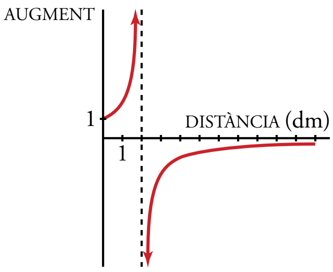
Resol

Pàgina 155

A través d'una lupa



L'*augment* A produït per una lupa determinada ve donat per l'equació següent:

$$A = \frac{2}{2-d}$$

on d és la *distància* (en decímetres) entre l'objetce que volem observar i la lupa.

Si acostem l'objecte a la lupa fins a tocar-la $(d = 0)$, la grandària es manté igual. Això, en termes de límits, s'escriu així:

$$\lim_{d \to 0} A = 1$$

Com s'escriuria el que expliquem a continuació en termes de límits?

a) Si acostem l'objecte a 2 dm, aproximadament, se fa més i més gran. A més, l'objecte es veurà del dret si $d < 2$, o invertit, si $d > 2$.

$$\lim_{d \to 2^-} A = \dots \qquad \lim_{d \to 2^+} A = \dots$$

b) Si allunyem la lupa de l'objecte, aquest es veu cada vegada més petit.

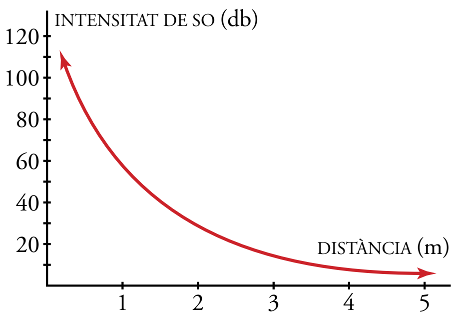
$$\lim_{d \to +\infty} A = \dots$$

a) $\lim_{d \to 2^-} A = +\infty$

$\lim_{d \to 2^+} A = -\infty$

b) $\lim_{d \to +\infty} A = 0$

Soroll i silenci



Si acostem molt l'orella a un focus de so, aquest es fa insuportable. Si l'allunyem molt, deixa de sentir-se. Tradueix aquests fets a límits, anomenant I la *intensidad del so* (en decibels) i d la *distància* (en metres) a la qual ens col·loquem del focus emissor:

$$\lim_{d \to 0} I = \dots \qquad \lim_{d \to +\infty} I = \dots$$

$\lim_{d \to 0} I = +\infty \qquad \lim_{d \to +\infty} I = 0$

1 Visió intuïtiva de la continuïtat. Tipus de discontinuïtats

Pàgina 157

1 Cert o fals?

Cada una de les funcions següents és contínua en tots els punts en què és definida:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = \sqrt{x+2}$ c) $y = sin\, x$ d) $y = tg\, x$

e) $y = Ent\,(x)$ f) $y = Mant\,(x)$ g) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

i) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ j) $y = \begin{cases} 5x-3 & \text{si } x \le 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Cert.

b) Cert.

c) Cert.

d) Cert.

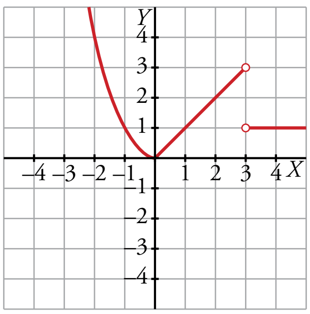
e) Fals. La funció part entera no és contínua en cap nombre enter; tanmateix, està definida en aquests.

f) Fals. La funció mantissa no és contínua en cap nombre enter.

g) Cert.

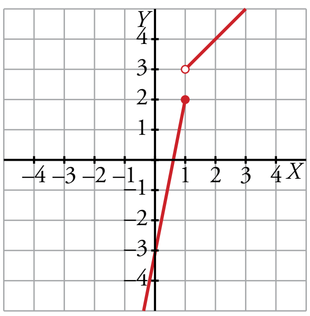
h) Cert.

i) Cert. Podem veure-ho en la seva gràfica.



En $x = 3$ no és contínua, però, com que no està definida, l'afirmació és certa.

j) Fals. No és contínua en el punt $x = 1$, on està definida.



2 **Cada una de les funcions següents té un o més punts on no és contínua. Indica quins són aquests punts i quin tipus de discontinuïtat presenten:**

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$

b) $y = \dfrac{x^2-3x}{x}$

c) $y = \dfrac{x^2-3}{x}$

d) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Branca infinita en $x = 3$ (asímptota vertical).

b) Discontinuïtat evitable en $x = 0$ (li falta aquest punt).

c) Branca infinita en $x = 0$ (asímptota vertical).

d) Salt en $x = 4$.

3 **Explica per què són contínues les funcions següents i determina l'interval en què estan definides:**

a) $y = x^2 - 5$

b) $y = \sqrt{5-x}$

c) $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x < 3 \\ x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Està definida i és contínua en tot $\mathbb{R}$.

b) Està definida i és contínua en $(-\infty, 5]$.

Les funcions donades mitjançant una expressió analítica senzilla (les que coneixem) són contínues on estan definides.

c) Està definida en tot $\mathbb{R}$. És contínua, també, en tot $\mathbb{R}$. L'únic punt en què hom dubta és el 3: les dues branques prenen el mateix valor per a $x = 3$.

$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$

Per tant, les dues branques empalmen en el punt (3, 5). La funció és també contínua en $x = 3$.

d) També les dues branques empalmen en el punt (2, 2). Per tant, la funció és contínua en l'interval en el qual està definida: [0, 5).

2 Límit d'una funció en un punt. Continuïtat

Pàgina 158

4 **Per a cada una de les funcions següents: $f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$, $f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$, $f_3(x) = 2^x$, completa en el quadern la taula adjunta, amb ajuda de la calculadora, i estima el valor de $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.**

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)					

$f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\dfrac{-5}{(2-3)^2} = -5$	$\dfrac{-5}{(2,5-3)^2} = -20$	$\dfrac{-5}{(2,9-3)^2} = -500$	$\dfrac{-5}{(2,99-3)^2} = -50\,000$	$\dfrac{-5}{(2,999-3)^2} = -5\,000\,000$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = -\infty$

$f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\dfrac{4}{3-2} = 4$	$\dfrac{4}{3-2,5} = 8$	$\dfrac{4}{3-2,9} = 40$	$\dfrac{4}{3-2,99} = 400$	$\dfrac{4}{3-2,999} = 4\,000$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_2(x) = +\infty$

$f_3(x) = 2^x$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$2^2 = 4$	$2^{2,5} = 5,66$	$2^{2,9} = 7,46$	$2^{2,99} = 7,94$	$2^{2,999} = 7,99$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_3(x) = 8$

3 Càlcul de límits en un punt

Pàgina 160

5 Calcula raonadament el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) -1

Pàgina 161

Fes-ho tu. **La funció $g(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3, & x \neq -2 \\ 5, & x = -2 \end{cases}$ és contínua en $x = -2$? Troba'n el límit en 0 i en 4.**

- Continuïtat en $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^3 - 5x + 3) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2) + 3 = 5$$

$$f(-2) = 5$$

Per tant, la funció és contínua en $x = -2$.

- Límit en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 - 5x + 3) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

- Límit en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^3 - 5x + 3) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 3 = 47$$

Fes-ho tu. **Calcula k perquè $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$ sigui contínua en $\mathbb{R}$.**

Per a qualsevol valor de k la funció és contínua en tots els punts diferents de 3.

Estudiem la continuïtat en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 3^3 - 2 \cdot 3 + k = 21 + k$$

$$f(3) = 7$$

Perquè la funció sigui contínua en $x = 3$, ambdós resultats han de ser iguals; aleshores:

$$21 + k = 7 \;\rightarrow\; k = -14$$

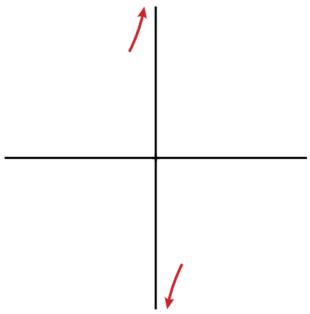
Pàgina 163

Fes-ho tu. Calcula i representa: a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x^2}$; **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) El denominador s'anul·la en $x = 0$, però el numerador no. Per tant, el límit és infinit, amb signe més o menys.

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{-0{,}01-3}{-0{,}01} = 301 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x} = +\infty$

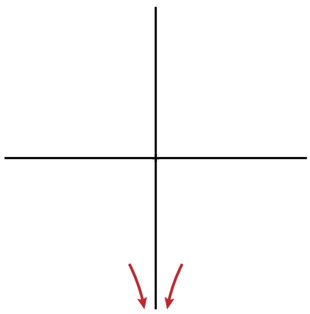
DRETA: $x = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{0{,}01-3}{0{,}01} = -299 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x} = -\infty$



b) El denominador s'anul·la en $x = 0$, però no el numerador. Per tant, el límit és infinit, amb signe més o menys.

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{-0{,}01-3}{(-0{,}01)^2} = -30\,100 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$

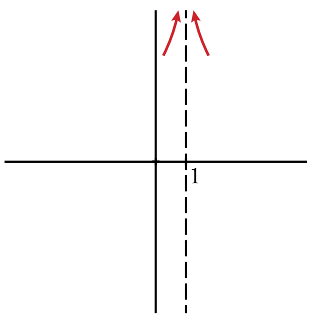
DRETA: $x = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{0{,}01-3}{0{,}01^2} = -29\,900 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$



c) El denominador s'anul·la en $x = 1$, però no el numerador. Per tant, el límit és infinit, amb signe més o menys.

ESQUERRA: $x = 0{,}99 \rightarrow \dfrac{0{,}99^3}{(0{,}99-1)^2} = 9\,703 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

DRETA: $x = 1{,}01 \rightarrow \dfrac{1{,}01^3}{(1{,}01-1)^2} = 10\,303 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



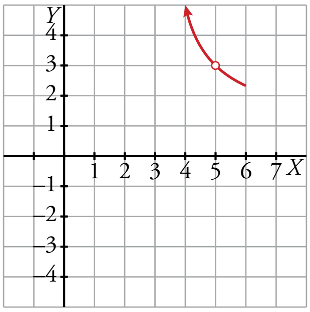
Fes-ho tu. **Calcula i representa a)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 5x^2}{x^2}$

a) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 5$.

Simplifiquem la fracció:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \to 5} \frac{x+1}{x-3} = 3$$



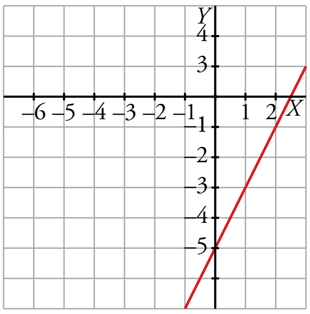
b) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 0$.

Simplifiquem la fracció:

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x-5)}{x^2} = 2x - 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2x - 5) = -5$$

$y = 2x - 5$



Fes-ho tu. **Troba aquests límits i representa'n els resultats:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4}$

a) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 1$.

Simplifiquem la fracció $\rightarrow \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x-1)^2} = \dfrac{x+5}{x(x-1)}$

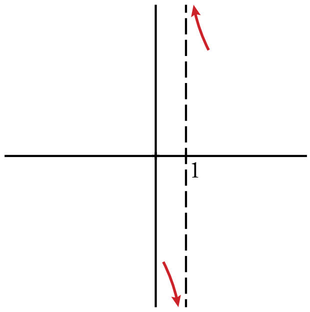
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+5}{x(x-1)}$ $\rightarrow$ Ara s'anul·la el denominador, però no el numerador. Per tant, els límits laterals són $\pm\infty$.

Estudiem el signe de la funció a banda i banda de l'1.

ESQUERRA: $x = 0{,}99 \rightarrow \dfrac{0{,}99^2 + 4 \cdot 0{,}99 - 5}{0{,}99^3 - 2 \cdot 0{,}99^2 + 0{,}99} = -605 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = -\infty$

DRETA $x = 1{,}01 \rightarrow \dfrac{1{,}01^2 + 4 \cdot 1{,}01 - 5}{1{,}01^3 - 2 \cdot 1{,}01^2 + 1{,}01} = 595 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = +\infty$

Per tant, el límit demanat no existeix.



b) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 0$.

Simplifiquem la fracció $\rightarrow \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \dfrac{x^2(x+3)}{x^4} = \dfrac{x+3}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x^2} \rightarrow$ Ara s'anul·la el denominador, però no el numerador. Per tant, els límits laterals són $\pm\infty$.

