Resol

Pàgina 183

Moviment d'una partícula

Un investigador, per estudiar el moviment d'una partícula, l'ha il·luminat amb llampades de flaix cada dècima de segon (0,1 s) durant quatre segons. Aquesta és la fotografia corresponent a escala real:

1. Aproxima la velocitat de la partícula en l'instant $t = 2$ s trobant la velocitat mitjana en els intervals [2; 2,5] i [2; 2,1]. Per a això, pren mesures sobre la fotografia.

2. Calcula les velocitats mitjanes anteriors prenent valors sobre l'equació del moviment d'aquesta partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$

3. Troba ara les velocitats mitjanes en els intervals [2; 2,001] i [2; 2,000001] prenent de nou valors sobre l'equació del moviment de la partícula. ¿Podem considerar que aquesta última velocitat mitjana és molt semblant a la velocitat instantània en $t = 2$ s?

1. La distància que separa els punts en els instants $t = 2$ i $t = 2,5$ és de 12,5 mm; per tant, la velocitat és:

$$\frac{12,5}{0,5} = 25 \text{ mm/s} = 2,5 \text{ cm/s}$$

La distància que separa els punts en els instants $t = 2$ i $t = 2,1$ és de 3,5 mm; aleshores la velocitat és:

$$\frac{3,5}{0,1} = 35 \text{ mm/s} = 3,5 \text{ cm/s}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \text{ cm} \\ s_2 = \frac{1}{2}(2,5^4 - 8 \cdot 2,5^3 + 18 \cdot 2,5^2) = 13,28 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow v_1 = \frac{13,28 - 12}{0,5} = 2,56 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_3 = \frac{1}{2}(2,1^4 - 8 \cdot 2,1^3 + 18 \cdot 2,1^2) = 12,37 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow v_2 = \frac{12,37 - 12}{0,1} = 3,77 \text{ cm/s}$$

3. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_4 = \frac{1}{2}(2,001^4 - 8 \cdot 2,001^3 + 18 \cdot 2,001^2) = 12,003997 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{12,003997 - 12}{0,001} = 3,997 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_5 = \frac{1}{2}(2,000001^4 - 8 \cdot 2,000001^3 + 18 \cdot 2,000001^2) = 12,000004 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{12,000004 - 12}{0,000001} = 4 \text{ cm/s}$$

Sí, podem considerar que aquesta última velocitat és molt semblant a la velocitat instantània en $t = 2$ s perquè l'interval de temps transcorregut és tan sols una milionèsima de segon.

1 Mesura del creixement d'una funció

Pàgina 184

Fes-ho tu. **Troba la TVM de $y = \sqrt{x-1}$ en $[1, 2]$, $[1, 5]$ i $[1, 10]$.**

$$\text{TVM } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{0}}{1} = 1$$

$$\text{TVM } [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{TVM } [1, 10] = \frac{f(10) - f(1)}{10-1} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{0}}{9} = \frac{1}{3}$$

1 Cert o fals?

a) La TVM mesura el creixement mitjà d'una funció en un interval.

b) Si f és creixent en $[a, b]$, la TVM en aquest interval és positiva, i si és decreixent, la TVM és negativa.

c) Si la TVM de f en $[a, b]$ és 0, significa que f és constant en $[a, b]$.

a) Cert.

b) Cert. El signe de la TVM depèn només del signe del numerador. Si f és creixent $f(b) > f(a)$; aleshores el numerador és positiu. Si f és decreixent, $f(b) < f(a)$, aleshores el numerador és negatiu.

c) Fals. Només podem afirmar que $f(a) = f(b)$. Això no vol dir que sigui constant.

2 Troba la TVM de la funció $y = x^2 - 8x + 12$ en els intervals següents:

$[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$

$$\text{TVM } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{TVM } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{TVM } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{TVM } [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{TVM } [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{TVM } [1, 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{TVM } [1, 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Troba la TVM de $y = x^2 - 8x + 12$ en l'interval variable [1, 1 + h].**

Comprova que, donant a h els valors adequats, s'obtenen els resultats de l'exercici anterior.

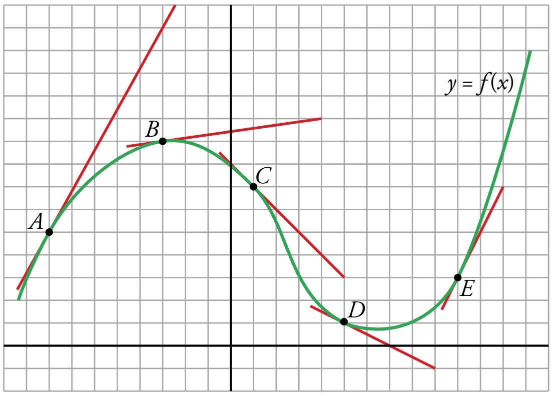
$$\text{TVM}\,[1,\ 1+h] = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-8(1+h)+12-5}{h} = \frac{h^2-6h}{h} = \frac{h(h-6)}{h} = h-6$$

Donant a h els valors 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 s'obtenen els resultats de l'exercici anterior.

Pàgina 185

4 **En la gràfica, en verd, de la funció $y = f(x)$ adjunta, s'han assenyalat cinc punts: A, B, C, D i E.**

En cada un hi ha traçada la recta tangent, el pendent de la qual es pot calcular.



Expressa els resultats usant expressions del tipus:

$f'(a) = \ldots$

Per exemple, per al punt B:

$f'(-3) = \ldots$

PUNT	PENDENT
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

2 Obtenció de la derivada a partir de l'expressió analítica

Pàgina 187

Fes-ho tu. **Troba la derivada de $y = \frac{3}{x-2}$ en els punts d'abscisses 1, –1 i 5.**

- $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$f(1+h) = \frac{3}{1+h-2} = \frac{3}{h-1}$

$f(1) = \frac{3}{1-2} = -3$

$f(1+h) - f(1) = \frac{3}{h-1} - (-3) = \frac{3h}{h-1}$

$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \frac{3}{h-1}$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$

- $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$f(-1+h) = \frac{3}{-1+h-2} = \frac{3}{h-3}$

$f(-1) = \frac{3}{-1-2} = -1$

$f(-1+h) - f(-1) = \frac{3}{h-3} - (-1) = \frac{h}{h-3}$

$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{h}{h-3}}{h} = \frac{1}{h-3}$

$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$

- $f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$f(5+h) = \frac{3}{5+h-2} = \frac{3}{h+3}$

$f(5) = \frac{3}{5-2} = 1$

$f(5+h) - f(5) = \frac{3}{h+3} - 1 = \frac{-h}{h+3}$

$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\frac{1}{h+3}$

$f'(5) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{h+3}\right) = -\frac{1}{3}$

Fes-ho tu. Troba la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en els punts d'abscisses 0, 1, 2, 3, 4 i 5.

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $\quad f'(1) = 1 + 7 = 8$ $\quad f'(2) = 9$ $\quad f'(3) = 10$ $\quad f'(4) = 11$ $\quad f'(5) = 12$

5 Cert o fals?

a) La derivada d'una funció, $y = f(x)$, en $x = a$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ és paral·lela a l'eix X.

c) Si $f'(2) > 0$, aleshores f és creixent en el punt d'abscissa 2.

a) Cert.

b) Cert. El pendent de la recta tangent en $x = 3$ és zero; aleshores la recta és horitzontal.

c) Cert, a causa de la inclinació de la recta tangent a f en aquest punt.

6 Troba la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en el punt d'abscissa –2.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

7 Troba la derivada de $y = -2x + 4$ en els punts d'abscisses –3, 0, 4 i 7. Explica per què obtens en tots els casos el mateix resultat.

- $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3+h) - f(-3) = -2(-3+h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

  $f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

  $f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(7+h) - f(7)}{h}$

  $f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

  $f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

Com que la funció és una línia recta, creix o decreix sempre de la mateixa manera i, en ser la derivada una manera de mesurar el creixement d'una funció, aquesta ha de valer el mateix en tots els punts.

8 Troba la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en els punts d'abscisses –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

Calculem la derivada de manera general i l'avaluem en cada un dels punts demanats.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$$

$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

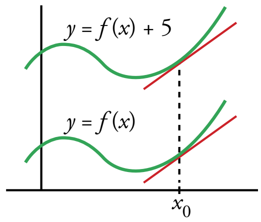
3 Funció derivada d'una altra

Pàgina 188

9 Cert o fals?

Les rectes tangents en un punt qualsevol, x_0, a les gràfiques de $y = f(x)$ i $y = f(x) + 5$ són paral·leles.

Això significa que les dues funcions tenen la mateixa funció derivada.



Cert, perquè, en ser paral·leles les rectes tangents en qualsevol punt, han de tenir el mateix pendent en tots els punts.

10 Troba la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ i, a partir d'aquesta, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ i $f'(5)$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{3}{x+h-2} - \dfrac{3}{x-2}}{h} = 3 \cdot \frac{\dfrac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

11 Troba la funció derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ i calcula els pendents de les rectes tangents a la corba en els punts d'abscisses $x = 4$ i $x = 7$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+h-3-(x-3)}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{h+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{h+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

12 Troba la funció derivada de $f(x) = x^3 + x^2$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3+x^2)}{h} = \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 + h^2 + 2hx + x^2 - x^3 - x^2}{h} =$$

$$= \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + h^2 + 2hx}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x) = 3x^2 + 2x$$

Pàgina 189

13 **En la fórmula que serveix per trobar l'equació de la tangent a la corba $y = f(x)$ en un punt**

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

digues el paper que exerceix cada una de les lletres que hi intervenen. De quina funció és variable independent la x?

a es l'abscissa del punt en què es troba la recta tangent.

$f(a)$ és l'ordenada d'aquest punt.

$f'(a)$ és el pendent de la recta tangent o, també, la derivada de la funció en el punt d'abscissa a.

x és la variable independent de la recta tangent.

y és la variable dependent d'aquesta recta.

4 Regles per obtenir les derivades d'algunes funcions

Pàgina 190

14 Calcula: a) $D(x^5)$ b) $D\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right)$ d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ e) $D\left(\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right)$

a) $D(x^5) = 5x^4$

b) $D\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = D(x^{-2}) = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$

c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D(x^{1/3}) = \dfrac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = D(x^{2/3}) = \dfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $D\left(\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = D\left(\dfrac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = D\left(x^{5/6}\right) = \dfrac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Pàgina 192

Fes-ho tu. Troba la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\dfrac{4}{3}x^{1/3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\dfrac{4}{x^{7/3}} = -\dfrac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

Fes-ho tu. Troba la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{125}(5^4)^x = \dfrac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \dfrac{1}{125}625^x\, ln\,625 = \dfrac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \dfrac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \dfrac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \dfrac{1}{x^2}$

Troba la funció derivada de les funcions següents:

15 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

16 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{x^3}\,e^x = \sqrt{3}\,x^{3/2}\,e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\,e^x + x^{3/2}\,e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^x + x\sqrt{x}\,e^x\right) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

17 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x \cos x - e^x \sin x)\,2^x - e^x \cos x\,2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x - e^x \sin x - e^x \cos x \ln 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\,(\cos x - \sin x - \ln 2 \cos x)}{2^x}$$

18 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\,x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\,x + x \cdot 3^x \ln 3 \cdot tg\,x + \frac{x \cdot 3^x}{\cos^2 x}$$

19 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot x - \log_2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2 \log_2 x}{x^2 \ln 2}$$

20 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\,x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

21 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

22 $f(x) = (\sin x)\left(x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = (\cos x)\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + (\sin x)\,(2x)$$

23 $f(x) = \dfrac{2^x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x - 2^x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2^x\,(\ln 2 \cdot \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$$

24 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}5^x$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}5^x + \dfrac{1}{x}5^x \ln 5 = 5^x \dfrac{x \ln 5 - 1}{x^2}$

Pàgina 193

Troba la funció derivada de les funcions següents:

25 $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\cos(x^2 - 5x + 7)$

26 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$

27 $f(x) = \sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (a^2)' = 2a \\ (\sin\alpha)' = \cos\alpha \\ \left(3x+\frac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 6\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Utilitzant la fórmula del sinus de l'angle doble, podríem donar el resultat d'aquesta altra manera:

$f'(x) = 2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 3\sin(6x+\pi) = -3\sin 6x$

28 $f(x) = \dfrac{\log x^2}{x}$

$f(x) = \dfrac{2\log x}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$

29 $f(x) = \cos(3x - \pi)$

$f'(x) = -3\sin(3x - \pi)$

30 $f(x) = \sqrt{1+2x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

31 $f(x) = x\,e^{2x+1}$

$f'(x) = e^{2x+1} + x\,e^{2x+1}\cdot 2 = e^{2x+1}(1+2x)$

32 $f(x) = \dfrac{\sin(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}\cos(x^2+1) + [x\sin(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \dfrac{2x(1-x^2)\cos(x^2+1) + x\sin(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

5 Utilitat de la funció derivada

Pàgina 194

Fes-ho tu. Troba les rectes tangents a $y = x^3 - 2x^2$ paral·leles a $y = -x$.

