El preu d'un automòbil esportiu és de 24000 €. Sabem que es deprecia a un ritme d'un 12 % anual.**

a) Quina funció dóna el valor del cotxe al cap de t anys?

b) Quan arribarà a la meitat del valor inicial?

a) Una depreciació del 12 % anual es correspon amb un índex de variació $I = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

La funció que dóna el valor del cotxe és $V(t) = 24000 \cdot 0{,}88^t$.

b) $12000 = 24000 \cdot 0{,}88^t \rightarrow 0{,}5 = 0{,}88^t \rightarrow t = \dfrac{log\, 0{,}5}{log\, 0{,}88} = 5{,}42$

Han de passar 5,42 anys perquè el seu valor es redueixi a la meitat.

42 **Invertim 20000 € al 4,8 % anual en un compte que es capitalitza semestralment.**

a) Escriu la funció que ens dóna els diners que tenim al compte al cap de t anys.

b) Quant de temps ha de passar perquè el capital inicial augmenti un 50 %?

a) $i = \dfrac{4{,}8}{100} \rightarrow i_s = \dfrac{4{,}8}{200} = 0{,}024 \rightarrow$ Índex de variació semestral = 1,024

Com que un any té 2 semestres, la funció és $C(t) = 20000 \cdot 1{,}024^{2t}$.

b) Si el capital inicial augmenta un 50 %, passarà de 20000 a 30000 €.

$30000 = 20000 \cdot 1{,}024^{2t} \rightarrow 1{,}5 = 1{,}024^{2t} \rightarrow t = \dfrac{log\, 1{,}5}{2\, log\, 1{,}024} = 8{,}55$ anys

Com que la capitalització és semestral, hauran de passar 9 anys.

43 **El nombre de receptes per a medicaments genèrics emeses pels metges del servei de salut ha crescut exponencialment des del 2005. La funció és del tipus $f(t) = k\, e^{at}$. Calcula k i a sabent que l'any 2005 $(t = 0)$ es van emetre 6,52 milers de receptes i el 2008 se'n van fer 9,84 milers. En quin any s'arribarà a 50 milers de receptes?**

Passa per (0; 6,52) $\rightarrow 6{,}52 = k$

Passa per (3; 9,84) $\rightarrow 9{,}84 = 6{,}52 \cdot e^{3a} \rightarrow \dfrac{9{,}84}{6{,}52} = e^{3a} \rightarrow a = \dfrac{ln \dfrac{9{,}84}{6{,}52}}{3} = 0{,}1372$

Per tant, $f(t) = 6{,}52 \cdot e^{0{,}1372t}$

$50 = 6{,}52 \cdot e^{0{,}1372t} \rightarrow \dfrac{50}{6{,}52} = e^{0{,}1372t} \rightarrow t = \dfrac{ln \dfrac{50}{6{,}52}}{0{,}1372} = 14{,}85$

Després de 15 anys; és a dir, el 2020 se superaran lleugerament les 50000 receptes.

44 **Un estudi de la policia reflecteix que el nombre de robatoris a les cases, per any, en una ciutat, decreix segons una funció del tipus $N(t) = A - B \cdot \log(t+2)$. Sabem que l'any 2000, que és quan es va iniciar l'estudi, el nombre de robatoris va ser de 520 i l'any 2003 n'hi va haver 476.**

a) Determina A i B.

b) Calcula el nombre de robatoris que s'esperen el 2020.

a) $N(0) = 520 \rightarrow 520 = A - B \cdot \log 2$

$N(3) = 476 \rightarrow 476 = A - B \cdot \log 5$

Restant les equacions obtenim:

$$44 = B(\log 5 - \log 2) \rightarrow B = \frac{44}{\log 5 - \log 2} = 110{,}6 \rightarrow A = 476 + \frac{44}{\log 5 - \log 2} \cdot \log 5 = 553{,}3$$

$N(t) = 553{,}3 - 110{,}6 \cdot \log(t+2)$

b) L'any 2020 es correspon amb $t = 20$.

$N(20) = 553{,}3 - 110{,}6 \cdot \log 22 \approx 405$

L'any 2020 s'esperen uns 405 robatoris.