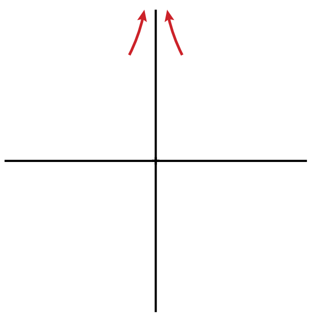
Estudiem la funció a banda i banda del 0.

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{(-0{,}01)^3 + 3 \cdot (-0{,}01)^2}{(-0{,}01)^4} = 29\,900 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$

DRETA $x = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{0{,}01^3 + 3 \cdot 0{,}01^2}{0{,}01^4} = 30\,100 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$

Per tant, el límit d'aquesta funció quan $x \rightarrow 0$ és $+\infty$.

$y = \dfrac{x+3}{x^2}$

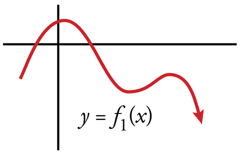


4 Límit d'una funció quan $x \to +\infty$

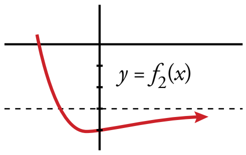
Pàgina 164

6 **Digues el límit quan $x \to +\infty$ de les següents funcions representades pels seus gràfics:**

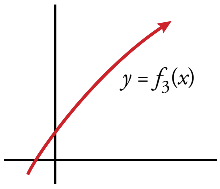
a)



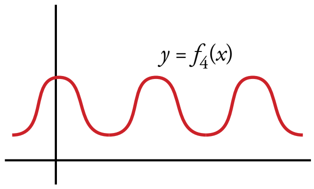
b)



c)



d)



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existeix.

5 Càlcul de límits quan $x \to +\infty$

Pàgina 165

7 **Digues el valor del límit quan $x \to +\infty$ de les funcions següents:**

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$ **c)** $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **e)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

d) 0 e) 0 f) $-\infty$

8 **Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, troba un valor de x per al qual sigui $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.**

Per exemple, per a $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

9 **Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, troba un valor de x per al qual sigui $\dfrac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$.**

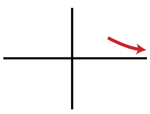
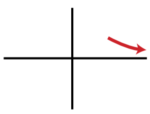
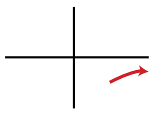
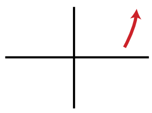
Per exemple, per a $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}0000\overset{\frown}{01}$.

Pàgina 166

10 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

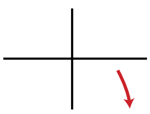
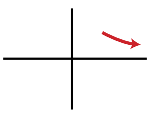
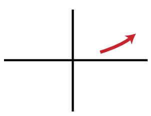
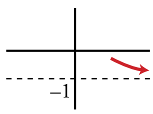
a) 0 b) 0 c) 0 d) $+\infty$

11 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) -1

6 Límit d'una funció quan $x \to -\infty$

Pàgina 167

12 Troba els límits quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = -2x^3 + 7x^2$ **b)** $f(x) = 3x^4 - 7x$ **c)** $f(x) = 10^x$

d) $f(x) = \sqrt{5x - 8}$ **e)** $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 1}$ **f)** $f(x) = -5^x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 10^x = 0$

Ja que per a $x = -10, 10^{-10} = \dfrac{1}{10^{10}} = 0{,}0000000001$ i anàlogament passaria per a valors negatius de x menors que -10.

De manera similar a l'anterior, podem comprovbar que $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

d) El límit quan x tendeix a $-\infty$ no té sentit perquè la funció està definida per a $x \geq \dfrac{8}{5}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x - 8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$ perquè el radicand tendeix a $+\infty$.

e) No té sentit calcular cap dels dos límits perquè el domini de definició de la funció és l'interval $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} -5^x = 0$

Ja que per a $x = -10$, $-5^{-10} = -\dfrac{1}{5^{10}} = -0{,}0000001024$ i anàlogament passaria per a valors negatius de x menors que -10.

De manera similar a l'anterior, podem comprovar que $\lim\limits_{x \to +\infty} -5^x = -\infty$.

13 Troba els límits quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{3 - x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{-x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2 + 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x^3 - 10}{3x^3 + 10x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3 - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$ perquè el radicand tendeix a $+\infty$.

El límit quan x tendeix a $+\infty$ no té sentit perquè la funció està definida només quan $x \leq 3$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 10}{3x^3 + 10x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 10}{3x^3 + 10x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

7 Branques infinites. Asímptotes

Pàgina 169

14 **Determina les asímptotes i la posició de la corba respecte a aquestes:**

a) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ b) $y = \dfrac{3x^2-7}{x-2}$ c) $y = \dfrac{1}{x}$ d) $y = -\dfrac{1}{x^2}$ e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 2$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

ESQUERRA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99+1}{1{,}99-2} = -697 \to \lim_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = -\infty$

DRETA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01+1}{2{,}01-2} = 703 \to \lim_{x \to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = +\infty$

Per tant, la recta $x = 2$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

Per tant, la recta $y = 3$ és una asímptota horitzontal.

Per saber la posició de la corba respecte de l'asímptota horitzontal, hem de tenir en compte que $y = \dfrac{3x+1}{x-2} = 3 + \dfrac{7}{x-2}$.

Quan $x \to +\infty$ el quocient $\dfrac{7}{x-2}$ pren valors positius i la funció està per sobre de l'asímptota.

Quan $x \to -\infty$, passa el contrari i la funció està per sota de l'asímptota.

No té asímptotes obliqües perquè els límits en l'infinit de la funció no són infinits.

b) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 2$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-7}{x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

ESQUERRA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99^2-7}{1{,}99-2} = -488{,}03 \to \lim_{x \to 2^-} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = -\infty$

DRETA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01^2-7}{2{,}01-2} = 512{,}03 \to \lim_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = +\infty$

Per tant, la recta $x = 2$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

Per tant, no té asímptotes d'aquest tipus.

Ara estudiem les asímptotes obliqües:

$$y = \frac{3x^2-7}{x-2} = 3x + 6 + \frac{5}{x-2}$$

La recta $y = 3x + 6$ és una asímptota obliqua, ja que $\frac{5}{x-2}$ tendeix a 0 quan $x \to \pm\infty$.

Quan $x \to +\infty$, el quocient $\frac{5}{x-2}$ pren valors positius i la funció està per sobre de l'asímptota obliqua.

Quan $x \to -\infty$, passa el contrari i la funció està per sota de l'asímptota.

c) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 0$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \to \frac{1}{-0{,}01} = -100 \to \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

DRETA: $x = 0{,}01 \to \frac{1}{0{,}01} = 100 \to \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Per tant, la recta $x = 0$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.

Quan $x \to +\infty$, la funció és positiva i està per sobre de l'asímptota horitzontal. Quan $x \to -\infty$, la funció és negativa i està per sota de l'asímptota.

No té asímptotes obliqües perquè els límits a l'infinit de la funció no són infinits.

d) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 0$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty$ perquè la funció sempre pren valors negatius.

Per tant, la recta $x = 0$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.

Com que la funció sempre pren valors negatius, està per sota de l'asímptota horitzontal.

No té asímptotes obliqües perquè els límits en l'infinit de la funció no són infinits.

e) La funció està definida quan $x^2 - 9 > 0$, és a dir, quan $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. En els punts -3 i 3 es produeixen divisions entre 0. Estudiem en aquests punts l'existència d'asímptotes, però només podrem calcular límits per un dels costats en cada punt.

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Perquè la funció sempre és positiva. Aleshores les rectes $x = -3$ i $x = 3$ són asímptotes verticals.

La recta $y = 0$ és clarament una asímptota horitzontal perquè $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0$.

Tant si $x \to +\infty$ com si $x \to -\infty$, la funció queda per sobre de l'asímptota horitzontal pel fet de prendre valors positius.

No té asímptotes obliqües perquè els límits a l'infinit de la funció no són infinits.

8 Branques infinites en les funcions racionals

Pàgina 171

15 **Troba les branques infinites de les funcions següents i, a partir d'aquestes, perfila la forma de la corba:**

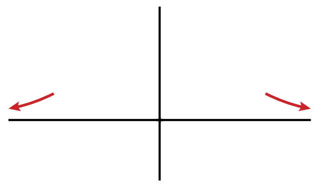
a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ c) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

e) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ f) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ g) $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$ h) $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x}$

a) Asímptotes verticals. No en té perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. Asímptota: $y = 0$

Com que la funció sempre és positiva, queda per sobre de l'asímptota.

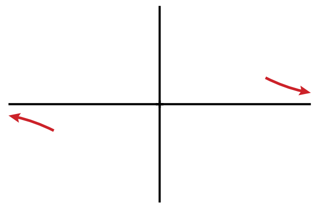


b) Asímptotes verticals. No en té perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Asímptota: $y = 0$

Estudiem el signe de la seva diferència amb l'asímptota:

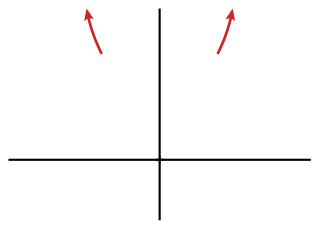
$$f(x) - 0 = \frac{x}{1+x^2} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



c) Asímptotes verticals. No en té perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: com que *grau de* $P(x)$ – *grau de* $Q(x) = 2$, té una branca parabòlica quan $x \to -\infty$ i una altra quan $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{x^2+1} = +\infty \to$ Les branques parabòliques són cap amunt.



d) Asímptotes verticals. Obtenim les arrels del denominador:

$x^2 - 2x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2$ són asímptotes perquè el numerador no s'anul·la en aquests valors.

Estudiem la posició de la corba respecte a aquestes:

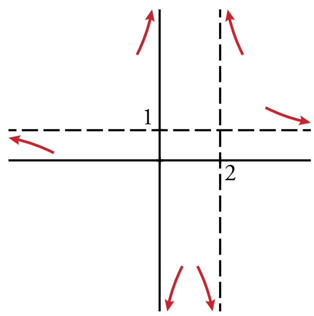
	PRÒXIM $x = 0$		PRÒXIM $x = 2$	
x	–0,01	0,01	1,99	2,01
$\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$	+	–	–	+

Branques en l'infinit:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$. Asímptota: $y = 1$.

Estudiem la posició de la corba respecte de l'asímptota:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2+2}{x^2-2x} - 1 = \frac{2+2x}{x^2-2x} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

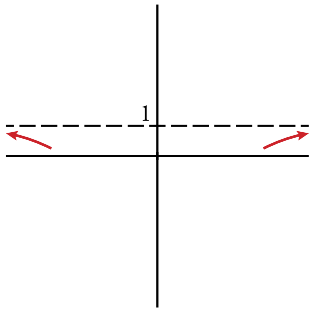


e) Asímptotes verticals. No en té perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$. Asímptota: $y = 1$

Estudiem el signe de la seva diferència amb l'asímptota:

$$f(x) - 1 = \frac{-1}{1+x^2} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



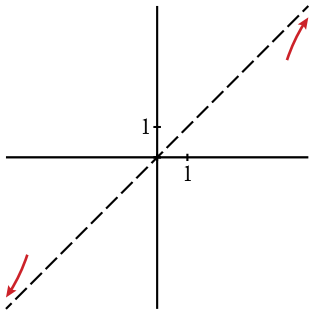
f) Asímptotes verticals. No en té perquè el denominador no s'anul·la mai.

Branques en l'infinit: com que *grau de* $P(x)$ – *grau de* $Q(x)$ = 1, té una asímptota obliqua.

$y = \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{x^2-1}$ → La recta $y = x$ és l'asímptota.

Estudiem la posició de la corba respecte de l'asímptota:

$$f(x) - x = \frac{-x}{x^2+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



g) Asímptota vertical: $x = -1$ perquè s'anul·la el denominador i no el numerador.

Estudiem la seva posició:

ESQUERRA: $f(-1{,}01) = \dfrac{(-1{,}01)^2 + 3 \cdot (-1{,}01)}{-1{,}01+1} = 200{,}99$ (positiu)

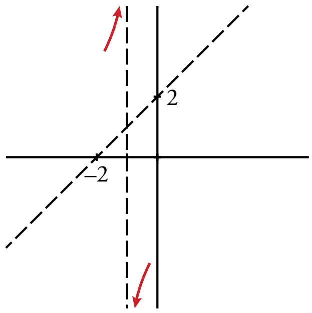
DRETA: $f(-0{,}99) = \dfrac{(-0{,}99)^2 + 3 \cdot (-0{,}99)}{-0{,}99+1} = -198{,}99$ (negatiu)

Branques en l'infinit: com que *grau de* $P(x)$ – *grau de* $Q(x)$ = 1, té una asímptota obliqua.