Busquem les rectes de pendent –1:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Les solucions de l'equació $3x^2 - 4x = -1$ són les abscisses dels punts en què les rectes tangents a la gràfica de la funció tenen pendent –1 i, per tant, són paral·leles a la recta donada.

$$3x^2 - 4x = -1 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -1 \rightarrow \text{Recta tangent: } y = -1 \cdot (x - 1) - 1 \rightarrow y = -x$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{27} \rightarrow \text{Recta tangent: } y = -1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{27} \rightarrow y = -x + \frac{4}{27}$$

Pàgina 195

Fes-ho tu. Troba els punts singulars de $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ i determina els intervals on creix o decreix.

Resolem l'equació $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

$$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \rightarrow (-1, 10) \text{ és un punt singular.}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 3 = -17 \rightarrow (2, -17) \text{ és un altre punt singular.}$$

Tenint en compte les branques infinites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenim que els intervals $(-\infty, -1)$ i $(2, +\infty)$ són intervals de creixement. En l'interval $(-1, 2)$ la funció decreix.

33 a) **Troba les equacions de les rectes tangents a la gràfica de $y = x^4 - 8x^2 + 12x$ en els punts d'abscisses 1 i –1.**

b) Troba les rectes tangents a la corba amb pendent 12.

a) Calculem la derivada primera:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x + 12$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 4 - 16 + 12 = 0 \\ f(1) = 1 - 8 + 12 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{La recta tangent és: } y = 0(x - 1) + 5 \rightarrow y = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = -4 + 16 + 12 = 24 \\ f(-1) = 1 - 8 - 12 = -19 \end{array}\right\} \rightarrow \text{La recta tangent és: } y = 24(x + 1) - 19 \rightarrow y = 24x + 5$$

b) Trobem les abscisses dels punts en què les tangents tenen pendent 12 resolent l'equació $f'(x) = 12$:

$4x^3 - 16x + 12 = 12 \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x(4x^2 - 16) = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

- $x_1 = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 12(-2) = -40$

  La recta tangent és: $y = 12(x + 2) - 40 \rightarrow y = 12x - 16$

- $x_2 = 0 \rightarrow f(0) = 0$

  La recta tangent és: $y = 12x$

- $x_3 = 2 \rightarrow f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 8$

  La recta tangent és: $y = 12(x - 2) + 8 \rightarrow y = 12x - 16$

34 **Troba el valor màxim de la funció $y = -x^3 + 12x + 3$ en l'interval $[0, 3]$ i en l'interval $[-5, 3]$. Troba el mínim de cadascun d'aquests intervals.**

Calculem primer els punts singulars de la funció:

$f'(x) = -3x^2 + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 12 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

- En l'interval [0, 3] avaluem:

  $f(0) = 3 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El màxim es troba en $x = 2$ i val 19.

  El mínim es troba en $x = 0$ i val 3.

- En l'interval [–5, 3] avaluem:

  $f(-5) = 68 \quad f(-2) = -13 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El màxim es troba en $x = -5$ i val 68.

  El mínim es troba en $x = -2$ i val –13.

6 Representació de funcions

Pàgina 197

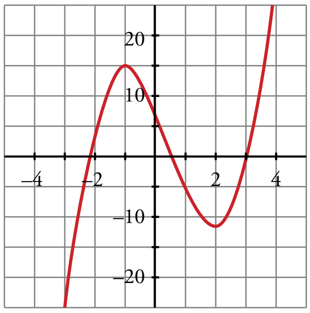
35 Representa aquestes funcions:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Màxim en (–1, 15).

Mínim en (2, –12).



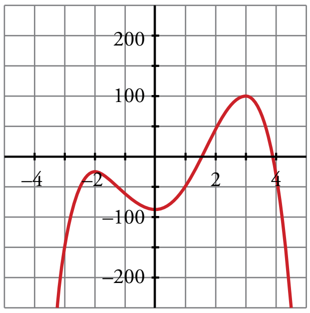
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Màxim en (–2, –26) i en (3, 99).

Mínim en (0, –90).



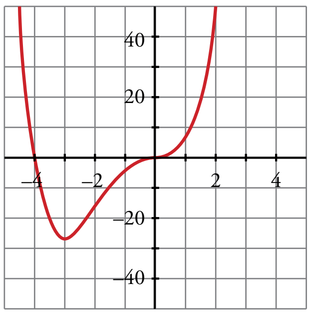
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínim en (–3, –27).

Punt d'inflexió en (0, 0).

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Punts de tall amb els eixos: (0, 0) i (–4, 0).



Pàgina 199

36 Representa les funcions racionals següents, seguint els passos de la pàgina anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

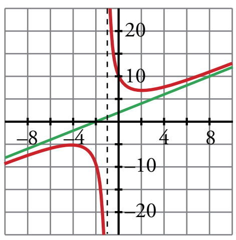
a) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

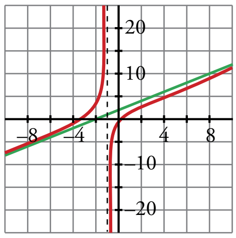
Màxim en (–4, –5). Mínim en (2, 7).

Asímptota vertical: $x = -1$

Asímptota obliqua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

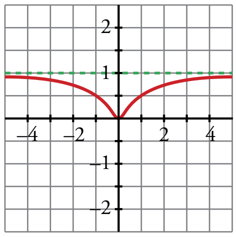


Punts de tall amb els eixos: (0, 0) i (–3, 0)

Asímptota vertical: $x = -1$

Asímptota obliqua: $y = x + 2$

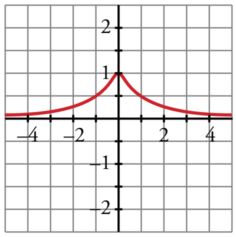
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$



Mínim en (0, 0).

Asímptota horitzontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$

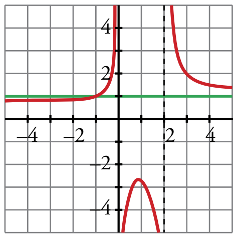


Màxim en (0, 1).

Asímptota horitzontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$



Màxim en (0,73; –2,73).

Mínim en (–2,73; 0,73).

Asímptotes verticals: $x = 0$, $x = 2$

Asímptota horitzontal: $y = 1$

f) • Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asímptota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

• Asímptota horitzontal:

$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ és asímptota horitzontal

Quan $x \rightarrow -\infty$, $y < 1$; i quan $x \rightarrow +\infty$, $y < 1$.

Per tant, la corba està per sota de l'asímptota.

• Punts singulars:

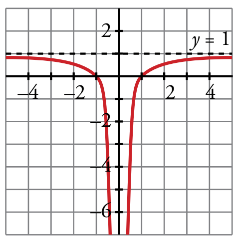
$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no té punts singulars

Observem que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; i que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Aleshores la funció és decreixent en $(-\infty, 0)$ i és creixent en $(0, +\infty)$.

• Talla l'eix X en (–1, 0) i (1, 0).



Exercicis i problemes resolts

Pàgina 200

1. Funció derivada a partir de la definició

Fes-ho tu. **Donada $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, troba $f'(x)$ aplicant-hi la definició.**

$$f(x+\text{h}) - f(x) = \frac{x+\text{h}}{x+\text{h}+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+\text{h})(x+1) - x(x+\text{h}+1)}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{x^2+x+\text{h}x+\text{h}-x^2-x\text{h}-x}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{\text{h}}{(x+\text{h}+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{f(x+\text{h})-f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{\dfrac{\text{h}}{(x+\text{h}+1)(x+1)}}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{1}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Regles de derivació

Fes-ho tu. **Troba $f'(x)$ sent $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$.**

$$f(x) = 2\ln\frac{x+1}{x} = 2\left[\ln(x+1) - \ln x\right]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

Pàgina 201

4. Recta tangent paral·lela a una recta

Fes-ho tu. **Troba l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = 3x^2 - 4x$ que és paral·lela a la recta $2x - y + 5 = 0$.**

Aïllant y en l'equació de la recta donada, podem obtenir el seu pendent.

$y = 2x + 5 \;\rightarrow\;$ El pendent de la recta és 2.

Les abscisses dels punts en què la recta tangent és paral·lela a la recta anterior són les solucions de l'equació $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 6x - 4 \;\rightarrow\; 6x - 4 = 2 \;\rightarrow\; x = 1$ és el punt en què la tangent i la recta donada són paral·leles.

Finalment, com que $f(1) = -1$, la recta buscada és $y = 2(x - 1) - 1$, és a dir, $y = 2x - 3$.

5. Punts de tangent horitzontal

Fes-ho tu. **Troba els punts singulars de la funció $f(x) = x^3 - 6x^2$ i digues si són màxims o mínims.**

Trobem les abscisses dels punts singulars resolent l'equació $f'(x) = 3x^2 - 12x$:

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 12x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 4$

Calculem les ordenades d'aquests punts:

$f(0) = 0 \qquad f(4) = -32$

Els punts singulars són (0, 0) i (4, –32).

Branques infinites:

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 6x^2) = +\infty \;\rightarrow\;$ (4, –32) és un mínim.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 6x^2) = -\infty \;\rightarrow\;$ (0, 0) és un màxim.

6. Coeficients d'una funció que té punts singulars

Fes-ho tu. Troba b i c de manera que la funció $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ passi per $(1, 0)$ i $f'(1) = 5$.

Si f passa per $(1, 0)$, aleshores $f(1) = 0$.

$1^3 + b \cdot 1^2 + c = 0 \to c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

$f'(1) = 5 \to 3 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 5 \to b = 1$

Pàgina 202

7. Intervals de creixement i de decreixement

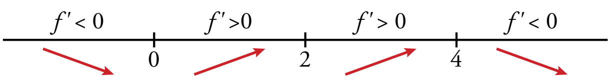
Fes-ho tu. Troba els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$.

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to \frac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \to 4x - x^2 = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Estudiem els signes de f dins el domini de definició en els intervals els extrems dels quals són els punts singulars.



Per tant, f creix en $(0, 2) \cup (2, 4)$ i decreix en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

8. Gràfica d'una funció racional contínua

Fes-ho tu. Estudia i representa la funció $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

El seu domini de definició és $\mathbb{R}$ perquè l'equació $x^2 + 1 = 0$ no té solució. Per tant, no té asímptotes verticals.

Asímptota horitzontal: $y = 2$ perquè $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$

Posició: Calculem $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - 2 = \dfrac{-2}{x^2+1}$

- Si $x \to +\infty$, aleshores $f(x) - 2 < 0$.
- Si $x \to -\infty$, aleshores $f(x) - 2 < 0$.

Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

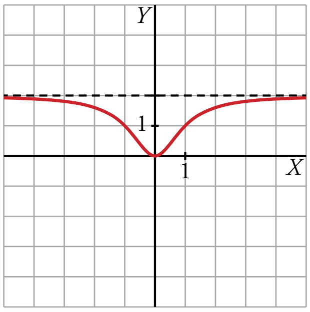
$f'(x) = 0 \to 4x = 0 \to x = 0 \to f(0) = 0 \to$ El punt $(0, 0)$ és un punt singular.

Estudiem el signe de $f'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
SIGNE DE $f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

El punt (0, 0) és un mínim.

Gràfica:



Pàgina 203

9. Estudi i representació d'una funció polinòmica

Fes-ho tu. Estudia i representa aquesta funció:

$$f(x) = 1 + (x-3)^3$$

- Pel fet de ser una funció polinòmica, el seu domini és $\mathbb{R}$, és contínua i no té asímptotes.
- Branques infinites:

$$\lim_{x \to +\infty} [1 + (x-3)^3] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} [1 + (x-3)^3] = -\infty$$

- Punts singulars:

$f'(x) = 3(x-3)^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$

Com que $f(3) = 1$, el punt (3, 1) és l'únic punt singular.

- Creixement i decreixement:

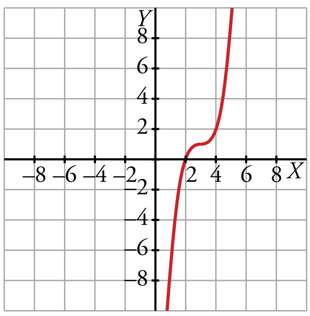
Com que $f'(x) = 3(x-3)^2 > 0$ per a tot $x \neq 3$, la funció creix a ambdós costats de $x = 3$ i no és ni màxim ni mínim.

- Talls amb els eixos:

$x = 0 \rightarrow y = -26$

$y = 0 \rightarrow 1 + (x-3)^3 = 0 \rightarrow (x-3)^3 = -1 \rightarrow x = 2$

- Gràfica:



10. Estudi i representació d'una funció racional

Fes-ho tu. Estudia i representa aquesta funció:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$$

- La funció no està definida en $x = 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asímptota vertical: $x = 0$

  Posició:

  Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$
- Asímptotes horitzontals i obliqües:

  Com que el grau del numerador és una unitat més gran que el grau del denominador, té una asímptota obliqua. Dividim:

  $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \rightarrow$ L'asímptota és $y = 2x$

  Posició:

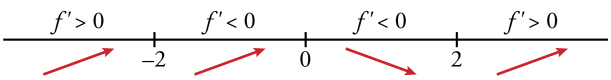
  Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Corba sota l'asímptota.

  Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Corba sobre l'asímptota.
- Punts singulars:

  $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

  $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

  $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Per tant, $(-2, -8)$ i $(2, 8)$ són els punts singulars.
- Creixement i decreixement:

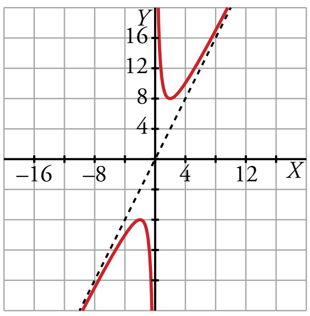


- Talls amb els eixos:

  No talla l'eix *OY*.

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 8 = 0$. No té solució (no talla l'eix *OX*).
- Gràfica:

  $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



Exercicis i problemes guiats

Pàgina 204

1. Derivades sobre la gràfica

Observant la gràfica de la dreta, de $y = f(x)$, sobre la qual s'han traçat les tangents en $x = 1$ i en $x = 3$:

a) Troba el valor de $f'(1)$ i $f'(3)$.

b) Per a quins valors de x és $f'(x) = 0$?

c) Per a quins valors de x és $f'(x) < 0$?

a) La tangent en $x = 1$ passa pels punts (1, 3) i (2, 1). El seu pendent és:

$$m = \frac{1-3}{2-1} = -2 \rightarrow f'(1) = -2$$

La tangent en $x = 3$ passa pels punts (3, 3) i (2, 1). El seu pendent és:

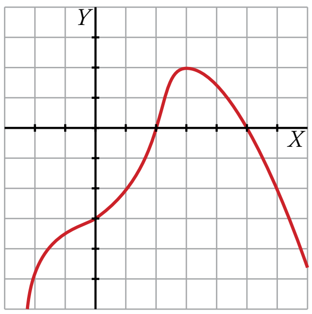
$$m = \frac{1-3}{2-3} = 2 \rightarrow f'(3) = 2$$

b) Els punts de pendent horitzontal tenen abscisses $x = 0$ i $x = 2$.

c) Si $f'(x) < 0$, aleshores la funció és decreixent. L'interval de decreixement és (0, 2) i, per tant, en aquest interval la primera derivada és negativa.

2. Funció polinòmica

Representar una funció polinòmica sabent que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que els punts de tangent horitzontal són (0, –3) i (3, 2), i que talla l'eix X només en $x = 2$ i en $x = 5$.



3. Funció quadràtica

Troba la funció de segon grau que passi per (0, 2) i en la qual el pendent de la recta tangent en el punt (1, –3) valgui –1.

L'equació d'una funció quadràtica és de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Passa per (0, 2) $\rightarrow$ $2 = c$

Passa per (1, –3) $\rightarrow$ $-3 = a + b + 2 \rightarrow a + b = -5$

Com que el pendent de la tangent en (1, –3) és –1, ha de passar que $f'(1) = -1$:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(1) = -1 \rightarrow 2a + b = -1$$

Resolem aquest sistema:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= -5 \\ 2a + b &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow a = 4,\ b = -9$$

La funció quadràtica buscada és $y = 4x^2 - 9x + 2$.

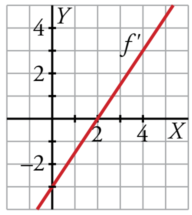
4. Gràfica de la funció derivada

Aquesta és la gràfica de f', funció derivada de f.

a) Obtén $f'(0)$ i $f'(4)$.

b) Té f algun punt singular?

c) Estudia el creixement de f.



a) Llegint directament la gràfica, veiem que $f'(0) = -3$ i $f'(4) = 3$.

b) El punt $x = 2$ és un punt singular perquè $f'(2) = 0$.

c) La funció és creixent en $(2, +\infty)$ perquè $f'(x) > 0$ en aquest interval.

5. Màxim i mínim en un interval

Troba els valors màxim i mínim de la funció $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en l'interval [0, 3].

Els valors màxim i mínim d'una funció en un interval d'aquest tipus poden estar situats en els extrems de l'interval o en els punts singulars.

Calculem els punts singulars:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \;\rightarrow\; 3x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 1$$

El primer punt singular no el considerem perquè queda fora de l'interval [0, 3] en què s'estudia la funció. Avaluem:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = -1 \qquad f(3) = 19$$

Per tant, el màxim es produeix en $x = 3$ i val 19. El mínim es produeix en $x = 1$ i val –1.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 205

Per practicar

Taxa de variació mitjana

1 **Troba la taxa de variació mitjana d'aquestes funcions en l'interval [1, 3] i indica si creixen o decreixen en aquest interval:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$ **c)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

$$\text{TVM }[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$$

a) $\text{TVM }[1, 3] = \dfrac{1/3 - 1}{2} = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Decreix

b) $\text{TVM }[1, 3] = \dfrac{-1 - 1}{2} = -1 \rightarrow$ Decreix

c) $\text{TVM }[1, 3] = \dfrac{7 - 1}{2} = 3 \rightarrow$ Creix

d) $\text{TVM }[1, 3] = \dfrac{8 - 2}{2} = 3 \rightarrow$ Creix

2 **a) Troba la TVM de les funcions $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ i $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en l'interval [1, 1 + h].**

b) Calcula la TVM d'aquestes funcions en l'interval [1; 1,5] emprant les expressions obtingudes en l'apartat anterior.

a) Per a la funció $f(x)$:

$$\text{TVM }[1, 1 + \text{h}] = \frac{f(1+\text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \frac{-(1+\text{h})^2 + 5(1+\text{h}) - 3 - 1}{\text{h}} = \frac{-1 - 2\text{h} - \text{h}^2 + 5 + 5\text{h} - 4}{\text{h}} = 3 - \text{h}$$

Per a la funció $g(x)$:

$$\text{TVM }[1, 1 + \text{h}] = \frac{g(1+\text{h}) - g(1)}{\text{h}} = \frac{\dfrac{1}{1+\text{h}+1} - \dfrac{1}{2}}{\text{h}} = \frac{\dfrac{2 - \text{h} - 2}{2(2+\text{h})}}{\text{h}} = \frac{-1}{2\text{h} + 4}$$

b) Per a la funció $f(x)$:

$\text{TVM }[1; 1{,}5] = 3 - 0{,}5 = 2{,}5$

Per a la funció $g(x)$:

$$\text{TVM }[1; 1{,}5] = \frac{-1}{2 \cdot 0{,}5 + 4} = \frac{-1}{5}$$

3 **Compara la TVM de les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 3^x$ en els intervals [2, 3] i [3, 4], i digues quina de les dues creix més en cada interval.**

Per a $f(x)$: TVM [2, 3] = 19

TVM [3, 4] = 37

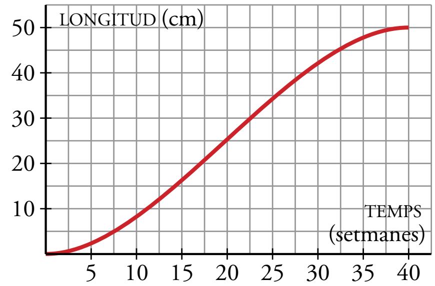
Per a $g(x)$: TVM [2, 3] = 18

TVM [3, 4] = 54

En [2, 3] creix més $f(x)$.

En [3, 4] creix més $g(x)$.

4 **Aquesta gràfica mostra la longitud d'un fetus durant l'embaràs. Estudia el creixement mitjà en els intervals [5, 15] i [20, 30] i digues en quin període és més gran el creixement:**



$$\text{TVM } [5, 15] = \frac{f(15) - f(5)}{10} = \frac{17 - 2}{10} = 1{,}5 \text{ cm/setmana}$$

$$\text{TVM } [20, 30] = \frac{f(30) - f(20)}{10} = \frac{42 - 25}{10} = 1{,}7 \text{ cm/setmana}$$

El creixement mitjà és més gran entre les setmanes 20 i 30.

Definició de derivada

5 **Troba la derivada de les funcions següents en $x = 1$, fent servir la definició de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h^2 + 2h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3h + 6)}{h} = 6$$

b) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(1+h) + 1)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2h + 3)^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4h + 12)}{h} = 12$$

c) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$$

d) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{9 - h^2 - 6h - 9}{9(h+3)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 6h}{9h(h+3)^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 6}{9(h+3)^2} = \frac{-2}{27}$$

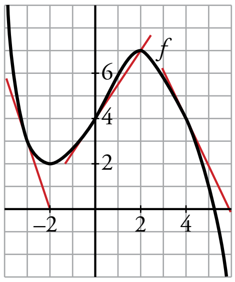
6 **Aplica la definició de derivada per trobar el pendent de la tangent en $x = 2$ de les corbes $f(x) = 4x - x^2$ i $g(x) = \dfrac{1}{3x - 7}$.**

- $$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4}{h} = \frac{8 + 4h - 4 - 4h - h^2 - 4}{h} = -h$$

  $$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h) = 0$$

- $$\frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3(2+h) - 7} - (-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3h - 1} + 1}{h} = \frac{3}{3h - 1}$$

  $$g'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{3h - 1} = -3$$

7 

Observa la gràfica de f en la qual s'han traçat les tangents en $x = -3$, $x = 0$ i $x = 4$ i respon:

a) Quin és el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ i $f'(4)$?

b) En quins punts $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, la derivada és positiva o negativa? I en $x = 3$?

a) $f'(-3) = -3$ $\qquad f'(0) = \dfrac{3}{2}$ $\qquad f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ i $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada és positiva perquè el pendent de la tangent ho és. Anàlogament, la derivada en $x = 3$ és negativa.