45 **Un cultiu de bacteris comença amb 100 cèl·lules. Mitja hora després n'hi ha 435. Si aquest cultiu segueix un creixement exponencial del tipus $y = ke^{at}$ (t en minuts), calcula k i a i representa'n la funció. Quant tardarà a arribar a 5 000 bacteris?**

$y = ka^t$

$t = 0,\ y = 100 \rightarrow 100 = k \cdot a^0 \rightarrow k = 100$

$t = 30,\ y = 435 \rightarrow 435 = 100 \cdot a^{30} \rightarrow a^{30} = 4{,}35 \rightarrow$

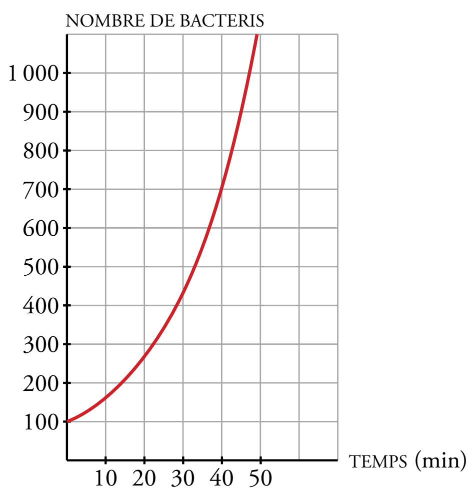
$\rightarrow a = 4{,}35^{1/30} \rightarrow a \approx 1{,}05$

La funció és $y = 100 \cdot 1{,}05^x$.

Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 100 \cdot 1{,}05^x$

$$50 = 1{,}05^x \rightarrow x = \frac{\log 50}{\log 1{,}05} \approx 80 \text{ min}$$

Tardarà 80 minuts, aproximadament.



Pàgina 153

46 **Una tassa de cafè acabat de fer està a 75 °C. Després de 3 minuts en una habitació a 21 °C, la temperatura del cafè ha baixat a 64 °C. Si la temperatura T del cafè a cada instant t ve donada per l'expressió $T = A\,e^{kt} + 21$, calcula A i k i representa'n la funció.**

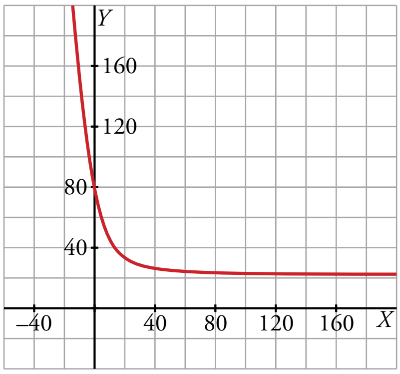
Quant haurem d'esperar perquè la temperatura del cafè sigui de 45 °C?

Per les dades del problema, la funció temperatura passa pels punts (0, 75) i (3, 64); aleshores:

$$75 = A \cdot e^{k \cdot 0} + 21 \;\rightarrow\; A = 54$$

$$64 = 54 \cdot e^{k \cdot 3} + 21 \;\rightarrow\; e^{3k} = \frac{43}{54} = 0{,}796 \;\rightarrow\; k = \frac{ln\,0{,}796}{3} = -0{,}076$$

Per tant, $T = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21$



Si la temperatura del cafè és de 45°, aleshores:

$$45 = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21 \;\rightarrow\; e^{-0{,}076t} = \frac{24}{54} = 0{,}444 \;\rightarrow\; t = \frac{ln\,0{,}444}{-0{,}076} = 10{,}7 \text{ minuts}$$

Hem d'esperar 10 minuts 42 segons perquè assoleixi els 45°.

47 **Un estudi demogràfic estima que la població d'un barri creixerà segons aquesta funció: $y = \dfrac{10\,000}{1 + ke^{-0{,}2t}}$ (t, anys; y, nombre d'habitants).**

a) El barri té, actualment, 1 250 habitants. Troba k.

b) Calcula quina serà la població d'aquí a 10 anys.

a) Passa pel punt (0, 1 250) $\rightarrow\; 1\,250 = \dfrac{10\,000}{1+k} \;\rightarrow\; k = \dfrac{10\,000}{1250} - 1 = 7$

b) $t = 10 \;\rightarrow\; y = \dfrac{10\,000}{1 + 7 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 10}} \approx 5\,135$

D'aquí a 10 anys hi haurà uns 5 135 habitants.

Qüestions teòriques

48 **Donada la funció $y = a^x$, contesta:**

a) Pot ser negativa la y? I la x?

b) Per a quins valors de a és decreixent?

c) Quin és el punt pel qual passen totes les funcions del tipus $y = log_a\, x$?

d) Per a quins valors de x es verifica $0 < a^x < 1$ sent $a > 1$? I si $0 < a < 1$?

a) La y no pot ser negativa per ser una potència de base positiva.