$y = \dfrac{x^2+3x}{x+1} = x + 2 - \dfrac{2}{x+1}$ → La recta $y = x + 2$ és l'asímptota.

Estudiem la posició de la corba respecte de l'asímptota:

$$f(x) - (x+2) = \frac{-2}{x+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

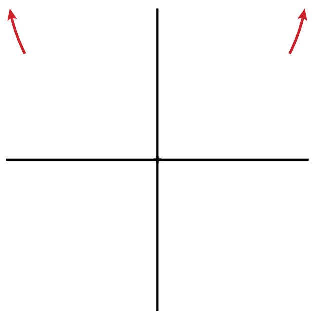


h) Asímptota vertical. El valor $x = 0$ anul·la el denominador, però també el numerador. Si $x \neq 0$ podem simplificar la fracció:

$$\frac{2x^3 - 3x^2}{x} = 2x^2 - 3x$$

Per tant, la funció donada coincideix amb una paràbola excepte que en el punt $x = 0$ té una discontinuïtat del tipus III, ja que no està definida.

No té asímptota vertical i les branques en l'infinit són parabòliques (ambdues cap amunt).

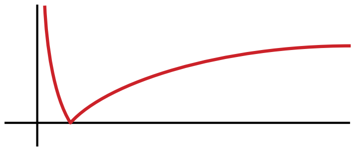


9 Branques infinites en les funcions trigonomètriques, exponencials i logarítmiques

Pàgina 172

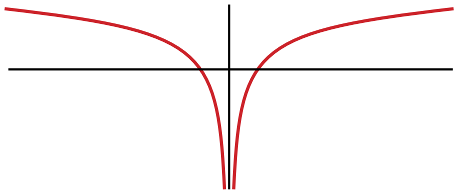
16 **Cert o fals?**

a) La funció $y = |log_2 x|$ se representa així:



Té dues branques infinites: una asímptota vertical en $y = 0$ i una branca parabòlica quan $x \to +\infty$.

b) La funció $y = log_2 |x|$ es representa així:



Té una asímptota vertical en $x = 0$ i sengles branques parabòliques en $-\infty$ i en $+\infty$.

a) Cert.

b) Cert.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 173

2. Límits i continuïtat d'una funció definida «a trossos»

Fes-ho tu. **Troba el límit de la funció $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x<3 \\ x-2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 0$ i en $x = 3$. Estudia'n la continuïtat.**

En $x = 0$, com que $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x-3) = -3$

$x = 3$ és un «punt de ruptura». Per això, calculem els límits laterals:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-2) = 1 \end{cases} \to \text{No coincideixen; per tant, no existeix el límit.}$$

Aquesta funció és discontínua en $x = 3$, perquè el límit en aquest punt no existeix. Té un salt finit en aquest punt. Per als altres valors de x, la funció és contínua perquè està formada per trossos de rectes.

3. Càlcul del límit en un punt

Fes-ho tu. **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminació. Hem de simplificar la fracció.

$$\frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \frac{(x-1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x-1}{2x}; \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x} = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty$ perquè el denominador sempre és positiu i el numerador sempre és negatiu en les proximitats del punt $x = -2$. (En aquest cas no són necessaris els límits laterals).

Pàgina 174

4. Funció contínua en un punt

Fes-ho tu. **Troba el valor de k perquè la funció $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \leq 1 \\ x+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sigui contínua en tot $\mathbb{R}$.**

La funció és contínua si $x \neq 1$ perquè està formada per dos trossos de rectes.

Estudiem la continuïtat en el «punt de ruptura» $x = 1$:

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (2x-5) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x+k) = 1+k \end{cases}$$

Perquè existeixi el límit, ha de ser $-3 = 1 + k \to k = -4$

Si $k = -4$, es compleixen totes les condicions perquè sigui contínua en $x = 1$ i, per tant, en tot $\mathbb{R}$.

5. Càlcul de límits quan $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$

Fes-ho tu. **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en els casos següents:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ perquè el radicand és tan gran com vulguem, donant a x valors molt grans.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ per una raó anàloga a l'anterior.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = 0$ perquè el grau del numerador és menor que el grau del denominador.

Pàgina 175

6. Branques infinites i asímptotes

Fes-ho tu. **Estudia les asímptotes de les funcions següents:**

a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

a) • Asímptotes verticals:

$x - 2 = 0 \to x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = \dfrac{5}{0} = \pm\infty \to x = 2$ és una asímptota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

• Asímptotes horitzontals:

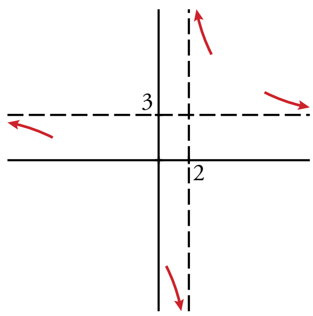
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = 3$; $y = 3$ és una asímptota horitzontal.

Estudiem la posició de la corba.

$f(x) - 3 = \dfrac{3x - 1}{x - 2} - 3 = \dfrac{5}{x - 2}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 > 0$. La corba és sobre l'asímptota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 < 0$. La corba és sota l'asímptota.



b) • Asímptotes verticals. No en té perquè el seu denominador no s'anul·la mai.

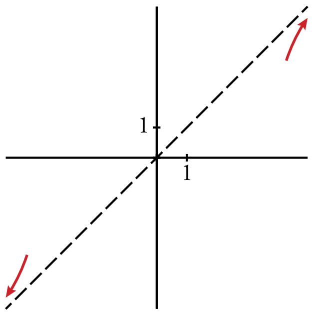
• Asímptota horitzontal o obliqua.

Com que el grau del numerador és una unitat més gran que el del denominador, hi ha asímptota obliqua. Dividint, obtenim:

$\frac{x^3}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2} \rightarrow y = x$ és asímptota obliqua.

Estudiem la posició:

$$d = f(x) - y = -\frac{2x}{x^2+2} \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty \; (d < 0) \; f(x) < y \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty \; (d > 0) \; f(x) > y \end{cases}$$



Exercicis i problemes guiats

Pàgina 176

1. Límits d'una funció definida «a trossos»

Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \;\; x < 0 \\ 3x - 5 & si \;\; 0 \le x < 4 \\ 9x - x^2 & si \;\; x \ge 4 \end{cases}$$

troba $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ***y*** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (9x - x^2) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- Com que $x = 0$ és un punt de ruptura, hem de calcular límits laterals:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x - 5) = -5$$

El límit en $x = 0$ no existeix.

2. Límits en l'infinit

Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x}}{x + 1}$ ***c)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{x - 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \dfrac{5}{\sqrt{4}} = \dfrac{5}{2}$ perquè el numerador té grau 1 i el denominador també, ja que $\sqrt{x^2} = x$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x}}{x + 1} = 0$ perquè el grau del numerador seria $\dfrac{1}{2}$ i és menor que el grau del denominador, que és 1.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{x - 2}} = +\infty$ perquè el radicand tendeix a $+\infty$, en ser un quocient de polinomis en què el grau del numerador és més gran que el del denominador.

3. Asímptota obliqua

Troba a, b i c en $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - c}$ ***perquè tingui com a asímptotes*** $x = 2$ ***i*** $y = 2x - 1$.

Perquè $x = 2$ sigui una asímptota vertical, el denominador s'ha d'anul·lar en aquest punt.

$2 - c = 0 \;\rightarrow\; c = 2$

Aleshores $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - 2}$

Dividim els polinomis per calcular l'asímptota obliqua:

$$\frac{ax^2 + bx}{x - 2} = ax + 2a + b + \frac{4a + 2b}{x - 2}$$

Per tant, $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$, don $a = 2$, $b = -5$

4. Branques infinites

Estudia i representa les branques infinites de les funcions següents:

a) $f(x) = 1{,}5^x$ ***b)*** $f(x) = 0{,}4^x$ ***c)*** $f(x) = \ln(2x - 4)$

a) • Asímptotes verticals. No en té pel fet de ser contínua.

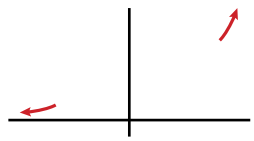
• Asímptotes horitzontals.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x = +\infty$ per ser una funció exponencial amb base major que 1.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1{,}5^x = 0$ pel mateix motiu.

Aleshores, $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

Té una branca parabòlica quan $x \to +\infty$.



b) • Asímptotes verticals. No en té pel fet de ser contínua.

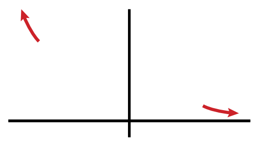
• Asímptotes horitzontals.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}4^x = 0$ pel fet de ser una funció exponencial amb base menor que 1.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}4^x = +\infty$ pel mateix motiu.

Aleshores, $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

Té una branca parabòlica quan $x \to -\infty$.



c) El domini de definició de la funció és l'interval $(2, +\infty)$, ja que s'ha de complir que $2x - 4 > 0$. En el domini és una funció contínua i no té asímptotes verticals.

Estudiem el comportament cerca del punt $x = 2$ per la dreta. Podem veure-ho avaluant alguns punts.

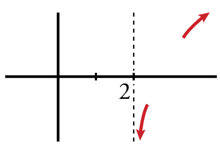
$x = 2{,}001 \;\to\; \ln(2 \cdot 2{,}001 - 4) = -6{,}2$

$x = 2{,}0001 \;\to\; \ln(2 \cdot 2{,}0001 - 4) = -8{,}5$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(2x - 4) = -\infty$

Aleshores $x = 2$ és una asímptota vertical quan $x \to 2^+$.

Té una branca parabòlica en l'infinit de creixement cada cop més lent cap amunt pel fet de ser una funció logarítmica y $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x - 4) = +\infty$.



5. Existència d'asímptotes

Té alguna asímptota, la funció següent?:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3}$$

Quina relació hi ha entre la seva gràfica i la de g(x) = $x^2 - 4$?

- Asímptotes verticals:

  Estudiem el comportament de la funció en $x = 3$, punt que anul·la el denominador.

  $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{0}{0}$. Indeterminació. Hem de simplificar la fracció:

  $$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{(x-3)(x^2-4)}{x-3} = x^2 - 4$$

  Aleshores $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5$

  Per tant, en el punt $x = 3$ no té asímptota vertical. En aquest punt hi ha una discontinuïtat del tipus III.

- Branques en l'infinit:

  Si $x \neq 2 \;\rightarrow\; f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = x^2 - 4 = g(x)$

  Aleshores la funció és una paràbola excepte en el punt $x = 2$, on no està definida.

  Té dues branques parabòliques cap amunt quan $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow +\infty$, ja que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

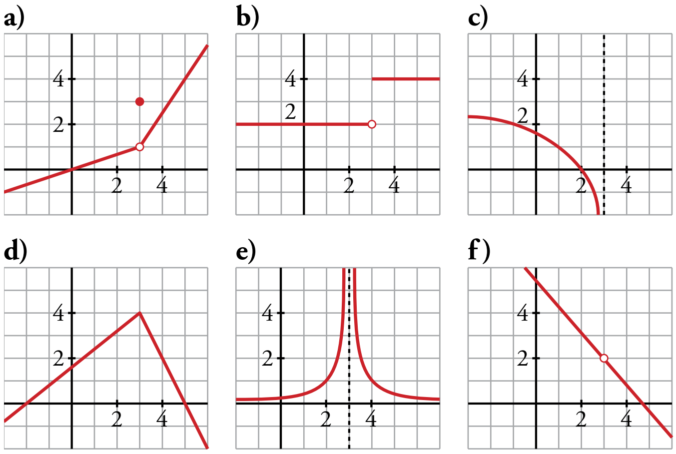
Exercicis i problemes proposats

Pàgina 177

Per practicar

Continuïtat i límit en un punt

1 **Quina d'aquestes funcions és contínua en $x = 3$? Assenyala, en cada una de les altres, la raó de la discontinuïtat:**



a) Discontinuïtat de tipus IV en $x = 3$, perquè el valor de la funció no coincideix amb el límit en el punt.

b) Discontinuïtat de salt finit (tipus II). La funció existeix en $x = 3$, però els límits laterals, malgrat que existeixen, són diferents.

