

UNITAT DIDÀCTICA 2

ARITMÈTICA MERCANTIL

Pàgina 32

Problema 1

Calcularem en quant es transforma una quantitat C en experimentar un augment del 12 %:

$$C + \frac{12}{100}C = C + 0,12 C = 1,12 C$$

Conclusió:

Si C augmenta el 12 %, es transforma en 1,12 C (la quantitat més 12 centèsimes). En quant es transformen 250 euros si augmenten el 12 %?

$$250 \cdot 1,12 = 280 \text{ €}$$

Calcula en quant es transforma un capital C si experimenta un augment del:

a) 10 %; b) 20 %; c) 6 %; d) 6,5 %; e) 1 %; f) 0,3 %.

a) 1,10 C; b) 1,20 C; c) 1,06 C; d) 1,065 C; e) 1,01 C; f) 1,003 C

Problema 2

Calcularem en quant es transforma una quantitat C en experimentar una disminució del 12 %:

$$C - \frac{12}{100}C = C - 0,12 C = 0,88 C$$

Conclusió:

Si C disminueix el 12 %, es transforma en 0,88 C (la quantitat menys 12 centèsimes).

En quant es transformen 250 euros si disminueixen el 12 %?

$$250 \cdot 0,88 = 220 \text{ €}$$

Calcula en quant es transforma un capital C si experimenta una disminució del:

a) 10 %; b) 20 %; c) 50 %; d) 6 %; e) 6,5 %; f) 0,8 %.

a) 0,90 C; b) 0,80 C; c) 0,50 C; d) 0,94 C; e) 0,935 C; f) 0,992 C.

Pàgina 33

Problema 3

Vam posar un capital de 3 600 euros al banc. Un any després s'havia transformat en 3 794,4 euros. Quin tant per cent ha augmentat?

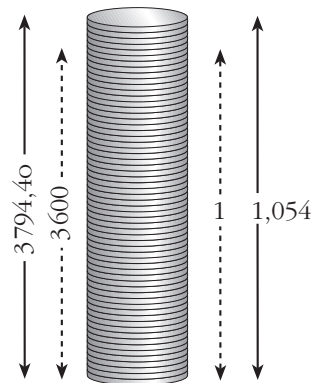
1a RESOLUCIÓ

El capital ha augmentat

$$3794,40 - 3600 = 194,40 \text{ €.}$$

$$\frac{194,40}{3600} \cdot 100 = 5,4$$

L'augment ha estat del 5,4 %.



2a RESOLUCIÓ

$$\frac{3794,40}{3600} = 1,054$$

1,054 significa la quantitat més 5,4 centèsimes.

L'augment és, per tant, del 5,4 %.

NOTA: Cal acostumar-se a aquesta segona resolució, per a la qual cosa s'han de saber interpretar les expressions del tipus anterior.

ARITMÈTICA MERCANTIL

Digues quina és la variació percentual que correspon a cada una de les transformacions següents:

- a) $C \rightarrow 1,15 C$; b) $C \rightarrow 1,2 C$;
 c) $C \rightarrow 1,042 C$; d) $C \rightarrow 0,85 C$;
 e) $C \rightarrow 0,8 C$; f) $C \rightarrow 0,958 C$

a) Augment del 15 %; b) Augment del 20 %;
 c) Augment del 4,2 %; d) Disminució del 15 %; e) Disminució del 20 %; f) Disminució del 4,2 %.

Digues quina és la variació percentual que correspon a cada una de les transformacions següents:

- a) 8 000 € \rightarrow 9 360 €
 b) 12 560 € \rightarrow 11 932 €
 c) 12 000 persones \rightarrow 10 320 persones
 d) 23 500 persones \rightarrow 31 725 persones

a) Ha augmentat un 17 %; b) Ha disminuït un 5 %; c) Ha disminuït un 14 %; d) Ha augmentat un 35 %.

Pàgina 34

1. Una raqueta de tennis valia, al començament de la temporada, 28 €. Al llarg de l'any va sofrir les variacions següents: es va pujar un 20 %, es va abaixar un 25 %, es va pujar un 5 % i es va abaixar un 12 %. Quant valia al final de la temporada? Quin en va ser l'índex de variació total?

$$\text{Preu final} = 28 \cdot 1,2 \cdot 0,75 \cdot 1,05 \cdot 0,88 = 23,2848 \text{ €}$$

$$\text{Índex de variació} = 1,2 \cdot 0,75 \cdot 1,05 \cdot 0,88 = 0,8316 \text{ (baixa el preu un 16,84\%)}$$

Pàgina 36

2. Després d'apujar-se un 20 %, un article val 45,60 €. Quant valia abans de la puja?

$$1,2x = 45,60 \Rightarrow x = 38 \text{ €}$$

3. Després de rebaixar-se en un 35 %, un article val 81,90 €. Quant valia abans de la rebaixa?

$$0,65x = 81,90 \Rightarrow x = 126 \text{ €}$$

Pàgina 37

4. En quant es transforma un capital de 50 000 €, col·locats al 12 % anual, en 1, 2, 3, 4 i 5 anys? Quants anys es necessiten perquè es dupliqui aquest capital?

$$\text{En 1 any es transforma en } 50\,000 \cdot 1,12 = 56\,000 \text{ €}$$

$$\text{En 2 anys es transforma en } 50\,000 \cdot 1,12^2 = 62\,720 \text{ €}$$

$$\text{En 3 anys es transforma en } 50\,000 \cdot 1,12^3 = 70\,246,4 \text{ €}$$

$$\text{En 4 anys es transforma en } 50\,000 \cdot 1,12^4 = 78\,675,97 \text{ €}$$

$$\text{En 5 anys es transforma en } 50\,000 \cdot 1,12^5 = 88\,117,08 \text{ €}$$

Fan falta 7 anys perquè es dupliqui.

Pàgina 38

5. Esbrina en quant es transforma un capital de 100 000 € al 6 % anual durant 4 anys si els períodes de capitalització són: a) anys, b) mesos, c) dies, d) trimestres.

$$\text{a) } 100\,000 \cdot 1,06^4 = 126\,247,70 \text{ €}$$

ARITMÈTICA MERCANTIL

$$b) 100\,000 \cdot 1,005^{48} = 127\,049,92 \text{ €}$$

$$c) 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{36\,500}\right)^{1460} = 127\,122,41 \text{ €}$$

$$d) 100\,000 \cdot 1,015^{16} = 126\,898,55 \text{ €}$$

Pàgina 39

6. Un banc ens concedeix un préstec de 10 000 € al 12 % anual. En el moment de la formalització ens cobra unes despeses de 500 €. Realitzem un sol pagament al cap d'un any, agafant períodes de capitalització mensuals. Quina és la TAE? (Tingues en compte que ens van donar 9 500 € i que n'hem de tornar $10\,000 \cdot 1,01^{12}$.)

Ens van donar 9 500 € i hem de retornar 11 268,25 €. Per tant, la TAE serà del 18,6 %.

Pàgina 41

7. Comprova que podem amortitzar 10 000 € al 10 % anual mitjançant quatre pagaments trimestrals de 2 658,18 € cada un.

10 % anual = 2,5 % trimestral

Pagament trimestral	Deutes abans del pagament	Interessos pendents	Pagament	Quantitat amortitzada	Deute pendent
1	10 000	250	2 658,18	2 408,18	7 591,82
2	7 591,82	189,80	2 658,18	2 468,38	5 123,44
3	5 123,44	128,09	2 658,18	2 530,09	2 593,35
4	2 593,35	64,83	2 658,18	2 593,35	0

8. Comprova que podem amortitzar un préstec de 500 000 € al 6 % anual amb 8 pagaments mensuals de 63 914,43 €.

$$i = \frac{6}{1200} = 0,005$$

$$63\,914,43 \cdot \frac{(1,005)^8 - 1}{0,005} = 520\,353,50 \text{ €}$$

Pàgina 42

9. Hem contractat en un banc un pagament mensual del 0,32 % per un dipòsit de 60 000 €. Els interessos mensuals es dipositen en un compte no remunerat. Si no en traiem res, quants diners tindrem al cap de 2 anys?

$$60\,000 \times \frac{32}{10\,000} = 192 \text{ €/mes}$$

El mes que fa 24 (2 anys):

$$60\,000 + 192 \cdot 24 = 64\,608 \text{ €}$$

10. Un estalviador guarda 180 € un mes i 12 € més cada mes que passa. Quant estalviarà al cap de 3 anys? Quant estalviaria si fos capaç de mantenir aquesta progressió durant 10 anys?

$$\text{Al cap de tres anys } 180 + 12 \cdot 36 = 180 + 432 = 612 \text{ €}$$

$$\text{Haurà estalviat } \frac{(180 + 612) \cdot 36}{2} =$$

$$= 14\,256 \text{ € en 3 anys.}$$

$$\text{Al cap de 10 anys } 180 + 12 \cdot 120 = 180 + 1\,440 = 1\,620 \text{ €}$$

$$\text{Haurà estalviat } \frac{(180 + 1\,620) \cdot 120}{2} =$$

$$= 108\,000 \text{ € en 10 anys.}$$

Pàgina 43

11. Dipositem 100 000 € el dia 1 de gener en un banc al 8 % anual. Quin valor tenen al final de cada trimestre de

ARITMÈTICA MERCANTIL

L'any? Aquestes quantitats estan en progressió geomètrica. Quina n'és la raó?

8 % anual = 2 % trimestral

Al final del primer trimestre val

$$100\,000 \cdot 1,02 = 102\,000 \text{ €}$$

Al final del segon trimestre val

$$100\,000 \cdot 1,02^2 = 104\,040 \text{ €}$$

Al final del tercer trimestre val

$$100\,000 \cdot 1,02^3 = 106\,120,8 \text{ €}$$

Al final del quart trimestre val

$$100\,000 \cdot 1,02^4 = 108\,243,22 \text{ €}$$

La raó és $r = 1,02$

12. Dipositem uns diners al començament d'un any, en un banc, al 6 % anual.

Aquesta quantitat cada mes augmenta en progressió geomètrica. Quina n'és la raó?

$$r = 1 + \frac{6}{1\,200} = 1,005$$

Pàgina 44

13. Al principi de cada any dipositem 6 000 euros en un banc al 7 % anual. Quants diners arriplegarem en finalitzar el 10è any?

Pel primer ingrés acumulem $6\,000 \cdot 1,07^{10}$

Pel segon ingrés acumulem $6\,000 \cdot 1,07^9$

... ..

Pel desè ingrés acumulem $6\,000 \cdot 1,07$

En total, tindrem

$$S_{10} = \frac{6\,000 \cdot 1,07^{11} - 6\,000 \cdot 1,07}{1,07 - 1} =$$

$$= 88\,701,60 \text{ €}$$

14. Al començament de cada mes dipositem 100 € en un banc al 6 % anual.

Quants diners hem obtingut al final del 2n any?

$$S = 100 \frac{(1,005)^{25} - (1,005)}{0,005} = 2\,555,91 \text{ €}$$

Pàgina 47

15. Esbrina la mensualitat que cal pagar per amortitzar en 3 anys (36 pagaments) un deute de 24 000 euros al 9 % anual.

$$i = \frac{9}{1\,200} = 0,0075$$

$$m = 24\,000 \cdot \frac{1,0075^{36} \cdot 0,0075}{1,0075^{36} - 1} = 763,19 \text{ €}$$

16. Quant s'ha de pagar cada trimestre per amortitzar en 3 anys (12 pagaments) un deute de 24 000 € al 9 % anual?

$$i = \frac{9}{400} = 0,0225$$

$$24\,000 \cdot \frac{1,0225^{12} \cdot 0,0225}{1,0225^{12} - 1} = 2\,304,42 \text{ €}$$

Pàgina 50

17. Es vol estalviar 100 000 € en 7 anys al 8 % anual.

a) Si els pagaments són anuals, quina ha de ser l'anualitat?

b) Si els pagaments són mensuals, quina ha de ser la mensualitat?

$$c = 100\,000$$

$$t = 7 \text{ anys}$$

$$i = 8 \%$$

$$a) a = \frac{100\,000 \cdot 0,08}{(1 + 0,08)^{7+1} - (1 + 0,08)} =$$

$$= 10\,377,07 \text{ €}$$

$$b) i = \frac{8}{1\,200}$$

ARITMÈTICA MERCANTIL

$$m = \frac{100\,000 \cdot \frac{8}{1\,200}}{\left(1 + \frac{8}{1\,200}\right)^{84+1} - \left(1 + \frac{8}{1\,200}\right)} = 886,05 \text{ €}$$

18. Es vol estaviar 150 000 € en 10 anys al 6 % anual.

a) Quina serà la mensualitat?

b) Si els pagaments són trimestrals, quina serà la quota?

$$a) i = \frac{6}{1\,200} = 0,005$$

$$a = \frac{150\,000 \cdot 0,005}{(1,005)^{121} - 1,005} = 13\,233,69 \text{ €}$$

$$b) i = \frac{6}{400} = 0,0075$$

$$a = \frac{150\,000 \cdot 0,0075}{1,0075^{41} - 1,0075} = 3\,205,48 \text{ €}$$

Pàgina 53

Per practicar

Percentatges

19. Una entrada de cine costava l'any passat 3,30 € i enguany, 4,10 €. Quin ha estat l'índex de variació? I el percentatge d'augment?

$$\text{Índex de variació} = \frac{4,10}{3,30} = 1,24$$

$$\text{Percentatge d'augment} = 24,24 \%$$

20. Esbrina l'índex de variació del preu d'un televisor que costava 450 €, després d'apujar-lo un 15 % i de rebaxar-lo en un 25 %. Quin és el preu actual?

$$\text{Índex de variació} = 1,15 \cdot 0,75 = 0,8625$$

$$\text{Preu actual} = 450 \cdot 0,8625 = 388,125 \text{ €}$$

21. La quantitat d'aigua d'un embassament ha disminuït en un 35 % respecte de la que hi havia el mes passat. Ara conté 74,25 milions de litres. Quants litres tenia el mes passat?

$$0,65x = 74,25 \Rightarrow x = 114,23 \text{ milions de litres.}$$

22. He pagat 11,80 € per un llibre que estava rebaxat un 20 %. Quin era el preu abans de la rebaixa?

$$0,80x = 11,80 \Rightarrow x = 14,75 \text{ €}$$

23. Si el preu d'un article ha passat de 35 € a 100 € en uns anys, quin és l'índex de variació? Quin ha estat l'augment expressat en percentatges?

$$\text{índex} = \frac{100}{35} = 2,857 \Rightarrow 285,7 \%$$

24. El preu d'un ordinador ha baixat durant els últims anys, passant de costar 3750 € a 1560 €. Calcula l'índex de variació i la disminució percentual del preu.

$$\text{índex} = \frac{1\,560}{3\,750} = 0,418$$

Interessos

25. Un banc paga el 10 % dels diners que s'hi dipositen, sempre que s'hi mantinguin sense treure res durant un any. Quant et donaran al cap d'un any si diposites 18 500 €? I si els hi deixes durant 5 anys sense treure'n res?

Al cap d'un any ens donaran 1 850 € d'interessos; és a dir, tindrem 20 350 €.

Al cap de cinc anys tindrem $18\,500 \cdot 1,1^5$

ARITMÈTICA MERCANTIL

= 29 794,44 €; és a dir, 11 294,44 € d'interessos.

26. Troba en quant es transforma un capital de 10 000 euros al 5 % anual durant 2 anys i 3 mesos si el període de capitalització és: a) anual; b) mensual.

a) 2 anys i 3 mesos = 2,25 anys

$$10\,000 \cdot (1,05)^{2,25} = 11\,160,30 \text{ €}$$

b) 2 anys i 3 mesos = 27 mesos; 5 % anual = $\frac{5}{12}$ % mensual

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{27} = 11\,188,11 \text{ €}$$

27. En quant es transforma un capital de 3 500 € dipositats durant tres mesos al 8,5 % anual? I si es manté 5 anys amb períodes de capitalització trimestrals?

En tres mesos:

$$8,5\% \text{ anual} \rightarrow \frac{8,5}{4} = 2,125 \text{ trimestral}$$

$$3\,500 \cdot 1,02125 = 3\,574,38 \text{ €}$$

En cinc anys: (20 trimestres)

$$3\,500 \cdot 1,02125^{20} = 5\,329,78 \text{ €}$$

28. Un capital col·locat al 15 % anual durant quatre anys, s'ha convertit en 5 596,82 €. A quant ascendia aquest capital?

$$C \cdot (1,15)^4 = 5\,596,82 \Rightarrow C = 3\,200 \text{ €}$$

29. Quants anys ha d'estar dipositat un capital de 15 000 € per convertir-se en 18 000 € al 4,7 % anual?

$$15\,000 \cdot 1,047^x = 18\,000; x = 3,97 \text{ anys}$$

30. Calcula el tant per cent anual a què

s'han de col·locar 600 € perquè en dos anys es converteixin en 699,84 €.

$$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = 699,84 \Rightarrow r = 8\%$$

31. Dipositem 32 500 € en un banc durant un any i mig i es converteixen en 32 720 €. Quin tant per cent mensual ens dona el banc?

$$32\,500 \cdot \left(1 + \frac{x}{1200}\right)^{18} = 32\,720$$

$$x = 0,4498$$

$$\text{Percentatge} = 44,98\%$$

Amortització de préstecs

32. Un comerciant demana al banc un préstec de 5 000 euros per tornar en un sol pagament al cap de tres mesos. A quant ha d'ascendir aquest pagament si el preu dels diners està al 12 % anual? 12 % anual és un 3 % trimestral. El pagament serà de:

$$5\,000 \cdot 1,03 = 5\,150 \text{ €}$$

33. Rebem un préstec de 8 500 € al 15 % anual, que hem de tornar en un sol pagament. Quants anys han transcorregut si en liquidar-lo paguem 14 866,55 €?

$$8\,500 \cdot (1,15)^t = 14\,866,55 \Rightarrow t = 4 \text{ anys}$$

34. Es demana un préstec de 4 000 € al 6,5 % d'interès semestral amb el compromís de tornar-lo, en un sol pagament, al cap de dos anys. A quant ascendirà aquest pagament?

$$4\,000 \cdot (1,065)^4 = 5\,145,87 \text{ €}$$

35. Hem d'amortitzar 50 000 € en cinc

ARITMÈTICA MERCANTIL

anys, amb un interès del 15 %, de manera que cada any es paguen els interessos del capital pendent més la cinquena part del capital total. Calcula el que cal pagar cada any.

	Capital pendent	Pagament d'interessos + capital	Pagament de capital = anual	Deute pendent
1 ^{er} ANY	50 000	$50\,000 \cdot 0,15 + 10\,000 = 17\,500$		40 000
2 ^o ANY	40 000	$40\,000 \cdot 0,15 + 10\,000 = 16\,000$		30 000
3 ^{er} ANY	30 000	$30\,000 \cdot 0,15 + 10\,000 = 14\,500$		20 000
4 ^o ANY	20 000	$20\,000 \cdot 0,15 + 10\,000 = 13\,000$		10 000
5 ^o ANY	10 000	$10\,000 \cdot 0,15 + 10\,000 = 11\,500$		0

36. Hem demanat un préstec i hem d'amortitzar 4 500 € al 12 % anual en sis terminis mensuals. En cada un dels terminis pagarem la sisena part del capital prestat més els interessos mensuals del capital pendent de pagament. Calcula l'import de cada pagament.

	Capital pendent	Pagament d'interessos + capital	Pagament de capital = mensual	Deute pendent
1r MES	4 500	$45 + 750 = 795$		3 750
2n MES	3 750	$37,5 + 750 = 787,5$		3 000
3r MES	3 000	$30 + 750 = 780$		2 250
4t MES	2 250	$22,5 + 750 = 772,5$		1 500
5è MES	1 500	$15 + 750 = 765$		750
6è MES	750	$7,5 + 750 = 757,5$		0

37. Calcula l'import de l'annualitat amb què s'amortitza un préstec de 50 000 € en cinc anys al 15 %. I si es paga en mensualitats?

$$i = \frac{r}{100} = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$a = 50\,000 \frac{(1,15)^5 \cdot 0,15}{(1,15)^5 - 1} = 14\,915,78 \text{ €}$$

Progressions

38. Escriu el terme general d'una pro-

gressió aritmètica en la qual $a_1 = 7$ al $a_{40} = 40$.

$$a_n = 7 + (n - 1) \cdot d$$

Per calcular d:

$$a_{40} = 7 + (40 - 1) \cdot d$$

$$40 = 7 + (40 - 1) \cdot d$$

$$40 - 7 = (40 - 1) \cdot d$$

$$33 = 39 d$$

$$d = \frac{33}{39} = 0,85$$

$$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 0,85$$

39. En una progressió aritmètica, el vuitè terme val 4 i la diferència és -5. Calcula el primer terme i la suma dels vint-i-cinc primers termes.

$$a_8 = 4 \quad a_1?$$

$$d = -5 \quad s_{25}?$$

$$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot (-5)$$

$$4 = a_1 + (8 - 1) \cdot (-5)$$

$$4 = a_1 - 35$$

$$4 + 35 = a_1$$

$$39 = a_1$$

$$a_1 = 39$$

$$s_{25} = \frac{(39 + a_{25}) \cdot 25}{2}$$

Per calcular a_{25} :

$$a_{25} = 39 + (25 - 1) \cdot (-5)$$

$$a_{25} = -81$$

$$s_{25} = \frac{(39 - 81) \cdot 25}{2} = -525$$

$$s_{25} = -525$$

Pàgina 54

40. Calcula en cada cas, el primer terme, el terme general i a_{50} de les progressions aritmètiques següents:

a) $a_4 = 9 \quad a_6 = 12$

ARITMÈTICA MERCANTIL

$$\text{b) } a_{20} = -4 \quad d = -2$$

$$\text{c) } a_6 = -3 \quad a_{11} = -9$$

$$\text{a) } a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d$$

$$9 = a_1 + 3 \cdot d$$

$$a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d$$

$$12 = a_1 + 5 \cdot d$$

Resolem amb un sistema:

$$\begin{array}{l} (-) \left\{ \begin{array}{l} 9 = a_1 + 3 \cdot d \\ 12 = a_1 + 5 \cdot d \\ \hline -9 = -a_1 - 3 \cdot d \\ 12 = a_1 + 5 \cdot d \\ \hline 3 = 2 \cdot d \end{array} \right. \end{array}$$

$$d = \frac{3}{2}$$

Substituïm a qualsevol de les dues equacions anteriors:

$$9 = a_1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$9 = a_1 + \frac{9}{2}$$

$$a_1 = \frac{9}{2}$$

$$a_n = \frac{9}{2} + (n - 1) \cdot \frac{3}{2}$$

$$a_{50} = \frac{9}{2} + (50 - 1) \cdot \frac{3}{2}$$

$$a_{50} = 78$$

$$\text{b) } a_{20} = -4 \quad d = -2$$

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot d$$

$$-4 = a_1 - 38$$

$$a_1 = 34$$

$$a_n = 34 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$a_{50} = 34 + (50 - 1) \cdot (-2)$$

$$a_{50} = -64$$

$$\text{c) } a_6 = -3 \quad a_{11} = -9 \quad a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d$$

$$-3 = a_1 + 5 \cdot d$$

$$a_{11} = a_1 + (11 - 1) \cdot d$$

$$-9 = a_1 + 10 \cdot d$$

Resolem amb un sistema:

$$\begin{array}{l} (-) \left\{ \begin{array}{l} -3 = a_1 + 5 \cdot d \\ -9 = a_1 + 10 \cdot d \\ \hline 3 = -a_1 - 5 \cdot d \\ -9 = a_1 + 10 \cdot d \\ \hline -6 = 5 \cdot d \end{array} \right. \end{array}$$

$$d = \frac{-6}{5}$$

Substituïm a qualsevol de les dues equacions anteriors:

$$-3 = a_1 + 5 \cdot \left(\frac{-6}{5}\right)$$

$$-3 = a_1 - 6$$

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot \frac{-6}{5}$$

$$a_{50} = 3 + (50 - 1) \cdot \frac{-6}{5}$$

$$a_{50} = -\frac{279}{5}$$

41. Calcula el terme que s'indica en cadascuna de les progressions geomètriques següents:

a) a_8 si $a_1 = 2$ i $r = 3$

b) a_{10} si $a_1 = 81$ i $r = 1/3$

c) a_6 si $a_1 = 8$ i $a_4 = 1000$

a) $a_8 = a_1 \cdot r^{8-1}$

$$a_8 = 2 \cdot 3^7$$

$$a_8 = 4374$$

b) $a_{10} = 81 \left(\frac{1}{3}\right)^9 \quad a_{10} = \frac{1}{243}$

c) $a_4 = 8 \cdot r^3$

$$1000 = 8 \cdot r^3$$

$$r^3 = 125$$

$$r = 5$$

$$a_6 = 8 \cdot (5)^5$$

$$a_6 = 25000$$

42. Calcula la suma que es demana en cadascuna de les progressions geomètriques següents:

a) si $a_3 = 2$ i $a_6 = 2/27$, calcula s_6

ARITMÈTICA MERCANTIL

b) si $a_1 = 100$ i $r = 1/2$, calcula s_{10}

c) 1, -4, 16, -64, ..., s_8

$$a) s_6 = \frac{\frac{2}{27} \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Hem de trobar r i a_1 :

$$a_3 = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$2 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\frac{2}{27} = a_1 \cdot r^5$$

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} 2 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{r^2} \\ \frac{2}{27} = a_1 \cdot r^5 \end{cases}$$

$$\frac{2}{27} = \frac{2}{r^2} \cdot r^5$$

$$\frac{2}{27} = 2 \cdot r^3$$

$$r^3 = \frac{1}{27}$$

$$r = \frac{1}{3}$$

$$a_1 = \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 18$$

$$s_6 = \frac{\frac{2}{27} \cdot \frac{1}{3} - 18}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{728}{27}$$

$$b) s_{10} = \frac{a_{10} \cdot \frac{1}{2} - 100}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$a_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{25}{128}$$

$$s_{10} = \frac{\frac{25}{128} \cdot \frac{1}{2} - 100}{\frac{1}{2} - 1} = 200$$

$$c) a_2 = 1 \cdot r^1$$

$$-4 = 1 \cdot r$$

$$r = -4$$

$$s_8 = \frac{a_8 \cdot (-4) - 1}{-4 - 1}$$

$$a_8 = 1 \cdot (-4)^7 = -16384$$

$$s_8 = \frac{-16384 \cdot (-4) - 1}{-4 - 1} = -13107$$

43. Calcula la suma dels dotze primers termes d'una progressió aritmètica en la qual $a_3 = 24$ i $a_{10} = 66$.

$$s_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2}$$

Ens falten calcular a_1 i a_{12} :

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d$$

$$66 = a_1 + 9 \cdot d$$

$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot d$$

$$24 = a_1 + 2 \cdot d$$

Resolem el sistema:

$$(-) \begin{cases} 66 = a_1 + 9 \cdot d \\ 24 = a_1 + 2 \cdot d \\ \hline -66 = -a_1 - 9 \cdot d \\ 24 = a_1 + 2 \cdot d \\ \hline -42 = -7 \cdot d \end{cases}$$

$$d = 6$$

$$24 = a_1 + 2 \cdot 6$$

$$a_1 = 12$$

$$a_{12} = 12 + (12 - 1) \cdot 6$$

$$a_{12} = 68$$

$$s_{12} = \frac{(12 + 68) \cdot 12}{2} = 480$$

44. Calcula el primer terme i la diferència d'una progressió aritmètica en la qual coneixem $a_3 = 24$ i $a_2 + a_{11} = 41$.

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= a_1 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow a_2 = a_1 + d \\ a_{11} &= a_1 + (11 - 1) \cdot d \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10d \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_2 + a_{11} &= 2a_1 + 11d \\ 41 &= 2a_1 + 11d \end{aligned}$$

$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot d$$

$$24 = a_1 + 2 \cdot d$$

Resolem el sistema:

ARITMÈTICA MERCANTIL

$$(-2) \begin{cases} 41 = 2a_1 + 11 \cdot d \\ 24 = a_1 + 2 \cdot d \\ 41 = 2a_1 + 11 \cdot d \\ -48 = -2a_1 - 4 \cdot d \\ \hline -7 = 7 \cdot d \end{cases}$$

$$d = -1$$

$$24 = a_1 + 2(-1)$$

$$24 = a_1 - 2$$

$$a_1 = 26$$

45. Un tipus de bacteri es reproduceix per bipartició cada 15 minuts. Quants bacteris hi haurà després de 8 hores?

És una progressió geomètrica de $r = 2$.

En 8 hores tindrem 32 cicles de 15 minuts, per tant:

$$a_{32} = a_1 \cdot r^{32-1}$$

$$a_{32} = 1 \cdot 2^{31}$$

$$a_{32} = 2\,147\,483\,648$$

A les 8 hores tindrem 2 147 483 648 bacteris.

46. Escriu el terme general de la progressió que ens diu en quant es transformen 10 € dipositats al 5 % anual durant n anys. I si el rèdit fos del 10 %?

$$a_1 = 10 \text{ €}$$

$$5 \%$$

$$n \text{ anys}$$

$$a_n = 10 \cdot 1,05^{n-1}$$

$$b) a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$$

47. Dipositem en un banc 3 000 € al 5 % anual, al començament d'un any determinat. Calcula el capital disponible al final de cada any, durant 4 anys consecutius si no traiem cap quantitat de diners. Demosta que es tracta d'una progressió geomètrica i justifica'n els motius.

Al final del primer any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05 = 3\,150 \text{ €}$$

Al final del segon any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05^2 = 3\,307,5 \text{ €}$$

Al final del tercer any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05^3 = 3\,472,9 \text{ €}$$

Al final del quart any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05^4 = 3\,646,5 \text{ €}$$

Es tracta d'una successió numèrica on la $r = 1,05$

48. Si al començament de cada any ingresem 500 € en un banc al 4 % anual, quant haurem aconseguit estalviar al final del cinquè any?

$$s_1 = 500 \cdot 1,04^5 = 608,3 \text{ €}$$

$$s_2 = 500 \cdot 1,04^4 = 584,9 \text{ €}$$

$$s_3 = 500 \cdot 1,04^3 = 562,4 \text{ €}$$

$$s_4 = 500 \cdot 1,04^2 = 540,8 \text{ €}$$

$$s_5 = 500 \cdot 1,04 = 520 \text{ €}$$

Com que és una progressió decreixent ens resultarà més còmode manejar-la si la invertim:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 500 \cdot 1,04 \\ a_2 &= 500 \cdot 1,04^2 \\ a_3 &= 500 \cdot 1,04^3 \\ a_4 &= 500 \cdot 1,04^4 \\ a_5 &= 500 \cdot 1,04^5 \end{aligned} \right\} r = 1,04$$

$$s_5 = \frac{500 \cdot 1,04^5 \cdot 1,04 - 500 \cdot 1,04}{1,04 - 1} =$$

$$= 2\,816,5 \text{ €}$$

Haurem aconseguit estalviar 2 816,5 €

49. Dipositem en un banc 1 000 € a l'1,2 % trimestral durant 2 anys. Calcula el capital disponible al final de cada trimestre durant aquests anys si no en traiem cap quantitat de diners.

Al final del primer trimestre val:

ARITMÈTICA MERCANTIL

$$a_1 = 1000 \cdot 1,012 = 1012 \text{ €}$$

Al final del segon trimestre val:

$$a_2 = 1000 \cdot 1,012^2 = 1024,1 \text{ €}$$

Al final del tercer trimestre val:

$$a_3 = 1000 \cdot 1,012^3 = 1036,4 \text{ €}$$

Al final del quart trimestre val:

$$a_4 = 1000 \cdot 1,012^4 = 1048,9 \text{ €}$$

Al final del cinquè trimestre val:

$$a_5 = 1000 \cdot 1,012^5 = 1061,5 \text{ €}$$

Al final del sisè trimestre val:

$$a_6 = 1000 \cdot 1,012^6 = 1074,2 \text{ €}$$

Al final del setè trimestre val:

$$a_7 = 1000 \cdot 1,012^7 = 1087,1 \text{ €}$$

Al final del vuitè trimestre val:

$$a_8 = 1000 \cdot 1,012^8 = 1100,1 \text{ €}$$

50. Durant 5 anys ingresseu 1 000 € al 4,8 % anual en començar l'any. De quin capital disposarem al final del cinquè any?

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1000 \cdot 1,048 \\ a_2 = 1000 \cdot 1,048^2 \\ a_3 = 1000 \cdot 1,048^3 \\ a_4 = 1000 \cdot 1,048^4 \\ a_5 = 1000 \cdot 1,048^5 \end{array} \right\} r = 1,048$$

$$s_5 = \frac{1000 \cdot 1,048^5 \cdot 1,048 - 1000 \cdot 1,048}{1,048 - 1} =$$

$$= 5767,5 \text{ €}$$

Al final del cinquè any disposarem d'un capital de 5767,8 €

51. Dipositem en un banc 5 000 € al 2,5 % semestral al començament d'un any determinat. Esbrina el capital disponible al final de cada semestre durant tres anys si no en traiem cap quantitat de diners.

Al final del primer semestre tenim:

$$a_1 = 5000 \cdot 1,025^2 = 5125 \text{ €}$$

Al final del segon semestre tenim:

$$a_2 = 5000 \cdot 1,025^2 = 5253,1 \text{ €}$$

Al final del tercer semestre tenim:

$$a_3 = 5000 \cdot 1,025^3 = 5384,5 \text{ €}$$

Al final del quart semestre tenim:

$$a_4 = 5000 \cdot 1,025^4 = 5519,1 \text{ €}$$

Al final del cinquè semestre tenim:

$$a_5 = 5000 \cdot 1,025^5 = 5657 \text{ €}$$

Al final del sisè semestre tenim:

$$a_6 = 5000 \cdot 1,025^6 = 5798,5 \text{ €}$$

52. La taxa anual de creixement demogràfic d'un país és del 12 %. Si l'any 2000 tenia 20 milions d'habitants, quina població tindrà l'any 2025 si es manté aquesta taxa?

$$a_1 = 20\,000\,000 \cdot 1,12$$

...

$$a_{25} = 20\,000\,000 \cdot 1,12^{25} = 340\,001\,288$$

L'any 2025 tindrà 340 001 288 habitants.

53. Una empresa ofereix a un empleat un sou de 1000 € al mes i una pujada de 100 € a l'any. Una altra li ofereix el mateix sou amb una pujada del 8,5 % anual. Amb quina de les dues ofertes guanyarà més després de 5 anys?

Opció 1

$$a_1 = 1000 \text{ € al primer any}$$

$$a_2 = 1100 \text{ € al segon any}$$

$$a_3 = 1200 \text{ € al tercer any}$$

$$a_4 = 1300 \text{ € al quart any}$$

$$a_5 = 1400 \text{ € al cinquè any}$$

Opció 2

$$a_1 = 1000 \text{ €}$$

$$a_2 = 1000 \cdot 1,085 \text{ €}$$

$$a_3 = 1000 \cdot 1,085^2 = 1177,2 \text{ €}$$

$$a_4 = 1000 \cdot 1,085^3 = 1277,3 \text{ €}$$

$$a_5 = 1000 \cdot 1,085^4 = 1385,9 \text{ € al cinquè any}$$

ARITMÈTICA MERCANTIL

Al cinquè any guanyarà més diners amb la primera empresa.

Per resoldre

54. En un examen de francès ha aprovat el 60 % dels estudiants. En la recuperació dels suspesos, n'aprova el 30 %. En total en són 18, els aprovats. Quin és el percentatge d'aprovats? Quants estudiants són?

Tingues en compte que només el 40 % es presenta a la recuperació. Suma els percentatges dels que aproven.

Percentatge d'aprovats = $60\% + 0,3 \cdot 40\%$
= 72%

$0,72x = 18 \Rightarrow x = 25$ estudiants hi ha en total.

55. En un centre escolar, per cada 5 alumnes que aproven totes les assignatures n'hi ha 4 que en suspenen alguna. Quina fracció i quin percentatge del total suposa cada un dels dos tipus?

Les aproven totes $\frac{5}{9}$ del total, un $55,56\%$.

En suspenen alguna $\frac{4}{9}$ del total, un $44,44\%$.

56. Calcula en quant es transformen 5 000 euros en un any al 10 % si els períodes de capitalització són: a) semestres; b) trimestres; c) mesos.

Digues, en cada cas, quina és la TAE corresponent.

a) 10 % anual \rightarrow 5 % durant 2 semestres \rightarrow TAE: $(1 + 5/100)^2 \rightarrow 10,25\%$.

a) 10 % anual = 5 % semestral

$5\,000 \cdot 1,05^2 = 5\,000 \cdot 1,1025 = 5\,512,5 \text{ €}$

\rightarrow TAE del 10,25 %

b) 10 % anual = 2,5 % trimestral

$5\,000 \cdot 1,025^4 = 5\,000 \cdot 1,1038 = 5\,519,06 \text{ €}$

\rightarrow TAE del 10,38 %

c) 10 % anual = $\frac{10}{12}$ % mensual =

= $\frac{5}{6}$ % mensual

$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{600}\right)^{12} = 5\,000 \cdot (1,008\bar{3})^{12} =$

= $5\,000 \cdot 1,1047 = 5\,523,56 \text{ €} \rightarrow$

\rightarrow TAE del 10,47 %

57. Si el preu del lloguer d'un apartament s'apuja un 10 % cada any, quants anys tardaria a duplicar-se?

$1,1^x = 2; x = 7,27$ anys

58. Un banc paga el 2 % trimestral. Quants anys hauran d'estar dipositats 2 000 euros per convertir-se en 2 536,48 €?
 $2\,000 \cdot (1,02)^t = 2\,536,48 \Rightarrow t = 12$ trimestres = 3 anys

Pàgina 55

59. Calcula la TAE per un rèdit anual del 10 % amb pagaments mensuals d'interessos.

Al 10 % anual li correspon un $10/12 = 0,8333\%$ mensual.

Cada mes, el capital es multiplica per 1,008333.

En un any es multiplicarà per

$1,008333^{12} = 1,1047 = 1 + \frac{10,47}{100}$

La TAE corresponent a un 10 % anual amb períodes de capitalització mensuals és, per tant, del 10,47 %.

ARITMÈTICA MERCANTIL

60. Comprem un electrodomèstic de 750 € i el paguem en 24 terminis mensuals amb un interès del 13%. Quina serà la quota mensual?

$$m = 750 \cdot \frac{\left(1 + \frac{13}{1200}\right)^{24} \cdot \frac{13}{1200}}{\left(1 + \frac{13}{1200}\right)^{24} - 1} = 35,66 \text{ €}$$

61. Una persona paga un cotxe en 60 mensualitats de 333,67 €. Si el preu dels diners està al 12% anual, quin seria el preu del cotxe si es pagués al comptat? Coneixem m i cal calcular C . Substitueix les dades en la fórmula i aïlla C .

$$C = \frac{1,01^{60} - 1}{1,01^{60} \cdot 0,01} \cdot 333,67 \approx 15\,000 \text{ €}$$

62. Un estalviador posa cada any en la mateixa data 1 500 € en un compte que li produeix el 6% anual. Quina quantitat haurà acumulat després de tres anys?

$$C = 1\,500 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^3 - 1}{0,06} = 5\,061,92 \text{ €}$$

63. Un banc ens concedeix un préstec al 6%, que hem d'amortitzar en set anualitats de 14 330,80 € cada una. Quants diners ens ha prestat?

$$a = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow C = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$C = 14\,330,80 \cdot \frac{1,06^7 - 1}{1,06^7 \cdot 0,06} = 80\,000 \text{ €}$$

64. He rebut un préstec d'una financeria pel qual haig de pagar 10 anualitats de 1 413,19 €. Quina és la quantitat prestada si el rèdit és el 10,5%?

$$1\,413,19 = \frac{(1,105)^{10} \cdot 0,105}{(1,105)^{10} - 1} \cdot x$$

$$x = 8\,504,29 \text{ €}$$

65. Comprova que si paguem al final de cada any una anualitat de 2500 € durant 8 anys, al 5%, hem pagat en total 23 872,77 €.

$$\begin{aligned} \text{Total} &= 2\,500 \cdot (1 + 1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 \\ &+ 1,05^4 + 1,05^5 + 1,05^6 + 1,05^7) = \\ &= 23\,872,77 \text{ €} \end{aligned}$$

66. Un treballador estalvia 5000 € anuals que ingressa en el banc al començament de cada any. Si el banc li dona un 9,5% d'interès, quina quantitat tindrà al cap de 10 anys?

$$5\,000 \cdot \frac{1,095^{11} - 1,095}{1,095 - 1} = 85\,192,59 \text{ €}$$

67. Ingresso en un banc 3500 € al començament de cada any al 8% durant 5 anys. Quants diners tindrà al final del cinquè any?

$$3\,500 \cdot \frac{1,08^6 - 1,08}{1,08 - 1} = 22\,175,75 \text{ €}$$

68. Una parella vol estalviar. Per fer-ho, decideix ingressar 2000 € en un banc cada mes de gener. Calcula la quantitat que tindrà després de 6 anys, si el banc li dona un 5% d'interès.

$$2\,000 \cdot \frac{1,05^7 - 1,05}{1,05 - 1} = 14\,284,02 \text{ €}$$

69. Per comprar un cotxe de 13 000 € ens concedeixen un préstec al 6% anual, que pagarem en 36 mensualitats. Quina serà la quota mensual que haurem de pagar?

$$m = 13\,000 \cdot \frac{(1,005)^{36} \cdot 0,005}{(1,005)^{36} - 1} = 395,48 \text{ €}$$

ARITMÈTICA MERCANTIL

$$i = \frac{6}{1200} = 0,005$$

70. Calcula l'anualitat amb la qual s'amortitza un préstec de 25000 € en 4 anys al 10 % anual.

$$25\,000 \cdot \frac{(1,1)^4 \cdot 0,1}{(1,1)^4 - 1} = 7\,886,77 \text{ €}$$

$$i = \frac{10}{100} = 0,1$$

71. Per comprar un pis, hem demanat un préstec hipotecari de 100 000 € que hem de pagar en 144 mensualitats al 4,8 % anual. Quin serà el valor de la mensualitat que haurem de pagar?

$$100\,000 \cdot \frac{(1,004)^{144} \cdot 0,004}{(1,004)^{144} - 1} = 914,89 \text{ €}$$

$$i = \frac{4,8}{1200} = 0,004$$

72. Una persona es proposa estalviar durant 5 anys. Per fer-ho, ingressa en un banc, al començament d'any, 1 000 € al 5,4 % anual. El segon any, ingressa 1 500 €, i va augmentant el seu ingrés en 500 € cada any. Calcula quin serà el capital acumulat després d'aquests 5 anys.

$$1\,000 \cdot 1,054^5 + 1\,500 \cdot 1,054^4 + 2\,000 \cdot 1,054^3 + 2\,500 \cdot 1,054^2 + 3\,000 \cdot 1,054 = 11\,433,08 \text{ €}$$

73. Per estalviar, ingreso en un banc una mensualitat de 300 €. Si el banc em dona un 6 % anual, quin capital tindrè després de 5 anys?

$$300 \cdot \frac{(1,005)^{61} \cdot (1,005)}{0,005} = 21\,035,66 \text{ €}$$

$$i = \frac{6}{1200} = 0,005$$

74. Per la compra d'un local comercial

pago una mensualitat de 650 euros durant 10 anys al 9 % anual. Quant hauré pagat en total pel local?

$$650 \cdot \frac{(1,0075)^{121} - (1,0075)}{0,0075} = 126\,727,66 \text{ €}$$

$$i = \frac{9}{1200} = 0,0075$$

75. Si volem estalviar 60 000 € al 5,4 % anual durant 8 anys, quina serà la mensualitat que haurem de pagar? Quina serà la quota si els pagaments són trimestrals?

$$i = \frac{5,4}{1200} = 0,0045$$

$$n = \frac{60\,000 \cdot 0,0045}{(1,0045)^{97} - 1,0045} = 498,83 \text{ €}$$

$$i = \frac{5,4}{400} = 0,0135$$

$$t = \frac{60\,000 \cdot 0,0135}{(1,0135)^{33} - 1,0135} = 1\,491,37 \text{ €}$$

Per aprofundir

76. Una persona inicia un pla de pensions als 45 anys, amb quotes mensuals de 200 € al 9 % anual, amb períodes de capitalització mensuals. De quin capital disposarà als 65 anys?

$$9\% \text{ anual} = 0,75\% \text{ mensual}$$

$$20 \text{ anys} = 240 \text{ mensualitats}$$

$$C = 200 \cdot 1,0075 \cdot \frac{1,0075^{240} - 1}{0,0075} = 134\,579,20 \text{ €}$$

77. Rebem un préstec de 10 000 € al 12 % anual que hem de pagar en un any amb terminis mensuals. El banc ens cobra 350 € per la gestió del préstec en el moment de la seva concessió. Compro-

ARITMÈTICA MERCANTIL

va que la TAE corresponent a aquest préstec és d'un 16,77 %

El banc ens cobra 10 000 € a l'1 % mensual, però el que rebem realment és 9 650 €, que al r % anual (r = TAE) serà igual al que el banc ens cobra. Planteja l'equació corresponent i aïlla r.

12 % anual = 1 % mensual

En realitat, rebem 9 650 €

Tornem $10\,000 \cdot 1,01^{12} = 11\,268,25$ €

$$\frac{11\,268,25}{9\,650} = 1,1677 \Rightarrow$$

\Rightarrow La TAE serà del 16,77 %

Qüestions teòriques

78. Demostra que si al final de cada any paguem una anualitat a , durant n anys al r %, la quantitat total que hem pagat és:

$$S = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \left(i = \frac{r}{100} \right)$$

a en $n - 1$ anys es converteix en $a(1+i)^{n-1}$

a en $n - 2$ anys $\rightarrow a(1+i)^{n-2}$

.....

a en 1 any $\rightarrow a(1+i)$

última anualitat $\rightarrow a$

Suma els termes d'aquesta progressió.

$$a + a(1+i) + \dots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{Sn r - Si}{r - 1}$$

Per tant,

$$S = \frac{a(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) - a}{(1+i) - 1} =$$

$$= a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$