La x sí que pot ser negativa perquè el domini de la funció és tot $\mathbb{R}$.

b) Si $0 < a < 1$, la funció és decreixent.

c) Totes passen pel punt $(1, 0)$, ja que $x = 1 \rightarrow y = log_a\, 1 = 0$.

d) Per a valors de x negatius es compleix que $0 < a^x < 1$ si $a > 1$.

Si $0 < a < 1$, es compleix que $0 < a^x < 1$, quan $x > 0$.

49 **Si $f(x) = 2^x$ i $g(x) = log_2\, x$, quina és la funció $(g \circ f)\,(x)$? I $(f \circ g)\,(x)$?**

$(g \circ f)\,(x) = g[f(x)] = g(2^x) = log_2\,(2^x) = x$

$(f \circ g)\,(x) = f[g(x)] = f(log_2\, x) = 2^{log_2 x} = x$

50 **Considera les funcions $y = sin\, x$, $y = cos\, x$ i $y = tg\, x$.**

a) Quin n'és el període?

b) Digues quin és el domini de definició de cadascuna.

c) Entre quins valors varien?

a) Les dues primeres funcions són periòdiques de període 2π. La tercera és periòdica de període π.

b) El domini de les dues primeres és $\mathbb{R}$.

El domini de la funció tangent és $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Les funcions *sinus* i *cosinus* prenen valors compresos entre –1 i 1. El recorregut de la funció tangent és $\mathbb{R}$.

51 **Justifica quina de les funcions següents és la funció inversa de $y = 3^x - 2$.**

a) $y = 2 + log_3\, x$ **b) $y = \sqrt[3]{x + 2}$** **c) $y = log_3\,(x + 2)$**

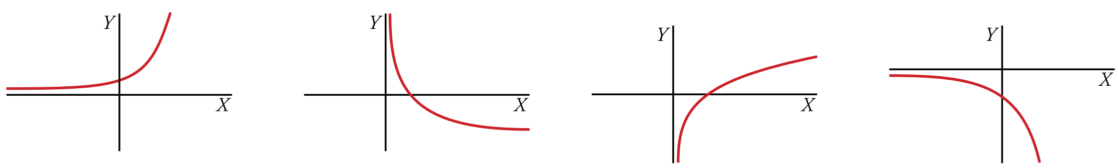
La funció de l'apartat c) és la funció inversa de la donada.

Si anomenem $f(x) = 3^x - 2$ y $f^{-1}(x) = log_3\,(x + 2)$, aleshores:

$(f \circ f^{-1})\,(x) = f[f^{-1}(x)] = f[log_3\,(x + 2)] = 3^{log_3\,(x + 2)} - 2 = x + 2 - 2 = x$

$(f^{-1} \circ f)\,(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(3^x - 2) = log_3\,(3^x - 2 + 2) = log_3\,(3^x) = x$

52 **Aquestes gràfiques corresponen a funcions del tipus $y = ka^x$ o $y = k\, log_a\, x$, amb $a > 1$. Identifica-les i indica en cada cas si $k > 0$ o $k < 0$.**



1) És de la forma $y = ka^x$, amb $k > 0$.

2) És de la forma $y = k\, log_a\, x$, amb $k < 0$.

3) És de la forma $y = k\, log_a\, x$, amb $k > 0$.

4) És de la forma $y = ka^x$, amb $k < 0$.

Autoavaluació

1 **Donades $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, troba:**

a) $f[g(2)]$ **b)** $g[f(15)]$ **c)** $f \circ g$ **d)** $g^{-1}(x)$

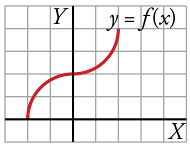
a) $f[g(2)] = f(-1) = 0$

b) $g[f(15)] = g(4) = 1$

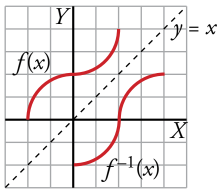
c) $(f \circ g)\ (x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}+1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

d) $y = \dfrac{1}{x-3} \ \rightarrow\ x = \dfrac{1}{y-3} \ \rightarrow\ y = 3 + \dfrac{1}{x}$

2 **Representa la gràfica de la funció inversa de $y = f(x)$.**



La funció $f^{-1}(x)$ és simètrica a $f(x)$ respecte a la recta $y = x$. Així:



3 **La gràfica d'una funció $y = a + b\,log_2\,(x+2)$ passa pels punts (0, 1) i (2, 0). Troba a i b i justifica si es tracta d'una funció creixent o decreixent.**

Passa per $(0, 1) \ \rightarrow\ 1 = a + b\,log_2\,2 \ \rightarrow\ 1 = a + b$

Passa per $(2, 0) \ \rightarrow\ 0 = a + b\,log_2\,4 \ \rightarrow\ 0 = a + 2b$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+2b=0 \end{array}\right\} \rightarrow\ a = 2,\ \ b = -1$$

$y = 2 - log_2\,(x+2)$

Es tracta d'una funció decreixent perquè la seva gràfica és el resultat d'aplicar dues translacions a la funció que s'obté fent la simètrica de $y = log_2\,x$ respecte de l'eix X.