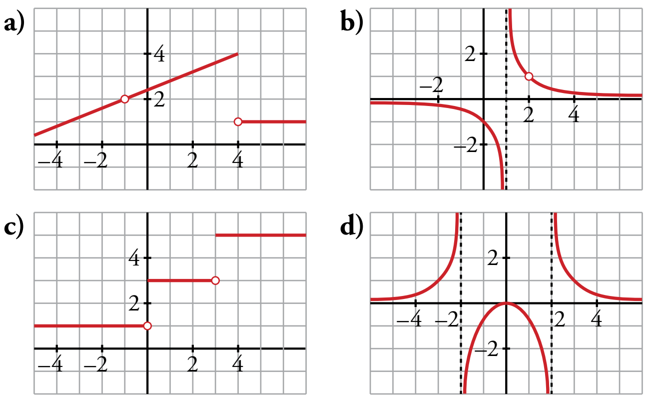
c) Discontinuïtat de salt infinit (tipus I). Té una asímptota vertical per l'esquerra en $x = 3$.

d) Contínua.

e) Discontinuïtat de salt infinit (tipus I). Té una asímptota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuïtat de tipus III. La funció no està definida en $x = 3$, però existeix el límit en aquest punt.

2 **Cada una de les funcions següents té un o més punts on no és contínua. Indica quins són aquests punts i el tipus de discontinuïtat:**



a) Discontinuïtat de tipus III en $x = -1$.

Discontinuïtat de salt finit en $x = 4$ (tipus II).

b) Discontinuïtat de salt infinit en $x = 1$ (tipus I).

Discontinuïtat de tipus III en $x = 2$.

c) Discontinuïtats de salt finit en $x = 0$ i $x = 3$ (tipus II).

d) Discontinuïtats de salt infinit en $x = -2$ i $x = 2$ (tipus I).

3 **Comprova que només una de les funcions següents és contínua en $x = 1$. Explica la raó de la discontinuïtat en les altres:**

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\neq 1 \\ -1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<1 \\ x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

a) La funció no està definida en $x = 1$. Per altra banda:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (x+2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3 = 3 \end{cases} \quad \text{Aleshores existeix } \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

Per tant, té una discontinuïtat de tipus III en $x = 1$.

b) $f(1) = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

En aquest cas, té una discontinuïtat de tipus IV.

c) $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} -2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-3) = -2 \end{cases}$$

Aquesta funció és contínua en $x = 1$.

d) La funció no està definida en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to 1^-$ $\left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+$ $\left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

La funció té una discontinuïtat de salt infinit (tipus I) en $x = 1$.

4 **Indica per a quins valors de $\mathbb{R}$ són contínues les funcions següents:**

a) $y = \sqrt{x^2+2}$ b) $y = \dfrac{2}{x^4+3x^3}$ c) $y = \sqrt{5-2x}$

d) $y = \ln(x+4)$ e) $y = 2^{3-x}$ f) $y = |x-5|$

a) Contínua en $\mathbb{R}$.

El seu domini de definició és $\mathbb{R}$ i la seva expressió analítica és elemental.

b) Vegem si s'anul·la el denominador de la fracció:

$x^4 + 3x^3 = 0 \;\rightarrow\; x^3(x+3) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = -3$

La funció és contínua en el seu domini de definició; és a dir, en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

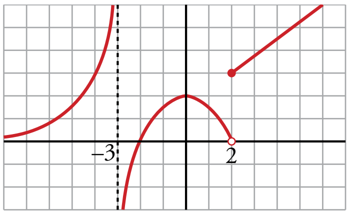
c) Per calcular el seu domini resolem $5 - 2x \geq 0$. L'interval solució $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ és el conjunt de valors on la funció és contínua.

d) L'expressió analítica d'aquesta funció és elemental; aleshores és contínua en el seu domini; és a dir, en $(-4, +\infty)$.

e) Anàlogament al cas anterior, és contínua en $\mathbb{R}$ perquè sempre està definida.

f) És contínua en $\mathbb{R}$ perquè sempre està definida i la seva expressió analítica és elemental.

5 **Sobre la gràfica de la funció següent $f(x)$, troba:**



a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

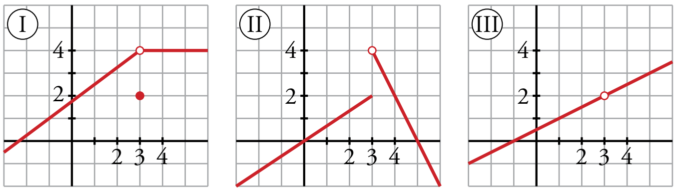
d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

6 **Relaciona cada una d'aquestes expressions amb la gràfica corresponent:**

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **no existeix**



Alguna és contínua en $x = 3$?

a) III b) I c) II

No n'hi ha cap que sigui contínua en $x = 3$.

7 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5 - \dfrac{x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1}(x^3 - x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-x}{x-2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{10 + x - x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 4} \log_2 x$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$ **h)** $\lim\limits_{x\to 2} e^x$

a) 5 b) 0 c) –2 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) 2 g) 1 h) e^2

8 **Donada la funció** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, **troba:**

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

9 Comprova si les funcions següents són contínues en els punts que s'indiquen:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x} & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{2}{x - 2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

Tots els punts analitzats són «punts de ruptura»; aleshores, els límits en aquests punts s'estudien mitjançant els límits laterals.

a) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 3) = 4 \end{cases}$ La funció és contínua en $x = -1$.

b) $f(1)$ no està definit.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2^{x-1} = 1 \end{cases}$ La funció té una discontinuïtat del tipus III en $x = 1$.

c) $f(0) = 0 - 2 = -2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{4 - x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 2) = -2 \end{cases}$ La funció té una discontinuïtat de salt finit (tipus II) en $x = 0$.

d) $f(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - x^2) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 6) = -2 \end{cases}$ La funció és contínua en $x = 2$.

e) $f(3) = \dfrac{2}{3 - 2} = 2$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} (5 - x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x - 2} = 2 \end{cases}$ La funció es contínua en $x = 3$.

Pàgina 178

10 Aquestes funcions, són discontínues en algun punt?:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) La funció està formada per un tros de paràbola i per un altre de recta; aleshores, l'únic punt possible de discontinuïtat seria el punt de ruptura. Estudiem la continuïtat en aquest punt.

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0 \end{cases}$

La funció també és contínua en $x = 1$; per tant, no és discontínua en cap punt.

b) Aquesta funció coincideix amb la paràbola $y = x^2$ excepte en el punt $x = -1$. Aleshores té una discontinuïtat de tipus IV en aquest punt.

c) La funció està formada per un tros d'hipèrbola i un altre de recta; aleshores l'únic punt possible de discontinuïtat seria el punt de ruptura. Estudiem la continuïtat en aquest punt.

$f(2) = 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$$

La funció també és contínua en $x = 2$; per tant, no té discontinuïtats.

d) La funció està formada per dos trossos de funcions les expressions analítiques de les quals són elementals (correctament definides); aleshores l'únic punt possible de discontinuïtat seria el punt de ruptura. Estudiem la continuïtat en aquest punt.

$f(3)$ no està definit.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2^{x-3} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \end{cases}$$ En el punt $x = 3$ hi ha una discontinuïtat de salt finit (tipus II).

11 **Donada la funció** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$**, calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

a) Com que $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$.

b) $x = 3$ és el punt de ruptura. Utilitzarem límits laterals.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2x = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{0}{0} \longrightarrow \text{Indeterminació.} \end{cases}$$

Per calcular el límit per la dreta necessitem simplificar la fracció:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x} = 2$$

Aleshores els límits laterals són diferents i $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existeix.

c) Com que $5 > 3$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{8}{5}$.

12 **En la funció** $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \le x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ **troba:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

a) $x = -1$ és un punt de ruptura. Usarem límits larerals per calcular el límit.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x-1) = -4 \end{cases}$$ Per tant, no existeix el límit.

b) $x = 4$ és un punt de ruptura. Usarem límits laterals per calcular el límit.

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} (3x-1) = 11 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} (4\sqrt{x}+3) = 11 \end{cases} \quad \text{Per tant,} \quad \lim_{x\to 4} f(x) = 11$$

c) Com que $9 > 4$, $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9} (4\sqrt{x}+3) = 15$

13 Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+3x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x(x-2)} = -2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(2x+3)}{x} = 3$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = 2$

14 Resol els límits següents i representa els resultats que obtinguis:

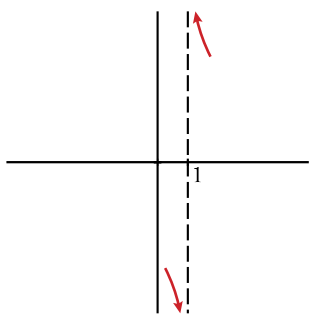
a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2}{x^2+2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^4-10x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$



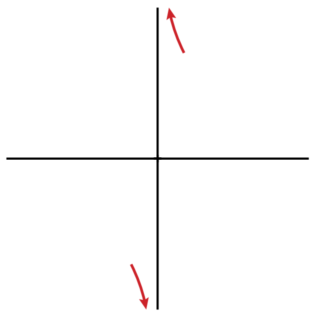
• Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$

• Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

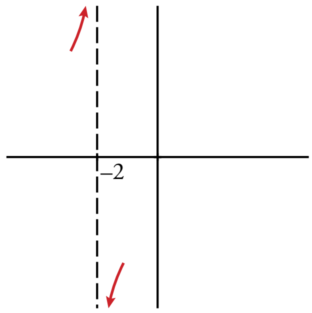
$$\frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{x(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{x}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

- Si $x \rightarrow 0^- \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\; f(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \rightarrow 0^+ \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\; f(x) \rightarrow +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x} = \dfrac{4}{0} = \pm\,\infty$

- Si $x \rightarrow -2^- \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\; f(x) \rightarrow +\infty$
- Si $x \rightarrow -2^+ \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\; f(x) \rightarrow -\infty$



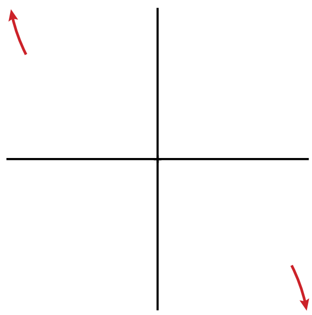
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$$\frac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \frac{x^3}{x^2(x^2 - 10)} = \frac{x}{x^2 - 10}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2 - 10} = 0$$

$f(0)$ no està definit.

Si $x < 0$, $f(x) > 0$ i si $x > 0$, $f(x) < 0$



15 **Calcula els límits següents i representa els resultats que obtinguis:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

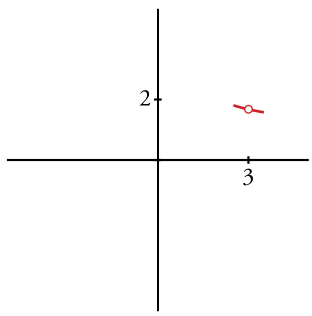
d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{(x+2)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}$$

Donant a x valors pròxims a 3 podem esbrinar com s'acosta per tots dos costats.



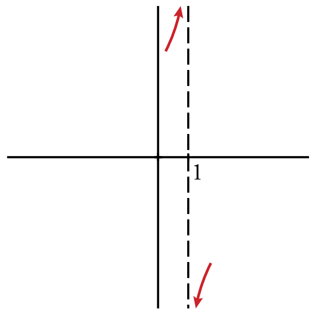
b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

Simplifiquem: $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1} = \infty$

• Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\ f(x) \to +\infty$

• Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\ f(x) \to -\infty$



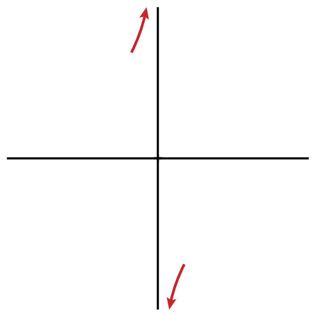
c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$\dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2} = \dfrac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x-2}{x(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x(x+1)} = \dfrac{-2}{0} = \pm\infty$

• Si $x \to 0^- \to \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\ f(x) \to +\infty$

• Si $x \to 0^+ \to \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\ f(x) \to -\infty$



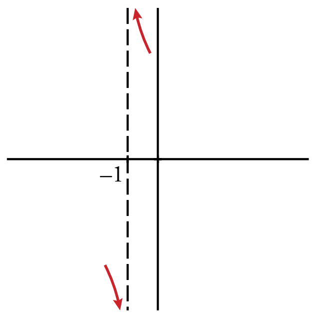
d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$\dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} = \dfrac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

• Si $x \to -1^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$

• Si $x \to -1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$

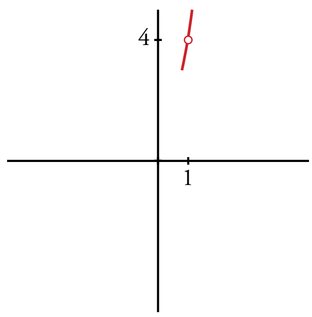


e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$\dfrac{x^4-1}{x-1} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} = \dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^2+1)(x+1)$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} [(x^2+1)(x+1)] = 4$

Donant a x valors pròxims a 1 podem esbrinar com s'acosta per tots dos costats.