8 Troba la funció derivada de les funcions següents, aplicant-hi la definició:

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$

b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{5(x+h)-3}{2}-\frac{5x-3}{2}}{h} = \frac{5x+5h-3-5x+3}{2h} = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+7(x+h)-1-(x^2+7x-1)}{h} =$$

$$= \frac{x^2+2hx+h^2+7x+7h-1-x^2-7x+1}{h} = 2x + h + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+7) = 2x+7$$

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-5(x+h)-(x^3-5x)}{h} =$$

$$= \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-5x-5h-x^3+5x}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3hx+h^2-5) = 3x^2-5$$

d) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{x+h-1}{x+h}-\frac{x-1}{x}}{h} = \frac{x(x+h-1)-(x+h)(x-1)}{hx(x+h)} =$$

$$= \frac{x^2+hx-x-(x^2-x+hx-h)}{hx(x+h)} = \frac{1}{x(h+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x(h+x)} = \frac{1}{x^2}$$

Regles de derivació

9 **Troba la funció derivada de les funcions següents i simplifica quan sigui possible:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3e^{2x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1} + \dfrac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = ln\,(x^2 + 3x)$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

h) $f(x) = ln\,3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{e^{x-3}}{5}$

j) $f(x) = \left(\dfrac{3-x}{x}\right) log_2\, x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f'(x) = 3e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Tenint en compte que $\dfrac{\sqrt{2x}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x+3) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$

g) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1}}{x^2} = \dfrac{x - 2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}} = \dfrac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$

h) $f(x) = ln\,3 + ln\,x + e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \frac{1}{x} - e^{-x}$$

i) $f'(x) = \dfrac{e^{x-3}}{5}$

j) $f'(x) = \dfrac{(-1)x - (3-x)}{x^2}\, log_2\, x + \dfrac{3-x}{x} \cdot \dfrac{1}{x\, ln\, 2} = \dfrac{-3\, log_2\, x}{x^2} + \dfrac{3-x}{x^2\, ln\, 2} = \dfrac{1}{x^2}\left(-3\, log_2\, x + \dfrac{3-x}{ln\, 2}\right)$

10 **Aplica les regles de derivació i simplifica si és possible.**

a) $f(x) = (5x-2)^3$

b) $f(x) = 3\, cos\,(x + \pi)$

c) $f(x) = sin\, \dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+7}{x}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = tg\,(3x)$

h) $f(x) = x \cdot sin\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot ln\, x}$

j) $f(x) = (x + ln\, x)^2$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f'(x) = -3 sin\,(x + \pi)$

c) $f'(x) = cos\,\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,cos\,\frac{x}{2}$

d) $f(x) = \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+7}{x}}} \cdot \frac{x-(x+7)}{x^2} = \frac{-7}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x+7}}$

f) $f'(x) = \frac{3x^2}{8}\,e^{2x+1} + \frac{x^3}{8}\,e^{2x+1} \cdot 2 = \frac{e^{2x+1}}{8}(2x^3 + 3x^2)$

g) $f'(x) = \frac{1}{cos^2\,(3x)} \cdot 3 = \frac{3}{cos^2\,(3x)}$

h) $f'(x) = sin\,x^2 + x\,cos\,x^2 \cdot 2x = sin\,x^2 + 2x^2\,cos\,x^2$

i) $f'(x) = \sqrt{7} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ln\,x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{ln\,x}}$

j) $f'(x) = 2\,(x + ln\,x)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2\left(x + 1 + ln\,x + \frac{ln\,x}{x}\right)$

11 Deriva les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 1}$

b) $f(x) = \left(\frac{ln\,x}{x}\right)^2$

c) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x) = \left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^2$

e) $f(x) = \frac{x}{3}\,log_2\,(1-x^2)$

f) $f(x) = e^{-x}\,ln\,\frac{1}{x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{(5x+2)^2}$

h) $f(x) = ln\left(\frac{1}{4x} - \frac{x}{2}\right)$

a) $f(x) = (e^x + 1)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(e^x+1)^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(e^x+1)^2}}$

b) $f'(x) = 2\,\frac{ln\,x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - ln\,x}{x^2} = \frac{2\,ln\,x\,(1 - ln\,x)}{x^3}$

c) $f(x) = -3(1-x^2)^{-1/2}$

$f'(x) = -3\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{-3x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{-3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

d) $f'(x) = 2 \cdot \frac{3x}{1-x^2} \cdot \frac{3(1-x^2) - 3x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{6x(3x^2+3)}{(1-x^2)^3} = \frac{18x(x^2+1)}{(1-x^2)^3}$

e) $f'(x) = \frac{1}{3}\,log_2\,(1-x^2) + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{ln\,2} \cdot (-2x) = \frac{log_2\,(1-x^2)}{3} - \frac{2x^2}{3(1-x^2)\,ln\,2}$

f) $f(x) = e^{-x}\,(-ln\,x) = -e^{-x}\,ln\,x$

$f'(x) = -\left(-e^{-x}\,ln\,x + e^{-x} \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{-x}\left(ln\,x - \frac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = (5x + 2)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x+2)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x+2}}$$

h) $f(x) = ln\left(\frac{1-2x^2}{4x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1-2x^2}{4x}} \cdot \frac{-4x \cdot 4x - (1-2x^2) \cdot 4}{(4x)^2} = \frac{4x}{1-2x^2} \cdot \frac{-8x^2-4}{(4x)^2} = \frac{-4(2x^2+1)}{4x(1-2x^2)} = \frac{2x^2+1}{x(2x^2-1)}$$

12 **Aplica les propietats dels logaritmes abans d'aplicar les regles de derivació i obtén la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = ln\,\frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = ln\,(x \cdot e^{-x})$

c) $f(x) = ln\,(1-3x^2)^4$

d) $f(x) = log_2\,\sqrt[3]{5x-x^2}$

e) $f(x) = ln\,\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$

f) $f(x) = log\,\frac{(3x-5)^3}{x}$

g) $f(x) = log_2\,\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$

h) $f(x) = log\,\frac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$$

b) $f(x) = ln\,x + ln\,e^{-x} = ln\,x - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

c) $f(x) = 4ln(1-3x^2)$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{1-3x^2} \cdot (-6x) = \frac{24x}{3x^2-1}$$

d) $f(x) = log_2\,(5x-x^2)^{1/3} = \frac{1}{3}log_2(5x-x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5x-x^2} \cdot \frac{1}{ln\,2} \cdot (5-2x) = \frac{5-2x}{3(5x-x^2)\,ln\,2}$$

e) $f(x) = \frac{1}{2}[ln\,x - ln\,(x^2+1)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

f) $f(x) = 3\,log\,(3x-5) - log\,x$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{ln\,10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\,10} = \frac{1}{ln\,10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{ln\,10\,(3x^2-5x)}$$

g) $f(x) = log_2 \left(\frac{x-1}{x^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} log_2 \left(\frac{x-1}{x^3}\right) = \frac{1}{2}[log_2(x-1) - 3\, log_2\, x]$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{ln\, 2} - \frac{3}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)\, ln\, 2} - \frac{3}{x}\right)$

h) $f(x) = x\, ln\, x$

$f'(x) = ln\, x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\, x + 1$

Pàgina 206

Recta tangent i recta normal

13 **Troba l'equació de la recta tangent i de la recta normal a la funció f en el punt d'abscissa que s'indica en cada cas.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$

d) $f(x) = ln\, x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \frac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangent és $y = -1(x-2) + 0$, és a dir, $y = -x + 2$

La recta normal és $y = \frac{-1}{-1}(x-2) + 0$, és a dir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \frac{1}{4}$

La recta tangent és $y = \frac{1}{4}(x-3) + 2$, és a dir, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

La recta normal és $y = \frac{-1}{1/4}(x-3) + 2$, és a dir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \frac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangent és $y = -8(x+1) - 3$, és a dir, $y = -8x - 11$

La recta normal és $y = \frac{-1}{-8}(x+1) - 3$, és a dir, $y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8}$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$

La recta tangent és $y = \frac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, és a dir, $y = \frac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal és $y = \frac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$, és a dir, $y = -e^2 x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangent és $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

La recta normal és $y = \frac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$, és a dir, $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

14 **Troba els punts en què el pendent de la recta tangent a cada una de les funcions següents és igual a 2:**

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \frac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = ln\,(4x - 1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$

b) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2$

d) $f'(x) = \frac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow 4x - 1 = 2 \rightarrow x = \frac{3}{4}$

15 **Escriu, en cada cas, l'equació de la recta tangent a f que sigui paral·lela a la recta donada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paral·lela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paral·lela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ **paral·lela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -2x - 1$

Per tant, la recta tangent ha de tenir pendent –2 perquè sigui paral·lela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \rightarrow 2x + 4 = -2 \rightarrow x = -3$

$f(-3) = -2$ i la recta tangent és $y = -2(x + 3) - 2$.

b) La recta tangent ha de tenir pendent 6 perquè sigui paral·lela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \rightarrow 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangent en $x = -\sqrt{3}$ és $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangent en $x = \sqrt{3}$ és $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \rightarrow y = 5x$

Per tant, la recta tangent ha de tenir pendent 5 perquè sigui paral·lela.

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 5 \rightarrow \frac{5}{(x+2)^2} = 5 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$$

Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = -4$

La recta tangent en $x = -1$ és $y = 5(x + 1) - 4$

Si $x = -3 \rightarrow f(-3) = 6$

La recta tangent en $x = -3$ és $y = 5(x + 3) + 6$

16 Escriu les equacions de les rectes tangents i de les rectes normals a la funció $y = 4 - x^2$ en els punts de tall amb l'eix d'abscisses.

Els punts de tall amb l'eix d'abscisses s'obtenen fent $y = 0$.

$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 4$. La recta tangent en $x = -2$ és $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \rightarrow f'(2) = -4$. La recta tangent en $x = 2$ és $y = -4(x - 2)$

Les rectes normals són: en $x = -2,\ y = -\frac{1}{4}(x + 2)$ i en $x = 2,\ y = \frac{1}{4}(x - 2)$

17 Obtén els punts on la recta tangent a aquestes funcions és horitzontal i escriu-ne l'equació.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

e) $y = \frac{x^2+1}{x}$

f) $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$

Els punts on la recta tangent és horitzontal són aquells en què $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

L'equació de la recta tangent és $y = \frac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 1$

$f(0) = 0 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

$f(1) = 0 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 1$ és $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^3 - 12x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 3$

$f(0) = 0 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

$f(3) = -27 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 3$ és $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 12 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = 2$

$f(-2) = 16 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = -2$ és $y = 16$.

$f(2) = -16 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 2$ és $y = -16$.

e) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 1$

$f(-1) = 1 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = -1$ és $y = -2$.

$f(1) = 1 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 1$ és $y = 2$.

f) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$f(0) = 0 \;\rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

Punts singulars. Creixement i decreixement

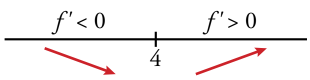
18 **Troba, en cada cas, els punts singulars de la funció i determina'n els intervals de creixement i de decreixement.**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$

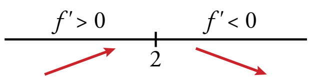


Com que $f(4) = -5$, el punt $(4, -5)$ és un punt singular.