4 **El preu d'una furgoneta baixa un 8 % cada any. Si va costar 18 000 €, quant tardarà a reduir-se a la meitat?**

L'índex de variació anual és $1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

Si x són els anys transcorreguts, la funció que descriu el preu de la furgoneta és $y = 18\,000 \cdot 0{,}92^x$.

La meitat del seu preu és 9 000 €. Per tant:

$$9\,000 = 18\,000 \cdot 0{,}92^x \ \rightarrow\ 0{,}5 = 0{,}92^x \ \rightarrow\ x = \frac{log\,0{,}5}{log\,0{,}92} = 8{,}31$$

Tardarà 8 anys i gairebé 4 mesos a reduir-se el preu a la meitat.

5 **Un cultiu de bacteris comença amb 50 cèl·lules. Dues hores després n'hi ha 162. Si aquest cultiu creix de forma exponencial segons la funció $y = ke^{at}$ (t en hores), calcula k i a. Quant tardarà a arribar a 5 000 bacteris?**

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ y = 50 \end{array}\right\} \rightarrow 50 = k$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2 \\ y = 162 \end{array}\right\} \rightarrow 162 = 50e^{2a} \rightarrow 3{,}24 = e^{2a} \rightarrow a = \frac{ln\,3{,}24}{2} = 0{,}588$$

La funció és $y = 50e^{0{,}588t}$.

Arribarà a 5 000 bacteris quan:

$$5\,000 = 50e^{0{,}588t} \rightarrow 100 = e^{0{,}588t} \rightarrow t = \frac{ln\,100}{0{,}588} = 7{,}8$$

Al cap de 7 hores i 48 minuts, des de l'inici del cultiu, arribarà als 5 000 bacteris.

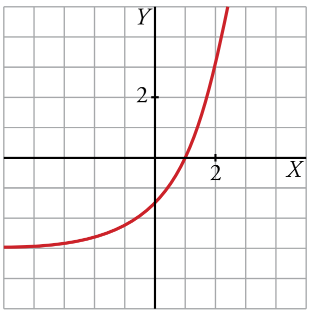
6 **Representa aquestes funcions:**

a) $y = 1{,}5 \cdot 2^x - 3$

b) $y = 2 + ln\,(x + 1)$

Troba la funció inversa en cada cas.

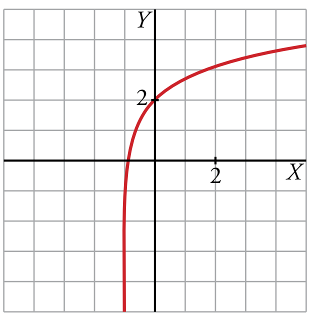
a)



$$y = 1{,}5 \cdot 2^x - 3 \rightarrow x = 1{,}5 \cdot 2^y - 3 \rightarrow y = log_2 \frac{x+3}{1{,}5}$$

La funció inversa és $y = log_2 \dfrac{x+3}{1{,}5}$

b)



$$y = 2 + ln\,(x + 1) \rightarrow x = 2 + ln\,(y + 1) \rightarrow y = e^{x-2} - 1$$

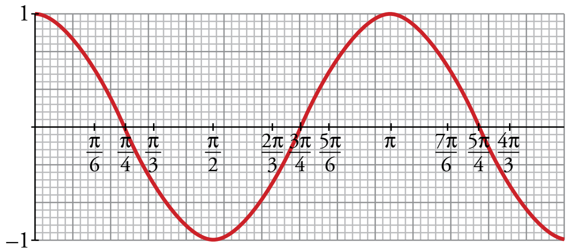
La funció inversa és $y = e^{x-2} - 1$.

7 Associa aquesta gràfica amb una de les expressions següents i digues quin és el seu període:

a) $y = \cos x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = 2\cos x$



Completa aquests punts perquè pertanyin a la funció $y = 2\cos x$: $(5\pi/6, \ldots)$, $(4\pi/3, \ldots)$, $(-\pi/4, \ldots)$. Representa-la en l'interval $[0{,}2;\ \pi]$.

La gràfica correspon a la funció b), $y = \cos 2x$.

El seu període és $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$.

Els punts buscats són $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.