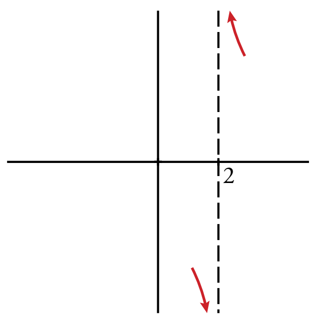
f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$\dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2(x+2)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x+2)}{x-2} = \dfrac{8}{0} = \pm\infty$

• Si $x \to 2^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$

• Si $x \to 2^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$



16 **Calcula.**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{7-5x}{x^2+1}\right)^{2-5x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\log_2\left(\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^5$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^x}{\ln(x+e)}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 10}\log\left(2\sqrt{3x-5}\right)^3$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{7-5x}{x^2+1}\right)^{2-5x}=\left(\dfrac{7-5\cdot 1}{1^2+1}\right)^{-3}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\log_2\left(\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^5=\log_2\left(\dfrac{3\cdot 2+4}{2^2+1}\right)^5=5$

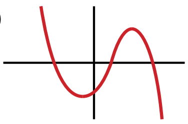
c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^x}{\ln(x+e)}=\dfrac{1+e^0}{\ln(0+e)}=2$ pel fet d'estar definida i ser contínua en $x=0$.

d) $\lim\limits_{x\to 10}\log\left(2\sqrt{3x-5}\right)^3=\log\left(2\sqrt{3\cdot 10-5}\right)^3=3$

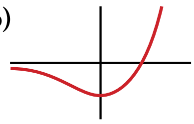
Límit quan $x\to+\infty$ i $x\to-\infty$

17 **Determina quin és el límit quan $x\to+\infty$ i quan $x\to-\infty$ en les gràfiques següents:**

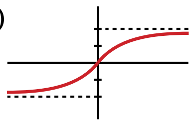
a)



b)



c)



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$

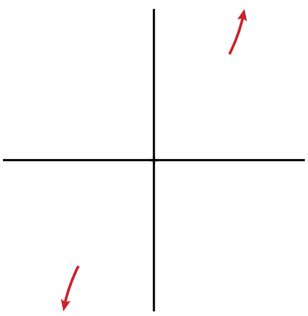
18 **Calcula el límit quan $x\to+\infty$ i quan $x\to-\infty$ de cada una de les funcions següents. Representa els resultats que obtinguis.**

a) $f(x)=x^3-10x$ **b)** $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ **c)** $f(x)=7-3x$ **d)** $f(x)=-x^2+8x+9$

e) $f(x)=1-(x-2)^2$ **f)** $f(x)=7x^2-x^3$ **g)** $f(x)=(5-x)^2$ **h)** $f(x)=(x+1)^3-2x^2$

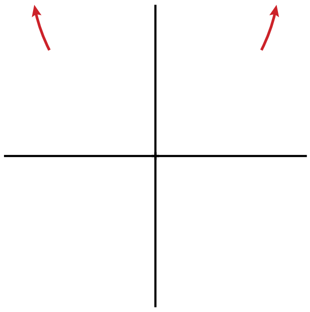
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-10x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-10x)=-\infty$



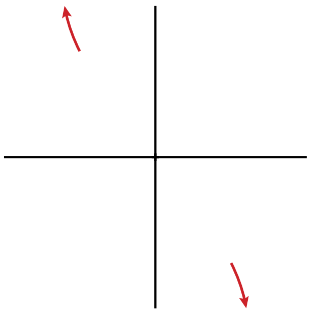
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



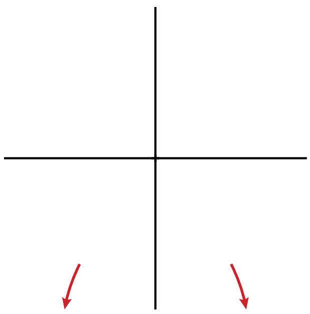
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



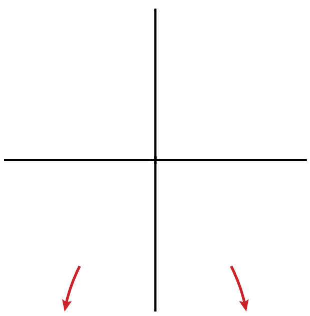
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



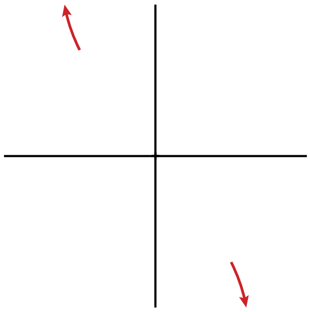
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$



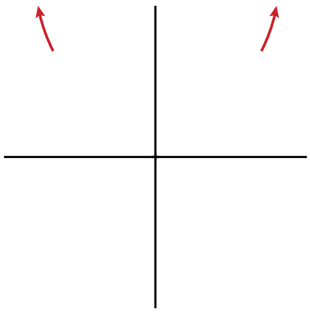
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



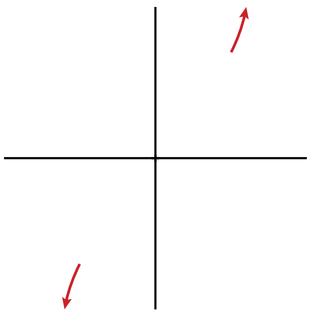
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$



19 **Calcula aquests límits i representa les branques que obtinguis:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x}$

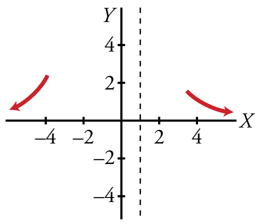
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

Resolt en el següent exercici 20.

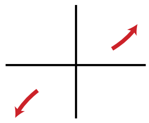
20 **Calcula el límit de totes les funcions de l'exercici anterior quan $x \to -\infty$.**

Resolució dels exercicis 19 i 20:

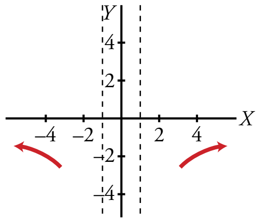
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



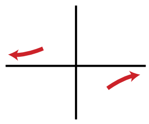
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



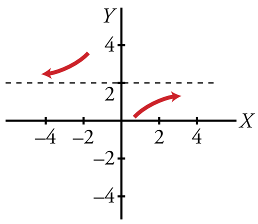
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$



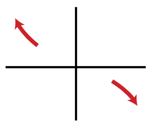
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0$



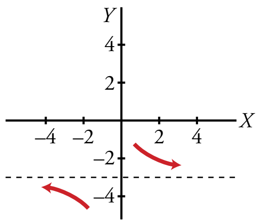
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



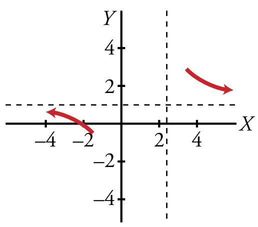
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



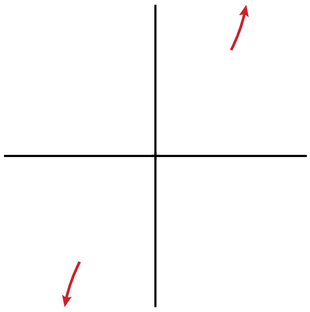
21 Calcula el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ i representa els resultats.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10}$ d) $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

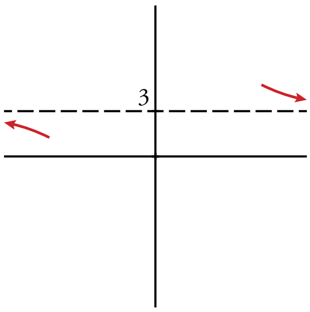
e) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2+1}$ f) $f(x) = \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ g) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2}$ h) $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

Per calcular aquests límits hem de tenir en compte la regla dels graus del numerador i del denominador.

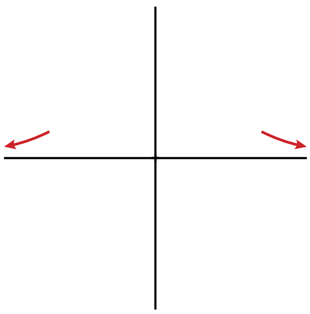
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$



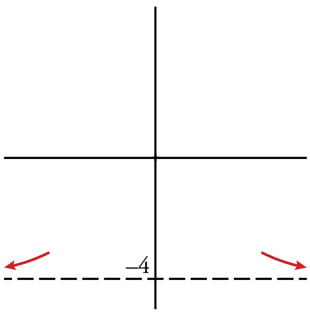
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$



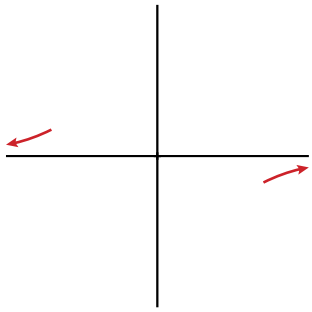
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2-10} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2-10} = 0$



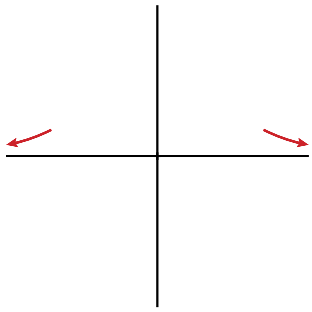
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$



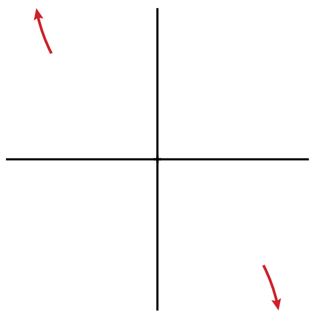
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5-2x}{x^2+1} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5-2x}{x^2+1} = 0$



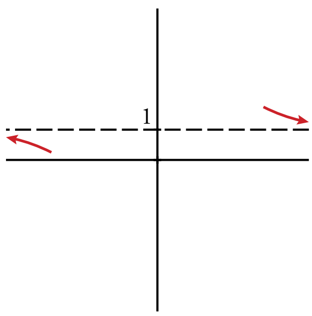
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$



22 **Digues quin és el límit de les funcions següents quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3 - x) = +\infty$

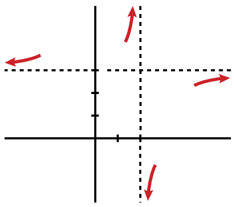
23 **Digues quin és el límit d'aquestes funcions quan $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 2x - 4}$ c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x^2 + 2x - 4} = 0$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 3$

Pàgina 179

Asímptotes

24 

Aquesta gràfica mostra la posició de la corba $y = f(x)$ respecte de les seves asímptotes.

Digues quines són aquestes i descriu-ne la posició.

- Asímptota vertical: $x = 2$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

- Asímptota horitzontal: $y = 3$

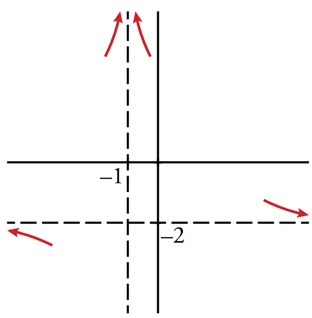
  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

25 **D'una funció $y = f(x)$ en coneixem les asímptotes i la posició de la corba respecte a aquestes.**

$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \to -1^-, & f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to -1^+, & f(x) \to +\infty \end{cases}$ $y = -2 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, & f(x) > -2 \\ \text{si } x \to -\infty, & f(x) < -2 \end{cases}$

Representa gràficament aquesta informació.