Interval de creixement, $(4, +\infty)$. Interval de decreixement, $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 2$



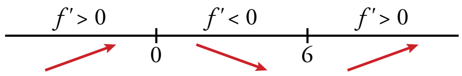
Com que $f(2) = 12$, el punt $(2, 12)$ és un punt singular.

Interval de creixement, $(-\infty, 2)$. Interval de decreixement, $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 6$

Com que $f(0) = 0$ i $f(6) = -36$, els punts $(0, 0)$ i $(6, -36)$ són punts singulars.

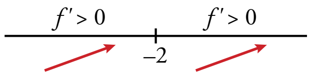


Intervals de creixement, $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Interval de decreixement, $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 12x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$

Com que $f(-2) = -8$, el punt $(-2, -8)$ és un punt singular.



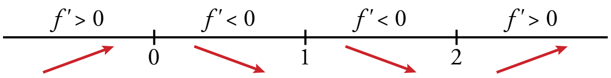
Interval de creixement, $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$$

Com que $f(0) = 0$ i $f(2) = 4$, els punts $(0, 0)$ i $(2, 4)$ són punts singulars.



Intervals de creixement, $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervals de decreixement, $(0, 1) \cup (1, 2)$.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

No té punts singulars. Com que $f'(x) > 0$ sempre que $x \neq -2$ i la funció no està definida en $x = -2$, els intervals de creixement són $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 Comprova que les funcions següents no tenen punts singulars i determina'n els intervals on creixen o decreixen:

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) > 0$, la funció és creixent en tot $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) < 0$ sempre que $x \neq 0$ i no està definida en $x = 0$, els intervals de decreixement són $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$, l'interval de creixement és $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) > 0$ en el seu domini de definició, l'interval de creixement és $(0, +\infty)$.

20 **Troba els punts singulars de les funcions següents i, amb ajuda de les branques infinites, determina si són màxims o mínims:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$

b) $y = 3x^2 - x^3$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$

d) $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

f) $y = \dfrac{x^3+4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3},\ x = 1$

Com que $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{58}{27}$ i $f(1) = 2$, els punts $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ i $(1, 2)$ són punts singulars.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Per tant, $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ és un màxim i $(1, 2)$ és un mínim.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

Com que $f(0) = 0$ i $f(2) = 4$, els punts $(0, 0)$ i $(2, 4)$ són punts singulars.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Per tant, $(0, 0)$ és un mínim i $(2, 4)$ és un màxim.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

Com que $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ i $f(2) = -6$, els punts $(-2, -6)$, $(0, 10)$ i $(2, -6)$ són singulars.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Per tant, $(-2, -6)$ i $(2, -6)$ són mínims.

El punt $(0, 10)$ ha de ser un màxim perquè està entre dos mínims.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow -12x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = -1$

Com que $f(-1) = 9$, el punt $(-1, 9)$ és un punt singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Per tant, $(-1, 9)$ és un màxim.

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

Com que $f(0) = 3$, el punt $(0, 3)$ és un punt singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ Per tant, $(0, 3)$ és un màxim.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

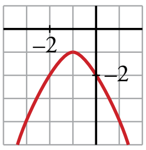
$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

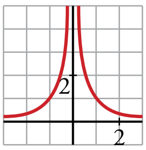
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

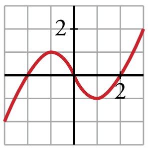
Com que $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punt $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ és un punt singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Per tant, $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ és un mínim.

21 **Indica en cada una d'aquestes funcions els valors de x on f' és positiva i on f' és negativa:**

a) 

b) 

c) 

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gràfiques de funcions polinòmiques i racionals

22 **Representa una funció $y = f(x)$ de la qual coneixem:**

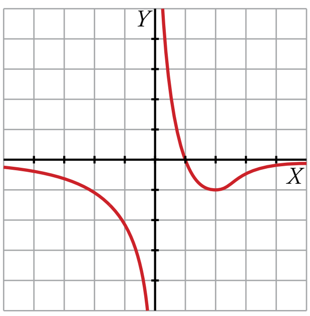
- **Domini de definició: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Talla l'eix X en $x = 1$.**
- **Asímptota horitzontal: $y = 0$**

  Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asímptota vertical: $x = 0$**

  Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

  Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$
- **Mínim en $(2, -1)$.**



23 **Representa una funció $y = f(x)$ de la qual coneixem:**

- **Asímptota vertical: $x = 2$**

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

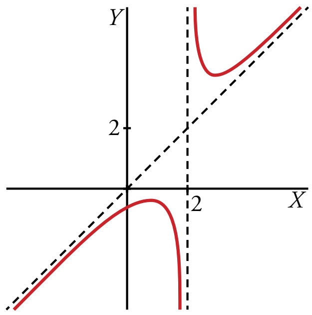
  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

- **Asímptota obliqua: $y = x$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < x$

Té màxim o mínim la funció que has representat?

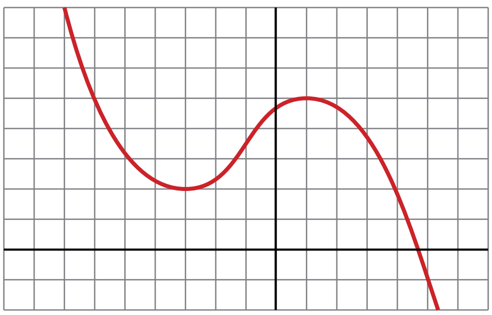


Sí. Té un màxim i un mínim.

24 **Representa una funció $y = f(x)$ de la qual sabem que:**

- **És contínua.**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Els punts de tangent horitzontal són (–3, 2) i (1, 5).**

Indica si els punts de tangent horitzontal són màxims o mínims.



(–3, 2) és un mínim.

(1, 5) és un màxim.

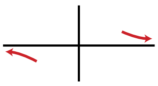
Pàgina 207

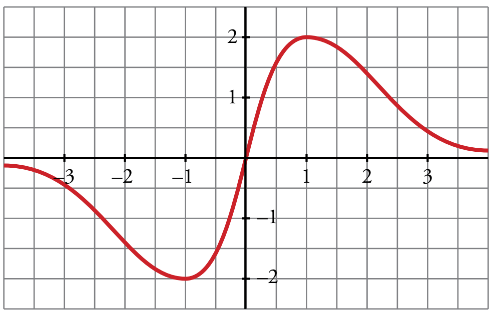
25 **Representa una funció polinòmica de la qual sabem:**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **La derivada és igual a 0 només en (–2, 2) i en (2, –1).**
- **Talla els eixos només en (0, 0) i en (4, 0).**

26 **Representa una funció contínua $y = f(x)$ tal que:**

- **Els punts de tangent horitzontal són (–1, –2) i (1, 2).**
- **Les branques infinites són així:**





27 **Comprova que la funció $y = (x-1)^3$ passa pels punts (0, –1), (1, 0) i (2, 1). La derivada s'anul·la en el punt (1, 0). Pot ser un màxim o un mínim aquest punt?**

$f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \rightarrow$ passa per $(0, -1)$

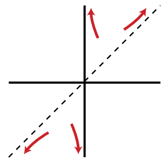
$f(1) = 0 \rightarrow$ passa per $(1, 0)$

$f(2) = 1 \rightarrow$ passa per $(2, 1)$

$f'(1) = 0$

El punt (1, 0) no és ni màxim ni mínim.

28 **Comprova que la funció $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ té dos punts de tangent horitzontal, (–1, –2) i (1, 2); les asímptotes són $x = 0$ i $y = x$ i la posició de la corba respecte de les asímptotes és la que s'indica en l'esbós. Representa-la.**



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

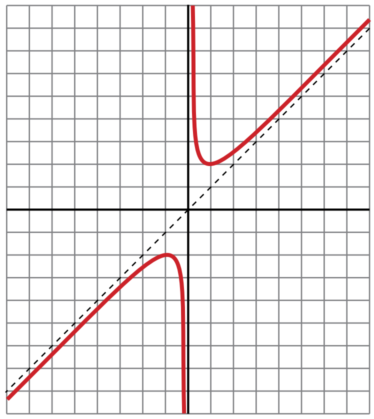
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

Punts (–1, –2) i (1, 2).

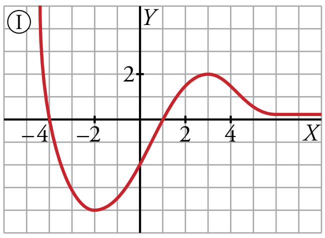
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

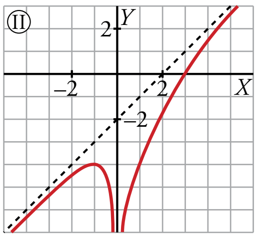
Asímptota vertical en $x = 0$.

Asímptota obliqua en $y = x$.



29





Observa aquestes gràfiques i descriu:

a) Les branques infinites, asímptotes i posició de la corba respecte a aquestes.

b) Els punts singulars, creixement i decreixement.

a) • Funció I

Té una branca parabòlica quan $x \rightarrow -\infty$.

La recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i la funció queda per sobre de l'asímptota.

• Funció II

La recta $y = x - 2$ és una asímptota obliqua quan $x \rightarrow -\infty$ i quan $x \rightarrow +\infty$. En ambdós casos, la funció queda per sota de l'asímptota.

La recta $x = 0$ és una asímptota vertical i la funció tendeix a $-\infty$ pels dos costats.

b) • Funció I

El punt (–2, –4) és un mínim. El punt (3, 2) és un màxim.

Hi ha un altre punt singular, (0,5; –1), però no és ni màxim ni mínim.

• Funció II

Només té un punt singular: el màxim (–1, –4).

30 **Donada la funció** $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ **, comprova que:**

- **Té derivada nul·la en (0, 0).**
- **La recta** $y = 2$ **és una asímptota horitzontal.**
- **La posició de la corba respecte a l'asímptota és:**

  Si $x \to -\infty$, $y < 2$

  Si $x \to +\infty$, $y < 2$

Representa-la.

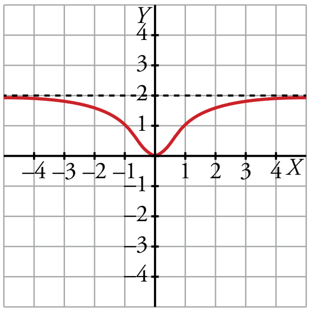
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en (0, 0) és nul·la.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ és una asímptota horitzontal.

- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

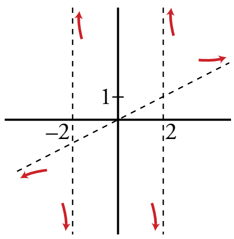
  Com que la diferència sempre és negativa, la funció queda per sota de l'asímptota $y = 2$.

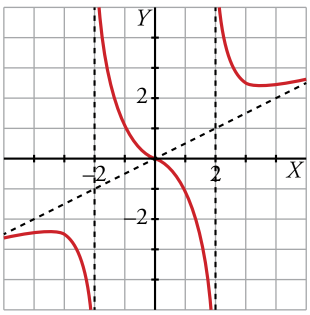


31 **Completa la gràfica d'una funció que té tres punts singulars:**

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

i les branques infinites de la qual són les representades a la dreta.





Per resoldre

32 **a) Troba el vèrtex de la paràbola $y = x^2 + 6x + 11$ tenint en compte que en aquest punt la tangent és horitzontal.**

b) Troba les coordenades del vèrtex d'una paràbola qualsevol $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$

Punt $(-3, 2)$.

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$ és l'abscissa del vèrtex.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ és l'ordenada del vèrtex.

