

## UNITAT DIDÀCTICA 4

### FUNCIONS ELEMENTALS

#### Pàgina 90

##### Reflexiona i resol

A través de la lupa

Mirant un objecte petit (el tap d'un bolígraf, per exemple) a través d'una lupa situada a 10 cm, aquest es veu notablement ampliat. En variar la distància se'n modifica la mida. La relació entre ambdues variables és (per a una certa lupa):

$$A = \frac{2}{2-d}$$

$d$  = distància de la lupa a l'objecte (en dm)

$A$  = augment (número pel qual es multiplica la mida)

Calcula  $A$  per a  $d = 1$ ,  $d = 0,5$  i  $d = 3$ .

Què significa que  $A = -1$ ?

$$d = 1 \rightarrow A = 2$$

$$d = 0,5 \rightarrow A = 4$$

$$d = 3 \rightarrow A = -2$$

Si  $A$  és  $-1$ , la mida no augmenta, sinó que disminueix. Es veu més petit.

Refredar l'aigua

Retirem un cassó amb aigua bullent i el deixem refredar. La temperatura ambient és de  $20^\circ$ . La temperatura del cassó  $T$  ( $^\circ\text{C}$ ) varia amb el temps,  $t$  (min). Suposem que la relació és:  $T = 20 + 80 \cdot 0,95^t$

Esbrina la temperatura per a  $t = 0$ ,  $t = 30$ ,  $t = 60$  i  $t = 90$ .

$$t = 0 \rightarrow T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$t = 30 \rightarrow T = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$t = 60 \rightarrow T = 23,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$t = 90 \rightarrow T = 20,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

#### Pàgina 91

Quin soroll!

La intensitat del so que ens arriba d'un focus sonor depèn de la distància a la qual ens trobem d'aquest. Suposem que:

$$I = \frac{100}{d^2}$$

$I$  = intensitat (en decibels)

$d$  = distància (en m)

Esbrina a quina distància hem d'estar perquè la intensitat sigui de 16 db.

$$16 = \frac{100}{d^2}$$

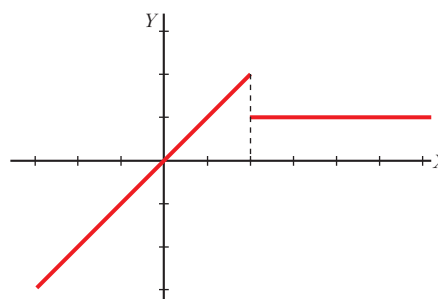
$$d = 2,5 \text{ metres}$$

Representació de funcions

Per representar la funció  $y = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  procedim així:

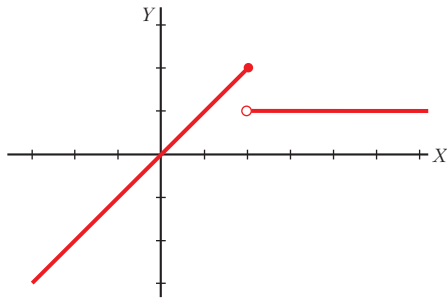
a) Representem la funció  $y = x$  fins a l'abscissa  $x = 2$ .

Representem la funció  $y = 1$  des de  $x = 2$  cap endavant.



b) En  $x = 2$  només és vàlid el punt corresponent a la primera branca (el signe = de l'expressió  $x \leq 2$  serveix per incloure-hi aquest valor). Tenim això en compte si excloem, per mitjà d'un petit cercle, el punt de l'altra branca.

## FUNCIONS ELEMENTALS

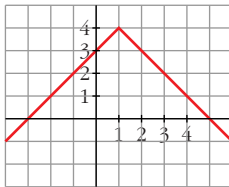


Representa gràficament les funcions següents:

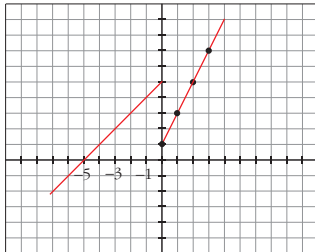
$$\text{a) } y = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a)



b)



## Pàgina 93

1. Troba el domini de definició de les funcions següents:

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{x - 1}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{1 - x}$$

$$\text{d) } y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{e) } y = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$\text{f) } y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{g) } y = 1/\sqrt{x - 1}$$

$$\text{h) } y = 1/\sqrt{1 - x}$$

$$\text{i) } y = 1/\sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{j) } y = 1/\sqrt{x^2 - 4}$$

$$\text{k) } y = x^3 - 2x + 3 \quad \text{l) } y = \frac{1}{x}$$

$$\text{m) } y = \frac{1}{x^2} \quad \text{n) } y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$\text{o) } y = \frac{1}{x^2 + 4} \quad \text{p) } y = \frac{1}{x^3 + 1}$$

q) L'àrea d'un quadrat de costat variable,  $l$ , és  $A = l^2$ .

a)  $\mathbb{R}$ ; b)  $[1, \infty)$ ; c)  $(-\infty, 1]$ ; d)  $[-2, 2]$ ;

e)  $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ ; f)  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ;

g)  $(1, \infty)$ ; h)  $(-\infty, 1)$ ; i)  $(-2, 2)$ ;

j)  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ ; k)  $\mathbb{R}$ ; l)  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;

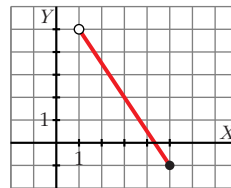
m)  $\mathbb{R} - \{0\}$ ; n)  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ; o)  $\mathbb{R}$ ;

p)  $\mathbb{R} - \{-1\}$ ; q)  $l > 0$

## Pàgina 94

2. Representa la funció següent:

$$y = -2x + 7, x \in (1, 4]$$

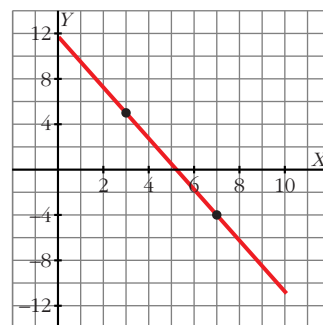


3. Una funció lineal  $f$  compleix:

$f(3) = 5, f(7) = -4, D(f) = [0, 10]$ . Quina n'és l'expressió analítica? Representa-la.

$$m = \frac{-4 - 5}{7 - 3} = -\frac{9}{4}$$

$$y = 5 - \frac{9}{4}(x - 3) = -\frac{9}{4}x + \frac{47}{4}, x \in [0, 10]$$



## FUNCIONS ELEMENTALS

## Pàgina 95

4. Per un consum de gas de  $10 \text{ m}^3$  s'han pagat 50 euros i per  $16 \text{ m}^3$  se n'han pagat 71. Quant caldrà pagar per  $15 \text{ m}^3$ ?

$$m = \frac{71 - 50}{16 - 10} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$y = 50 + 3,5(x - 10) = 3,5x + 15$$

La recta és  $f(x) = 3,5x + 15$ ; per tant  $f(15) = 67,5$  euros.

5. El consum de gasolina d'un automòbil, per cada 100 km, depèn de la velocitat que porta. A 60 km/h consumeix 5,7 l i a 90 km/h en consumeix 7,2. Estima quant consumirà si recorre 100 km a 70 km/h.

$$m = \frac{7,2 - 5,7}{90 - 60} = \frac{1,5}{30} = 0,05$$

$$y = 5,7 + 0,05(x - 60) = 0,05x + 2,7$$

La recta és  $f(x) = 0,05x + 2,7$ ; per tant,  $f(70) = 6,2$  litres.

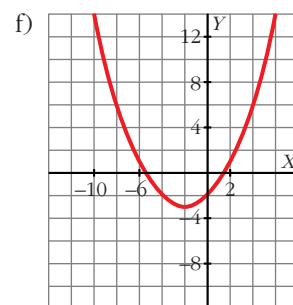
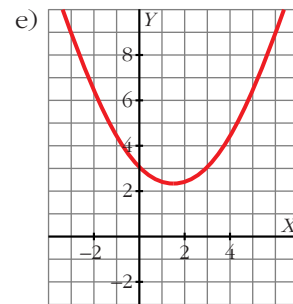
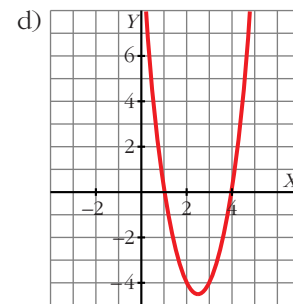
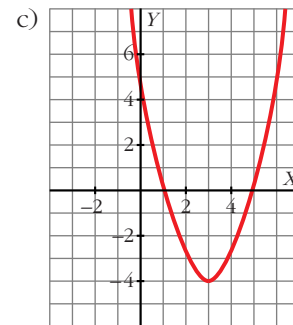
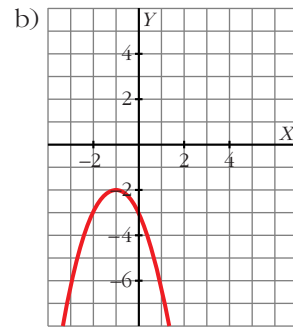
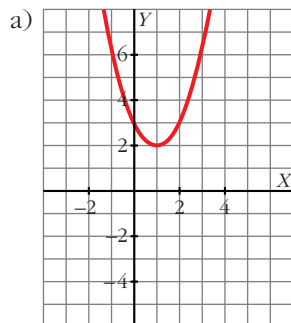
## Pàgina 96