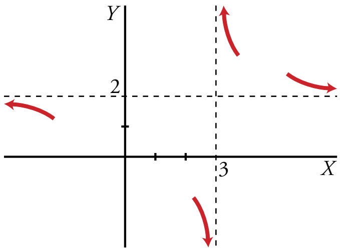
26 **Troba les asímptotes de les funcions següents i situa la corba respecte a cada una d'aquestes:**

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$ b) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ c) $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \dfrac{2}{1-x}$ e) $y = \dfrac{1}{2-x}$ f) $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$

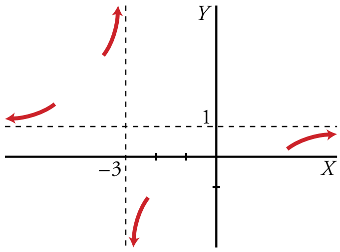
a) Asímptotes:

$x = 3;\ y = 2$



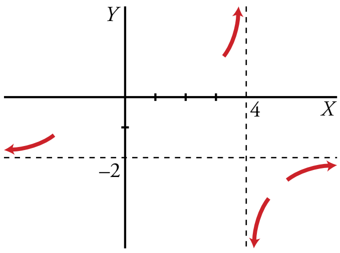
b) Asímptotes:

$x = -3;\ y = 1$



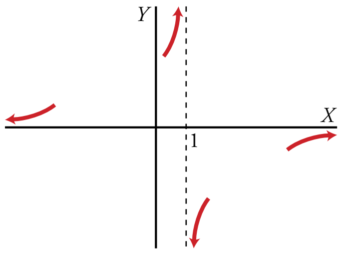
c) Asímptotes:

$x = 4;\ y = -2$



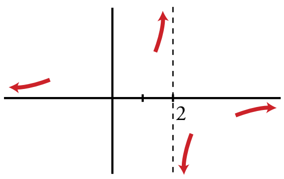
d) Asímptotes:

$x = 1;\ y = 0$



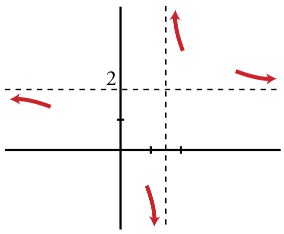
e) Asímptotes:

$x = 2;\ y = 0$



f) Asímptotes:

$x = \dfrac{3}{2};\ y = 2$

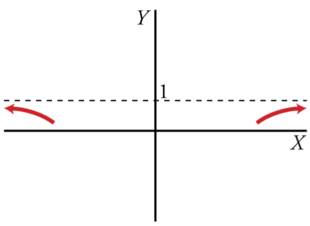


27 **Troba les asímptotes de les funcions següents i situa la corba respecte d'aquestes:**

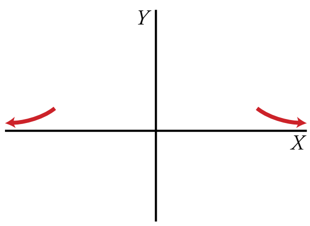
a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ b) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$ e) $y = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$ f) $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

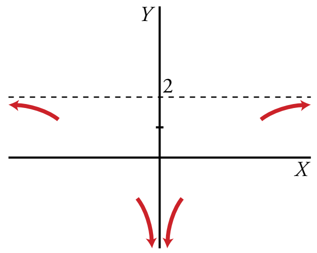
a) Asímptota: $y = 1$



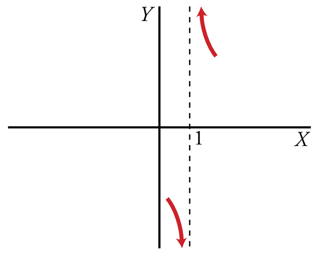
b) Asímptota: $y = 0$



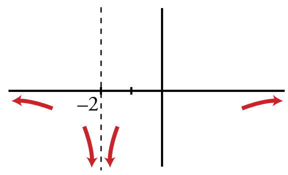
c) Asímptotes: $x = 0$; $y = 2$



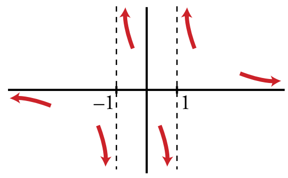
d) Asímptota: $x = 1$



e) Asímptotes: $x = -2$; $y = 0$



f) Asímptotes: $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$



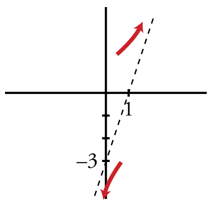
28 **Cada una de les funcions següents té una asímptota obliqua. Troba-la i estudia la posició de la corba respecte d'aquesta:**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$ e) $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ f) $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

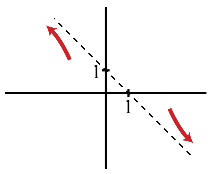
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asímptota obliqua: $y = 3x - 3$



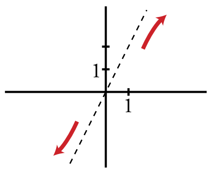
b) $\dfrac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asímptota obliqua: $y = -x + 1$



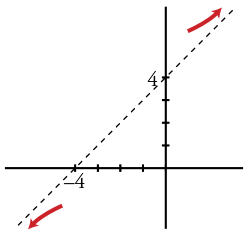
c) $\dfrac{4x^2-3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asímptota obliqua: $y = 2x$



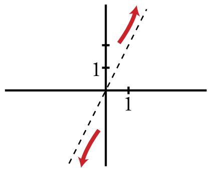
d) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

Asímptota obliqua: $y = x + 4$



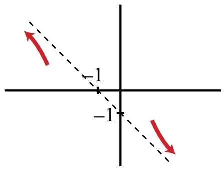
e) $\dfrac{2x^3-3}{x^2-2}=2x+\dfrac{4x-3}{x^2-2}$

Asímptota obliqua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2+3}{2x-2}=-x-1+\dfrac{1}{2x-2}$

Asímptota obliqua: $y = -x - 1$



29 **Troba les asímptotes de les funcions següents i situa la corba respecte de cada una d'elles:**

a) $y=\dfrac{(3-x)^2}{2x+2}$

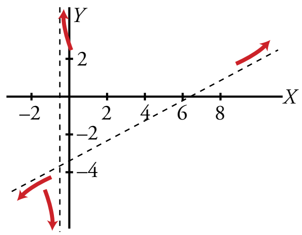
b) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

c) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

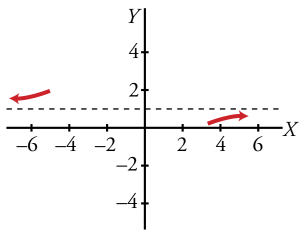
d) $y=\dfrac{3x^2}{x+2}$

a) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{13}{4}+\dfrac{49/4}{2x+1}$

Asímptotes: $x=-\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{13}{4}$

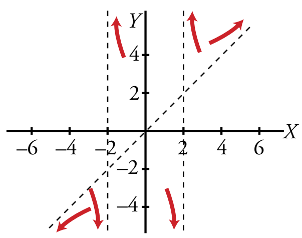


b) Asímptotes: $y = 1$

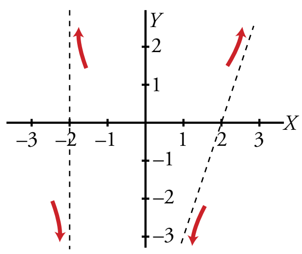


c) $y=x+\dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}$

Asímptotes: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



d) Asímptotes: $x = -2$; $y = 3x - 6$



Per resoldre

30 **Calcula, en cada cas, el valor de k perquè la funció $f(x)$ sigui contínua en tot $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \le 3 \\ x+k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 6-(x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2+kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} (x^2+x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3+k \end{array}\right\} \; 5 = 3+k \;\to\; k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4+2k = f(2) \end{array}\right\} \; 5 = 4+2k \;\to\; k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \;\to\; k = 1$

31 **Calcula k perquè les funcions següents siguin contínues en el punt on canvia la seva definició. Estudia'n després la continuïtat:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x^2-5x} & \text{si } x \ne 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+x-2} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Comencem estudiant el punt $x = 5$.

$f(5) = k$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2-5} = \frac{0}{0} \;\to$ Indeterminació.

$\frac{x^2-25}{x^2-5x} = \frac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)} = \frac{x+5}{x}$

$\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2-5x} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{x+5}{x} = 2$

Si $k = 2$, la funció és contínua en $x = 5$.

Observem que el denominador també s'anul·la en $x = 0$; per tant, $f(0)$ no existeix. A més:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-25}{x^2-5x} = \frac{-25}{0} = \pm\infty$

Per tant, en $x = 0$ té una discontinuïtat de salt infinit (tipus I). En la resta dels punts és contínua.

b) Comencem estudiant el punt $x = 1$.

$f(1) = k$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{0}{0} \;\to$ Indeterminació.

$\frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$

Si $k = \frac{1}{3}$, la funció és contínua en $x = 1$.

Veiem que el denominador també s'anul·la en $x = -2$; aleshores $f(-2)$ no existeix. A més,

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{6}{0} = \pm\infty$

Per tant, en $x = -2$ té una discontinuïtat de salt infinit (tipus I). En la resta dels punts és contínua.

32 **Estudia la continuïtat de les funcions següents. Després representa-les:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{2-\sqrt{x}} & \text{si } x < 4 \\ \log_2(x-2) & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) La primera branca és un tros d'hipèrbola desplaçada una unitat a la dreta. En el punt $x = 1$ presenta una discontinuïtat de salt infinit:

Com que 1 < 3, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

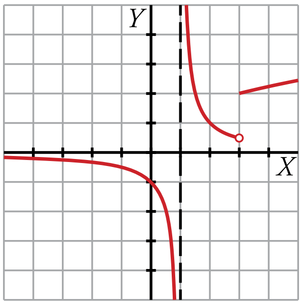
Fixem-nos què passa en el "punt de trencament" $x = 3$.

$f(3) = \sqrt{3+1} = 2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x+1} = 2 \end{cases}$$

El límit no existeix en el punt $x = 3$ i té una discontinuïtat de salt finit (tipus II).

La segona branca està correctament definida i és contínua.



b) El domini de definició de la primera branca és l'interval [0, 4), ja que l'exponent de l'exponencial conté una arrel que existeix només quan $x \geq 0$. És contínua en el seu domini de definició.

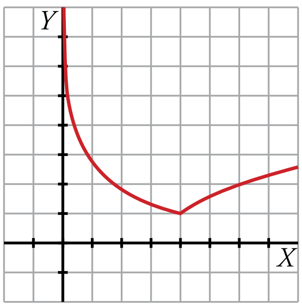
Veiem què passa en el "punt de trencament" $x = 4$.

$f(4) = \log_2(4-2) = 1$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} e^{2-\sqrt{x}} = e^{2-\sqrt{4}} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \log_2(x-2) = \log_2(4-2) = 1 \end{cases}$$

Per tant, el límit existeix i la funció és contínua en aquest punt.

La segona branca és una funció logarítmica desplaçada dues unitats cap a la dreta i és contínua.



33 Determina a i b perquè aquesta funció sigui contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiem la continuïtat en els punts de ruptura.

• $x = -2$

$f(-2) = 4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} 3x + b = -6 + b \\ \lim\limits_{x \to -2^+} 4 = 4 \end{cases}$$

Per tant, $-6 + b = 4 \rightarrow b = 10$ perquè existeixi el límit i la funció sigui contínua en $x = -2$.

• $x = 3$

$f(3) = 4$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} ax - 2 = 3a - 2 \end{cases}$$

Per tant, $3a - 2 = 4 \rightarrow a = 2$ perquè existeixi el límit i la funció sigui contínua en $x = 3$.

Si $a = 2$ i $b = 10$, la funció és contínua en els punts de ruptura. En els altres punts també és contínua pel fet d'estar formada per trossos de rectes.

34 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$ e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$ f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

Calcularem aquests límits utilitzant el criteri dels graus del numerador i del denominador.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x} = 0$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} = 3$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}} = 0$ e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2} = +\infty$ f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2} = \sqrt{2}$

35 **Troba les branques infinites de les següents funcions exponencials i logarítmiques:**

a) $y = 2^{x+3}$ b) $y = 1{,}5^x - 1$ c) $y = 2 + e^x$ d) $y = e^{-x} + 1$

e) $y = log\,(x-3)$ f) $y = 1 - ln\,x$ g) $y = ln\,(2x+4)$ h) $y = ln\,(x^2+1)$

a) $\lim_{x \to +\infty} 2^{x+3} = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

$\lim_{x \to -\infty} 2^{x+3} = 0$ (asímptota horitzontal).

b) $\lim_{x \to +\infty} (1{,}5^x - 1) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

$\lim_{x \to -\infty} (1{,}5^x - 1) = -1$ (asímptota horitzontal).

c) $\lim_{x \to +\infty} (2 + e^x) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

$\lim_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2$ (asímptota horitzontal).

d) $\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ (asímptota horitzontal).