33 **Determina la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ que és tangent a la recta $y = 2x - 3$ en el punt $A(2, 1)$ i que passa pel punt $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \rightarrow 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \rightarrow 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La funció és $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

34 **Troba el valor de x per al qual les tangents a les corbes $y = 3x^2 - 2x + 5$ i $y = x^2 + 6x$ siguin paral·leles i escriu les equacions d'aquestes tangents.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \rightarrow g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \rightarrow x = 2$$

Per a $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, la tangent en $x = 2$ és:

$y = 10(x - 2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$

Per a $g(x) = x^2 + 6x$, la tangent en $x = 2$ és:

$y = 10(x - 2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$

35 **Troba a, b i c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de manera que la gràfica de f tingui tangent horitzontal en $x = -4$ i en $x = 0$ i que passi per $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \rightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \rightarrow b = \ \ 0 \\ f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La funció és $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

36 **La ecuació de la recta tangent a una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és $4x - 3y + 1 = 0$. Quin és el valor de $f'(2)$? I el de $f(2)$?**

Aïllem y de l'equació de la recta tangent: $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

$f'(2)$ és el pendent de la recta tangent en $x = 2$; és a dir, $f'(2) = \dfrac{4}{3}$.

Com que la recta tangent i la corba passen pel punt de tangència, $f(2) = \dfrac{4}{3} \cdot 2 + \dfrac{1}{3} = 3$.

37 **Troba una funció de segon grau sabent que passa per (0, 1) i que el pendent de la recta tangent en el punt (2, –1) val 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \to 1=c \\ f(2)=-1 \to -1=4a+2b+c \\ f'(2)=0 \to 0=4a+b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1/2 \\ b=-2 \\ c=1 \end{array}$$

La funció és $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

38 **Representa les funcions següents trobant els seus punts singulars i les branques infinites:**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^4 + 4x^3$ **c)** $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

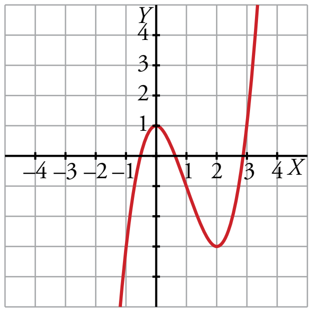
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 6x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$f(0) = 2,\ f(2) = -3 \to$ Els punts singulars són (0, 1) i (2, –3).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



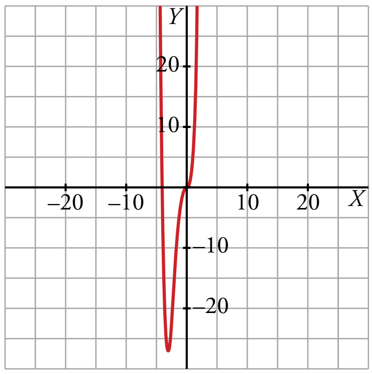
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \to 4x^3 + 12x^2 = 0 \to x_1 = -3,\ x_2 = 0$

$f(-3) = -27,\ f(0) = 0 \to$ Els punts singulars són (–3, –27) i (0, 0).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$



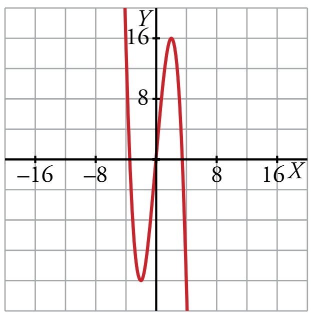
c) $f'(x) = 12 - 3x^2$

$f'(x) = 0 \to 12 - 3x^2 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$f(-2) = -16,\ f(2) = 16 \to$ Els punts singulars són (–2, –16) i (2, 16).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$



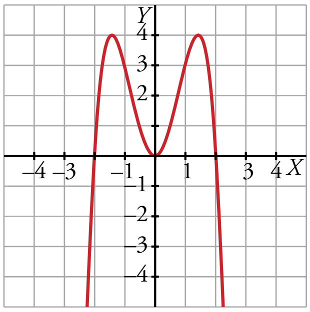
d) $f'(x) = -4x^3 + 8x$

$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^3 + 8x = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$

$f\left(-\sqrt{2}\right) = 4,\ f(0) = 0,\ f\left(\sqrt{2}\right) = 4 \rightarrow$ Els punts singulars són $\left(-\sqrt{2}, 4\right)$, $(0, 0)$ i $\left(\sqrt{2}, 4\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$



39 **Estudia i representa:**

a) $y = x^3 - 3x + 2$ **b)** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ **c)** $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **d)** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

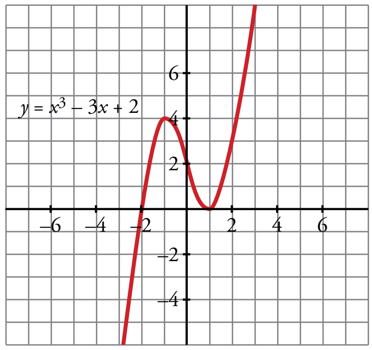
a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1, 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4) \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$



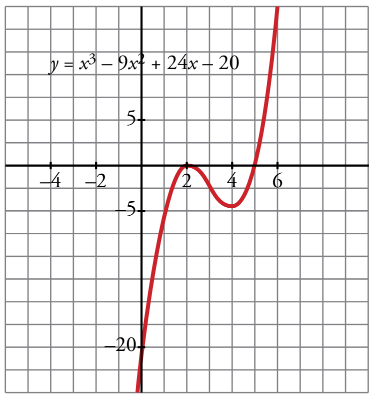
b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} < \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$

$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4, -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = +\infty$

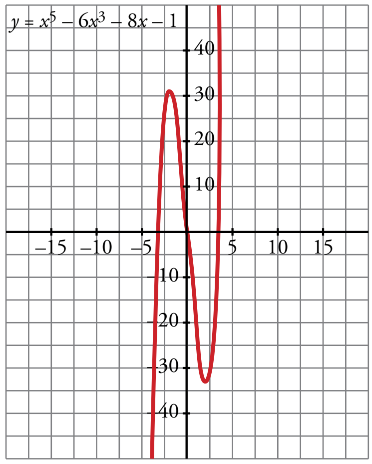


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

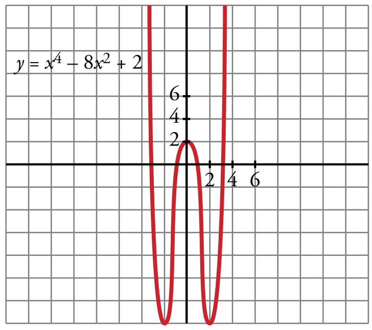


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2, -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$

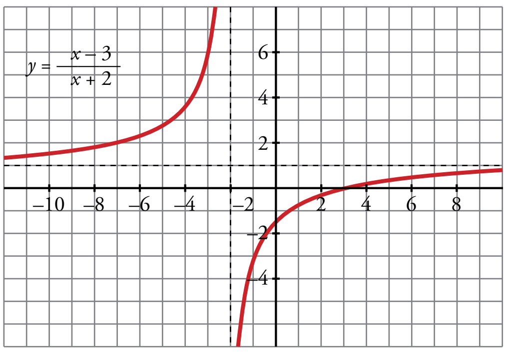


40 **Comprova que aquestes funcions no tenen punts de tangent horitzontal. Representa-les estudiant-ne les branques infinites i els punts de tall amb els eixos:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

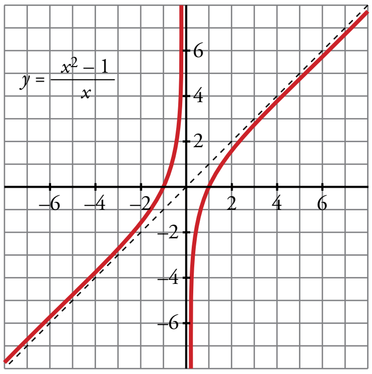
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Els punts de tall són: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



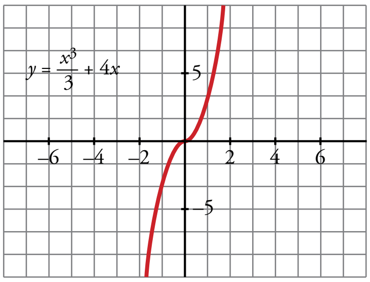
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Els punts de tall són: (1, 0), (–1, 0)



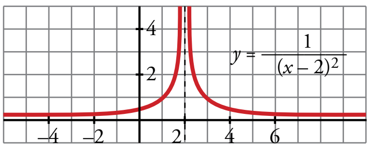
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punt de tall és (0, 0).



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punt de tall és $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 **Estudia i representa les funcions següents:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

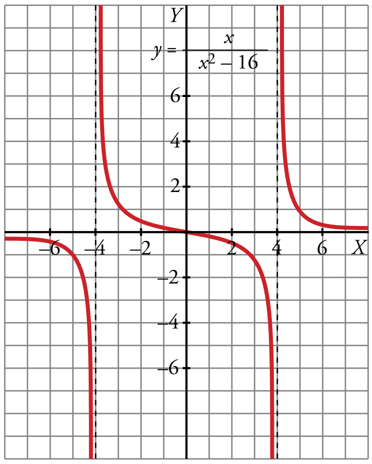
d) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$ e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ f) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asímptotes verticals: $x = -4,\ x = 4$

Asímptota horitzontal: $y = 0$

No hi ha asímptotes obliqües ni punts de tangent horitzontal.

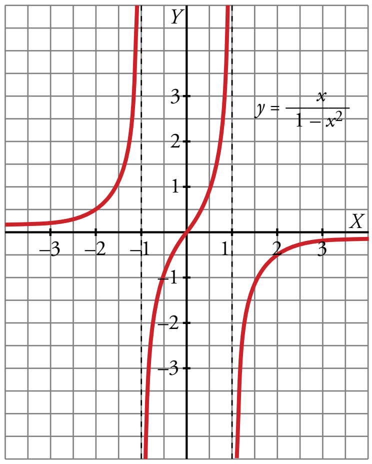


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 1,\ x = -1$

Asímptota horitzontal: $y = 0$

No hi ha asímptotes obliqües ni punts de tangent horitzontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

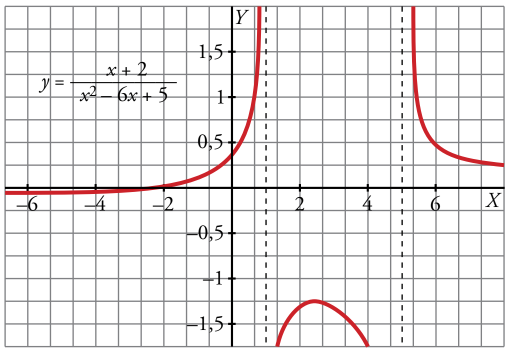
Asímptotes verticals: $x = 5,\ x = 1$

Asímptota horitzontal: $y = 0$

No hi ha asímptotes obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són, aproximadament:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

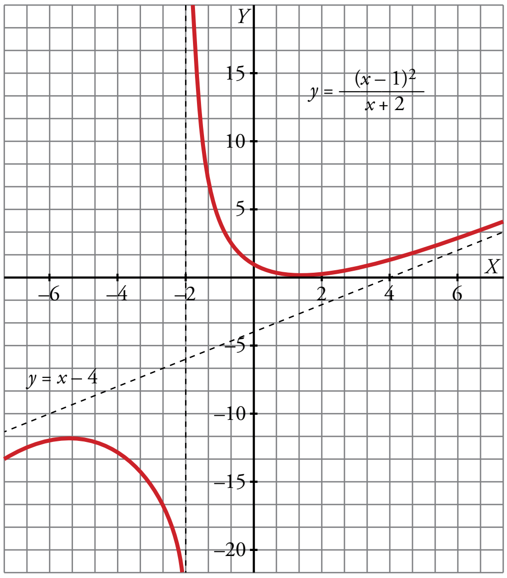
Asímptota vertical: $x = -2$

Asímptota obliqua: $y = x - 4$

No hi ha asímptotes horitzontals.

