

UNITAT DIDÀCTICA 3

ÀLGEBRA

Pàgina 56

Reflexiona i resol

Un grapat d'ametlles

Tres amics, l'Antoni, en Joan i en Pau, van anar amb els seus fills, en Juli, en Josep i en Lluís, a un magatzem de fruita seca. Davant un sac d'ametlles, l'amo els va dir:

–Preneu les que vulgueu.

Cada un dels sis va ficar la mà dins el sac un nombre n de vegades i, cada vegada, es va emportar n ametlles (és a dir, si un d'ells va ficar la mà dins el sac 9 vegades, cada vegada va prendre 9 ametlles i, per tant, es va endur 81 ametlles). A més, cada pare va prendre, en total, 45 ametlles més que el seu fill.

L'Antoni va ficar la mà 7 vegades més que en Lluís, i en Juli, 15 vegades més que en Pau.

- *Com es diu el fill de l'Antoni?*
- *I el d'en Joan?*
- *Quantes ametlles es van emportar entre tots?*

Les claus per resoldre aquest problema són:

a) Cada persona s'emporta un nombre d'ametlles que és quadrat perfecte:

x grapats $\rightarrow x^2$ ametlles

y grapats $\rightarrow y^2$ ametlles

b) La diferència d'ametlles que prenen cada pare i el seu fill és de 45.

$x^2 - y^2 = 45 \rightarrow (x + y)(x - y) = 45$

(Recorda: *suma per diferència* és igual a *diferència de quadrats*.)

Tenim, per tant, el producte de dos nom-

bres naturals igual a 45. Això solament passa en els casos següents:

9×5 ; 15×3 ; 45×1

- 1r cas: 9×5

$(x + y)(x - y) = 45$

$x + y = 9$ } Sumant: $2x = 14 \rightarrow x = 7$

$x - y = 5$ } Restant: $2y = 4 \rightarrow y = 2$

Solució: $x = 7$, $y = 2$

Interpreta aquesta solució, estudia els altres casos i resol, finalment, el problema complet.

- 2n cas: 15×3

$(x + y)(x - y) = 45$

$x + y = 15$ } Sumant: $2x = 18 \rightarrow x = 9$

$x - y = 3$ } Restant: $2y = 12 \rightarrow y = 6$

Això vol dir que un altre pare va agafar 9 grapats de 9 ametlles (81 ametlles), i el seu fill 6 grapats de 6 ametlles (36 ametlles).

- 3r cas: 45×1

$(x + y)(x - y) = 45$

$x + y = 45$ } Sumant: $2x = 46 \rightarrow x = 23$

$x - y = 1$ } Restant: $2y = 44 \rightarrow y = 22$

Un dels pares es va endur 23 grapats de 23 ametlles (529 ametlles), i el seu fill 22 grapats de 22 ametlles (484 ametlles).

Com que l'Antoni va ficar la mà 7 vegades més que en Lluís, l'Antoni en va agafar 9 grapats i en Lluís 2.

Com que en Juli va ficar la mà 15 vegades més que en Pau, en Juli en va agafar 22 grapats i en Pau 7.

Per tant:

- L'Antoni se n'emporta 9 grapats i en Josep 6.
- En Joan n'agafa 23 grapats i en Juli 22.
- En Pau se n'emporta 7 grapats i en Lluís 2.
- El fill de l'Antoni és en Josep, el d'en Joan és en Juli i el d'en Pau és en Lluís.

ÀLGEBRA

Finalment, el nombre total d'ametlles que es van emportar entre tots serà:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1183 \text{ ametlles.}$$

Pàgina 57

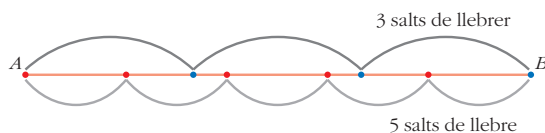
El gos llebrer i la llebre

Un gos llebrer persegueix una llebre.

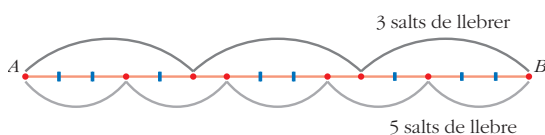
La llebre porta 30 salts dels seus d'avantatge al llebrer. Mentre el llebrer fa dos salts, la llebre en fa tres. Tres salts del llebrer equivalen a cinc de la llebre. Quants salts farà cada un fins al moment de la captura?

Aquest problema sembla difícil. Tanmateix, si realitzem una bona representació i elegim adequadament la unitat, pot ser molt senzill. Vegem-ho.

Se'ns diu que tres salts de llebrer coincideixen amb cinc salts de llebre. Ho representem:



Sembla raonable prendre com a unitat de longitud, u , la quinzena part del segment AB .



Resol el problema raonant sobre aquesta gràfica:

- 1 salt de llebrer = $5u$
- 1 salt de llebre = $3u$

«Mentre el llebrer fa dos salts, la llebre en fa tres» vol dir:

- llebrer $\rightarrow 2 \cdot 5u = 10u$
- llebre $\rightarrow 3 \cdot 3u = 9u$

El llebrer avança $1u$ més que la llebre.

«La llebre porta 30 salts dels seus al llebrer»: $30 \cdot 3u = 90u$

Prosegueix d'aquesta manera fins a acabar el problema.

Cada 2 salts del llebrer i 3 de la llebre s'apropa $1u$ el llebrer.

Cada $2 \cdot 2$ salts del llebrer i $3 \cdot 2$ de la llebre s'apropa $2u$ el llebrer.

Cada $2 \cdot 3$ salts del llebrer i $3 \cdot 3$ de la llebre s'apropa $3u$ el llebrer.

... ..

Cada $2 \cdot 90$ salts del llebrer i $3 \cdot 90$ de la llebre s'apropa $90u$ el llebrer.

Com que la llebre porta 30 dels seus salts al llebrer ($90u$ d'avantatge), seran:

$$2 \cdot 90 = 180 \text{ salts el llebrer}$$

$$3 \cdot 90 = 270 \text{ salts la llebre}$$

D'aquesta manera el llebrer recorre $180 \cdot 5u = 900u$; i la llebre $270 \cdot 3u = 810u$.

Com que tenia 90 salts d'avantatge: $810 + 90 = 900u$

Per tant, fins al moment de la captura, el llebrer farà 180 salts i la llebre, 270 .

Pàgina 58

1. Efectua la divisió de $P(x) = x^5 - 6x^3 - 25x$ entre $Q(x) = x^2 + 3x$.

$$P(x) : Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9; \text{ residu: } 2x.$$

2. Calcula el quocient i el residu:

$$(6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5) : (3x^2 - 3x - 1)$$

ÀLGEBRA

Quocient: $6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5$:
 $3x^2 - 3x - 1 = 2x^3 + 5x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{22}{3}$

Residu: $\frac{52}{3}x + \frac{37}{3}$

3. Completa:

$$\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 3x + \square \mid \frac{x^3 - 2x^2 + \square x + \square}{2x + \square}$$

$$\frac{\square x^4 + \square x^3 - 2x^2 + 6x}{3x^3 - x^2 + \square x + \square}$$

$$\frac{\square x^3 + \square x^2 + \square x + \square}{\square x^2 + \square x + 2}$$

$2x^4 - 1x^3 + x^2 - 3x - 7 : x^3 - 2x^2 + x - 3 = 2x + 3$

residu: $+5x^2 + 0x + 2$

Pàgina 59

4. En una divisió de polinomis, el dividend és de grau cinc i el divisor, de grau dos. Quin és el grau del quocient? Què pots dir del grau del residu?

Quocient = grau 3, ja que $x^5 : x^2 = x^3$

Residu = serà de grau 1 com a màxim.

5. a) Quant han de valer a i b perquè la divisió següent sigui exacta?

$$(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 1)$$

$$a = -10; b = 2$$

b) Quant han de valer a i b perquè el residu de la divisió sigui $3x - 7$?

$$a = -7; b = -5$$

6. Expressa el resultat de les divisions següents en la forma $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$:

a) $\frac{x+9}{x+6}$; b) $\frac{x+6}{x+9}$; c) $\frac{2x+3}{2x}$

d) $\frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+2}$; e) $\frac{3x^2-4}{x+1}$

f) $\frac{x^3-x^2+2x+1}{x^2+5x-2}$; g) $\frac{x^4+3x^2+2x+3}{x^2+4x-1}$

h) $\frac{3x^3+4x^2-5x+2}{x+2}$

a) $1 + \frac{3}{x+6}$; b) $1 - \frac{3}{x+9}$; c) $1 + \frac{3}{2x}$;

d) $1 + \frac{3}{x^2+2x+2}$; e) $3x - 3 + \frac{-1}{x+1}$;

f) $x - 6 + \frac{34x-11}{x^2+5x-2}$;

g) $x^2 - 4x + 20 + \frac{-82x+23}{x^2+4x-1}$;

h) $3x^2 - 2x - 1 + \frac{4}{x+2}$

Pàgina 60

7. Aplica la regla de Ruffini per calcular el quocient i el residu de les divisions de polinomis següents:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

d) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

a) Residu = -2

Quocient = $x^2 - 4x + 6$

b) Residu = 1

Quocient = $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

c) Residu = 1

Quocient = $2x^2 + 6x + 3$

d) Residu = 3

Quocient = $x^3 - x^2 + 2x - 2$

ÀLGEBRA

8. Calcula el quocient i el residu de les divisions següents aplicant-hi la regla de Ruffini:

- a) $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) : (x - 2)$
 b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$
 c) $(4x^3 + 4x^2 - 5x + 3) : (x + 1)$
 d) $2,5x^3 + 1,5x^2 - 3,5x - 4,5) : (x - 1)$
 a) Residu = 27
 Quocient = $2x^3 + 5x^2 + 10x - 15$
 b) Residu = 0
 Quocient = $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$
 c) Residu = 8
 Quocient = $4x^2 - 5$
 d) Residu = -4
 Quocient = $2,5x^2 + 4x + 0,5$

Pàgina 62

9. Descompon en factors aquest polinomi: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$.

$$(x^2 + 3) \cdot (x - 2)^2$$

10. Factoritza el polinomi següent:

$$\begin{aligned} &x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50 \\ &x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50 = \\ &= (x - 5) \cdot (x - 1) (x + 2) (x + 5) \end{aligned}$$

Pàgina 63

11. Observa i descompon en factors el polinomi $x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$:

	1	-8	11	32	-60
2		2	-12	-2	60
	1	-6	-1	30	0
-2		-2	16	-30	
	1	-8	15		0
3		3	-15		
	1	-5		0	

$$(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) \cdot (x + 2)$$

12. Raona per què $x - 1$, $x + 1$, $x + 5$, $x - 5$ són, en principi, possibles divisors del polinomi $x^3 - x^2 - 25x + 25$.

- a) Raona per què $x - 3$ no ho pot ser.
 b) Descompon en factors aquest polinomi.

Perquè 1, -1, 5, -5 són divisors de 25.

- a) Perquè 3 no és divisor de 25.
 b) $(x - 1) \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)$

13. Factoritza aquests polinomis:

- a) $x^3 + x^2 - 32x - 60$
 b) $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$
 c) $x^4 - 10x^2 + 9$
 d) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
 e) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$
 f) $x^4 + 5x^2 - 36$
 a) $(x + 5) \cdot (x - 6) \cdot (x + 2)$
 b) $(x + 2) \cdot (x + 3)^2$
 c) $(x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$
 d) $(x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 1)$
 e) $x \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 1)$
 f) $(x - 2) (x + 2)(x^2 + 9)$

14. Calcula les arrels en cada cas:

- a) $x^2 - 6x + 9$ b) $x^2 + 3x$
 c) $2x^2 - 3x$ d) $x^3 - 4x$
 a) $x = 3$ b) $x = -3; x = 0$
 c) $x = 0; x = \frac{3}{2}$ d) $x = 0; x = +2; x = -2$

15. Quant ha de valer k en cada cas perquè la divisió sigui exacta?

- a) $(x^3 + 5x^2 - 20x + k) : (x - 3)$
 b) $(2x^2 + kx + 1) : (x - 1)$
 a) $k = -12$; b) $k = -3$

ÀLGEBRA

Pàgina 64

Llenguatge matemàtic

1. De les següents igualtats, quines són identitats?

a) $(x - 3)(x - 2)x = x^3 - 5x^2 + 6x$

b) $(x - 3)(x - 2)x = x^3$

c) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

d) $\frac{x^3 - 3x - 5}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{x - 2}$

Comprova que la igualtat és certa per a qualssevol valors de les variables (fes la comprovació per a diversos nombres).

- a) És identitat.
 b) No ho és.
 c) És identitat.
 d) És identitat.

2. Resol, pas a pas, l'equació

$$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$$

i explica en cada pas per què l'equació que s'obté és equivalent a la que hi havia.

Quan el pas consisteixi a obtenir una expressió idèntica a una altra, assenyala quina és l'expressió transformada, quina és l'obtinguda i quina operació permet passar de l'una a l'altra.

Hi ha moltes maneres de solucionar-ho, per exemple: $x = \pm 2$

Pàgina 65

16. Resol les equacions següents:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

a) $x = 2, x = -2, x = \sqrt{-3}$ (no té solució real)

b) $x = 3, x = -3, x = \sqrt{-1}$ (no té solució real)

17. Resol:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) No té solucions reals.

b) $x = \pm\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{-1}$ (no té solució real)

Pàgina 66

18. Resol:

a) $-\sqrt{2x - 3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

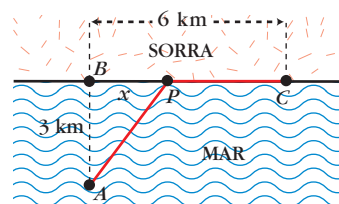
d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x + 3} - 1 = \sqrt{8 - 2x}$

- a) No té solució.
 b) $x = 114; x = 2$, però $x = 2$ no és una solució vàlida.
 c) $x = 4; x = 1$, però $x = 1$ no és una solució vàlida.
 d) $x = 4; x = 1$, però $x = 4$ no és una solució vàlida.
 e) $x = 2; x = 0,008$, però $x = 0,008$ no és una solució vàlida.

19. Per anar des d'A fins a C hem navegat a 4 km/h en línia recta fins a P, i hem caminat a 5 km/h de P a C. Hem tardat, en total, 99 minuts (99/60 hores).

Quina és la distància, x , de B a P?



ÀLGEBRA

Per Pitàgores $\overline{AP} = \sqrt{9+x^2}$, i aleshores:

$$\frac{\sqrt{9+x^2}}{4} + \frac{(6-x)}{5} = \frac{99}{60}$$

$$x = 4 \text{ km}$$

Pàgina 67

20. Resol les equacions següents:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

a) $x = \frac{11 \pm \sqrt{481}}{6}$

b) $x = 3; x = 0,8$

c) $x = 2; x = -\frac{2}{3}$

21. Resol:

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

b) $\frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$

a) $x = 3$

b) $x = 3; x = -4$

c) $x = 6; x = \frac{-8}{13}$

Pàgina 69

22. Resol les equacions següents:

a) $2^{3x} = 0,5^{3x+2}$

b) $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$

d) $7^{x+2} = 5764801$

a) $x = -\frac{1}{3}$

b) $x = \pm\sqrt{6}$

c) $x = 11,54$

d) $x = 6$

23. Resol:

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

c) $2\log x - \log(x+6) = 3\log 2$

d) $4\log_2(x^2+1) = \log_2 625$

a) $x = 1$

b) $x = 0$

c) $x = 12$

d) $x = \pm 2$

Pàgina 71

24. Resol aquests sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

a) $(x = -2; y = -5), (x = 4, y = 7)$

b) $(x = 3, y = 2), (x = 2, y = 3)$

c) $x = 17, y = 8$

25. Resol:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

ÀLGEBRA

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$$

$$\text{a) } (x = 5, y = -4), (x = -4, y = 5)$$

$$\text{b) } x = 30, y = 3$$

$$\text{c) } x = -\frac{7}{2}, y = -\frac{9}{4} \quad (x = 3, y = 1)$$

Pàgina 72

26. Resol aquestes inequacions:

$$\text{a) } 3x + 2 \leq 10$$

$$\text{b) } x - 5 > 1$$

$$\text{a) } x \leq 8/3$$

$$\text{b) } x > 6$$

27. Resol:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2 \leq 10 \\ x - 5 > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x \leq 8 \rightarrow x \leq 8/3 \\ x > 6 \end{array} \right\} \text{No té solució}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x \geq 11 \rightarrow x \geq 11/2 \\ 3x \leq 14 \rightarrow x \leq 14/3 \end{array} \right\} \text{No té solució}$$

Pàgina 73

28. Resol les inequacions següents:

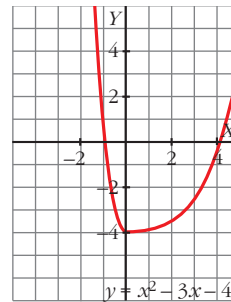
$$\text{a) } x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$\text{b) } x^2 - 3x - 4 \geq 0$$

$$\text{c) } x^2 + 7 < 0$$

$$\text{d) } x^2 - 4 \leq 0$$

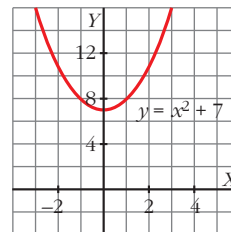
a)



$$x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow \text{interval } (-1, 4)$$

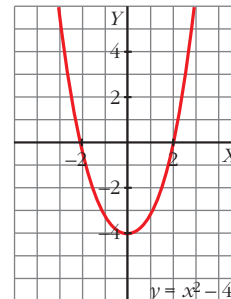
$$\text{b) } x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$$

c)



$$x^2 + 7 < 0 \rightarrow \text{No té solució}$$

d)



$$x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow \text{interval } [-2, +2]$$

29. Resol els sistemes d'inequacions següents:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } (6, \infty)$$

$$\text{b) } \{\emptyset\}$$

ÀLGEBRA

Pàgina 78

Divisió de polinomis. Regla de Ruffini

30. Calcula el quocient i el residu de cadascuna de les divisions següents:

a) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(3x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(3x^4 - x^2 - 1) : (3x^2 - 3x - 4)$

a) $Q = x^2 + 2x - 3; R = 0$

b) $Q = 3x - 5; R = -8 + 10x$

c) $Q = x^2 + x + 2; R = 10x + 7$

31. Troba el quocient i el residu en cada cas:

a) $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$

b) $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$

c) $(x^4 - 81) : (x + 3)$

a) Quocient = $x^3 + 5$

Residu = 9

b) $Q = x^3 - 2x^2 + 5x - 30$

R = 60

c) $Q = x^3 - 3x^2 + 9x - 27$

R = 0

32. Aplica la regla de Ruffini per calcular $P(-2)$ i $P(5)$, essent

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7.$

$P(-2) = -13$

$P(5) = 568$

33. Utilitza la regla de Ruffini per esbrinar si el polinomi $x^4 - 3x^2 - 4$ és divisible per cada un dels monomis següents:

a) $x + 1$

b) $x - 1$

c) $x + 2$

d) $x - 2$

a) No és divisible.

b) No és divisible.

c) Sí és divisible.

d) Sí és divisible.

Factorització de polinomis

34. Descompon en factors els polinomis següents:

a) $x^2 - x - 6$

b) $x^2 + 5x - 14$

c) $2x^2 - 8x - 10$

d) $4x^2 - 9$

a) $(x + 2) \cdot (x - 3)$

b) $(x - 2) \cdot (x + 7)$

c) $2(x + 1)(x - 5)$

d) $(2x - 3)(2x + 3)$

35. Descompon en factors els polinomis següents i digues quines són les seves arrels:

a) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

b) $x^4 + x^2 - 20$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

d) $x^4 - 81$

a) $(x - 1)(x^2 + 9)$

Arrels: 1, $\pm 3i$

b) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 5)$

Arrels: 2, -2, $\pm\sqrt{5}i$

c) $(x + 1)(x^2 - 5)$

Arrels: -1, $\pm\sqrt{5}$

d) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

Arrels: 3, -3, $\pm 3i$

36. Treu factor comú i utilitza'n els productes notables per factoritzar els polinomis següents:

a) $x^3 - x$

b) $4x^4 - 16x^2$

c) $x^3 + 2x^2 + x$

d) $3x^2 + 30x + 75$

e) $5x^3 - 45x$

f) $2x^3 - 8x^2 + 8x$

a) $x(x - 1)(x + 1)$

ÀLGEBRA

- b) $4x^2(x-2)(x+2)$
 c) $x(x+1)^2$
 d) $3(x+5)^2$
 e) $5x(x-3)(x+3)$
 f) $2x(x-2)^2$

37. Descompon en factors i simplifica les fraccions següents:

- a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$
 c) $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ d) $\frac{x^2+x-6}{x-2}$
 a) $\frac{1}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x+2}$
 c) $\frac{x}{x+1}$ d) $x+3$

38. Resol les equacions següents, factoritzant-les prèviament:

- a) $x^3 - 7x - 6 = 0$
 b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$
 c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$
 d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$
 a) $x = 3, x = -2, x = -1$
 b) $x = \frac{5}{2}, x = 1, x = -2$
 c) $x = 1, x = 2, x = 3, x = -1$
 d) $x = 1, x = 2, x = \frac{1}{3}$

39. Entre les sis equacions de primer grau següents, n'hi ha dues que no tenen solució, dues que tenen solucions infinites i dues que tenen solució única. Identifica cada cas i resol les que sigui possible:

- a) $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$
 b) $x + \frac{3-x}{3} - 1 = \frac{2}{3}x$
 c) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

- d) $0,2x + 0,6 - 0,25(x-1)^2 =$
 $= 1,25x - (0,5x + 2)^2$
 e) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$
 f) $\frac{2x+1}{7} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}$

- a) No té solució.
 b) Infinites solucions.
 c) Infinites solucions.
 d) $x = -3$
 e) No té solucions.
 f) $x = \frac{29}{12}$

40. Resol les equacions següents:

- a) $\frac{x^2-1}{3} + (x-2)^2 = \frac{x^2+2}{2}$
 b) $0,5(x-1)^2 - 0,25(x+1)^2 = 4-x$
 c) $(0,5x-1)(0,5x+1) = (x+1)^2 - 9$
 d) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$
 e) $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} = \frac{(3x-2)^2}{8} + 1$
 f) $0,3x^2 - x - 1,3 = 0$

** Expressa els decimals periòdics en forma de fracció i obtindràs solucions enteres.*

- a) $x = 4$ i $x = \frac{4}{5}$
 b) $x = 5, x = -3$
 c) $x = -\frac{14}{3}, x = 2$
 d) $x = 4, x = \frac{11}{3}$
 e) No té solucions reals.
 f) $x = 4, x = -1$

Pàgina 79

41. Resol aquestes equacions incompletes de segon grau sense aplicar-hi la fórmula general:

ÀLGEBRA

* Recorda: $ax^2 + c = 0$ es resol aïllant x .
 $ax^2 + bx = 0$ es resol traient factor comú i igualant a zero cada factor.

a) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$

b) $\frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$

c) $\frac{3x + 1}{3} - \frac{5x^2 + 3}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 2}{3}$

d) $(x - a)^2 + x(x + b) = 8b^2 - x(2a - b) + a^2$

a) $x = \pm 2$

b) $x = 0, x = 13$

c) $x = 0, x = \frac{4}{9}$

d) $x = 2b, x = -2b$

Equacions biquadrades

42. Resol aquestes equacions biquadrades:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$; d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \begin{cases} z = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

$z = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

$z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

b) $x^2 = z$

$z^2 + 3z - 4 = 0$

$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \begin{cases} z = -4 \text{ (no val)} \\ z = 1 \end{cases}$

$z = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

c) $x^2 = z$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \begin{cases} z = -2 \text{ (no val)} \\ z = -1 \text{ (no val)} \end{cases}$

No té solució.

d) $x^2 = z$

$z^2 - 9z + 8 = 0$

$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \begin{cases} z = 8 \\ z = 1 \end{cases}$

$z = 8 \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = -2\sqrt{2} \end{cases}$

$z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

43. Resol:

a) $(x^2 - 2)^2 = 1$

b) $\frac{3x^4 - 1}{4} + \frac{1}{2}(x^4 - 2 - \frac{1}{2}x^2) = \frac{x^2 - 5}{4}$

a) $x = \pm 1, x = \pm\sqrt{3}$

b) $x = 0, x = \pm\frac{1}{5}\sqrt{10}$

Equacions amb radicals

44. Resol les equacions següents:

a) $\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$

b) $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

c) $\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 5} = 0$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$4x^2 + 7x + 3 = 0$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{-8} \begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \begin{cases} x = 2 \text{ (no val)} \\ x = -3 \end{cases}$

c) $2 - 5x = (-x\sqrt{3})^2$

$2 - 5x = x^2 \cdot 3$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \text{ (no val)} \end{cases}$

d) No té solució real.

ÀLGEBRA

45. Troba les solucions de les equacions següents:

a) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$

b) $x - \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$

e) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

a) $(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2$

$$3x+4 = 16 + 4x^2 - 16x$$

$$4x^2 - 19x + 12 = 0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8} \begin{cases} x = 4 \text{ (no val)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$$

b) $(x-1)^2 = (\sqrt{7-3x})^2$

$$x^2 + 1 - 2x = 7 - 3x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} x_1 = -3 \text{ (no val)} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

c) $(\sqrt{5x+6})^2 = (2x+3)^2$

$$5x+6 = 4x^2 + 9 + 12x$$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \begin{cases} x_1 = -3/4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

d) $(\sqrt{x^2+x})^2 = (\sqrt{x+1})^2$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

e) $(\sqrt{x^2+3})^2 = (\sqrt{3-x})^2$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1$$

Equacions amb la x en el denominador

46. Resol l'equació següent:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$$

Multipliqua els dos membres de l'equació pel m.c.m. dels denominadors:

$$(x+3)(x-3).$$

$$x^2 + 3x + 2x^2 - 6x = 6$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

47. Resol: $\frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{2x}$

Fes producte de mitjans igual a producte d'extremes.

$$4x^2 = 3x^2 + 2x + 6x + 4$$

$$x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+16}}{2} \begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{5} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

48. Resol:

a) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{x+4}$; b) $\frac{3}{x+3} = \frac{x+2}{2-x}$;

a) $x^2 + 4x = 4x + 4$;

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

b) $6 - 3x = x^2 + 3x + 2x + 6$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x+8) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -8$$

49. Resol:

a) $\frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} - 1$

c) $\frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{x-2}$

d) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

ÀLGEBRA

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = 2$$

$$\text{b) } 3 + 6 + 9 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } 600x - 1200 + 80x^2 - 160x = 600x$$

$$80x^2 - 160x - 1200 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{d) } 8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$$

$$2x^2 - 14x - 60 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{4}$$

$$\begin{cases} x_1 = (14 + 26)/4 = 10 \\ x_2 = (14 - 26)/4 = -3 \end{cases}$$

50. Resol les equacions següents:

$$\text{a) } \frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x+6}{2}$$

$$\text{b) } \frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$$

$$\text{a) } 8x - 24 - x^2 + 3x - 4x + 22 =$$

$$= x^2 + 6x - 3x - 18$$

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} \begin{cases} x_1 = (4 + 12)/4 = 4 \\ x_2 = (4 - 12)/4 = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } 10x^2 - 250 + 15x - 3x^2 - 75 + 15x =$$

$$= 3x^2 + 15x + 15x + 75$$

$$4x^2 = 400$$

$$x^2 = 100 \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

Equacions exponencials i logarítmiques**51. Resol les equacions següents exponencials:**

$$\text{a) } 3^x = \sqrt[3]{9}$$

* Expressa $\sqrt[3]{9}$ com a potència de base 3.

$$\text{b) } 2^x \cdot 2^{x+1} = 8$$

* Multiplica el primer membre.

$$\text{c) } 5 \cdot 7^{-x} = 35$$

* Divideix els dos membres per 5.

$$\text{d) } (0,5)^x = 16$$

* 0,5 és una potència de base 2.

$$\text{e) } \sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$$

$$\text{a) } x = \frac{2}{3} \quad \text{b) } x = 1 \quad \text{c) } x = -1$$

$$\text{d) } x = -4 \quad \text{e) } x = -4$$

52. Resol prenent logaritmes:

$$\text{a) } 2^x = 317,5$$

$$\text{b) } 1,15^x = 52$$

$$\text{c) } 0,73^x = 17$$

$$\text{d) } 1,8^{x+1} = 0,003$$

$$\text{a) } x = 8,31$$

$$\text{b) } x = 28,27$$

$$\text{c) } x = -9,0026$$

$$\text{d) } x = -10,88$$

53. Resol les equacions següents mitjançant un canvi de variable:

$$\text{a) } 2^x + 2^{1-x} = 3$$

$$\text{b) } 2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{c) } 8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$$

$$\text{d) } 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$\text{e) } 9^x - 3^x - 6 = 0$$

$$\text{f) } 7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$$

$$\text{a) } x = 0, x = 1 \quad \text{b) } x = 0$$

$$\text{c) } x = -1$$

$$\text{d) } x = 0, x = 2$$

$$\text{e) } x = 1$$

$$\text{f) } x = \pm 1$$

54. Resol les equacions:

$$\text{a) } \log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$$

$$\text{b) } \ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$$

$$\text{c) } 2\ln(x-3) = \ln x - \ln 4$$

$$\text{d) } \log(x+3) - \log(x-6) = 1$$

$$\text{a) } x = \pm 5$$

$$\text{b) } x = 0, x = 5, \text{ però } x = 0 \text{ no és una solució vàlida.}$$

$$\text{c) } x = 4$$

$$\text{d) } x = 7$$

ÀLGEBRA

55. Resol les equacions:

a) $\log(x+9) = 2 + \log x$

b) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$

c) $\log(x^2 - 7x + 110) = 2$

d) $\log(x^2 + 3x + 36) = 1 + \log(x+3)$

a) $x = \frac{1}{11}$

b) No té solució real.

c) $x = 2, x = 5$

d) $x = 1, x = 6$

56. Resol els sistemes següents:

a)
$$\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

a) $y = 1 - 23x;$

$2x - 11 + 253x = -11$

$0 = 255x$

$x = 0, y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y$

$y = \frac{34}{17}, y = 2$

$x = 0, y = 2$

c)
$$\begin{cases} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{cases} \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{cases}$$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7; 5y = 5; y = 1$

$x = -1, y = 1$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 24 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \begin{cases} -2x + 3y = -24 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$\hline 2y = -16; y = -8$$

$x = 0, y = -8$

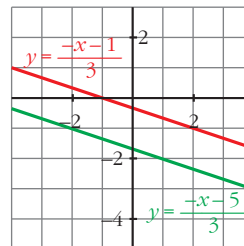
57. Representa gràficament aquests sistemes d'equacions i digues quins no tenen solució:

a)
$$\begin{cases} x - 3y = 2x + 1 \\ 4x + 3y = 3x - 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 4 = 4 - y \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{cases}$$

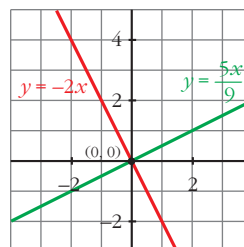
c)
$$\begin{cases} 3x + 2 = y - 5 \\ 6x + 1 = 2y - 3 \end{cases}$$

a)



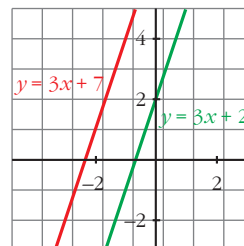
Rectes paral·leles.
El sistema no té solució.

b)



Les rectes es tallen en (0, 0).
La solució és $x = 0, y = 0$.

c)



Rectes paral·leles.
El sistema no té solució.

ÀLGEBRA

58. Resol els sistemes de segon grau següents:

a)
$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$$

a) $x = y - 3$

$$(y - 3)^2 + y^2 = 5$$

$$y^2 + y^2 + 9 - 6y = 5$$

$$2y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4}$$

$$y_1 = 2, y_2 = 1$$

$$x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = -2, y_2 = 1$$

b) $y = 1 - x$

$$x - x^2 + 2 - 2x = 2$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0, y_1 = 1, x_2 = -1, y_2 = 2$$

c) $x = -\frac{2y}{3}$

$$-\frac{2y}{3} \left(-\frac{2y}{3} - y \right) = 2(y^2 - 4)$$

$$\frac{4y^2}{9} + \frac{2y^2}{3} = 2y^2 - 8$$

$$4y^2 + 6y^2 = 18y^2 - 72$$

$$8y^2 = 72$$

$$y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$x_1 = -2, y_1 = 3, x_2 = 2, y_2 = -3$$

d) $y = 3 - 2x$

$$x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0$$

$$3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 + 12x = 0$$

$$0 = 6x^2 - 15x + 9$$

$$0 = 2x^3 - 5x + 3$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = 0, x_2 = 1, y_2 = 1$$

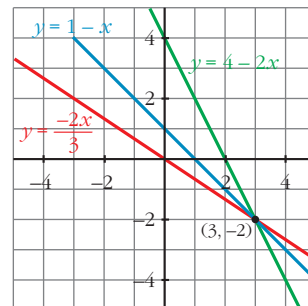
59. Resol gràficament els sistemes següents i comprova la solució del que és compatible:

a)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 8 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

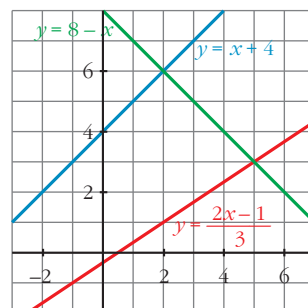
a) Les tres rectes es tallen en $(3, -2)$.

La solució del sistema serà: $x = 3, y = -2$.



b) No hi ha cap punt en comú entre les tres rectes.

El sistema no té solució.



ÀLGEBRA

60. Resol aquests sistemes:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 3x - 3y + z = -8 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

Aïlla una incògnita en una de les equacions i substitueix-la en les altres dues. Així obtindràs un sistema de dues equacions.

$$\text{a) } \begin{cases} z = 9 - 2y - x \\ x - y - (9 - 2y - x) = -10 \\ 2x - y + 9 - 2y - x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = -1 & \begin{cases} y = -2x - 1 \\ x - 3(-2x - 1) = -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$x + 6x + 3 = -4$$

$$x = -1, y = 1, z = 8$$

$$\text{b) } \begin{cases} z = 3x + 4y - 3 \\ 3x - 3y + 3x + 4y - 3 = -8 \\ x - y + 6x + 8y - 6 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + y = -5 & \begin{cases} y = -5 - 6x \\ 7x + 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$y = -x; -5 - 6x = -x$$

$$-5x = 5$$

$$x = -1, y = 1, z = -2$$

61. Resol per substitució:

$$\text{a) } \begin{cases} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \left. \begin{matrix} y = 4x \\ (x^2 + 1)16x^2 = 5 \end{matrix} \right\}$$

$$16x^4 + 16x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = \frac{-16 \pm 24}{32} = \begin{cases} 1/4 \rightarrow x = 1/2 \\ -5/4 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = -2$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \left. \begin{matrix} y = \frac{6}{x}; x^2 - \frac{36}{x^2} = 5; \\ x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$x^2 = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -4 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 2, x_2 = -3, y_2 = -2$$

62. Resol per reducció:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ -3x^2 + 6y^2 = -21 \end{cases}$$

$$\frac{-3x^2 + 6y^2 = -21}{y^2 = 9; y = \pm 3}$$

$$x^2 = 25; x = \pm 5$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = 3; x_3 = 5,$$

$$y_3 = -3; x_4 = -5, y_4 = -3$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4}}{2x^2 = \frac{2}{4}; x = \pm \frac{1}{2}}$$

$$2x^2 = \frac{2}{4}; x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 + 2y = 3$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0; 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 - 2y = 3$$

$$4y^2 - 2y - 2 = 0; 2y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

ÀLGEBRA

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = -1; x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}; x_3 = -\frac{1}{2},$$

$$y_3 = 1; x_4 = -\frac{1}{2}, y_4 = -\frac{1}{2}$$

63. Resol els sistemes d'equacions següents:

$$\text{a) } \begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x \cdot 2^y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$$

$$\text{a) } x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } x = 1, y = -1$$

64. Resol:

$$\text{a) } \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

$$\text{a) } x = 10, y = 100$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ 2 \log_2 x - \log_2 y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ 6 \log_2 x - 3 \log_2 y = 9 \end{cases}$$

$$7 \log_2 x = 14$$

$$\log_2 x = \frac{14}{7} \rightarrow \log_2 x = 2 \rightarrow [x = 2^2 = 4]$$

$$\log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \rightarrow \log_2 \frac{4^2}{y} = 3 \rightarrow \log_2 \frac{16}{y} = 3$$

$$\log_2 \frac{16}{y} = \log_2 2^3$$

$$\frac{16}{y} = 8 \rightarrow 16 = 8y \rightarrow \left[y = \frac{16}{8} = 2 \right]$$

65. Resol:

$$\text{a) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } x = 4, y = 3$$

$$\text{b) } (x = -1, y = -1), (x = 8, y = 5)$$

Pàgina 81

Inequacions

66. Resol les inequacions següents:

$$\text{a) } 2x - 3 < x - 1$$

$$\text{b) } \frac{3x-2}{2} \leq \frac{2x+7}{3}$$

$$\text{c) } -3x - 2 < 5 - \frac{x}{2}$$

$$\text{d) } \frac{3x}{5} - x > -2$$

$$\text{a) } x < 2; (-\infty, 2)$$

$$\text{b) } 9x - 6 \leq 4x + 14 \rightarrow 5x \leq 20 \rightarrow x \leq 4; (-\infty, 4]$$

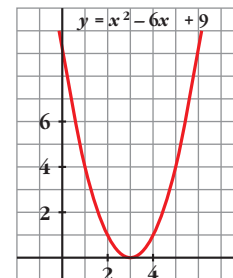
$$\text{c) } -6x - 4 < 10 - x \rightarrow -14 < 5x \rightarrow x > -\frac{14}{5};$$

$$\left(-\frac{14}{5}, +\infty\right)$$

$$\text{d) } 3x - 5x > -10 \rightarrow -2x > -10 \rightarrow \rightarrow 2x < 10 \rightarrow x < 5; (-\infty, 5)$$

67. Observa la representació gràfica d'aquestes paràboles i digues quines són les solucions de les equacions i inequacions proposades:

a)

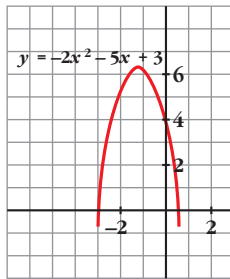


$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

ÀLGEBRA

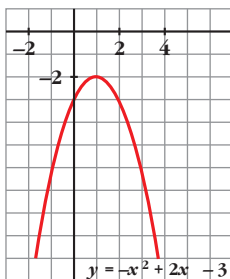
b)



$$-2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

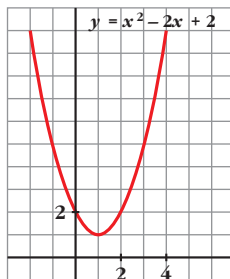
c)



$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 3 < 0$$

d)



$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 > 0$$

a) Equació: $x = 3$ Inequació: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ b) Equació: $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$ Inequació: $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$

c) Equació: No té solució.

Inequació: \mathbb{R}

d) Equació: No té solució.

Inequació: \mathbb{R}

68. Resol aquestes inequacions:

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x-1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x \rightarrow 10x > -10 \rightarrow x > -1;$
 $(-1, +\infty)$

b) $x-1 > 2x-2 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1; (-\infty, 1)$

c) $x(x+5) < 0 \rightarrow -5 < x < 0; (-5, 0)$

d) $(3x-2)(3x+2) > 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

e) $(x+2)(x+4) \geq 0 \rightarrow (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $(x+3)(x-5) \leq 0 \rightarrow [-3, 5]$

69. Resol els sistemes d'inequacions següents:

a)
$$\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$$

Resol cada inequació i busca les solucions comunes. Un dels sistemes no té solució.

a)
$$\left. \begin{array}{l} 4x < 4 \rightarrow x < 1 \\ x > -4 \end{array} \right\} (-4, 1)$$

b)
$$\left. \begin{array}{l} 3x > -5 \rightarrow x > -5/3 \\ x > 4 \end{array} \right\} (4, +\infty)$$

c)
$$\left. \begin{array}{l} x > 17 \\ 5x > 19 \rightarrow x > 19/5 \end{array} \right\} (17, +\infty)$$

ÀLGEBRA

$$\left. \begin{array}{l} d) x > 3/2 \\ x < -1/5 \end{array} \right\} \text{No té solució}$$

70. Resol:

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$

b) $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$

d) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

a) $-(x + 3)(x - 1) \geq 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) < 0 \rightarrow$

$\rightarrow (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

c) $x(x + 3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

d) $-(x - 1)(x - 5) \leq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

71. Resol:

a) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

b) $x^2 - 7x + 6 > 0$

$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

a) $[1, 6]$; b) $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

72. Comprova que tots els nombres reals són solució d'aquesta inequació:

$$5(x - 2) - 4(2x + 1) < -3x + 1$$

$$5x - 10 - 8x - 4 < -3x + 1$$

$$0 < 15$$

Queda $0 < 15$, que és veritat per a tots els nombres reals.

73. Comprova que no hi ha cap nombre que verifiqui aquesta inequació:

$$3(x - 2) + 7 < x + 2(x - 5)$$

$$3x - 6 + 7 < x + 2x - 10$$

$$0 < -11$$

Queda $0 < -11$, que no és cert.

74. L'Anna té 8 anys menys que en Xavier. Quants anys pot tenir l'Anna, si sabem que el triple de la seva edat és més gran que el doble de la d'en Xavier?

Anna $\rightarrow x$ $3x > 2(x + 8)$

Xavier $\rightarrow x + 8$ $3x > 2x + 16$

$$x > 16$$

L'Anna tindrà més de setze anys.

75. Vaig demanar al meu pare: Quant val la xocolata amb ensaimades al cafè de la cantonada?

—No ho sé. Mai no m'hi he fixat.

—Però, home..., n'acabem de prendre la mare, l'àvia, les meves dues germanes, tu i jo. Quant has pagat?

—Una mica més de 14 euros.

—Diumenge passat, a més de nosaltres sis, vas convidar dos amics meus. Quant vas pagar?

—Era una mica menys de 20 euros, perquè hi vaig posar un bitllet i vaig deixar el canvi.

Quant val la xocolata amb ensaimades a la cafeteria de la cantonada?

Sabem que: $6x > 14$

i que: $8x < 20$

Per tant, resollem el sistema d'inequacions següent:

$$6x > 14 \rightarrow x > \frac{14}{6} \rightarrow x > 2,3 \text{ €}$$

$$8x < 20 \rightarrow x < \frac{20}{8} \rightarrow x < 2,5 \text{ €}$$

Conclusió: La xocolata val entre 2,3 i 2,5 €

76. Resol els sistemes d'inequacions següents:

$$a) \begin{cases} \frac{x-3}{2} < 1 \\ 2 - \frac{x+1}{2} \geq 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - \frac{x-2}{3} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{2x}{3} < -2 \end{cases}$$

ÀLGEBRA

$$c) \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - x > \frac{2x-10}{5} \\ -3x + 2 < 7 - \frac{x}{2} \end{cases}$$

a) $x \leq -5$ $(-\infty, -5]$

b) $x \in \left(\frac{24}{5}, \infty\right)$

c) $x \in (-2, \infty)$

Pàgina 82

Per resoldre

Problemes d'equacions i sistemes

77. Per a la qualificació d'un curs, es decideix que la primera avaluació compti un 25 %, la segona, un 35 % i la tercera, un 40 %. Una alumna ha obtingut un 5 en la primera i un 7 en la segona. Quina nota ha d'aconseguir en la tercera perquè la qualificació final sigui 7?

$$0,25 \cdot 5 + 0,35 \cdot 7 + 0,40 \cdot x = 7$$

$$0,40x = 3,3$$

$$x = 8,25$$

Ha d'aconseguir un 8,25.

78. Un comerciant compra 50 kg de farina i 80 kg d'arròs, pels quals ha de pagar 66,10 €; però aconsegueix un descompte del 20 % en el preu de la farina i un 10 % en el de l'arròs. Així, paga 56,24 €. Quins són els preus inicials de cada article?

$$\begin{cases} \text{Preu 1 kg farina} \rightarrow x \\ \text{Preu 1 kg d'arròs} \rightarrow y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50x + 80y = 66,10 \\ 0,8 \cdot 50x + 0,9 \cdot 80y = 56,24 \end{cases} \begin{cases} x = 0,65 \text{ €} \\ y = 0,42 \text{ €} \end{cases}$$

1 kg de farina valia 0,65 € i 1 kg d'arròs 0,42 €.

79. Un professor de tennis reparteix pilotes entre els alumnes per fer un entrenament. En dóna tres a cada un i en sobren 12. Com que vol que cada alumne en tingui cinc, calcula que ha de comprar 18 pilotes més. Quants alumnes són? Hi ha x alumnes.

$$\begin{aligned} \text{Nombre de pilotes} &\rightarrow 3x + 12 = 5x - 18; \\ 30 &= 2x; x = 15 \end{aligned}$$

Són 15 alumnes.

80. L'edat d'un pare és el quàdruple de la del seu fill, però d'aquí a 16 anys serà només el doble. Quina és l'edat actual de cada un?

	Ara	D'aquí a 16 anys
Pare	$4x$	$4x + 16$
Fill	x	$x + 16$

$$4x + 16 = 2(x + 16);$$

$$4x + 16 = 2x + 32; x = 8$$

El pare té 32 anys i el fill, 8.

81. La suma d'un nombre parell, el parell anterior i els dos senars que el segueixen, és 34. Calcula aquest nombre.
 $x + x - 2 + x + 1 + x + 3 = 34 \Rightarrow x = 8$
 És el número 8.

82. Les dues xifres d'un nombre sumen 12. Si se n'inverteix l'ordre, s'obté un nombre 18 unitats més gran. Calcula aquest nombre.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10y + x = 18 + 10x + y \end{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

És el número 57.

ÀLGEBRA

83. Tres empreses aporten 2, 3 i 5 milions d'euros per a la comercialització d'un nou avió. Al cap de cinc anys reparteixen beneficis i a la tercera li corresponen 189 000 € més que a la segona. Quina va ser la quantitat repartida? A la primera li corresponen 2/10 dels beneficis.

Beneficis

$$1a \rightarrow 2 \text{ milions} \rightarrow y$$

$$2a \rightarrow 3 \text{ milions} \rightarrow x$$

$$3a \rightarrow 5 \text{ milions} \rightarrow \frac{189\,000 + x}{2x + y + 189\,000}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{10}(2x + y + 189\,000) &= y \\ \frac{3}{10}(2x + y + 189\,000) &= x \end{aligned} \right\}$$

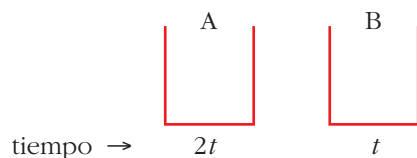
$$\left. \begin{aligned} 2x - 4y &= -189\,000 \\ -4x + 3y &= -567\,000 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 283\,500 \\ y &= 189\,000 \end{aligned}$$

$$\text{Total} = 2x + y + 189\,000 = 945\,000 \text{ €}.$$

La quantitat repartida va ser de 945 000 €.

84. Una aixeta A tarda a omplir un dipòsit el doble de temps que una altra B. Obertes simultàniament, omplen el dipòsit en 2 hores. Quant tarda cada una separadament?

Si A tarda x hores a omplir el dipòsit, en 1 hora omple $1/x$ del dipòsit.



$$\text{En 1 hora} \rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{3}{2t} \text{ parts del dipòsit}$$

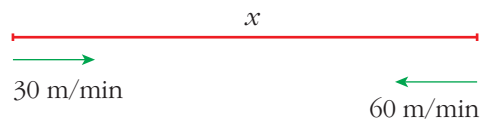
$$\text{Temps entre totes dues: } \frac{2t}{3} = 2 \text{ hores} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 3 \text{ hores}$$

$$2t = 6 \text{ hores}$$

B tarda 3 hores i A, 6.

85. Un remer puja amb la barca per un riu a una velocitat de 30 m/min i baixa a 60 m/min. Fins a quina distància s'allunya en un passeig d'hora i mitja?



$$\left. \begin{aligned} 30 &= \frac{x}{t} \\ 60 &= \frac{x}{90-t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 30t &= x \\ 60(90-t) &= x \end{aligned}$$

$$30t = 5400 - 60t; t = 60 \text{ min}$$

Tarda 60 minuts a l'anada i 30 a la tornada. S'allunya una distància de 1 800 m.

86. Es mesclen 30 kg de cafè de 6 €/kg amb una certa quantitat d'un altre de 8 €/kg, i la mescla resulta a 7,25 €/kg. Quina quantitat del cafè més car s'hi ha utilitzat?

$$\text{Preu d'1 kg de mescla} = \frac{\text{cost total}}{\text{total de quilos}}$$

$$A \rightarrow 30 \text{ kg} \rightarrow 6 \text{ €/kg}$$

$$B \rightarrow x \text{ kg} \rightarrow 8 \text{ €/kg}$$

$$\text{Mescla} \rightarrow (30 + x) \text{ kg} \rightarrow 7,25 \text{ €/kg}$$

$$7,25 = \frac{30 \cdot 6 + 8x}{30 + x}; 217,5 + 7,25x = 180 + 8x$$

$$0,75x = 37,5 \Rightarrow x = 50 \text{ kg}$$

87. Una botiga ha venut 60 ordinadors, el preu original dels quals era de 1 200 €, amb un descompte del 20% en uns i d'un 25% en els altres. Si s'han obtingut 56 400 €, calcula a quants ordinadors se'ls ha rebaixat el 25%.

PREU ORIGINAL

AMB DESCOMPTE

$$\text{UNS} \rightarrow x \rightarrow 1\,200x \xrightarrow{-20\%} 0,8 \cdot 1\,200x = 960x$$

$$\text{ELS ALTRES} \rightarrow y \rightarrow 1\,200y \xrightarrow{-25\%} 0,75 \cdot 1\,200y = 900y$$

ÀLGEBRA

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ 960x + 900y = 56400 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 40 \\ y = 20 \end{array}$$

S'han venut 20 ordinadors amb un 25 % de descompte i 40 ordinadors amb un 20 % de descompte.

88. En la primera prova d'una oposició queden eliminades el 52 % de les persones que hi participen.

En la segona prova se n'elimina el 25 % de les restants. Si el nombre total de persones suspeses és de 512, quantes s'han presentat a l'oposició?

Recorda que per calcular el 52 % d'una quantitat, aquesta es multiplica per 0,52. Per quant s'haurà de multiplicar per calcular el 25 % del 48 % restant?

$$\begin{array}{ccc} & \text{QUEDEN} & \text{QUEDEN} \\ \text{Es presenten } x & \xrightarrow[\text{1a prova}]{-52\%} & 0,48x \xrightarrow[\text{2a prova}]{-25\%} 0,75 \cdot 0,48x = 0,36x \end{array}$$

Queda el 36 % del total. S'ha eliminat el 64 % del total:

$$0,64x = 512 \Rightarrow x = 800$$

Es van presentar 800 persones.

89. Un granger espera obtenir 36 € per la venda d'ous. De camí al mercat se li'n trenquen quatre dotzenes. Per obtenir el mateix benefici augmenta en 0,45 € el preu de la dotzena. Quantes dotzenes tenia al principi?

Iguala el cost de les dotzenes que es trenquen al cost que augmenta el de les que queden.

$$\text{Tenia } x \text{ dotzenes} \rightarrow \frac{36}{x} \text{ €/dotzena}$$

$$\text{Li queden } x - 4 \text{ dotzenes} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) \text{ €/dotzena}$$

$$\left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) (x - 4) = 36$$

$$(36 + 0,45x)(x - 4) = 36x$$

$$36x - 144 + 0,45x^2 - 1,8x = 36x$$

$$0,45x^2 - 1,8x - 144 = 0$$

$$x = 20 \text{ (} x = -16 \text{ no val)} \rightarrow \text{Tenia 20 dotzenes.}$$

90. Un botiguer inverteix 12 € en la compra d'una partida de pomes. En rebutja 20 kg per defectuoses i ven la resta augmentant 0,40 € cada quilo sobre el preu de compra, per 147 €.

Quants quilos va comprar?

Iguala el cost de les que es rebutgen més els guanys, a l'augment de cost de les que queden.

$$\text{Va comprar } x \text{ kg} \rightarrow \frac{12}{x} \text{ €/kg}$$

$$\text{Ven } (x - 20) \text{ kg} \rightarrow \left(\frac{12}{x} + 0,40 \right) \text{ €/kg}$$

$$\left(\frac{12}{x} + 0,40 \right) (x - 20) = 147$$

$$x = 359,17 \text{ kg.}$$

Pàgina 83

91. S'han repartit 100 mandonguilles en cinc plats. Els plats 1r i 2n en tenen 52 en total; el 2n i el 3r, 43; el 3r i el 4t, 34; el 4t i el 5è, 30.

Quantes mandonguilles hi ha en cada plat? Si el 1r en té x , el 2n en té $52 - x$. Fes el mateix raonament amb els altres.

$$1r \rightarrow x$$

$$2n \rightarrow 52 - x$$

$$3r \rightarrow 43 - (52 - x) = x - 9$$

$$4t \rightarrow 34 - (x - 9) = 43 - x$$

$$5è \rightarrow 30 - (43 - x) = x - 13$$

$$x + 52 - x + x - 9 + 43 - x + x - 13 = 100$$

En el 1r hi ha 27 mandonguilles; 25 en el 2n; 18 en el 3r; 16 en el 4t i 14 en el 5è.

ÀLGEBRA

92. Diversos amics prenen un refresc en una terrassa i han de pagar 6 € pel total de les consumicions. Com que dos no tenen diners, els altres els conviden, per això han d'augmentar la seva aportació en 0,80 € cada un.

Quants amics són?

Nombre d'amics $\rightarrow x \rightarrow \frac{6}{x}$ €/consumició

$$(x - 2)\left(\frac{6}{x} + 0,80\right) = 6$$

$$(x - 2)(6 + 0,80x) = 6x$$

$$6x + 0,80x^2 - 12 - 1,6x = 6x$$

$$0,80x^2 - 1,6x - 12 = 0$$

$$x = 5 \quad (x = -3 \text{ no val})$$

Són 5 amics.

93. El nombre de visitants a una determinada exposició durant el mes de febrer es va incrementar en un 12% respecte al mes de gener. No obstant això, al març va sofrir un descens del 12% respecte al febrer.

Si el nombre de visitants de gener va superar en 36 persones el de març, quantes persones van veure l'exposició el gener?

Gener $\xrightarrow{+12\%}$ Febrer $\xrightarrow{-12\%}$ Març

$$x \quad 1,12x \quad 0,88 \cdot 1,12x = 0,9856x$$

$$x = 0,9856x + 36 \Rightarrow x = 2\,500 \text{ persones}$$

94. Un inversor, que disposa de 28 000 €, col·loca part del capital en un banc al 8% i la resta en un altre banc al 6%. Si la primera part li produeix anualment 200 € més que la segona, quant va col·locar en cada banc?

$$28\,600 \text{ €} \left\{ \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ al } 8\% \xrightarrow{1 \text{ any}} 0,08x \\ (28\,000 - x) \text{ al } 6\% \xrightarrow{1 \text{ any}} 0,06(28\,000 - x) \end{array} \right\}$$

$$0,08x = 0,06(28\,000 - x) + 200$$

$$0,08x = 1\,680 - 0,06x + 200$$

$$x = 13\,428,57 \text{ € al } 8\% \text{ i } 14\,571,43 \text{ al } 6\%$$

Per resoldre

95. Determina per a quins valors de b l'equació $x^2 - bx + 9 = 0$ té:

a) una solució; b) dues solucions.

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 36}}{2}; \quad b^2 - 36 = 0 \Rightarrow b = \pm 6$$

a) $b = -6$ i $b = 6$; b) $b < -6$ o bé $b > 6$

96. Quin valor ha de prendre k perquè l'equació $x^2 - 6x + k = 0$ no tingui solució?

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}; \quad 36 - 4k < 0 \Rightarrow k > 9$$

97. Escriu una equació que tingui per solucions $x_1 = 3$ i $x_2 = -2$.

$$(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

98. Quantes solucions pot tenir una equació biquadrada? Posa'n exemples.

Quatre o menys.

Exemples:

$$\text{Cap solució} \rightarrow x^4 + 1 = 0$$

$$\text{Una solució} \rightarrow x^4 + x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Dues solucions} \rightarrow x^4 - 9 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$$

$$\text{Tres solucions} \rightarrow x^4 - 9x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$$

$$\text{Quatre solucions} \rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$$

ÀLGEBRA

99. Per a quins valors de k té solució l'equació $x^2 + k = 0$?

Per a $k \leq 0$.

100. Quina condició han de complir a i b perquè el sistema següent tingui solució?

$$\begin{cases} 2x + 3y = a \\ 4x + 6y = b \end{cases}$$

$b = 2a$. En aquest cas, tindria infinites solucions.

(Si $b \neq 2a$, tindríem dues rectes paral·leles i el sistema no tindria solució.)

Per aprofundir

101. Un ramader té bous que mengen la mateixa quantitat de pinso cada dia. Si vengués 15 bous, el pinso li duraria tres dies més i si comprés 25 bous, el pinso li duraria tres dies menys.

Troba el nombre de bous i els dies que els pot alimentar.

Si x és el nombre de bous i t el nombre de dies que els pot alimentar, xt és la quantitat de racions de pinso que té el ramader.

NOMBRE DE BOUS	DIES AMB PINSO	RACIONS
x	$\rightarrow y$	$\rightarrow xy$
$x - 15$	$\rightarrow y + 3$	$\rightarrow (x - 15)(y + 3)$
$x + 25$	$\rightarrow y - 3$	$\rightarrow (x + 25)(y - 3)$
$xy = (x - 15)(y + 3)$		
$xy = (x + 25)(y - 3)$		
$xy = xy + 3x - 15y - 45$		
$3x - 15y = 45$		
$xy = xy - 3x + 25y - 75$		
$-3x + 25y = 75$		
$10y = 120 \rightarrow y = 12; x = 75$		

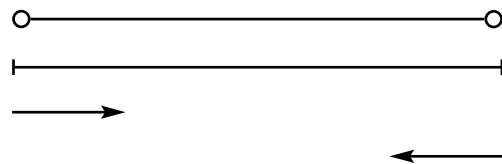
Té 75 bous, que pot alimentar durant 12 dies.

102. Un avió militar vola a 600 km/h quan no fa vent i pot portar combustible per a 4 hores. Quan surt hi ha un vent en contra de 60 km/h que es mantindrà, segons els pronòstics, durant tot el trajecte. Quants quilòmetres pot allunyar-se de la base de manera que pugui tornar-hi sense haver de proveir-se de combustible?

Quan l'avió va a favor del vent, la velocitat és de 660 km/h.

600 km/h sense vent \rightarrow 4 h de combustible

Vent en contra de 60 km/h



$$V_{\text{anada}} = t$$

$$V_{\text{tornada}} = 4 - t$$

$$V_{\text{anada}} = 540 \text{ km/h}$$

$$V_{\text{tornada}} = 660 \text{ km/h}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 540t \\ x = 660(4 - t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 540t = 660(4 - t) \\ 540t = 2640 - 660t \end{array}$$

$$t = 2,2 \text{ h}; x = 1188 \text{ km}$$

103. Dues aixetes omplen juntes un dipòsit en 12 minuts. Una només tarda 10 minuts menys a omplir el dipòsit que l'altra. Quant tarda cada una a omplir el dipòsit separatament?

$$\begin{cases} 1r \rightarrow t \\ 2n \rightarrow t - 10 \\ \text{Junts} \rightarrow 12 \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t - 10} = \frac{1}{12} \Rightarrow 12(t - 10) + 12t = t(t - 10)$$

$$12t - 120 + 12t = t^2 - 10t \Rightarrow 0 = t^2 - 34t + 120$$

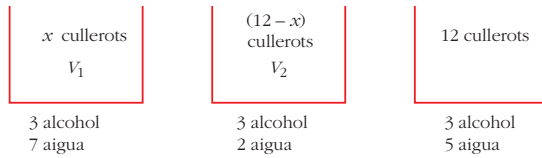
ÀLGEBRA

$$t = 30 \text{ (} t = 4 \text{ no val)}$$

Una tarda 30 minuts i l'altra 20 minuts.

Per pensar una mica més

104. Un atuell conté una barreja d'alcohol i aigua en una proporció de 3 a 7. En un altre atuell, la proporció és de 2 a 3. Quants cassons hem de treure de cada atuell per obtenir 12 cassons d'una mescla en què la proporció alcohol/aigua sigui de 3 a 5?



$$\frac{3}{10} \text{ alcohol} \quad \frac{2}{5} \text{ alcohol} \quad \frac{3}{8} \text{ alcohol}$$

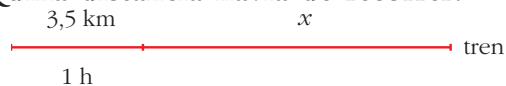
La proporció d'alcohol és:

$$\frac{3}{10}x + (12 - x) \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{24 - 2x}{5} = \frac{9}{2}; 3x + 48 - 4x = 45; x = 3$$

Solució: 3 cassons de la primera i 9 de la segona.

105. Un viatger que ha d'agafar el tren ha fet 3,5 km en una hora i s'adona que, a aquest pas, hi arribarà una hora tard. Llavors accelera el pas i recorre la resta del camí a una velocitat de 5 km/h, i arriba mitja hora abans que surti el tren. Quina distància havia de recórrer?



t = temps que tarda a recórrer x a 3,5 km/h
Si va a 5 km/h tarda $t - 1,5$ (1 hora i mitja menys)

Llavors:

$$\left. \begin{aligned} x &= 3,5t \\ x &= 5(t - 1,5) \end{aligned} \right\} 3,5t = 5t - 7,5; t = 5 \text{ hores}$$

$$x = 17,5 \text{ km}$$

Havia de recórrer 17,5 km (21 km si tenim en compte els 3,5 km del principi).

Pàgina 86

Resol tu

En unes eleccions hi ha 20 000 votants i es reparteixen 10 escons. Hi concorren 5 partits, A, B, C, D, E, que obtenen el nombre de vots que figuren a la primera columna.

	1	2	3	4	5
A	8 435 (1)	4 217 (3)	2 812 (6)	2 109 (7)	1 687 (9)
B	6 043 (2)	3 021 (5)	2 014 (8)	1 511	
C	3 251 (4)	1 625 (10)			
D	1 150				
E	1 121				

a) Comprova la validesa dels resultats calculant les columnes restants i digues quin seria el repartiment d'escons segons el mètode d'Hondt.

b) Fes el repartiment d'escons aplicant el mètode del residu major.

c) Suposant que el nombre d'escons a repartir fos 8, fes novament el repartiment per tots dos mètodes.

a) *Mètode d'Hondt:*

Els escons es reparteixen successivament així: A B A C B A A B A C

Per tant, s'assignen així: A - 5, B - 3, C - 2, D - 0, E - 0

b) *Mètode del residu major:*

El preu de l'escó és de 20 000 vots/10 escons = 2 000 vots cada escó.

ÀLGEBRA

Per tant:

	Vots	Escons d'assignació directa	La resta	Total d'escons
A	8435	4	435	4
B	6043	3	43	3
C	3251	1	1251	1 + 1 = 2
D	1150	0	1150	0 + 1 = 1
E	1121	0	1121	0
		8		

Segons el mètode Hondt
5
3
2
0
0

Si s'apliqués el mètode del residu major, el partit D prendria un escó a l'A.

c) Per a l'assignació dels 8 escons ens serveix la mateixa taula de dalt, i obtenim:

A B A C B A A B

És a dir, A - 4, B - 3, C - 1, D - 0, E - 0

Per aplicar el mètode del residu major te-

nim en compte que, ara, el preu de l'escó és de $20\,000 : 8 = 2\,500$ vots cada escó.

	Vots	Escons d'assignació directa	La resta	Total d'escons
A	8435	3	935	3
B	6043	2	1043	2
C	3251	1	751	0
D	1150	0	1150	0 + 1 = 1
E	1121	0	1121	0 + 1 = 1
		6		

Segons el mètode Hondt
4
3
1
0
0

$$\begin{array}{r} 8435 \quad \underline{2500} \\ 935 \quad 3 \end{array}$$

El partit A compra 3 escons i li sobren (té una resta de 935) vots.

Ara són els dos partits petits els que prendrien escons als dos grans.