$\lim_{x \to -\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

e) El seu domini és $(3, +\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} log\,(x-3) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

$\lim_{x \to 3^+} log\,(x-3) = -\infty$ (asímptota vertical).

f) El seu domini és $(0, +\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} (1 - ln\,x) = -\infty$ (branca parabòlica cap avall de creixement cada cop més lent).

$\lim_{x \to -\infty} (1 - ln\,x) = +\infty$ (asímptota vertical).

g) El seu domini és $(-2, +\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} ln\,(2x+4) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

$\lim_{x \to -2^+} ln\,(2x+4) = -\infty$ (asímptota vertical).

h) El seu domini és $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to +\infty} ln\,(x^2+1) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

$\lim_{x \to -\infty} ln\,(x^2+1) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

Pàgina 180

36 La funció $p(t) = \begin{cases} 2+t^2 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ mostra com varia la profunditat de la capa de sorra d'una platja des de la construcció d'un dic (p en metres, t en anys). Si la profunditdat arriba a superar els 4 m, s'haurà d'elevar el passeig marítim.

a) Estudia si la profunditat és una funció contínua del temps.

b) A llarg termini, caldrà elevar l'altura del passeig?

a) La funció està formada per dos trossos.

La funció del primer és contínua per ser part d'una paràbola.

La del segon també ho és perquè és part d'una funció elemental ben definida per a $t > 1$.

Estudiem la continuïtat en el punt de ruptura $t = 1$.

Comprovem si $\lim\limits_{t \to 1} p(t) = p(1)$:

$p(1) = 3$

$$\lim_{t \to 1} p(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to 1^-} p(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} (2+t^2) = 3 \\ \lim\limits_{t \to 1^+} p(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} = 3 \end{cases}$$

La funció també és contínua en $t = 1$.

b) Podem estudiar el comportament de la funció a llarg termini amb el límit

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = 4.$$

La profunditat no arriba a assolir 4 m perquè, si bé tendeix a 4, els valors que pren són inferiors a 4, ja que $p(t) = \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} = 4 - \dfrac{t+1}{2t^2}$.

Per tant, no serà necessari elevar l'altura del passeig.

37 La funció següent representa la valoració d'una empresa, en milions d'euros, en funció del temps, t, en els darrers 13 anys.

$$f(t) = \begin{cases} 5-0,1t & \text{si } 0 \le t < 5 \\ a+0,05(t-5) & \text{si } 5 \le t < 10 \\ 4,75+0,3(t-b) & \text{si } 10 \le t \le 13 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a i de b perquè la valoració de l'empresa sigui una funció contínua del temps.

b) Quin era el valor inicial de l'empresa? I al cap de 13 anys?

a) La funció està formada per tres segments; per tant, la seva continuïtat en funció del temps depèn del que passi en els punts de trencament.

- Continuïtat en $x = 5 \to \lim\limits_{t \to 5} f(t) = f(5)$

$f(5) = a$

$$\lim_{t \to 5} f(t) = \left. \begin{cases} \lim\limits_{t \to 5^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 5^-} (5-0,1t) = 4,5 \\ \lim\limits_{t \to 5^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 5^+} [a+0,05(t-5)] = a \end{cases} \right\} \to a = 4,5$$

- Continuïtat en $x = 10 \rightarrow \lim\limits_{t \to 10} f(t) = f(10)$

$f(10) = 4{,}75 + 0{,}3(10 - b) = 7{,}75 - 0{,}3b$

$$\lim_{t \to 10} f(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 10^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 10^-} [4{,}5 + 0{,}05(t-5)] = 4{,}75 \\ \lim\limits_{t \to 10^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 10^+} [4{,}75 + 0{,}3(t-b)] = 7{,}75 - 0{,}3b \end{array} \right\} \rightarrow 4{,}75 = 7{,}75 - 0{,}3b \rightarrow b = 10$$

Si $a = 4{,}5$ i $b = 10$, la funció sempre és contínua.

b) El valor inicial és $f(0) = 5$ milions d'euros.

El valor al cap de 13 anys és $f(13) = 4{,}75 + 0{,}3(13 - 10) = 5{,}65$ milions d'euros.

38 El tipus d'interès anual que ofereix una financera depèn del temps que el client estigui disposat a mantenir la inversió, i ve donat per la funció $I(t) = \dfrac{6t}{t+1}$, $t > 0$, en anys.

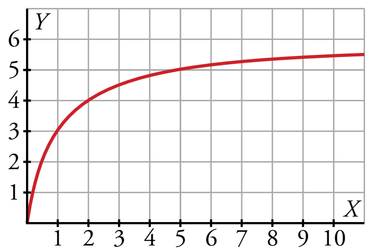
a) Representa la funció per a un període de 10 anys.

b) A quin valor tendeix l'interès si la inversió es manté a molt llarg termin?

a) $I(t) = \dfrac{6t}{t+1} = 6 + \dfrac{-6}{t+1}$ té una gàfica similar a la de la funció $y = \dfrac{-1}{x}$ desplaçada en ambdós eixos i estirada en el sentit de l'eix vertical.

Avaluem en els extrems de l'interval de definició:

$I(0) = 0$, $I(10) = \dfrac{60}{11} \approx 5{,}5$



b) Si la inversió es manté a molt llarg termini, el tipus d'interès tendeix a:

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{6t}{t+1} = 6$$

39 En una empresa es fan muntatges en cadena. El nombre de muntatges fets per un treballador sense experiència depèn dels dies d'entrenament segons la funció $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$ (t en dies).

a) Quants muntatges farà en acabar el període d'entrenament que dura 20 dies?

b) Troba l'asímptota horitzontal i explica'n el significat.

a) Farà $M(20) = 25$ muntatges.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t+4} = 30 \rightarrow y = 30$ és l'asímptota horitzontal.

Significa que el nombre de muntatges tendeix a estabilitzar-se en 30.

40 **El nombre de peixos d'una piscifactoria evoluciona segons la funció $f(t) = 50 + \dfrac{100t^2}{t^2+1}$ (t en dies).**

a) Comprova que la població augmenta la primera setmana.

b) Esbrina si el creixement serà indefinit o si tendirà a estabilitzar-se.

a) Calculem una taula amb els valors de la primera setmana.

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	50	100	130	140	144	146	147

Podem comprovar que el número creix, però d'una manera cada cop més lenta.

b) Per estudiar el comportament de la funció a llarg termini podem calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(50+\dfrac{100t^2}{t^2+1}\right) = 150$.

Aquest resultat indica clarament que el creixement tendeix a estabilitzar-se.

41 **El cost de la producció de x unitats d'un article ve donat per la funció $C(x) = 0{,}5x + 1\,000$. El cost d'una unitat depèn del nombre d'unitats produïdes.**

a) Quina és la funció que representa el cost d'una unitat si es produeixen x unitats?

b) Calcula'n l'asímptota horitzontal i explica'n el significat.

a) El cost per unitat s'obté dividint el cost de la producció entre el nombre d'unitats produïdes:

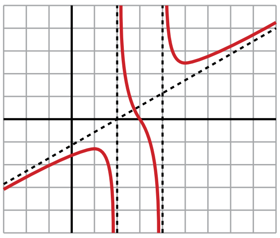
$f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{0,5x+1000}{x} = 0,5 + \dfrac{1000}{x}$ és el cost per unitat.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(0,5+\dfrac{1000}{x}\right) = 0,5 \rightarrow y = 0,5$ és l'asímptota horitzontal.

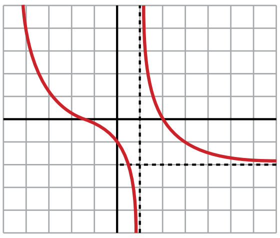
Quan el nombre d'unitats produïdes augmenta indefinidament, el cost per unitat s'estabilitza en 0,5, essent sempre superior a aquesta quantitat.

42 **Observa les gràfiques següents i descriu-ne les branques infinites, les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes:**

a)



b)



a) Asímptotes verticals: rectes $x = 2$ y $x = 4$.

Posició:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 4^+$, $f(x) \to +\infty$

Asímptota obliqua: recta $y = \dfrac{x}{2} - 1$

Posició:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > \dfrac{x}{2} - 1$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < \dfrac{x}{2} - 1$

b) Asímptotes verticals: recta $x = 1$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Asímptota horitzontal: recta $x = -2$ en $+\infty$

Si $x \to +\infty$, $f(x) > 2$

Branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid en $-\infty$.

43 Representa, en cada cas, una funció que compleixi les condicions donades.

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asímptota vertical: $x = 1$

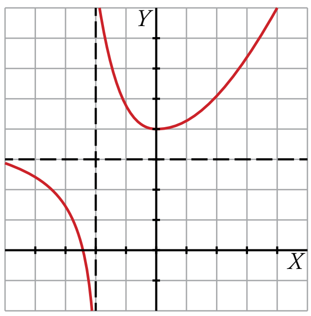
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

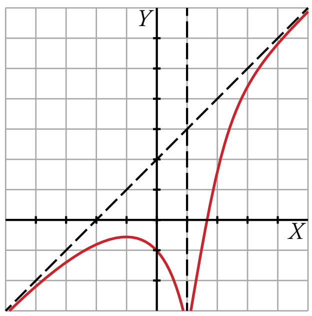
Asímptota obliqua: $y = x + 2$

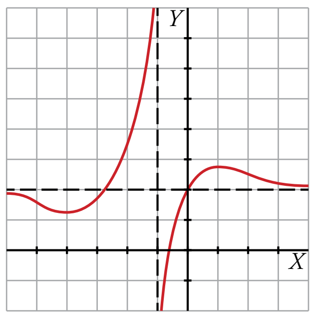
diferencia $[f(x) - y] < 0$ **si** $x \to \pm\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $f(x) > 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $f(x) < 2$

a)


b)


c)


44 Determina el valor de a i de b de manera que les rectes $x = -1$ i $y = \frac{3}{2}$ siguin asímptotes de la funció $f(x) = \frac{ax + 3}{bx - 4}$. Després, representa la posició de totes tres.

- Perquè la recta $x = -1$ sigui una asímptota de $f(x)$, el denominador s'ha d'anul·lar en l'abscissa donada. Per tant:

$b \cdot (-1) - 4 = 0 \ \to \ b = -4$

- Perquè la recta $y = \frac{3}{2}$ sigui una asímptota horitzontal, ha de ser $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax + 3}{-4x - 4} = -\frac{a}{4}$ per ser un quocient de polinomis del mateix grau.

$-\frac{a}{4} = \frac{3}{2} \ \to \ a = -6 \ \to$ La funció és $f(x) = \frac{-6x + 3}{-4x - 4}$.

Posició

- Respecte de l'asímptota $x = -1$:

ESQUERRA: $x = -1{,}01 \ \to \ f(-1{,}01) = \frac{-6(-1{,}01) + 3}{-4(-1{,}01) - 4} = 226{,}5 \ \to \ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

DRETA: $x = -0{,}99 \ \to \ f(-0{,}99) = \frac{-6(-0{,}99) + 3}{-4(-0{,}99) - 4} = -223{,}5 \ \to \ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

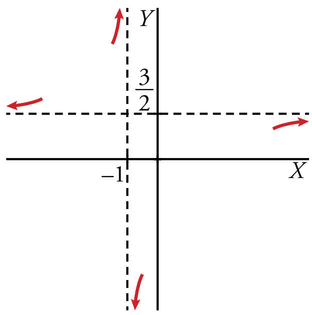
- Respecte de l'asímptota $y = \dfrac{3}{2}$:

Calculem $f(x) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-6x+3}{-4x-4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-9}{4(x+1)}$

$(x \to +\infty) \to f(x) - \dfrac{3}{2} < 0 \to f(x)$ és sota l'asímptota.

$(x \to -\infty) \to f(x) - \dfrac{3}{2} > 0 \to f(x)$ és sobre l'asímptota.

$y = \dfrac{-6x+3}{-4x-4}$



45 **Donada la funció** $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \le 2 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, **calcula els valors de** a **i de** b **perquè** f **sigui contínua i la seva gràfica passi per l'origen de coordenades.**

Perquè la seva gràfica passi per l'origen de coordenades, $f(0) = 0$.

$f(0) = b$, d'on $b = 0$.

La funció és contínua sempre que $x \neq 2$, perquè està formada per un tros de paràbola i un altre de recta.

Ara imposem la continuïtat en $x = 2$; és a dir, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

$f(2) = 4 + 2a$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4x - 2) = 6 \end{array} \right\} \to 4 + 2a = 6 \to a = 1$$

Si $a = 1$ i $b = 0$, la funció és contínua i passa per l'origen de coordenades.

46 **Determina, en cada cas, quin ha de ser el valor de** a **perquè es verifiquin les igualtats següents:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{ax+3}{3x-1} = -1$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2 - 2x + 7}{1 - 3x^2} = -2$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{ax+3}{3x-1} = \dfrac{2a+3}{5} \to \dfrac{2a+3}{5} = -1 \to a = -4$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2 - 2x + 7}{1 - 3x^2} = -\dfrac{a}{3} \to -\dfrac{a}{3} = -2 \to a = 6$

47 **Estudia el tipus de discontinuïtat que presenta la funció $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+9}{x^2-9}$ en $x = 3$ i en $x = -3$.**

- Cas $x = 3$

  $f(3)$ no existeix, perquè es produeix una divisió entre 0.

  $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2x^2+9}{x^2-9} = \left(\frac{54}{0}\right) = \pm\infty$$

  Estudiem els límits laterals:

  ESQUERRA: $x = 2{,}99 \to f(2{,}99) = \dfrac{2{,}99^3+2\cdot 2{,}99^2+9}{2{,}99^2-9} = -895{,}01 \to \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3+2x^2+9}{x^2-9} = -\infty$

  DRETA: $x = 3{,}01 \to f(3{,}01) = \dfrac{3{,}01^3+2\cdot 3{,}01^2+9}{3{,}01^2-9} = 905{,}01 \to \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^3+2x^2+9}{x^2-9} = +\infty$

  En $x = 3$ presenta una discontinuïtat de salt infinit (tipus I).

- Cas $x = -3$

  $f(-3)$ no existeix perquè es produeix una divisió entre 0.

  $$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+2x^2+9}{x^2-9} = \left(\frac{0}{0}\right) \to \text{Indeterminació.}$$

  $$\frac{x^3+2x^2+9}{x^2-9} = \frac{(x^2-x+3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2-x+3}{x-3}$$

  $$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+2x^2+9}{x^2-9} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-x+3}{x-3} = -\frac{5}{2}$$

  En $x = -3$ presenta una discontinuïtat evitable (tipus III), ja que existeix el límit però la funció no està definida.

Pàgina 181

Qüestions teòriques

48 **Cert o fals? Justifica la resposta i posa'n exemples.**

a) Si no existeix $f(2)$, no es pot calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

b) Si no existeix $f(1)$, $f(x)$ no pot ser contínua en $x = 1$.

c) Una funció pot tenir dues asímptotes horitzontals.

d) Una funció pot tenir tres asímptotes verticals.

e) Si $g(a) = 0$, podem afirmar que $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ té asímptota vertical.

f) La funció $y = 2^{-x}$ no té asímptotes.

a) Fals. En una discontinuïtat evitable de tipus III no existeix la funció en un punt, pero sí que existeix el límit.

b) Cert, ja que no es compleix una de les condicions de la continuïtat.

c) Cert. Una funció pot tendir a un valor diferent per a cada un dels dos extrems de l'eix OX

d) Cert. Fins i tot pot tenir infinites asímptotes verticals, com passa amb la funció $y = tg\, x$.

e) Fals. Si $f(a) = 0$, pot passar que la funció tingui una discontinuïtat evitable en $x = a$.

f) Fals. Perquè $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$ i la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

49 **Explica, en cada cas, com ha de ser el numerador de la fracció $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\_\_\_\_\_}{2x^2 - 5x + 3}$ perquè el resultat sigui:**

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 3

a) Ha de ser un polinomi de graus 3 o superior en el qual el coeficient del terme de major grau sigui positiu.

b) Ha de ser un polinomi de grau 3 o superior de manera que el coeficient del terme de major grau sigui negatiu.

c) Ha de ser un polinomi de grau 1 o inferior.

d) Ha de ser un polinomi de grau 2 en el qual el terme en x^2 sigui $6x^2$.

50 **Donada la funció $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + b$, justifica si són certes o falses les afirmacions següents:**

a) Si $a > 0$ i n és parell, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Si $a > 0$ i n és senar, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si $a < 0$ i n és parell, aleshores $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

d) Si $a < 0$ i n és senar, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

a) Falsa.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ perquè $ax^n > 0$ en ser n parell i $a > 0$.

b) Falsa.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ perquè $ax^n < 0$ en ser n senar i $a > 0$.

c) Certa.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ perquè $ax^n < 0$ en ser n parell i $a < 0$.

d) Certa.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ perquè $ax^n > 0$ en ser n senar i $a < 0$.

51 **Existeix algun valor de b per al qual sigui contínua la funció $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ -2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$?**

Justifica la resposta.

La funció no pot ser contínua en $x = 1$ per a cap valor de b perquè $f(1) = 4$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x - 2) = 1$

Per tant:

- El límit existeix, val 1 i és diferents de $f(1) = 4$ $\to$ Tindria una discontinuïtat evitable (tipus IV).

O bé:

- El límit no existeix pel fet de ser diferents els límits laterals $\to$ Tindria una discontinuïtat de salt finit (tipus II).

Per aprofundir

52 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax$ en els casos $a > 3$ i $0 < a < 3$. Per a quin valor de a és el límit un nombre real? Quin és aquest límit?**

$$\frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax = \frac{3x^2 - 5x - ax^2 + ax}{x - 1} = \frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1}$$

- $a > 3$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} = -\infty$, ja que el coeficient de x^2 seria negatiu.

- $0 < a < 3$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} = +\infty$, ja que el coeficient de x^2 seria positiu.

- Perquè el límit sigui un nombre real, el resultat de l'operació $\dfrac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax$ ha de ser un quocient de polinomis del mateix grau; és a dir, el grau del numerador ha de ser 1.

  $\dfrac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} \rightarrow 3 - a = 0 \rightarrow a = 3$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 5x}{x - 1} - 3x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x - 1} = -2$

53 **Troba els límits següents (usa la calculadora).**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x + 3)}{x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

a) $x = 50 \rightarrow \dfrac{50^3}{e^{50}} = 2{,}41 \cdot 10^{-17} \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$

b) $x = 1\,000 \rightarrow \dfrac{1000}{\ln 1000} = 144{,}76 \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

c) $x = 50 \rightarrow \dfrac{e^{50} - 1}{50^5} = 1{,}66 \cdot 10^{13} \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5} = +\infty$

d) $x = 1\,000 \rightarrow \dfrac{\ln(2 \cdot 1000 + 3)}{1000^2} = 7{,}6 \cdot 10^{-6} \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x + 3)}{x^2} = 0$

e) $x = 50 \rightarrow 2^{50} - 50^4 = 1{,}13 \cdot 10^{15} \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4) = +\infty$

f) $x = -50 \rightarrow 0{,}75^{-50} - (-50)^2 = 1{,}76 \cdot 10^6 \rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2) = +\infty$

54 **a) Troba $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Per a això, multiplica numerador i denominador pel binomi conjugat $(\sqrt{x} + 1)$ del denominador.**

b) Amb el mateix procediment, calcula $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left(\dfrac{0}{0} \right) \rightarrow$ Indeterminació.

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow$ Indeterminació.

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

55 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |x-2|$ **b)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x|x|$ **c)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x-2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{|x-2|}{2x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} |x-2| = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} |x-2| = \lim\limits_{x \to -\infty} [-(x-2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x|x| = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x|x| = \lim\limits_{x \to -\infty} [x(-x)] = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim\limits_{x \to \pm+\infty} \frac{x}{x-2} = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{x-2} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-(x-2)}{2x} = \lim\limits_{x \to \pm-\infty} \frac{-x+2}{2x} = -\frac{1}{2}$

56 **Troba les asímptotes de les funcions següents:**

a) $f(x) = \frac{|2x|}{x-2}$ **b)** $f(x) = \frac{|x-2|}{x}$

a) • Asímptota vertical $x = 2$.

Posició $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow 2^-, \ f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x \rightarrow 2^+, \ f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$

• Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|2x|}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$$

La recta $y = 2$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{|2x|}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x-2} = -2$$

La recta $y = -2$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$.

b) • Asímptota vertical $x = 0$.

Posició: $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow 0^-, \ f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x \rightarrow 0^+, \ f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$

• Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x-2|}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} = 1$$

La recta $y = 1$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{|x-2|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x+2}{x} = -1$$

La recta $y = -1$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$.

Autoavaluació

1 **Calcula el límit de $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2-x-7, & x>3\end{cases}$ en els punts d'abscisses 0, 3 i 5. Després digues si la funció és contínua en aquests punts.**

$$f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2-x-7, & x>3\end{cases}{}^{+}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\cdot 0-5=-5$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2\cdot 3-5=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3^2-3-7=-1\end{array}\right\} \text{No té límit en } x=3.$$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 5^2-5-7=13$$

És contínua en $x=0$ i en $x=5$. No és contínua en $x=3$, perquè no té límit en aquest punt.

2 **Troba els límits següents:**

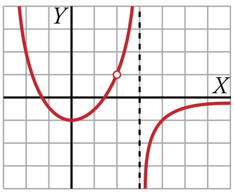
a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x}{(x-4)^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{x-1}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

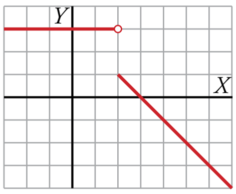
b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{49}}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x}{(x-4)^2}=+\infty$ (Si $x\longrightarrow 4^+$ o si $x\longrightarrow 4^-$, els valors de la funció són positius).

3 **a)**



b)



A partir de la gràfica d'aquestes dues funcions, troba, en cada cas, els límits següents:

$$\lim_{x\to 3} f(x);\quad \lim_{x\to 2} f(x);\quad \lim_{x\to +\infty} f(x);\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}$ No té límit en $x=3$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \left\langle \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1\end{array}\right\}$ No té límit en $x=2$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=3$

4 **Troba les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ i estudia la posició de la corba respecte d'aquestes.**

Simplifiquem: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x-2} \rightarrow y = \dfrac{4x}{x-2}$

- Asímptota vertical: $x = 2$

  Posició $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x-2} = +\infty \end{cases}$

- Asímptota horitzontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x-2} = 4;\ y = 4$

  Posició: $\begin{cases} x \longrightarrow +\infty, & y > 4 \\ x \longrightarrow -\infty, & y < 4 \end{cases}$

5 **Justifica quin valor ha de prendre a perquè la funció $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sigui contínua en $\mathbb{R}$.**

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La funció és conínua per a valors de x menors que 1 i majors que 1, perquè els dos trams són rectes.

Perquè sigui contínua en $x = 1$, s'ha de complir: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) < \left. \begin{matrix} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{matrix} \right\}$

Perquè existeixi el límit, ha de ser: $a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

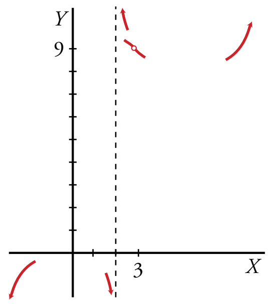
6 **Troba el límit de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ quan $x \longrightarrow 3$; $x \longrightarrow 2$; $x \longrightarrow +\infty$; $x \longrightarrow -\infty$ i representa la informació que obtinguis.**

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

  Simplifiquem: $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

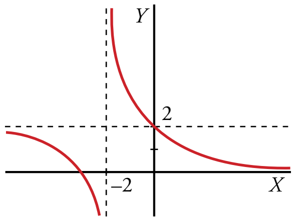
  $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-2} = 9$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x - 2} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 2} = -\infty$



7 **Representa una funció que compleixi les condicions següents:**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$



8 **Estudia les branques infinites de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$ i situa la corba respecte a la seva asímptota.**

No té asímptotes verticals perquè $x^2 + 4 \neq 0$ per a qualsevol valor de x.

No té asímptotes horitzontals perquè $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2 + 4} = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2 + 4} = -\infty$.

Té una asímptota obliqua, perquè el grau del numerador és una unitat més gran que el del denominador.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 8x & 2x \\ -8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2 + 4} = 2x - \frac{8x}{x^2 + 4}$$

Asímptota obliqua: $y = 2x$

$$\text{Posició} \begin{cases} x \to +\infty & \text{corba} < \text{asímptota} \\ x \to -\infty & \text{corba} > \text{asímptota} \end{cases}$$