Els seus punts de tangent horitzontal són:

(1, 0), (–5, 12)



e) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

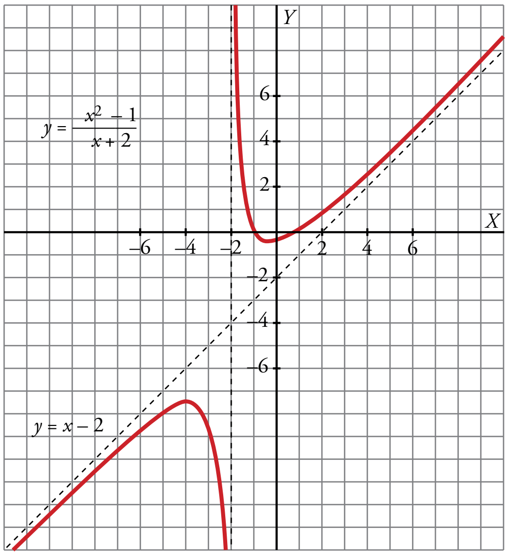
Asímptota vertical: $x = -2$

Asímptota obliqua: $y = x - 2$

No hi ha asímptotes horitzontals.

Els seus punts de tangent horitzontal són, aproximadament:

(–0,26; –0,54), (–3,73; –7,46)



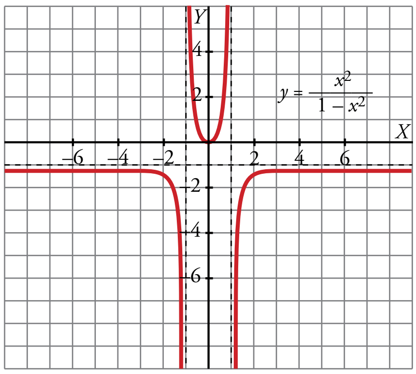
f) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 1$, $x = -1$

Asímptota horitzontal: $y = -1$

No hi ha asímptotes obliqües.

Punt de tangent horitzontal: (0, 0)



Pàgina 208

42 **Calcula el valor de a perquè $f(x) = ln\left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)$ verifiqui que $f'(2) = 0$.**

$f(x) = 2ln\,x - ln\,(x + a)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+a} \to f'(2) = 1 - \dfrac{1}{2+a}$

$f'(2) = 0 \to 1 - \dfrac{1}{2+a} = 0 \to a = -1$

43 **La funció $h(t) = 50 + 30t - 5t^2$ (h en metres, t en segons) mostra l'altura d'una pilota llançada cap amunt.**

a) Calcula'n la velocitat mitjana entre $t = 0$ i $t = 2$.

b) En quin instant la velocitat és igual a 0?

c) Quina és l'altura màxima que aconsegueix i en quin moment l'aconsegueix?

a) La velocitat mitjana entre $t = 0$ i $t = 2$ és la taxa de variació mitjana en l'interval [0, 2].

$$\text{TVM } [0, 2] = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{90 - 50}{2} = 20 \text{ m/s}$$

b) La velocitat serà 0 quan la pilota assoleixi la seva altura màxima. Per tant, l'instant t en el qual la velocitat és màxima és un punt singular de $h(t)$.

$h'(t) = 30 - 10t$

$h'(t) = 0 \rightarrow 30 - 10t = 0 \rightarrow t = 3$. Al cap de 3 segons la velocitat és igual a 0.

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } t < 3, \text{ aleshores } h'(t) > 0 \rightarrow h(t) \text{ creix} \\ \text{Si } t > 3, \text{ aleshores } h'(t) < 0 \rightarrow h(t) \text{ decreix} \end{array}\right\} \rightarrow t = 3$ és el màxim de la funció.

L'altura màxima en $h(3) = 50 + 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 95$ m i s'assoleix al cap de 3 segons.

44 **El cost total (en dòlars) de fabricació de q unitats d'un article determinat és: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$**

El cost mitjà per unitat és: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) Quantes unitats s'han de fabricar perquè el cost mitjà per unitat sigui mínim?

b) Calcula $C(q)$ i $M(q)$ per al valor de q que has trobat en l'apartat a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$$M'(q) = \frac{(6q + 5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \frac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} = \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow q^2 = 25 \rightarrow q = 5$ unitats. S'han de fabricar 5 unitats.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

45 **La funció $f(x) = \dfrac{60x}{x^2 + 9}$ indica els beneficis obtinguts per una empresa des que va començar a funcionar ($f(x)$ en milers d'euros, x en anys).**

a) Representa-la gràficament.

b) Al cap de quant temps obté l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici?

c) Perdrà diners l'empresa en algun moment?

a) $f'(x) = \dfrac{60(x^2 + 9) - 60x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \dfrac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2 + 9)^2} = \dfrac{-60x^2 + 540}{(x^2 + 9)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 3$ ($x = -3$ no està en el domini).

Màxim en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \rightarrow$ asímptota horitzontal: $y = 0$

La gràfica seria:

b) Benefici màxim en $x = 3 \rightarrow$ Al cap de 3 anys.

El benefici seria $f(3) = 10$ milers d'euros.

c) No perdrà diners ni arribarà un moment en què no obtingui beneficis ni pèrdues, ja que $f(x) = 0$ i $f(x) > 0$ per a tot $x > 0$.

46 **El cost de producció, en una empresa d'electrodomèstics, de x unitats fabricades, és donat per la funció $C(x) = x^2 + 80x + 10\,000$, $C(x)$ en euros. El preu de venda d'una unitat és 880 €.**

a) Escriu la funció que ens dóna el benefici de l'empresa si es venen totes les unitats fabricades.

b) Quantes unitats s'han de fabricar perquè el benefici sigui màxim? Quin serà aquest benefici?

a) El benefici és igual als ingressos per vendes menys els costos de producció.

$B(x) = 880x - (x^2 + 80x + 10\,000) = -x^2 + 800x - 10\,000$

b) La gràfica de la funció anterior és una paràbola oberta cap avall. Per tant, el màxim s'assoleix en el seu vèrtex.

$x_0 = \dfrac{-800}{-2} = 400 \rightarrow B(400) = -400^2 + 800 \cdot 400 - 10\,000 = 150\,000$ €

El benefici màxim és de 150 000 € i s'obté fabricant 400 unitats.

47 **Determina, en cada cas, els valors màxim i mínim de la funció en l'interval que s'hi indica.**

a) $y = x^2 - 6x - 4, \quad x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5, \quad x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2, \quad x \in [-2, 4]$

d) $y = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad x \in [0, 2]$

Trobem els punts singulars que queden dins els diferents intervals, avaluem en aquests i en els extrems dels intervals.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El màxim es troba en $x = 0$ i val -4.

El mínim es troba en $x = 3$ i val -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El màxim es troba en $x = 4$ i val 83.

El mínim es troba en $x = -1$ i val -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, \; x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El màxim es troba en $x = 4$ i val 16.

El mínim es troba en $x = -2$ i val -20.

d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = -1, \; x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El màxim es troba en $x = 1$ i val $\dfrac{1}{2}$.

El mínim es troba en $x = 0$ i val 0.

48 **L'àrea d'un rectangle, en funció de la base x, és donada per l'expressió $S(x) = 20x - x^2$, en què $x \in [8, 18]$. Troba l'àrea màxima i l'àrea mínima en aquest interval.**

Els valors màxim i mínim d'una funció en un interval d'aquest tipus poden assolir-se en els extrems de l'interval o en els punts singulars.

$S'(x) = 20 - 2x$

$S'(x) = 0 \rightarrow 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$

Avaluem:

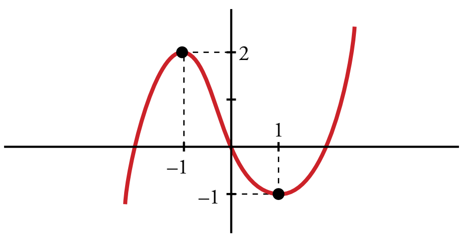
$S(8) = 20 \cdot 8 - 8^2 = 96 \quad S(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 100 \quad S(18) = 20 \cdot 18 - 18^2 = 36$

L'àrea màxima és 100 i s'assoleix en $x = 10$.

L'àrea mínima és 36 i s'assoleix en $x = 18$.

Qüestions teòriques

49 **Dibuixa una funció que tingui derivada nul·la en $x = 1$ i en $x = -1$, derivada negativa en l'interval $[-1, 1]$ i positiva per a qualsevol altre valor de x.**

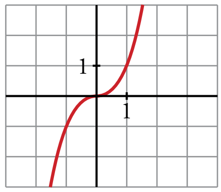


50 **Posa exemples de funcions f la derivada de les quals sigui $f'(x) = 2x$. Quantes n'hi ha?**

N'existeixen infinites.

$f(x) = x^2 + k$, on x és qualsevol nombre.

51 **Aquesta és la gràfica de la funció $y = x^3$.**



a) Té algun punt singular?

b) És creixent o decreixent en $x = 0$?

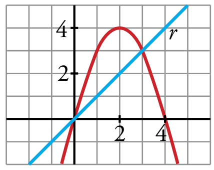
c) Quina és l'equació de la recta tangent en $x = 0$?

a) El punt (0, 0) té tangent horitzontal. Aquest és l'únic punt singular.

b) La funció és creixent en $x = 0$.

c) La recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

52 **Hi ha algun punt de la funció $y = 4x - x^2$ en el qual la tangent sigui paral·lela a la recta r? En cas afirmatiu, troba'l.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ \text{Pendent de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4 - 2x = 1 \;\to\; x = \frac{3}{2}$$

Punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

53 **Si $f'(2) = 0$, quina d'aquestes afirmacions és correcta?**

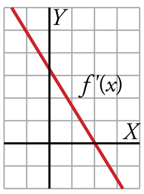
a) La funció f té màxim o mínim en $x = 2$.

b) La recta tangent en $x = 2$ és horitzontal.

c) La funció passa pel punt (2, 0).

La correcta és la b).

54



Aquesta és la gràfica de f', la funció derivada de f.

a) Té f algun punt de tangent horitzontal?

b) On és f creixent? I decreixent?

a) Sí, en $x = 2$, ja que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$, és creixent, ja que $f' > 0$; i si $x > 2$, és decreixent, ja que $f' > 0$.

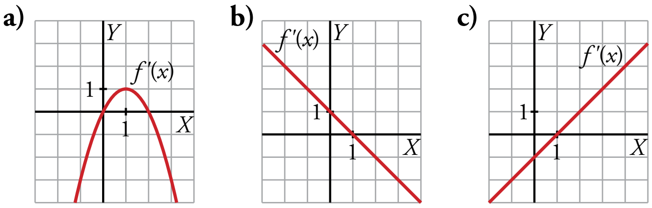
55 **Sabem que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ i $h(x) = e^{f(x)}$. Quin d'aquests tres valors correspon a $h'(0)$?:**

a) $\frac{1}{e}$ **b) 0**   **c) 1**

$h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

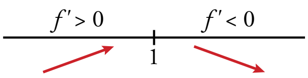
Per tant, $h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$, que es correspon amb b).

56 **Quina d'aquestes gràfiques correspon a la funció derivada d'una corba amb un màxim en $x = 1$? Per què?:**



La gráfica de l'apartat b), perquè $f'(1) = 0$.

A més,



En conseqüència, $x = 1$ és un màxim.

57 **Cert o fals? Justifica la resposta.**

a) Si $f'(a) > 0$, aleshores f és creixent en $x = a$.

b) Si $f'(a) = 0$, aleshores f no creix ni decreix en $x = a$.

c) Si f és decreixent en $x = a$, aleshores $f'(a) < 0$.

a) Cert.

b) Fals. Hi ha funcions amb punts singulars on la funció és creixent. Per exemple, $f(x) = x^3$ és creixent en el punt singular (0, 0).

c) Fals. La funció $f(x) = -x^3$ sempre és decreixent i $f'(0) = 0$.