6. Representa les paràboles:

a)  $y = x^2 - 2x + 3$ ; b)  $y = -x^2 - 2x - 3$ ;

c)  $y = x^2 - 6x + 5$ ; d)  $y = 2x^2 - 10x + 8$ ;

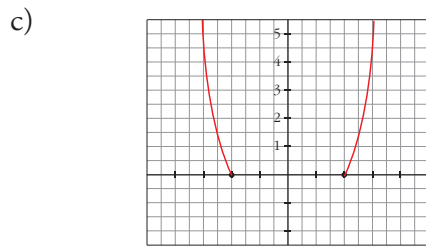
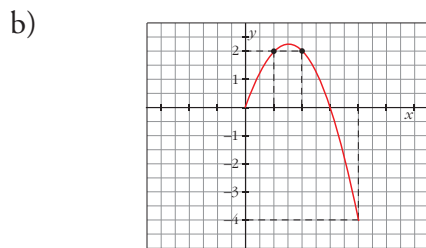
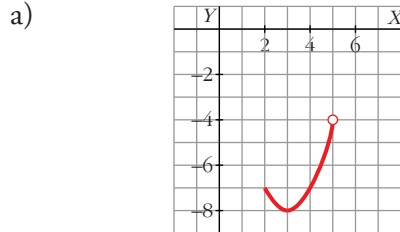
e)  $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ ; f)  $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$



FUNCIONS ELEMENTALS

7. Representa les funcions:

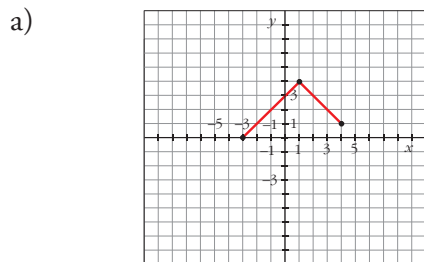
- a)  $y = x^2 - 6x + 1, x \in [2, 5)$
- b)  $y = -x^2 + 3x, x \in [0, 4]$
- c)  $y = x^2 - 4, x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



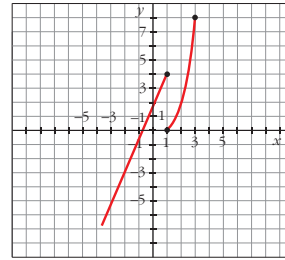
Pàgina 97

8. Representa:

- a)  $y = \begin{cases} x + 3, & x < 1 \\ 5 - x, & x \geq 1 \end{cases}$
- b)  $y = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

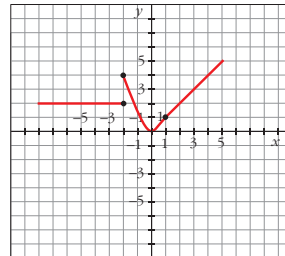


b)



9. Representa:

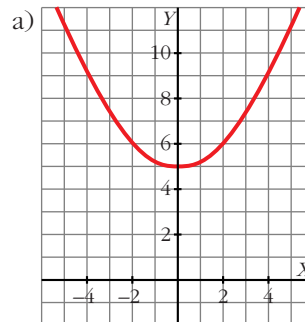
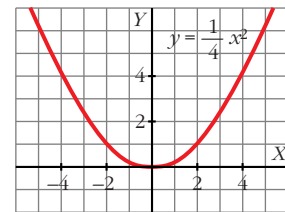
$$y = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



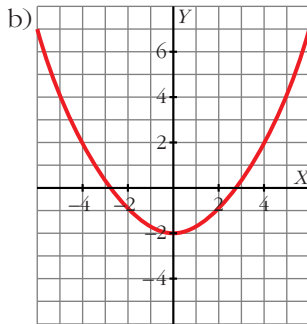
Pàgina 98

10. Representa  $y = \frac{1}{4}x^2$  i a partir d'aquesta, aquestes altres:

- a)  $y = \frac{1}{4}x^2 + 5$ ; b)  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

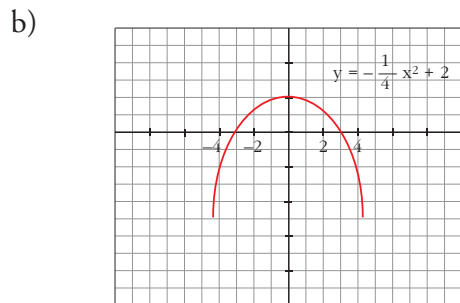
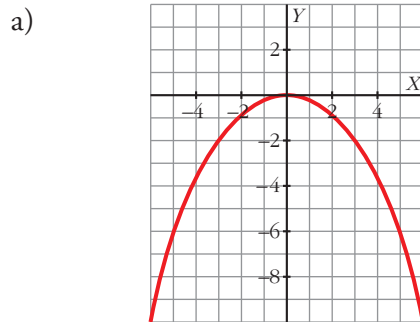


## FUNCIONS ELEMENTALS



11. Tenint en compte l'exercici anterior, representa:

a)  $y = -\frac{1}{4}x^2$ ; b)  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$



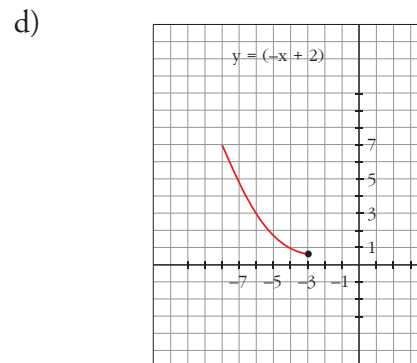
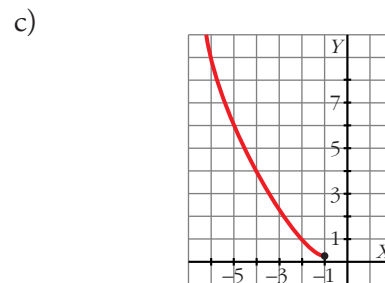
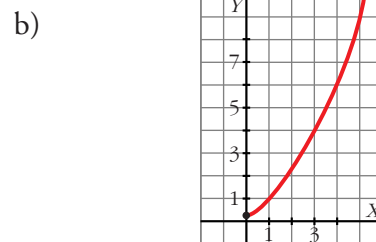
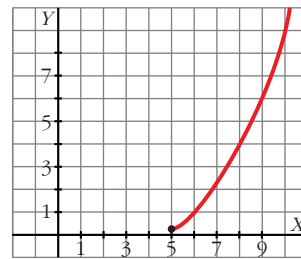
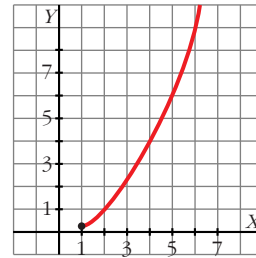
Pàgina 99

12. Representa la funció següent:

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \text{ per a } x \geq 1.$$

A partir d'aquesta, fes el mateix amb:

- a)  $y = f(x - 5)$   
 b)  $y = f(x + 1)$   
 c)  $y = f(-x)$   
 d)  $y = f(-x + 2)$



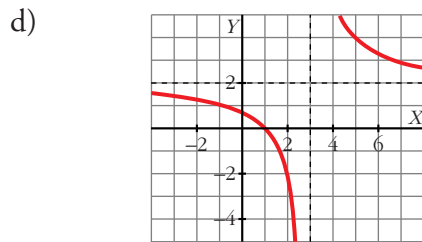
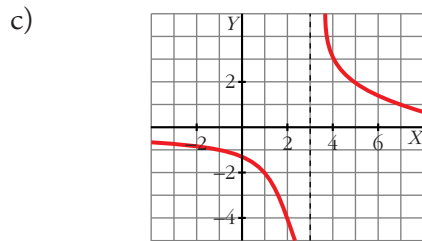
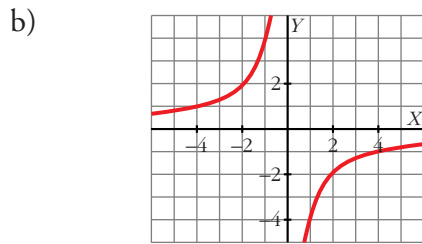
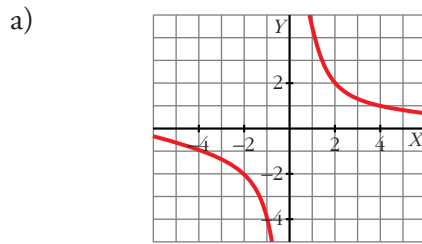
## FUNCIONS ELEMENTALS

## Pàgina 100

## 13. Representa:

a)  $y = \frac{4}{x}$ ; b)  $y = -\frac{4}{x}$ ; c)  $y = \frac{4}{x-3}$ ;

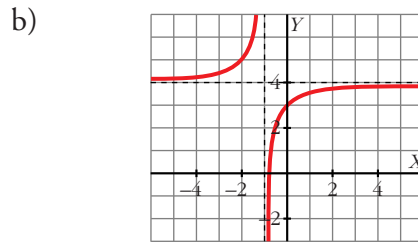
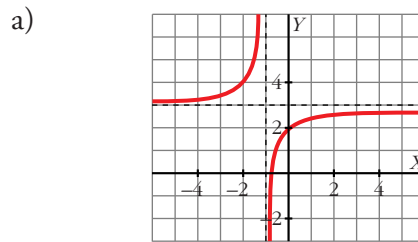
d)  $y = \frac{4}{x-3} + 2$



## 14. Representa aquestes funcions:

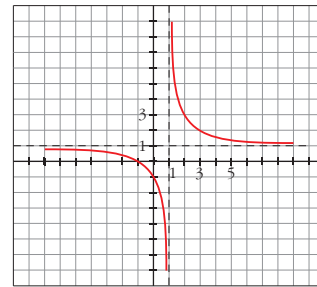
a)  $y = \frac{3x+2}{x+1}$     b)  $y = \frac{4x+3}{x+1}$

c)  $y = \frac{x+1}{x-1}$     d)  $y = \frac{x-1}{x+1}$



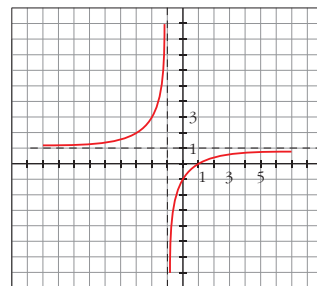
c)  $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

és com la de  $y = \frac{2}{x}$  desplaçada 1 cap a la dreta i 1 amunt.



d)  $y = \frac{x-1}{x+1} = 1 + \frac{-2}{x+1}$

és com la de  $y = \frac{-2}{x}$  desplaçada 1 cap a l'esquerra i 1 cap amunt.

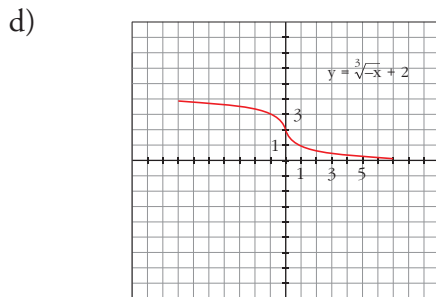
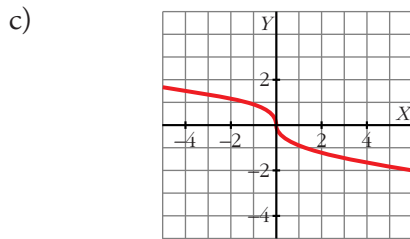
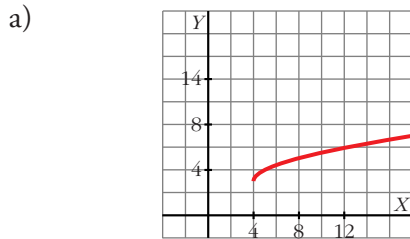


FUNCIONS ELEMENTALS

Pàgina 101

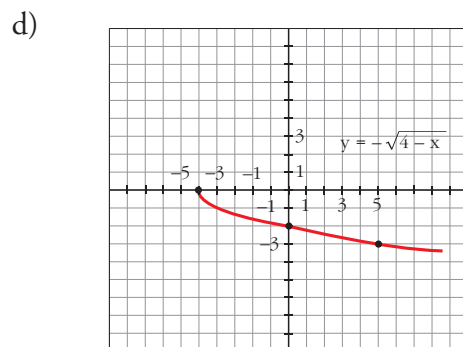
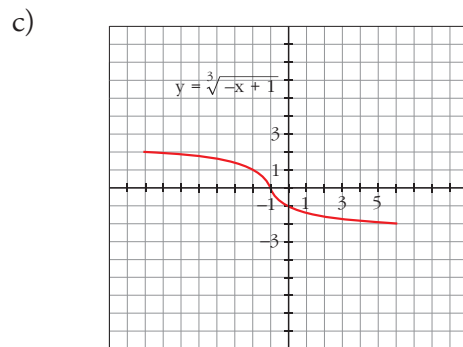
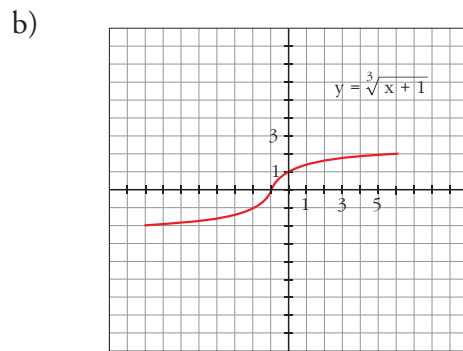
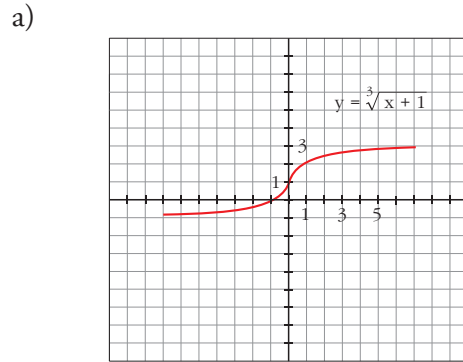
15. Representa les funcions següents:

- a)  $y = 3 + \sqrt{x-4}$     b)  $y = \sqrt{2-x}$   
 c)  $y = \sqrt[3]{-x}$     d)  $y = \sqrt[3]{-x} + 2$



16. Representa:

- a)  $y = \sqrt[3]{x} + 1$ ; b)  $y = \sqrt[3]{x+1}$   
 c)  $y = \sqrt[3]{-x+1}$ ; d)  $y = -\sqrt{4-x}$

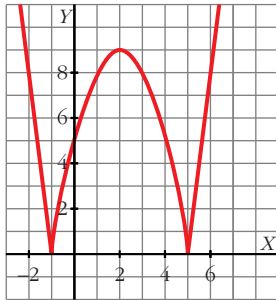


## FUNCIONS ELEMENTALS

## Pàgina 102

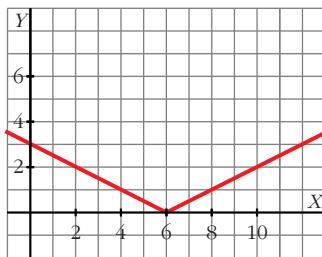
## 17. Representa:

$$y = |-x^2 + 4x + 5|$$



## 18. Representa gràficament:

$$y = \left| \frac{x}{2} - 3 \right|$$



## Pàgina 107

## Per practicar

## Domini de definició

19. Indica si els valors de  $x$ : 0; -2; 3,5;  $\sqrt{2}$ ; -0,25 pertanyen al domini d'aquestes funcions:

a)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; b)  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ ; c)  $y = x - \sqrt{2}$ ;

d)  $y = \sqrt{x^2 + 4}$ ; e)  $y = \sqrt{x - 3}$ ;

f)  $y = \sqrt{7 - 2x}$

- a) 3,5;  $\sqrt{2}$ ; b) Tots excepte -2; c) Tots;  
d) Tots; e) 3,5; f) Tots.

20. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a)  $y = \frac{3}{x^2 + x}$ ; b)  $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$

c)  $y = \frac{x - 1}{2x + 1}$ ; d)  $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e)  $y = \frac{2}{5x - x^2}$ ; f)  $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

- a)  $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ ; b)  $\mathbb{R} - \{2\}$ ; c)  $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ ;  
d)  $\mathbb{R}$ ; e)  $\mathbb{R} - \{0, 5\}$ ; f)  $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

21. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a)  $y = \sqrt{3 - x}$ ; b)  $y = \sqrt{2x - 1}$

c)  $y = \sqrt{-x - 2}$ ; d)  $y = \sqrt{-3x}$

- a)  $(-\infty, 3]$ ; b)  $[1/2, +\infty)$ ; c)  $(-\infty, -2]$ ;  
d)  $(-\infty, 0]$

22. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a)  $y = \sqrt{x^2 - 9}$ ; b)  $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c)  $y = \sqrt{12x - 2x^2}$ ; d)  $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e)  $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x}}$ ; f)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

g)  $y = \frac{-1}{x^3 - x^2}$ ; h)  $y = \frac{2x}{x^4 - 1}$

a)  $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = (+\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b)  $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$

c)  $12x - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x(6 - x) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = [0, 6]$

d)  $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 5) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

e)  $4 - x > 0 \Rightarrow 4 > x \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 4)$

f)  $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

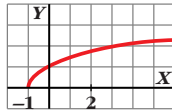
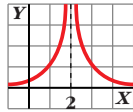
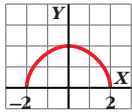


## FUNCIONS ELEMENTALS

g)  $x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

h)  $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

23. A partir de la gràfica d'aquestes funcions, indica quin és el domini de definició i el seu recorregut.



Els dominis són, per ordre:  $[-2, 2]$ ;  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$  i  $[-1, +\infty)$ .

Els recorreguts  $[0, 2]$ ;  $[0, +\infty)$  o  $[0, +\infty)$ .

24. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ; b)  $y = \sqrt{x^2 + 3}$ ;

c)  $y = \sqrt{5 - x^2}$ ; d)  $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

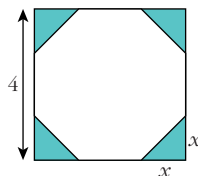
a)  $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ ; b)  $\mathbb{R}$ ; c)  $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ ;

d)  $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

25. D'un quadrat de 4 cm de costat, es tallen en els cantons triangles rectangles isòsceles els costats dels quals mesuren  $x$ .

a) Escriu l'àrea de l'octàgon que en resulta en funció de  $x$ .

b) Quin és el domini d'aquesta funció?



a)  $A(x) = 16 - 2x^2$

b) Domini:  $(0, 2)$

26. Una empresa fabrica envasos en forma de prisma de dimensions  $x$ ,  $x/2$  i  $2x$  cm.

a) Escriu la funció que dona el volum de l'envàs en funció de  $x$ .

b) Troba'n el domini sabent que l'envàs més gran té 1 l de volum. Quin és el seu recorregut?

a)  $V(x) = x^3$

b)  $(0, 10)$

Recorregut  $(0, 1000)$

## Funcions lineals. Interpolació

27. Digues quin és el pendent de cadascuna de les rectes següents:

a)  $y = 2x - 5$ ; b)  $2x - y + 1 = 0$ ;

c)  $y = -x + 5$ ; d)  $y = 5$

a) 2; b); 2; c) -1; d) 0

28. Escriu les equacions de les rectes següents:

a) Passa per  $P(1, -5)$  i  $Q(10, 11)$ .

b) Passa per  $(-7, 2)$  i el seu pendent és  $-0,75$ .

c) Talla els eixos en  $(3,5, 0)$  i  $(0, -5)$ .

d) És paral·lela a la recta  $3x - y + 1 = 0$  i passa per  $(-2, -3)$ .

a)  $m = \frac{11 - (-5)}{10 - 1} = \frac{16}{9}$

$y = -5 + \frac{16}{9}(x - 1) = \frac{16}{9}x - \frac{61}{9}$

b)  $y = 2 - 0,75(x + 7) = -0,75x - 3,25$

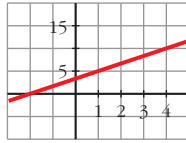
c)  $\frac{x}{3,5} + \frac{y}{-5} = 1 \Rightarrow y = 1,43x - 5$

d)  $m = 3$ ;  $y = -3 + 3(x + 2) = 3x + 3$

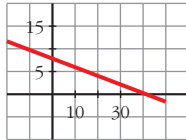
29. Elegeix dos punts en cada una d'aquestes rectes i escriu-ne l'equació:

## FUNCIONS ELEMENTALS

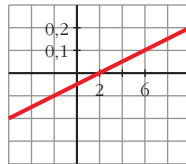
a)



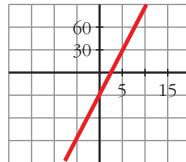
b)



c)



d)



- a)  $y = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$ ; b)  $y = -\frac{1}{5}x + 8$ ;  
 c)  $y = 0,025x - 0,05$ ; d)  $y = 12x - 30$

## Pàgina 108

30. Estima, mitjançant interpolació lineal, el valor corresponent a  $x = 1000$  i a  $x = 1558$ , a partir d'aquests valors:

$x$	825	2015
$y$	2500	4516

$$y = 2500 + \frac{144}{85}(x - 825)$$

$$y(1000) = 2796,47$$

$$y(1558) = 3741,79$$

31. Calcula mitjançant interpolació lineal el valor  $y$  que falta en cada una d'aquestes taules:

a)

$x$	0,45	0,5	0,6
$y$	2	...	0,25

b)

$x$	47	59	112
$y$	18	...	37

c)

$x$	3	7	13
$y$	-5	...	4

$$a) y = \frac{0,25 - 2}{0,6 - 0,45} \cdot (0,5 - 0,45) + 2$$

$$y = 1,42$$

$$b) y = 18 + \frac{19}{65}(x - 47)$$

$$y(59) = \frac{1398}{65}$$

$$c) y = \frac{4 - (-5)}{13 - 3} \cdot (7 - 3) + (-5)$$

$$y = -1,4$$

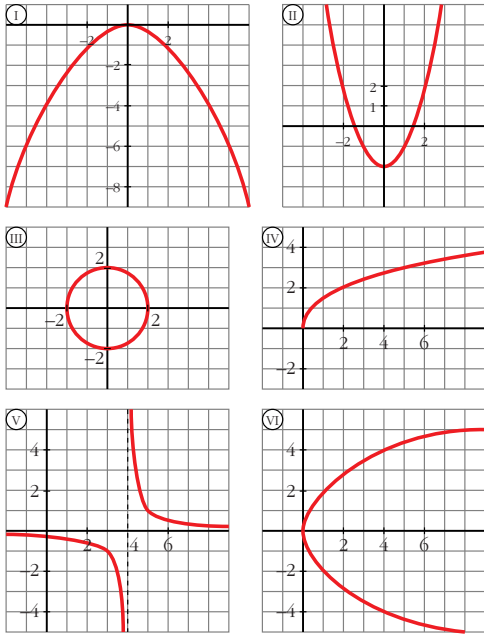
## Gràfica i expressió analítica

32. Dues d'aquestes gràfiques no són funcions. Digues quines són i associa amb cada una de les altres quatre, l'expressió analítica que li correspon:

$$a) y = \sqrt{2x} \quad b) y = -0,25x^2$$

$$c) y = \frac{1}{x-4} \quad d) y = x^2 - 2$$

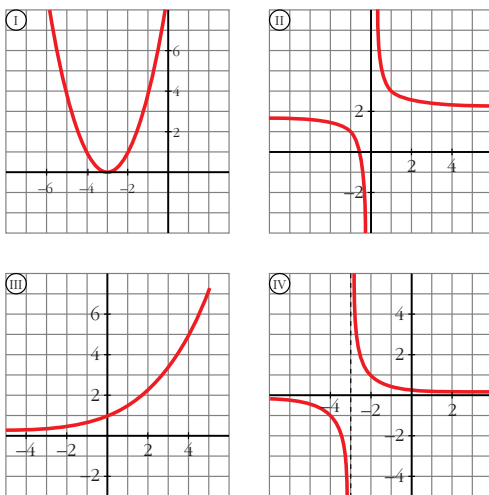
FUNCIONS ELEMENTALS



a) IV; b) I; c) V; d) II  
 III i VI no són funcions.

33. Associa amb cada una de les gràfiques una de les expressions analítiques següents:

- a)  $y = \frac{1}{x} + 2$       b)  $y = \frac{1}{x+3}$   
 c)  $y = (x+3)^2$       d)  $y = \sqrt{x+2}$

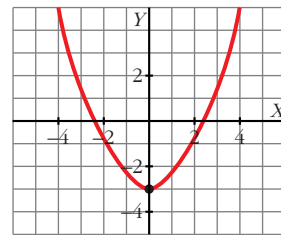


a) II; b) IV; c) I; d) III.

Representació de funcions elementals

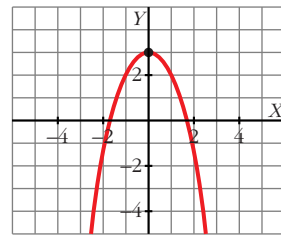
34. Representa gràficament les paràboles següents trobant el vèrtex, els punts de tall amb els eixos de coordenades i algun punt pròxim al vèrtex:

- a)  $y = 0,5x^2 - 3$       b)  $y = -x^2 + 3$   
 c)  $y = 2x^2 - 4$       d)  $y = -\frac{3x^2}{2}$



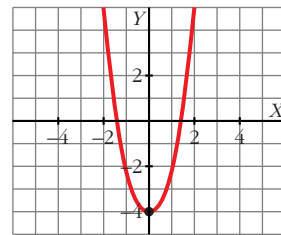
Vèrtex:  $(0, -3)$ . Tall amb els eixos:  $(-\sqrt{6}, 0)$ ,  $(\sqrt{6}, 0)$ ,  $(0, -3)$

b)



Vèrtex:  $(0, 3)$ . Tall amb els eixos:  $(\sqrt{3}, 0)$ ,  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, 3)$

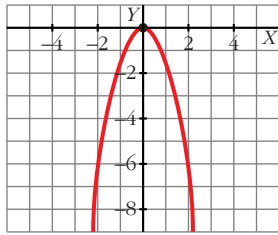
c)



Vèrtex:  $(0, -4)$ . Tall amb els eixos:  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, -4)$

## FUNCIONS ELEMENTALS

d)

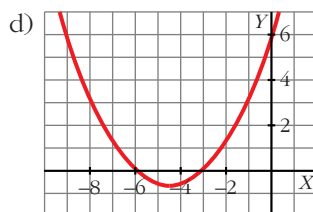
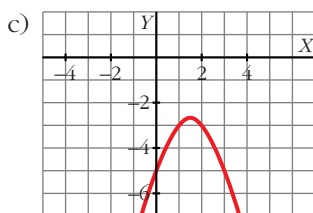
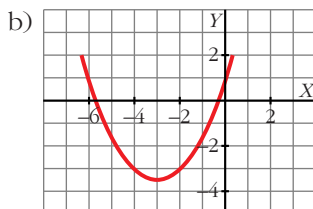
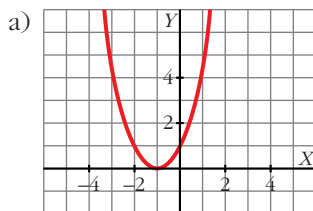


Vèrtex: (0, 0). Tall amb els eixos: (0, 0)

35. Representa les funcions següents:

a)  $y = x^2 + 2x + 1$ ; b)  $y = \frac{x^2}{2} + 3x + 1$

c)  $y = -x^2 + 3x - 5$ ; d)  $y = \frac{x^2}{3} + 3x + 6$



36. En les paràboles següents troba el vèrtex i comprova que no n'hi ha cap que talli l'eix d'abscisses. Obtén algun punt a la dreta i a l'esquerra del vèrtex i representa-les gràficament.

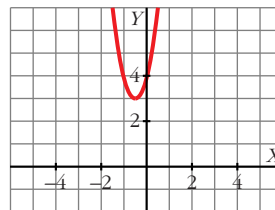
a)  $y = 4(x^2 + x + 1)$

b)  $y = 5(x + 2)^2 + 1$

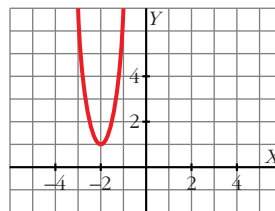
c)  $y = -x^2 - 2$

d)  $y = -\frac{3}{4}(x^2 + 2)$

a)

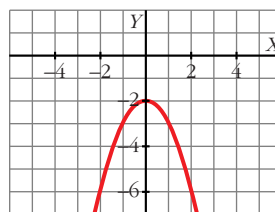
Vèrtex:  $(-\frac{1}{2}, 3)$ 

b)



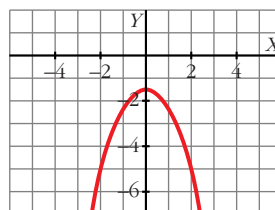
Vèrtex: (-2, 1)

c)



Vèrtex: (0, -2)

d)

Vèrtex:  $(0, -\frac{3}{4})$

Pàgina 109

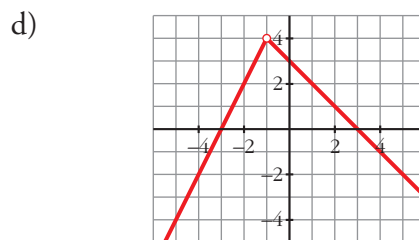
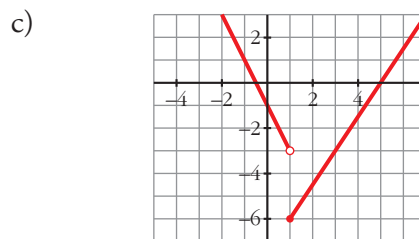
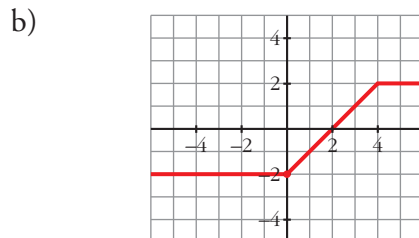
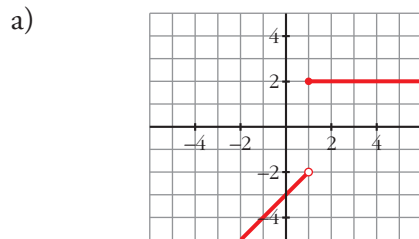
37. Representa gràficament les funcions següents:

$$a) y = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$c) y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

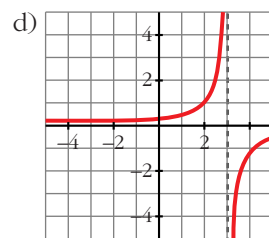
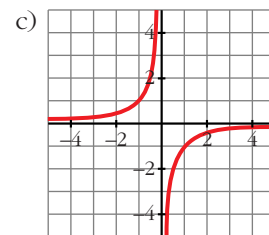
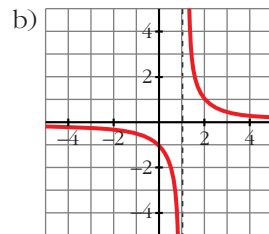
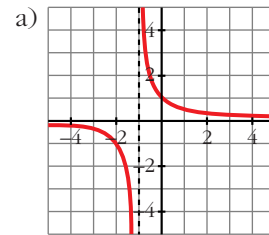
$$d) y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



38. Representa les funcions següents:

$$a) y = \frac{1}{x+1} \quad b) y = \frac{1}{x-1}$$

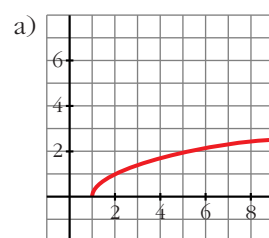
$$c) y = \frac{-1}{x} \quad d) y = \frac{-1}{x-3}$$



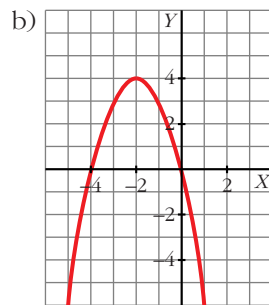
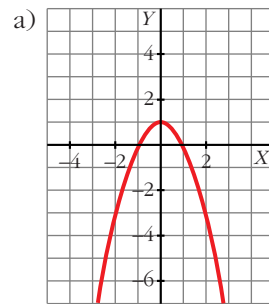
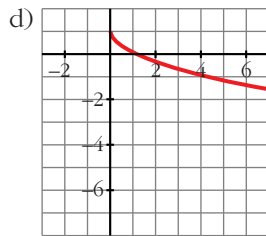
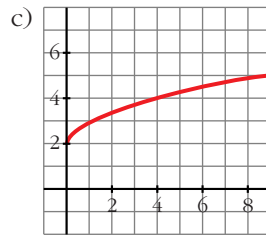
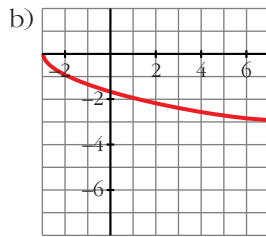
39. Representa les funcions següents:

$$a) y = \sqrt{x-1} \quad b) y = -\sqrt{x+3}$$

$$c) y = 2 + \sqrt{x} \quad d) y = 1 - \sqrt{x}$$



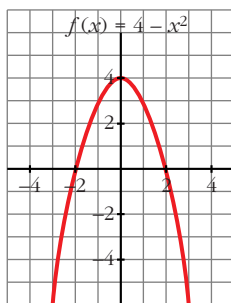
FUNCIONS ELEMENTALS



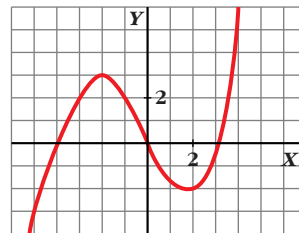
Transformacions en una funció

40. Representa  $f(x) = 4 - x^2$  i, a partir d'aquesta, representa:

- a)  $g(x) = f(x) - 3$
- b)  $h(x) = f(x + 2)$

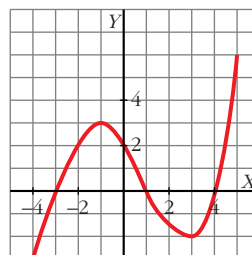


41. Aquesta és la gràfica de la funció  $y = f(x)$ :



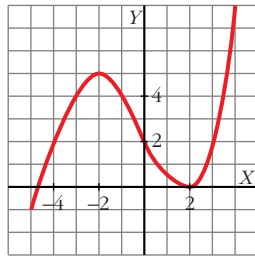
Representa, a partir d'aquesta, les funcions:

- a)  $y = f(x - 1)$
- b)  $y = f(x) + 2$



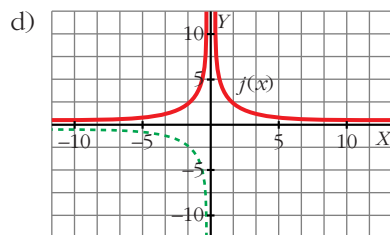
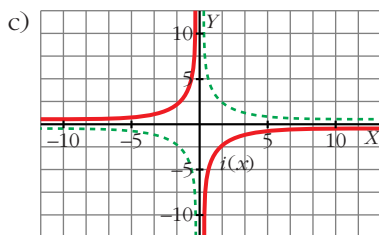
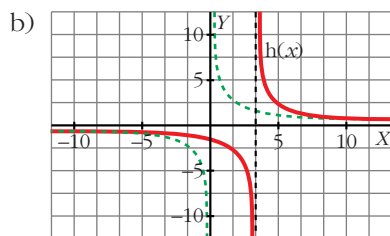
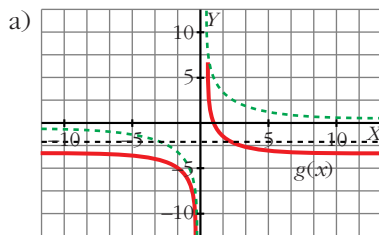
## FUNCIONS ELEMENTALS

b)



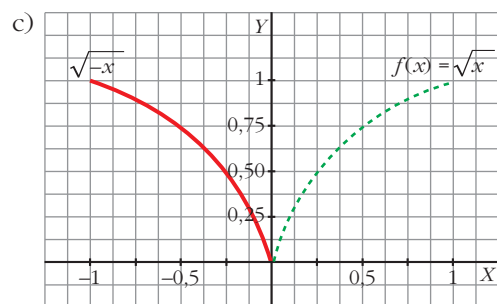
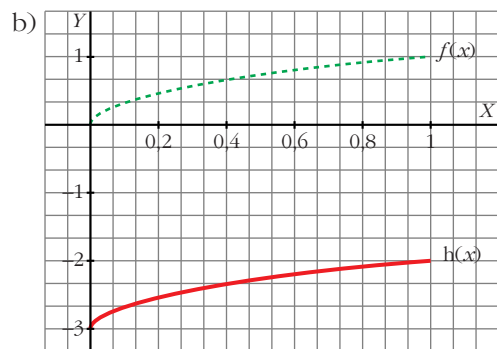
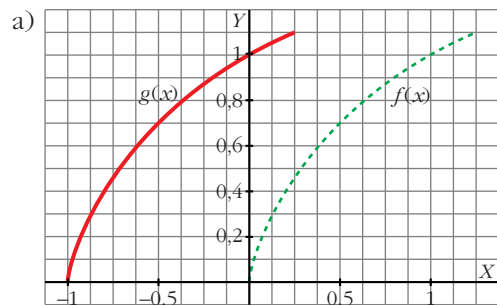
42. A partir de la gràfica de  $f(x) = 1/x$ , representa:

- a)  $g(x) = f(x) - 2$   
 b)  $h(x) = f(x - 3)$   
 c)  $i(x) = -f(x)$   
 d)  $j(x) = |f(x)|$



43. Representa la funció  $f(x) = \sqrt{x}$  i dibuixa a partir d'aquesta:

- a)  $g(x) = \sqrt{x+1}$   
 b)  $h(x) = \sqrt{x} - 3$   
 c)  $y = \sqrt{-x}$

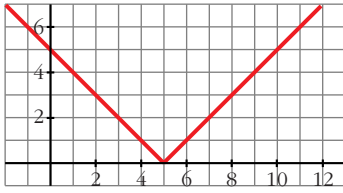


## Valor absolut d'una funció

44. Representa la funció  $y = |x - 5|$  i comprova que la seva expressió analítica en intervals és:

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

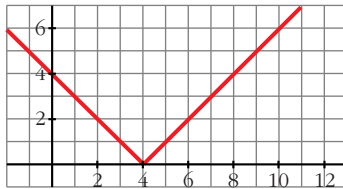
## FUNCIONS ELEMENTALS



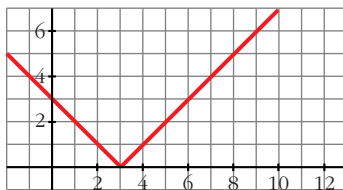
45. Representa les funcions següents i defineix-les per intervals:

a)  $y = |4 - x|$     b)  $y = |x - 3|$

a)  $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



b)  $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



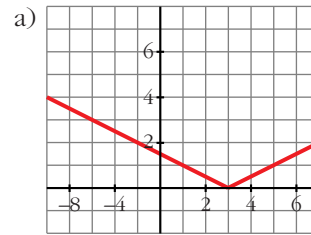
46. Representa i defineix com a funcions «a trossos»:

a)  $y = \left| \frac{x-3}{2} \right|$     b)  $y = |3x + 6|$

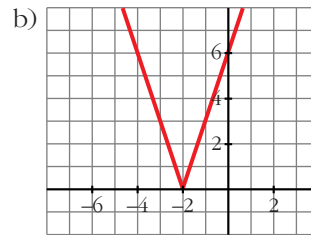
c)  $y = \left| \frac{2x-1}{3} \right|$     d)  $y = |-x - 1|$

Revisa en Exercicis i problemes resolts el núm. 9.

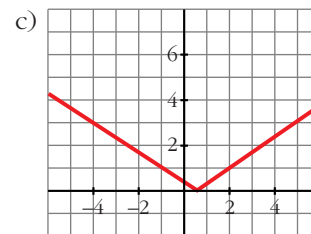
a)  $y = \begin{cases} -\frac{x+3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \frac{x+3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



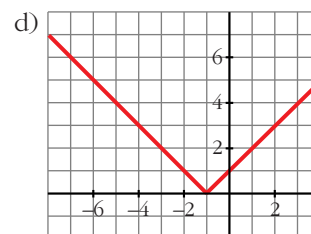
b)  $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



c)  $y = \begin{cases} \frac{-2x+3}{3} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{3} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$



d)  $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$





## FUNCIONS ELEMENTALS

Per resoldre

47. La factura de l'energia elèctrica d'una família, el mes de novembre, ha estat de 95 € per 375 kWh de consum i, el mes de gener, de 130,4 euros per 552kWh. Quant pagaran si consumeixen 420kWh? Si consumeixen 420 kWh pagaran 104 €.

48. Les vendes obtingudes per una empresa han estat de 28 000 € amb unes despeses en publicitat de 3 000 € i de 39 000 € amb unes despeses publicitàries de 5 000. Estima quines seran les vendes si inverteix en publicitat 4 000 €. Si inverteixen 4 000 € en publicitat, les vendes seran de 33 500 €.

49. El preu del bitllet d'un tren de rodalia depèn dels quilòmetres recorreguts. Per 57 km hem pagat 2,85 euros, i per 168 km, 13,4 euros. Calcula el preu d'un bitllet per a una distància de 100 km.

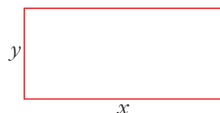
$$y = 2,85 + 0,095(x - 57)$$

$$y(100) = 6,94 \text{ euros.}$$

50. Un rectangle té 20 cm de perímetre. Escriu la funció que dona l'àrea d'aquest rectangle segons la seva base  $x$ . Quin és el domini d'aquesta funció?

$$2x + 2y = 20; A = x \cdot y$$

$$A(x) = 10x - x^2; D = (0, 10)$$



Pàgina 110

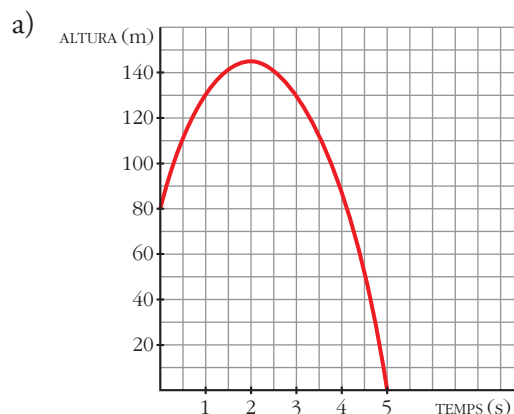
51. Les despeses fixes mensuals d'una empresa per la fabricació de  $x$  televisors són

$G = 2000 + 25x$ , en milers d'euros, i els ingressos mensuals són  $I = 60x - 0,01x^2$ , també en milers d'euros. Quants televisors han de fabricar-se perquè el benefici (ingressos menys despeses) sigui el màxim?  $B(x) = I(x) - G(x) = 60x - 0,01x^2 - (2000 + 25x) = -0,01x^2 + 35x - 2000$ . Arriba al màxim en el vèrtex de la paràbola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-35}{-0,02} = 1750$$

S'han de fabricar 1 750 televisors.

52. Una pilota és llançada verticalment cap amunt des de la part de dalt d'un edifici. L'altura que assoleix la pilota ve donada per aquesta fórmula:  $h = 80 + 64t - 16t^2$  ( $t$  en segons i  $h$  en metres).  
 a) Dibuixa la gràfica en l'interval  $[0, 5]$ .  
 b) Troba l'altura de l'edifici.  
 c) En quin instant assoleix la màxima altura?



- b) 80 metres.  
 c) 2 segons.

53. El preu de venda d'un article ve donat per l'expressió  $p = 12 - 0,01x$  ( $x$  = nombre d'articles fabricats;  $p$  = preu, en cents d'euros).

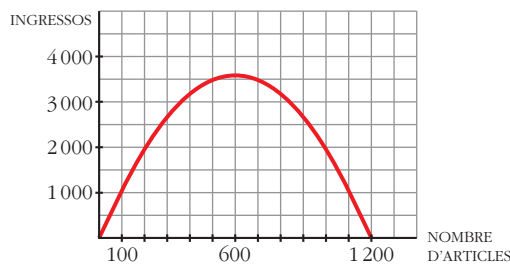
## FUNCIONS ELEMENTALS

- a) Si es fabriquen i es venen 500 articles, quins seran els ingressos obtinguts?  
 b) Representa la funció *Nombre d'articles ingressos obtinguts*.  
 c) Quants articles s'han de fabricar perquè els ingressos siguin màxims?

a) Si es venen 500 articles, s'ingressen 3500 centenars d'euros = 350 000 euros.

$$I(x) = 12x - 0,01x^2$$

b)



c) S'han de fabricar 600 articles per obtenir els ingressos màxims (360 000 euros).

**54. Un fabricant ven mensualment 100 electrodomèstics a 400 euros cada un i sap que per cada 10 euros de puja vendrà 2 electrodomèstics menys.**

- a) Quins seran els ingressos si apuja els preus 50 euros?  
 b) Escriu la funció que relaciona l'increment del preu amb els ingressos mensuals.  
 c) Quina ha de ser la puja perquè els ingressos siguin màxims?

a) En aquest cas vendria 90 electrodomèstics a 450 euros cadascun; per tant els ingressos serien de  $450 \cdot 90 = 40\,500$  euros.

b)  $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$  ( $x$  = desenes d'euros)

c) S'arriba al màxim en el vèrtex de la paràbola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 50 \text{ euros}$$

**55. El cost de producció de  $x$  unitats d'un producte és igual a  $(1/4)x^2 + 35x + 25$  euros i el preu de venda de la unitat és de  $50 - x/4$  euros.**

a) Escriu la funció que ens dóna el benefici total si es venen les  $x$  unitats produïdes.

b) Troba el nombre d'unitats que s'han de vendre perquè el benefici sigui màxim.

*Els ingressos per la venda de  $x$  unitats són  $x(50 - x/4)$  euros.*

$$\begin{aligned} \text{a) } B(x) &= 50x - \frac{x^2}{4} - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = \\ &= -\frac{x^2}{2} + 15x - 25 \end{aligned}$$

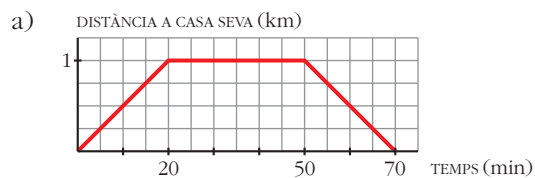
b) S'arriba al màxim en el vèrtex de la paràbola:

$$x = \frac{-15}{-1} = 15$$

S'han de vendre 15 unitats.

**56. L'Helena va a visitar la seva amiga Anna i tarda 20 minuts a arribar a casa seva, que es troba a 1 km de distància. S'hi queda mitja hora i en el camí de tornada empra el mateix temps que en el d'anada.**

- a) Representa la funció *temps-distància*.  
 b) Busca'n l'expressió analítica.



$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (1/20)x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 1 & \text{si } 20 < x \leq 50 \\ -1/20(x - 70) & \text{si } 50 < x \leq 70 \end{cases}$$

## FUNCIONS ELEMENTALS

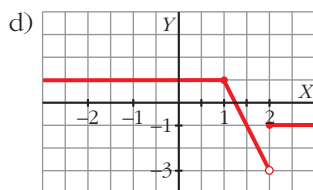
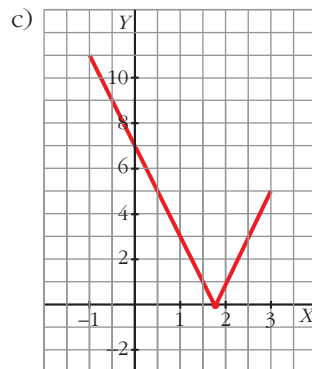
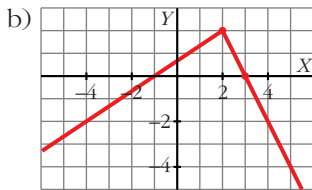
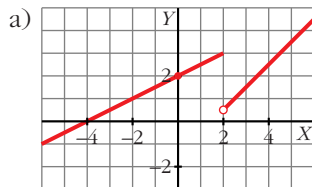
57. Representa:

$$a) y = \begin{cases} x/2 + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 3/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} (2x + 2)/3 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$c) y = \begin{cases} -4x + 7 & \text{si } x < 1,75 \\ 4x - 7 & \text{si } x \geq 1,75 \end{cases}$$

$$d) y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -4x + 5 & \text{si } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



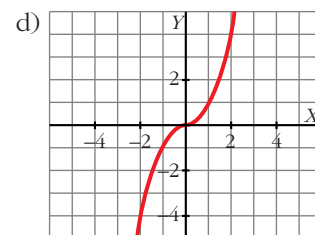
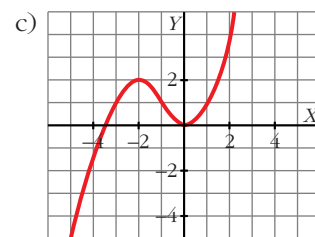
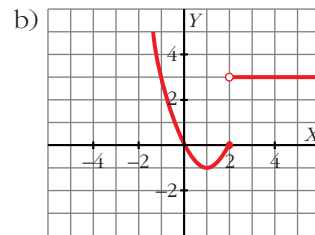
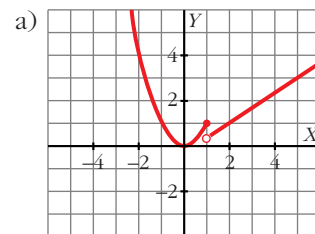
58. Dibuixa les gràfiques de les funcions següents:

$$a) y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (2x - 1)/3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$d) y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

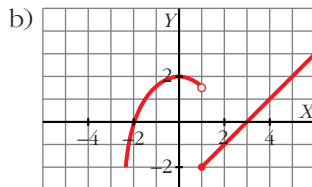
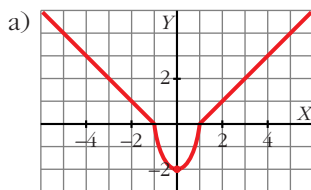


## FUNCIONS ELEMENTALS

59. Representa:

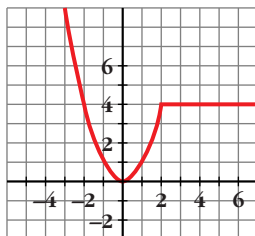
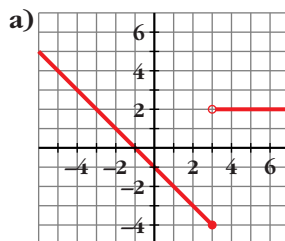
$$a) y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} -x^2/2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Pàgina 111

60. Busca l'expressió analítica d'aquestes funcions:



$$a) f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

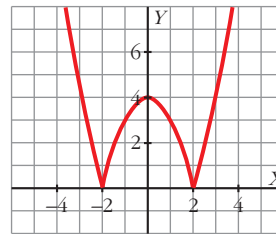
$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

61. Representa i defineix com a funcions «a trossos»:

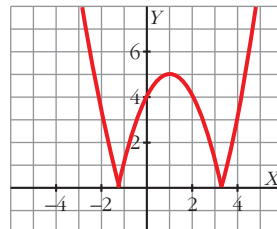
$$a) y = |x^2 - 4| \quad b) y = |x^2 - 2x - 4|$$

$$c) y = \left| -\frac{x^2}{2} + 2 \right| \quad d) y = |x^2 + 2x - 2|$$

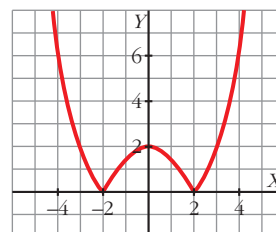
$$a) y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$$b) y = \begin{cases} x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < -1,2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } -1,2 \leq x \leq 3,2 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x > 3,2 \end{cases}$$

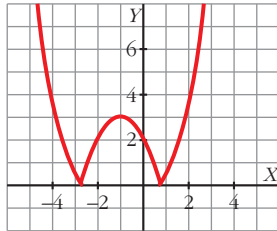


$$c) y = \begin{cases} (x^2/2) - 2 & \text{si } x < -2 \\ (-x^2/2) + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ (x^2/2) - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



## FUNCIONS ELEMENTALS

$$d) y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < -2,7 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si } -2,7 \leq x \leq 0,7 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 0,7 \end{cases}$$



62. Utilitzant servir la relació  $\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}}$

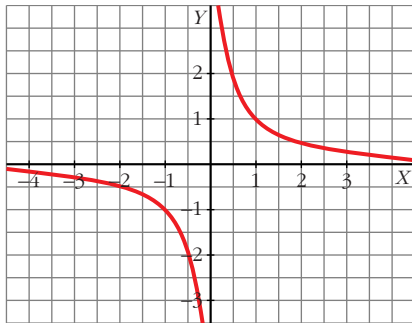
=  $\text{quocient} + \frac{\text{residu}}{\text{divisor}}$  podem escriure la

funció  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ ; d'aquesta manera:

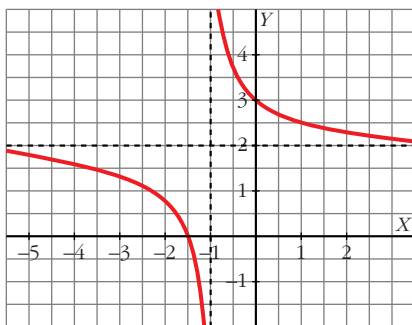
$$y = 2 + \frac{1}{x+1}$$

Comprova que la seva gràfica coincideix amb la de  $y = 1/x$  traslladada 1 unitat cap a l'esquerra i 2 cap a dalt.

$$y = \frac{1}{x}$$



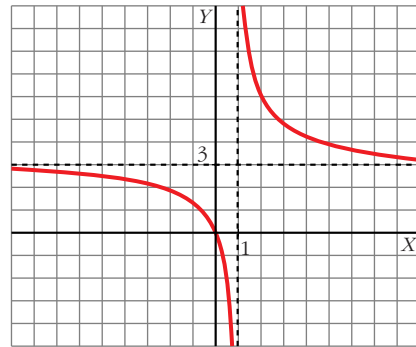
$$y = 2 + \frac{1}{x+1}$$



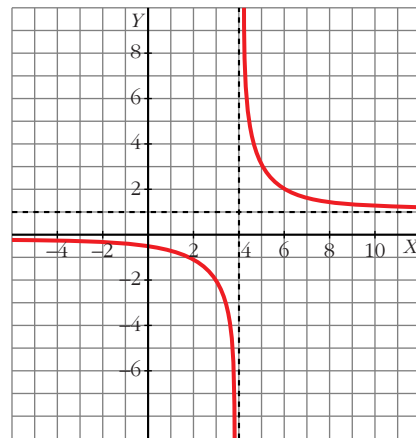
63. Representa les funcions  $y = \frac{3x}{x-1}$ ,

$y = \frac{x-2}{x-4}$  utilitzant el procediment del problema anterior.

$$y = \frac{3x}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$$



$$y = \frac{x-2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$$



### Qüestions teòriques

64. Una paràbola talla l'eix d'abscisses en  $x = -1$  i en  $x = 3$ . L'ordenada del vèrtex és  $y = -4$ . Quina és l'equació d'aquesta paràbola?

$$f(x) = k(x+1)(x-3) = k(x^2 - 2x - 3)$$

$$\begin{aligned} \text{Vèrtex} &\rightarrow x = \frac{3+(-1)}{2} = 1; f(1) = -4k = \\ &= -4 \Rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

## FUNCIONS ELEMENTALS

L'equació de la paràbola serà, per tant:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

**65.** Quina és l'equació de la recta que passa pels punts  $A(0, n)$  i  $B(1, n + m)$ ?

$$y = mx + n$$

**66.** Troba els valors de  $c$  perquè la funció  $y = -x^2 + 12x + c$  tingui amb l'eix d'abscisses:

- dos punts de tall;
- un punt de tall;
- cap punt de tall.

$$b^2 - 4ac = 144 + 4c$$

- $144 + 4c > 0 \Rightarrow c > -36$
- $144 + 4c = 0 \Rightarrow c = -36$
- $144 + 4c < 0 \Rightarrow c < -36$

## Per aprofundir

**67.** Troba el domini de definició de les funcions:

a)  $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ ; b)  $y = \sqrt{\frac{x-9}{x}}$

*Troba els valors que anul·len el numerador i el denominador i estudia el signe del quocient.*

$$a) \frac{x+3}{x-2} \geq 0 \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{array} \right\} x > 2 \\ \left. \begin{array}{l} x+3 \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \right\} x \leq -3 \end{cases}$$

$$\text{Domini} = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$$

$$b) \frac{x-9}{x} \geq 0 \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x-9 \geq 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} x \geq 9 \\ \left. \begin{array}{l} x-9 \leq 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} x < 0 \end{cases}$$

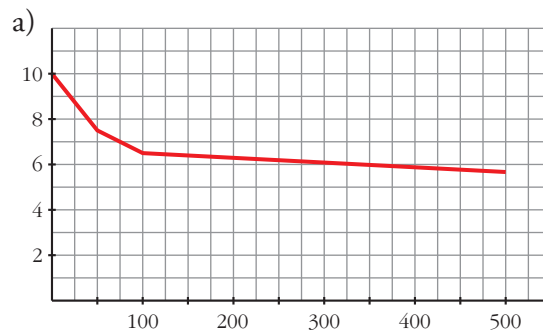
$$\text{Domini} = (-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$$

**68.** El preu del metre quadrat d'un material plàstic per a sòl depèn de la quantitat que en comprem,  $x$ , i ve donat per la funció  $f(x)$  definida així:

$$f(x) = \begin{cases} 10 - 0,05x \\ 7,5 - 0,02(x - 50) \\ 6,5 - 0,002(x - 100) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ \text{si } 50 < x < 100 \\ \text{si } 100 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

- Representa gràficament aquesta funció.
- Quin en serà el preu si en comprem 300 m<sup>2</sup>?
- Per aconseguir un preu inferior a 7 €/m<sup>2</sup>, quants metres quadrats, com a mínim, he de comprar-ne?



És contínua en el seu domini.

b)  $f(300) = 6,1$

A 6,1 €/m<sup>2</sup>, ens costarà  $6,1 \cdot 300 = 1830$  €

c)  $7,5 - 0,02(x - 50) = 7 \Rightarrow x = 75$

Com a mínim, 75 m<sup>2</sup>.

**69.** Les tarifes d'una empresa de transports són:

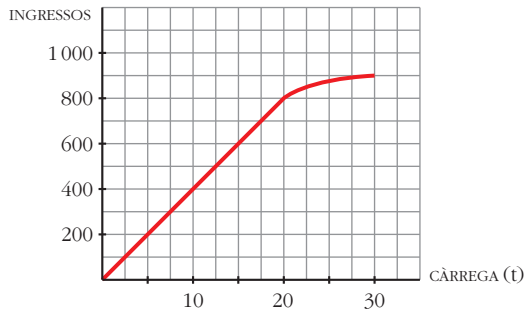
- 40 euros per tona de càrrega si aquesta és menor o igual a 20 t.
- Si la càrrega és més gran que 20 t, es restarà, dels 40 euros, tants euros com tones sobrepassin les 20.

a) Dibuixa la funció «ingressos de l'empresa segons la càrrega que transporti» (càrrega màxima: 30 t).

## FUNCIONS ELEMENTALS

b) Obtén-ne l'expressió analítica i representa-la.

a)

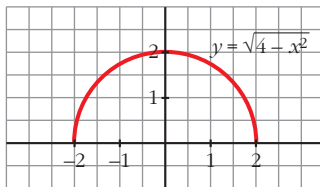


$$b) f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ [40 - (x - 20)]x & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

$$\text{És a dir: } f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

70. La gràfica de  $y = \sqrt{4 - x^2}$  és una semicircumferència amb centre en l'origen i radi 2. Comprova-ho. Quin n'és el domini? Quina serà la funció que representa l'altra semicircumferència?

Fes una taula de valors i representa-la.



$$\text{Domini} = [-2, 2]$$

La funció que representa l'altra semicircumferència és  $y = -\sqrt{4 - x^2}$ .

Per pensar una mica més

71. D'una funció polinòmica de segon grau,  $y = p(x)$ , sabem que té un màxim en el punt d'abscissa  $x_0 = 1$  i que  $p(2) = 4$ .

a) Quant val  $p(0)$ ?

b) Tenim dades suficients per representar-la? Escriu l'equació d'una paràbola que compleixi aquestes condicions i representa-la.

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Màxim en el punt d'abscissa  $x_0 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

$$p(2) = 4 \Rightarrow 4 = 4a + 2b + c$$

$$4 = 4a + 2(-2a) + c$$

$$4 = 4a - 4a + c$$

$$c = 4$$

$$a) p(0) = c = 4$$

b) No tenim prou dades; només sabem que:

$$p(x) = ax^2 - 2ax + 4; a < 0$$

Un exemple podria ser  $p(x) = -x^2 + 2x + 4$