Pàgina 209

Per aprofundir

58 **Donada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, troba el valor de a i b perquè la recta tangent a f en $x = -2$ sigui $y = 2x - 3$.**

La recta tangent i la funció coincideixen en el punt de tangència les coordenades del qual són aquestes:

$x = -2 \rightarrow y = 2(-2) - 3 = -7$

Per tant, la funció passa pel punt $(-2, -7)$; és a dir, $f(-2) = -7$.

Per altra banda, $f'(-2) = 2$, ja que el pendent de la recta tangent és 2.

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2\cdot(-2)^3 + 12\cdot(-2)^2 + a\cdot(-2) + b = -7 \\ 6\cdot(-2)^2 + 24\cdot(-2) + a = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = 26,\ b = 13$$

59 **a) Calcula el valor que ha de tenir k perquè la funció $f(x) = x - \frac{k}{x}$ tingui un màxim en $x = 1$.**

b) Després de trobar k, estudia i representa la funció obtinguda.

a) Si $f(x)$ té un màxim en $x = 1$, aleshores $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2}$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow 1 + \frac{k}{1} = 0 \rightarrow k = -1$$

Per tant, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ y $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

b) • Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asímptotes verticals:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty \rightarrow$ La recta $x = 0$ és una asímptota vertical.

Posició:

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \rightarrow f(-0{,}01) = -0{,}01 + \frac{1}{-0{,}01} = -100{,}01 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

DRETA: $x = 0{,}01 \rightarrow f(0{,}01) = 0{,}01 + \frac{1}{0{,}01} = 100{,}01 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

• Per l'expressió de $f(x)$, la recta $y = x$ es una asímptota obliqua.

Calculem $f(x) - x = \frac{1}{x}$ per estudiar la seva posició:

— Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - x > 0 \rightarrow f(x)$ és sobre l'asímptota.

— Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - x < 0 \rightarrow f(x)$ és sota l'asímptota.

• Punts singulars:

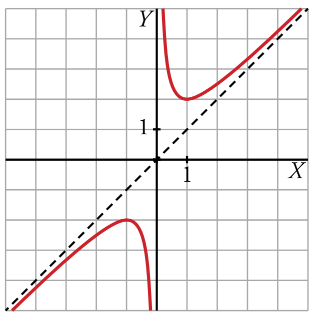
$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$$

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Els punts (1, 2) i (–1, –2) són punts singulars.

• Gràfica:



60 **En els estudis de mercat previs a la implantació en una zona, una franquícia de botigues ha estimat que els beneficis setmanals, en milers d'euros, depenen del nombre de botigues que tinguin a la zona, segons l'expressió $B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$, sent n el nombre de botigues. Determina el nombre de botigues que han d'obrir per maximitzar-ne els beneficis setmanals, i el valor d'aquests beneficis.**

Calculem els punts singulars de la funció beneficis:

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96$$

$$B'(n) = 0 \rightarrow -24n^2 + 120n - 96 = 0 \rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \rightarrow n_1 = 1,\ n_2 = 4$$

$$B(1) = -8 + 60 - 96 = -44$$

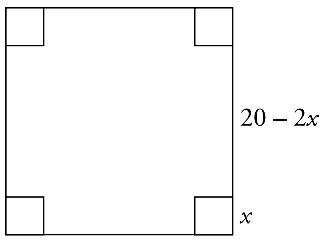
$$B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 = 64$$

Els punts (1, –44) i (4, 64) són punts singulars de la funció beneficis.

El màxim es produeix obrint 4 botigues, i és de 64 000 €.

61 **D'una cartolina quadrada de 20 cm de costat, es tallen quadrats de costat x en cada cantó per fer una capsa sense tapa.**

Calcula el costat del quadrat que cal tallar perquè el volum de la capsa sigui màxim.



La capsa que s'obté plegant aquesta cartolina fa $20 - 2x$, tant de llarg com d'ample, i x d'alt. Per tant, el volum en funció de x és:

$$V(x) = (20 - 2x)(20 - 2x)x = 4x^3 - 80x^2 + 400x \text{ amb } 0 < x < 10$$

Trobem els seus punts singulars:

$$V'(x) = 12x^2 - 160x + 400$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 160x + 400 = 0 \rightarrow 3x^2 - 40x + 100 = 0 \rightarrow x = 10,\ x = \frac{10}{3}$$

El primer resultat no té sentit perquè no és en el domini de definició.

$$x = \frac{10}{3} \rightarrow V\left(\frac{10}{3}\right) = 4\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 80\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 400 \cdot \frac{10}{3} = \frac{16000}{27} = 592{,}59 \text{ cm}^3$$

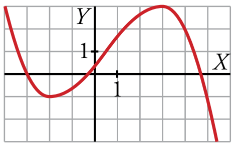
Tan sols queda comprovar que el punt $x = \frac{10}{3}$ és un màxim:

Si $0 < x < \frac{10}{3}$, aleshores $V'(x) > 0 \rightarrow V(x)$ és creixent.

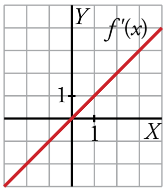
Si $\frac{10}{3} < x < 10$, aleshores $V'(x) < 0 \rightarrow V(x)$ és decreixent.

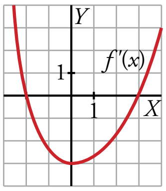
Com que la funció creix a l'esquerra de $x = \frac{10}{3}$ i decreix a la dreta, aquest punt és un màxim. El volum màxim és de 592,59 cm^3.

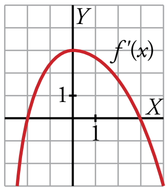
62 **Aquesta és la gràfica d'una funció $y = f(x)$.**



Quina de les gràfiques següents pot ser la de $f'(x)$? Justifica-ho.

a)


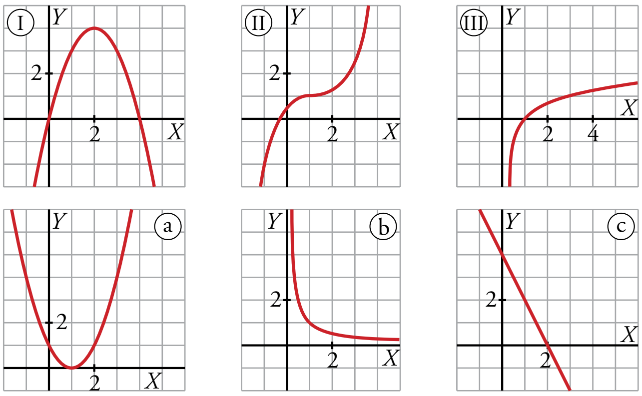
b)


c)


La gràfica de l'apartat c), perquè $f'(-2) = f'(3) = 0$ en ser $x = -2$ i $x = 3$ punts singulars de $f(x)$.

Com que $f(x)$ creix en l'interval (–2, 3), $f'(x) > 0$ i això només passa en l'apartat c). La resta de la gràfica de c) és coherent amb la de $f(x)$.

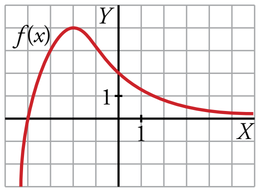
63 **Associa cada una de les gràfiques I, II, III amb la gràfica de la funció derivada que li correspongui.**



I → c II → a III → b

Autoavaluació

1 **Observa la gràfica de la funció $y = f(x)$ i respon:**



a) Quina és la TVM en els intervals [0, 3] i [–4, –2]?

b) Té cap punt de tangent horitzontal?

c) Per a quins valors de x és $f'(x) > 0$?

a) $\text{TVM } [0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{TVM } [-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

2 **Donada $f(x) = x^2 - 3x$, prova que $f'(2) = 1$ aplicant-hi la definició de derivada.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

$f(2 + h) = (2 + h)^2 - 3(2 + h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = h^2 + h - 2$

$f(2 + h) - f(2) = h^2 + h$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 + h}{h} = h + 1$$

$$\lim_{h \to 0} (h + 1) = 1$$

Per tant, $f'(2) = 1$.

3 **Troba la derivada de les funcions següents:**

a) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $y = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$

c) $y = 3x^2 \cos(x + \pi)$ **d)** $y = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

c) $f'(x) = 6x \cos(x + \pi) + 3x^2[-\sin(x + \pi)] = 3x[2\cos(x + \pi) - x \sin(x + \pi)]$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right) = 3\dfrac{x^4}{(x - 2)^2} \cdot \dfrac{2x(x - 2) - x^2}{(x - 2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x - 2)^4}$

4 **Escriu l'equació de la tangent a la corba $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{2}$ en el punt d'abscissa $x = 1$.**

Calculem l'ordenada de $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1-5}{2} = -2$$

Trobem el pendent de la recta tangent, $m = f'(1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 5) \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

Amb el punt $(1, -2)$ i el pendent $m = -1$, escrivim l'equació:

$$y = -2 - 1(x-1) \rightarrow y = -x - 1$$

5 **Troba els punts de la gràfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en què la recta tangent és paral·lela a la recta $y = x$.**

Hem de trobar els punts la derivada dels quals és 1.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0,\; x = 2$$

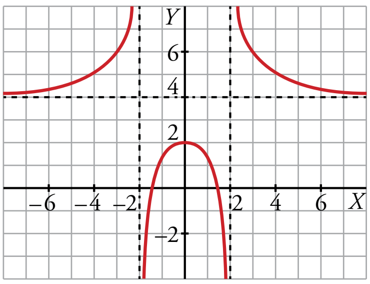
$$f(0) = 0;\; f(2) = -2$$

Els punts en què la recta tangent és paral·lela a $y = x$ són $(0, 0)$ i $(2, -2)$.

6 **Observa la gràfica i descriu:**

a) Les asímptotes i la posició de la corba respecte a aquestes.

b) Els punts singulars i els intervals de creixement.



a) • Asímptotes verticals: rectes $x = -2$ i $x = 2$

Posició:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

• Asímptota horitzontal: recta $y = 4$

Posició:

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 4$

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 4$

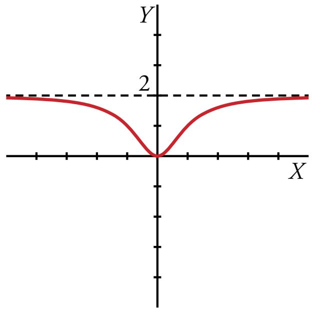
b) El punt $(0, 2)$ és un màxim de la funció.

Els intervals de creixement són $(-\infty, 2) \cup (-2, 0)$.

Els intervals de decreixement són $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

7 **Representa la funció $y = f(x)$ de la que coneixem:**

- **Domini de definició: $\mathbb{R}$**
- **Mínim: (0, 0)**
- **Asímptota horitzontal: $y = 2$**
- **Si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$**
- **Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$**



A quina d'aquestes funcions correspon aquesta gràfica?

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

La funció de l'apartat b) no pot ser perquè té asímptotes verticals i no s'afirma res sobre això en l'enunciat.

La funció de l'apartat a) no pot ser perquè és negativa a l'esquerra de 0, i, per tant, el punt (0, 0) no seria un mínim de la funció.

La gràfica es correspon amb la funció de l'apartat c).

8 **a) Estudia les branques infinites i els punts singulars de la funció $f(x) = x^3 - 12x + 6$. Té màxim o mínim?**

b) Representa-la gràficament.

a) Branques infinites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$$

Punts singulars:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$$
$$x = -2 \to f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 6 = 22$$
$$x = 2 \to f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 6 = -10$$

Els punts (–2, 22) i (2, –10) són punts singulars.

El punt (–2, 22) és un màxim i el (2, –10) és un mínim per la posició de las branques infinites.

b) Gràfica: