

UNITAT DIDÀCTICA 6

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

Pàgina 128

Reflexiona i resol

Aproximacions successives

El valor de la funció $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$ per a $x = 5$ no es pot obtenir directament perquè el denominador es fa zero. L'obtindrem per aproximacions successives, donant a x els valors: 4; 4,9; 4,99.

Comprova que:

$$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995$$

$$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995\dots$$

Calcula $f(4,999); f(4,9999); f(4,99999)\dots$
 $f(4,999) = 6,9995; f(4,9999) = 6,99995;$
 $f(4,99999) = 6,999995\dots$

A la vista dels resultats anteriors, et sembla raonable afirmar que, quan x s'aproxima a 5, el valor de $f(x)$ s'aproxima a 7? Ho expressem així: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$

Quan x s'aproxima a 5, $f(x)$ s'aproxima a 7
 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$

Calcula, anàlogament, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

$$f(2) = 5,5;$$

$$f(2,9) = 5,95;$$

$$f(2,99) = 5,995\dots$$

Quan $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

Pàgina 131

1. Explica per què la funció $y = x^2 - 5$ és contínua en tot \mathbb{R} .

Perquè està definida en tot \mathbb{R} .

2. Explica per què la funció $y = \sqrt{5 - x}$ és contínua en $(-\infty, 5]$.

Perquè el seu domini és $(-\infty, 5]$.

3. Cada una de les funcions següents té un punt o més on no és contínua. Indica quins són aquests punts i quin tipus de discontinuïtat presenta:

a) $y = \frac{x+2}{x-3}$ b) $y = \frac{x^2-3x}{x}$

c) $y = \frac{x^2-3}{x}$ d) $y = \frac{1}{x^2}$

e) $y = \begin{cases} 3x - 4, & x < 3 \\ x + 1, & x \geq 3 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Branca infinita en $x = 3$ (asíptota vertical).

b) Discontinuitat evitable en $x = 0$ (li falta aquest punt).

c) Branca infinita en $x = 0$ (asíptota vertical).

d) Branca infinita en $x = 0$ (asíptota vertical).

e) Salt en $x = 3$.

f) Salt en $x = 4$.

Pàgina 134

4. Calcula el valor dels límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$

a) $-\frac{3}{2}$ b) 0

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

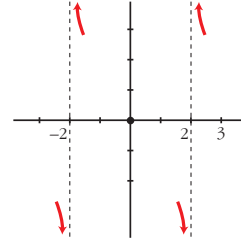
5. Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$ b) -1

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$



Pàgina 135

6. Calcula k perquè la funció $y = f(x)$ sigui contínua en \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array} \right\}$$

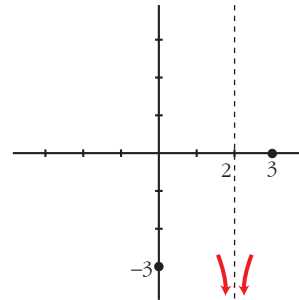
$$21 + k = 7 \Rightarrow k = -14$$

b) $f(x) = \frac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$



Pàgina 137

7. Calcula els límits de les funcions següents en els punts que s'hi indiquen. On convingui, especifica el valor del límit a l'esquerra i a la dreta del punt. Representa'n els resultats gràficament.

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2 , 0 i 2

b) $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en 2 , 0 i 3

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 i -3

d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 i -3

c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$

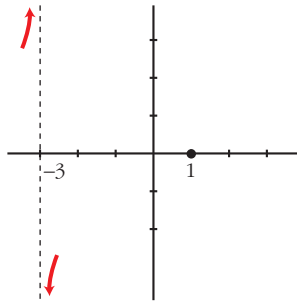
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x-2)}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

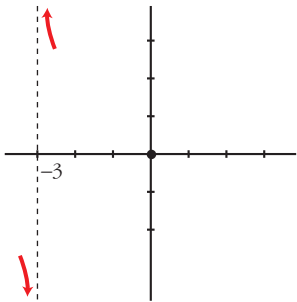
LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES



$$d) f(x) = \frac{x^4}{x^2(x+3)}$$

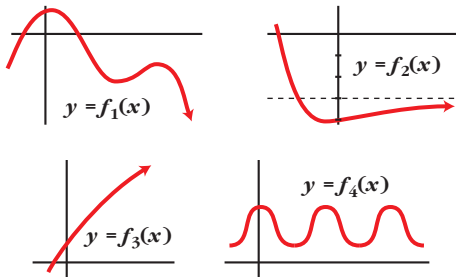
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$



Pàgina 138

8. Digues el límit quan $x \rightarrow +\infty$ de les següents funcions donades per les seves gràfiques:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existeix}$$

Pàgina 139

9. Digues el valor del límit de les funcions següents quan $x \rightarrow +\infty$:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) 0, e) 0, f) $-\infty$.

10. Com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, troba un valor de x per al qual $x^3 - 200x^2$ sigui més gran que 1 000 000.

Per exemple, per a $x = 1\,000$,

$$f(x) = 800\,000\,000$$

11. Com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$, troba un

valor de x per al qual $\frac{1}{x^2 - 10x}$ sigui més petit que 0,0001.

Per exemple, per a $x = 1\,000$,

$$f(x) = 0,00000101$$

Pàgina 140

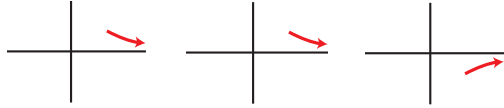
12. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

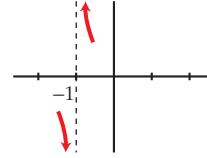
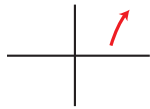
a) $f(x) = \frac{1}{3x}$; b) $f(x) = \frac{3}{x}$; c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$;

d) $f(x) = 3x - 5$

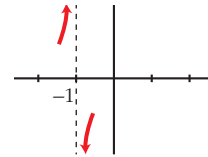
- a) 0 b) 0 c) 0



d) $+\infty$



b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ és asymptota vert.}$

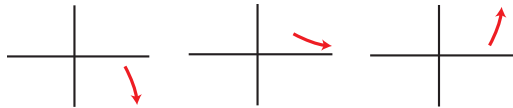


13. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$

- a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$



d) -1

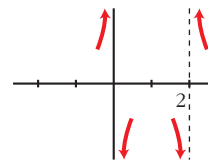


15. Troba les asymptotes verticals i situa'n la corba respecte a aquestes:

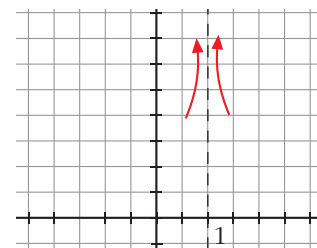
a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ és asymptota vert.}$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ és asymptota vert.}$



b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ és asymptota vert.}$



Pàgina 141

14. Troba les asymptotes verticals i situa'n la corba respecte a aquestes:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ és asymptota vert.}$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

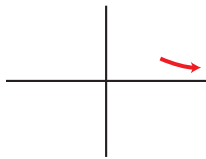
Pàgina 143

16. Troba les branques infinites, $x \rightarrow +\infty$, de les funcions. Situa la corba respecte a l'asíptota:

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$ b) $y = \frac{x^3}{1+x^2}$

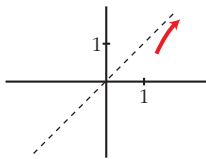
a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$;

$y = 0$ és una asíptota horitzontal



b) $y = x + \frac{-x}{x^2+1}$;

$y = x$ és una asíptota obliqua

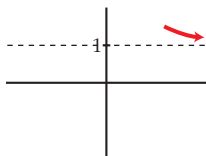


17. Troba les branques infinites, $x \rightarrow +\infty$, de les funcions. Situa la corba respecte a les seves asíptotes, si n'hi ha:

a) $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$ b) $y = \frac{2x^3-3x^2+7}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$;

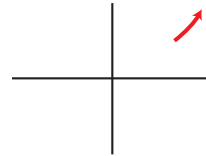
$y = 1$ és una asíptota horitzontal



b) grau de P - grau de $Q \geq 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

branca parabòlica cap amunt

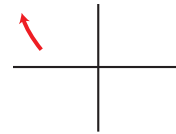


Pàgina 144

18. Troba $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i representa la branca corresponent:

$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty$



19. Troba $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i traça les branques corresponents:

a) $f(x) = (x^2+3)/(-x^3)$

b) $f(x) = -x^3/(x^2+3)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$



b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$



LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

Pàgina 145

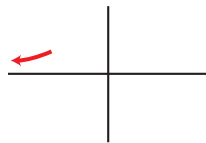
20. Troba les branques infinites $x \rightarrow -\infty$ d'aquestes funcions, i situa la corba respecte a les asímptotes.

a) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; b) $y = \frac{x}{1 + x^2}$; c) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$;

d) $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

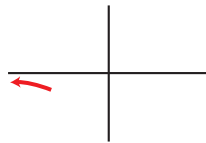
a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$;

$y = 0$ és una asímptota horitzontal



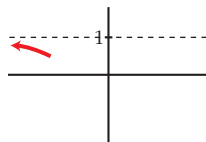
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$;

$y = 0$ és una asímptota horitzontal

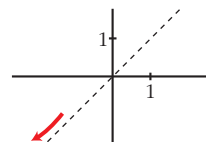


c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$;

$y = 1$ és una asímptota horitzontal



d) $y = x + \frac{-x}{1 + x^2}$; $y = x$ és una asímptota obliqua



21. Troba les branques infinites, quan $x \rightarrow -\infty$, i si tenen asímptotes, situa la corba respecte a aquestes:

a) $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$ b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

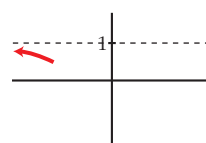
c) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ d) $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x}$

a) grau P - grau $Q \geq 2$

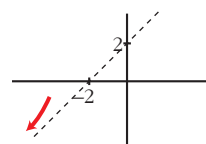
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; branca parabòlica



b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $y = 1$ és una asímptota horitzontal



c) $y = x + 2 + \frac{-2}{x + 1}$; $y = x + 2$ és una asímptota obliqua



d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$



Pàgina 151

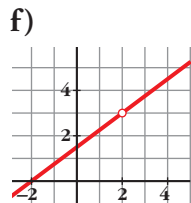
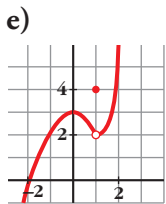
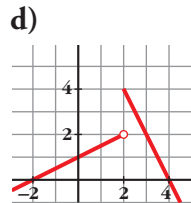
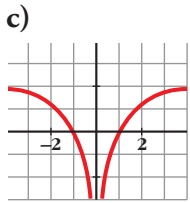
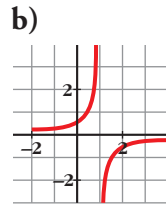
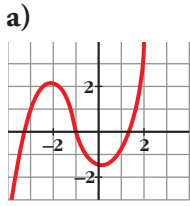
Per practicar

Discontinuitats i continuïtat

22. a) Quina de les gràfiques següents correspon a una funció contínua?

b) Assenyala, en cada una de les altres cinc, la raó de la seva discontinuïtat.

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES



- a) Només la a).
 b) b) Branca infinita en $x = 1$ (asíptota vertical)
 c) Branca infinita en $x = 0$ (asíptota vertical)
 d) Salt en $x = 2$
 e) Punt desplaçat en $x = 1$; $f(1) = 4$;
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
 f) No està definida en $x = 2$

23. Troba els punts de discontinuïtat, si n'hi ha, de les funcions següents:

a) $y = x^2 + x - 6$ b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{x-1}{2x+1}$ d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \frac{2}{5x-x^2}$ f) $y = \frac{1}{x^2+2}$

- a) Contínua; b) 2; c) $-\frac{1}{2}$; d) Contínua;
 e) 0 i 5; f) Contínua.

24. Comprova si les funcions següents són contínues en $x = 0$ i en $x = -2$:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; b) $y = \frac{x}{x^2-4}$; c) $y = \sqrt{x^2-4}$;

d) $y = \sqrt{7-2x}$

- a) No és contínua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.
 b) Sí que és contínua en $x = 0$, no en $x = -2$.
 c) No és contínua en $x = 0$, però sí en $x = -2$.
 d) Contínua en $x = 0$ i en $x = -2$.

25. Indica per a quins valors de \mathbb{R} són contínues les funcions següents:

a) $y = 5 - \frac{x}{2}$; b) $y = \sqrt{x-3}$; c) $y = \frac{1}{x}$

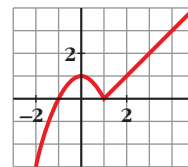
d) $y = \sqrt{-3x}$; e) $y = \sqrt{5-2x}$; f) $y = x^2 - x$

a) \mathbb{R} ; b) $[3, +\infty)$; c) $(-\infty, 0) \cap (0, +\infty)$;

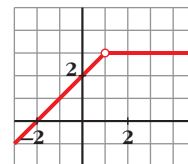
d) $(-\infty, 0]$; e) $(-\infty, \frac{5}{2}]$; f) \mathbb{R} .

26. Comprova que les gràfiques d'aquestes funcions corresponen a l'expressió analítica i digues si són contínues o discontinúes en $x = 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

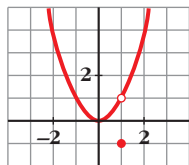


b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Contínua; b) Discontínua; c) Discontínua.

27. Comprova si la funció:

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ és contínua en $x = 0$.

Recorda que, perquè f sigui contínua en $x = 0$, ha de verificar-se que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$

És contínua en $x = 0$

28. Comprova si les funcions següents són contínues en els punts que s'hi indiquen:

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

a) No, perquè no existeix $f(-1)$.

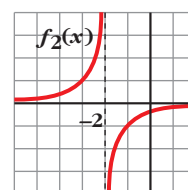
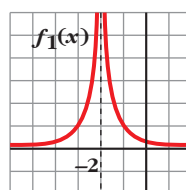
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - x^2) = -2$. Sí és contínua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$. No és contínua en $x = 1$.

Pàgina 152

Visió gràfica del límit

29.



Aquestes són, respectivament, les gràfiques de les funcions:

$f_1(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$ i $f_2(x) = \frac{-1}{x + 2}$

Quin és el límit de cada una d'aquestes funcions quan $x \rightarrow -2$?

Observa la funció quan $x \rightarrow -2$ per l'esquerra i per la dreta.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty$

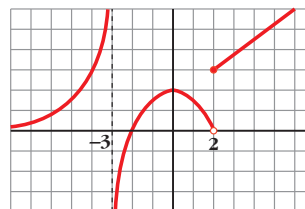
$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty$

No existeix $\lim_{x \rightarrow -2} f_2(x)$

30. Sobre la gràfica de la funció $f(x)$, troba:



a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$;

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 2; d) 0; e) 0; f) 3; g) $+\infty$;
h) 0

Límit en un punt

31. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$;

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$;

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2}$; f) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$;

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$; h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

a) 5; b) 0; c) -2 ; d) $\sqrt{2}$; e) 2; f) 2; g) 1;
h) e^2

32. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ troba:}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Perquè hi hagi límit en el punt de ruptura, els límits laterals han de ser iguals.

a) 5; b) 4; c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

33. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{3b^3 - 2b^2}{b}$ d) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2 - 7b}{4b}$

Treu-ne factor comú i simplifica cada fracció.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-2)} = -2$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3$;

c) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2(3b-2)}{b} = 0$;

d) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b(b-7)}{4b} = -\frac{7}{4}$

34. Resol els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 - 4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 + 4x + 3}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x^3 - x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = 2$

35. Calcula el límit de la funció

$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x}$ en $x = 3$, $x = 0$ i $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

Límit quan $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

36. Calcula els límits següents i representa la informació que n'obtinguis:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x)^2$

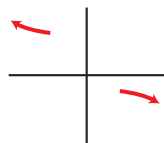
Vegeu solució en l'exercici 37.

37. Calcula el límit de les funcions de l'exercici anterior quan $x \rightarrow -\infty$ i representa la informació que n'obtinguis.

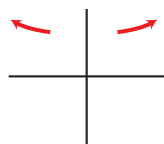
Resolució dels exercicis 36 i 37:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty;$

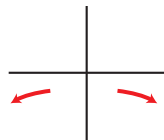
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$



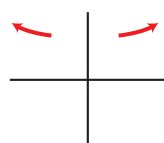
b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$

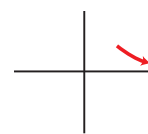


38. Comprova, donant valors grans a x , que les funcions següents tendeixen a 0 quan $x \rightarrow +\infty$.

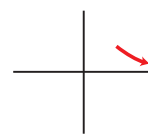
a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10}$ b) $f(x) = \frac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \frac{2}{10x^2 - x^3}$

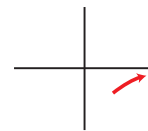
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$



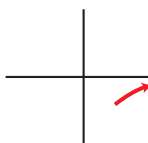
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



39. Calcula el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$ de cada una de les funcions següents. Representa el resultat que n'obtinguis.

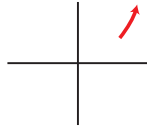
a) $f(x) = x^3 - 10x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{2}$ d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

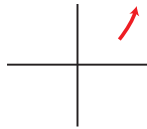
LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

Dóna a x «valors grans» i treu-ne conclusions.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



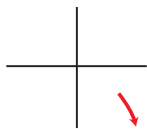
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



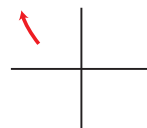
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



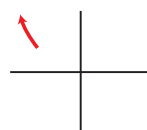
a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



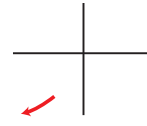
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



Pàgina 153

40. Calcula els límits següents i representa-hi les branques que n'obtinguis:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

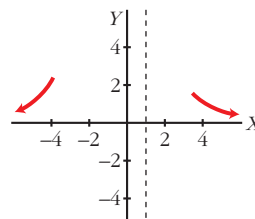
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

Vegeu solució en l'exercici 41.

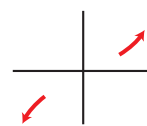
41. Calcula el límit de totes les funcions de l'exercici anterior quan $x \rightarrow -\infty$.

Resolució dels exercicis 40 i 41:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$

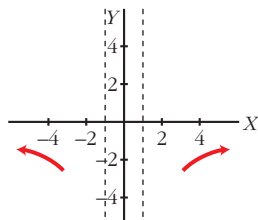


b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$

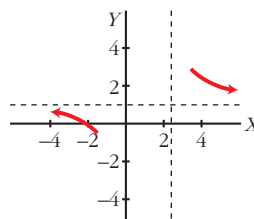


LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

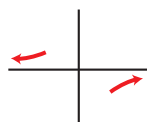
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 - 1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2 - 1} = 0$



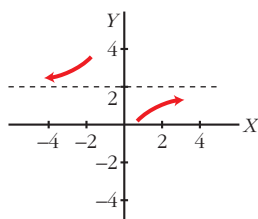
h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2 - x)^3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2 - x)^3} = 0$



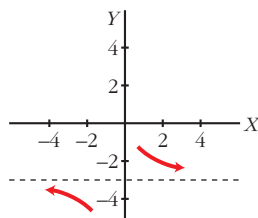
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$



f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = +\infty$



g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3$



42. Resol els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x - 1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x - 2)^2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{(2x + 1)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{5x}$

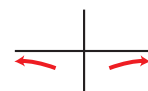
a) 3; b) $-\infty$; c) 0; d) $+\infty$.

43. Calcula el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$ de les funcions següents i representa-hi les branques que n'obtinguis:

a) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ b) $f(x) = 10x - x^3$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ d) $f(x) = \frac{1 - 12x^2}{3x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$;

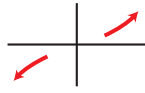


b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;

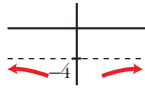


LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

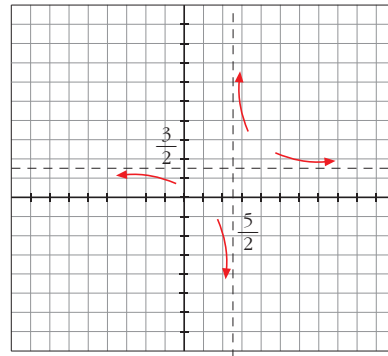
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$



b) Asímtota vertical $x = \frac{5}{2}$
 Asímtota horizontal $y = \frac{3}{2}$



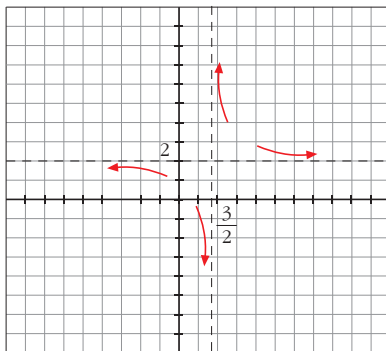
Asímtotes

44. Troba les asímtotes de les funcions següents i situa-hi la corba respecte a aquestes:

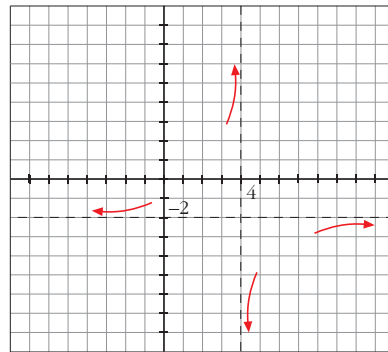
a) $y = \frac{4x + 1}{2x - 3}$ b) $y = \frac{3x}{2x - 5}$

c) $y = \frac{2x + 3}{4 - x}$ d) $y = \frac{2}{1 - x}$

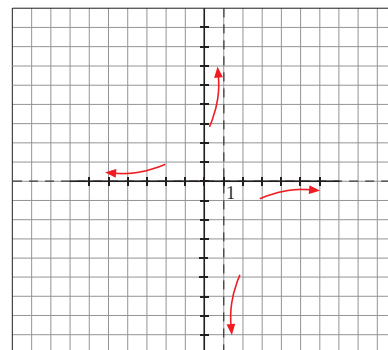
a) Asímtota vertical $x = \frac{3}{2}$
 Asímtota horizontal $y = 2$



c) Asímtota vertical $x = 4$
 Asímtota horizontal $y = -2$



d) Asímtota vertical $x = 1$
 Asímtota horizontal $y = 0$



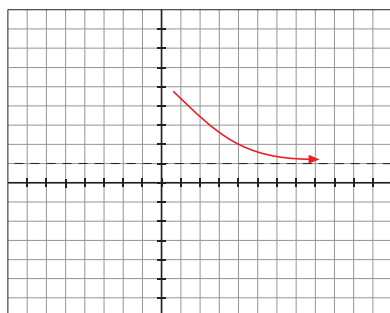
LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

45. Troba les asímptotes de les funcions següents i situa-hi la corba respecte a aquestes:

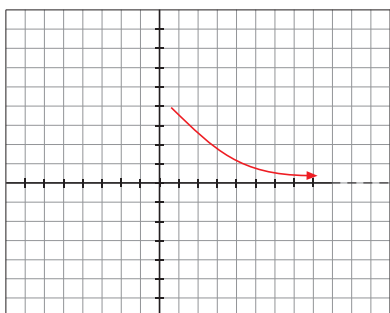
a) $y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ b) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$ d) $y = \frac{x^4}{x - 1}$

a) Asímtota horitzontal $y = 1$

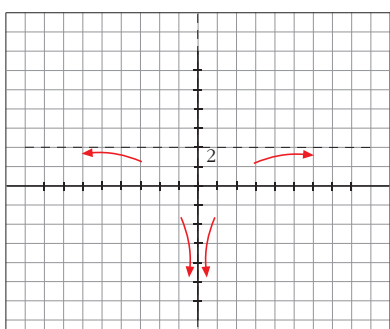


b) Asímtota horitzontal $y = 0$



c) Asímtota vertical $x = 0$

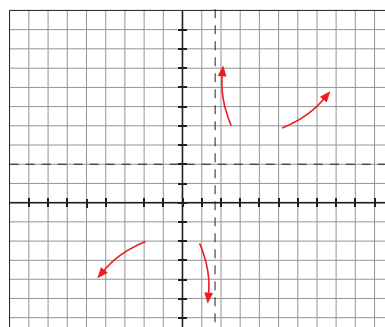
Asímtota horitzontal $y = 2$



d) Asímtota vertical $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x-1} = -\infty$$



46. Troba les asímptotes de les funcions següents i situa-hi la corba respecte a aquestes:

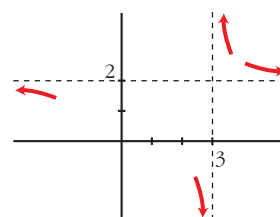
a) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$

e) $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ f) $f(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$

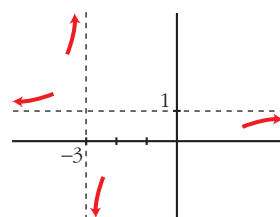
a) Asímtota vertical: $x = 3$

Asímtota horitzontal: $y = 2$



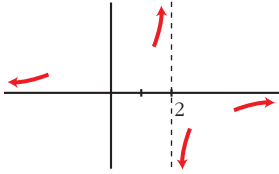
b) Asímtota vertical: $x = -3$

Asímtota horitzontal: $y = 1$

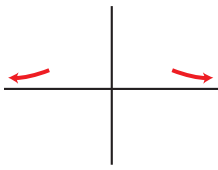


LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

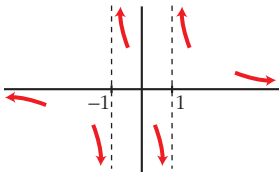
- c) Asímtota vertical: $x = 2$
 Asímtota horitzontal: $y = 0$



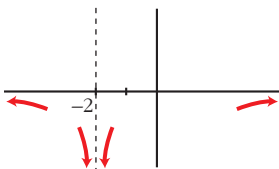
- d) Asímtota vertical: $y = 0$
 No té més asímtotes.



- e) Asímtota vertical: $x = 1, x = -1$
 Asímtota horitzontal: $y = 0$



- f) Asímtota vertical: $x = -2$
 Asímtota horitzontal: $y = 0$



47. Cada una de les funcions següents té una asímtota obliqua. Troba-la i estudia la posició de la corba respecte a aquesta:

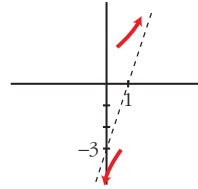
a) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$ d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$ f) $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

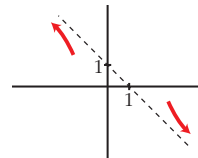
a) $\frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$

Asímtota obliqua: $y = 3x - 3$



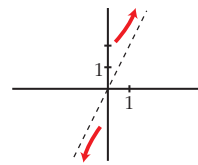
b) $\frac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \frac{3}{x}$

Asímtota obliqua: $y = -x + 1$



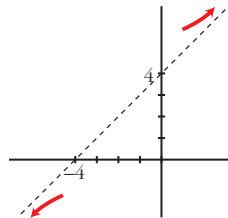
c) $\frac{4x^2-3}{2x} = 2x - \frac{3}{2x}$

Asímtota obliqua: $y = 2x$



d) $\frac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \frac{10}{x-3}$

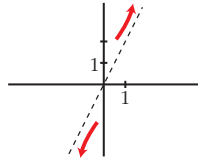
Asímtota obliqua: $y = x + 4$



LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

e) $\frac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \frac{4x - 3}{x^2 - 2}$

Asímtota obliqua: $y = 2x$



f) $\frac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \frac{1}{2x - 2}$

Asímtota obliqua: $y = -x - 1$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{x^2 - 2x} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x^2 - 2x} = -\infty$

c) $f(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty;$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty;$

d) $f(t) = \frac{t^2(t - 2)}{t^2}; \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -2$

Per resoldre

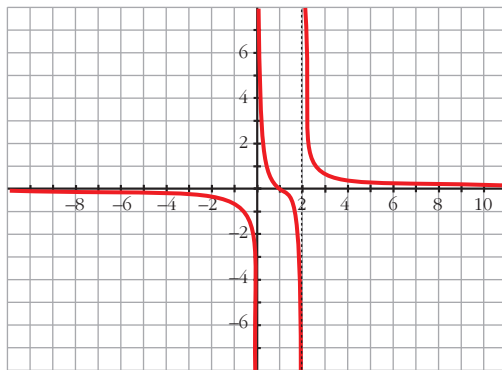
48. Calcula els límits de les funcions següents en els punts que anul·len el seu denominador:

a) $f(x) = \frac{3x}{2x + 4};$ b) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x};$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4};$ d) $f(t) = \frac{t^3 - 2t^2}{t^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty;$ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty;$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x^2 - 2x} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 1}{x^2 - 2x} = -\infty$

49. Troba les asímtotes de les funcions següents i situa la corba respecte a cada una:

a) $y = \frac{(3 - x)^2}{2x + 1}$ b) $y = \frac{5x - 2}{2x - 7}$

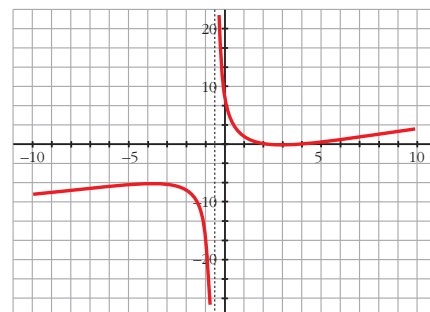
c) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$ d) $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$

e) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ f) $y = \frac{3x^2}{x + 2}$

a) Asímtotes: $y = -\frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$

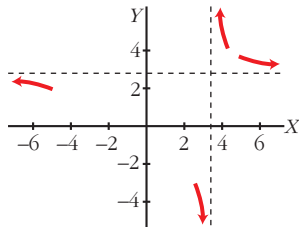
$\lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{(3 - x)^2}{2x + 1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{(3 - x)^2}{2x + 1} = -\infty$

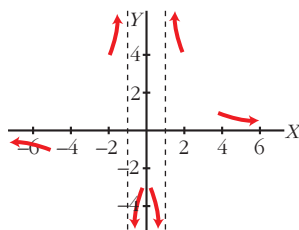


LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

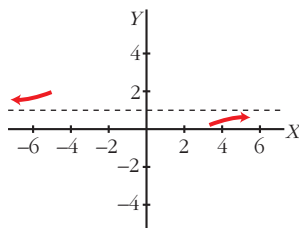
b) Asímptotes: $y = \frac{5}{2}$; $x = \frac{7}{2}$



c) Asímptotes: $y = 0$; $x = \pm 1$



d) Asímptotes: $y = 1$



e) Asímptota en $x = 2$

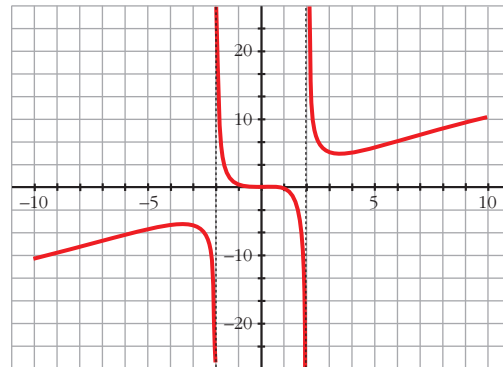
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

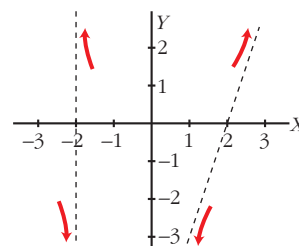
en $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$



f) Asímptotes: $x = -2$; $y = 3x - 6$



50. Troba les branques infinites d'aquestes funcions. Quan tinguin asímptotes, situa-hi la corba:

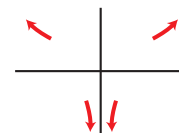
a) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$ b) $y = \frac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2}$

c) $y = \frac{1}{9 - x^2}$ d) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

e) $y = \frac{2x^2}{x + 3}$ f) $y = \frac{x^3}{2x - 5}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asímptota vertical: $x = 0$



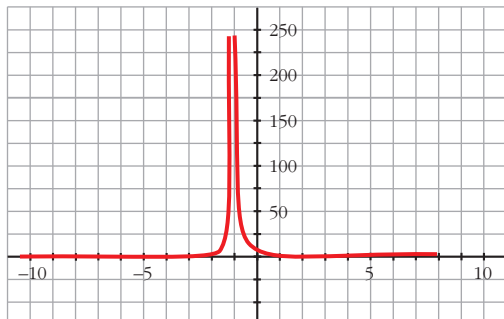
b) Asímptota vertical $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2} = +\infty$$

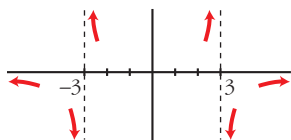
Asímptota horitzontal $y = 1$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^2}{(x+1)^2} = 1$$

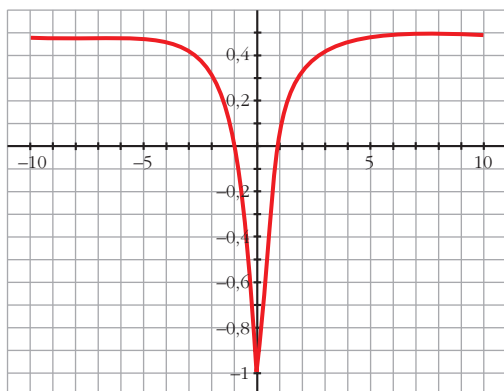


c) Asímptotes verticals: $x = 3, x = -3$
 Asímptota horitzontal: $y = 0$

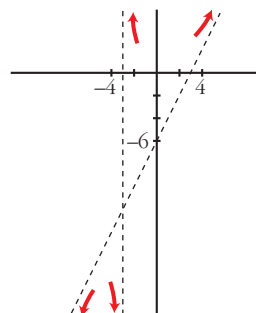


d) Asímptota horitzontal en $y = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 1)}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

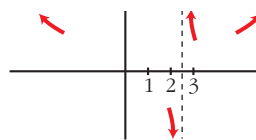


e) Asímptota vertical: $x = -3$
 Asímptota obliqua: $y = 2x - 6$



f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asímptota vertical: $x = \frac{5}{2}$



Pàgina 154

51. Demostrea que la funció $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solament té una asímptota vertical i una altra d'horitzontal.

En trobar $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ veuràs que no és ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

Asímptota vertical: $x = 0$

Asímptota horitzontal: $y = 1$

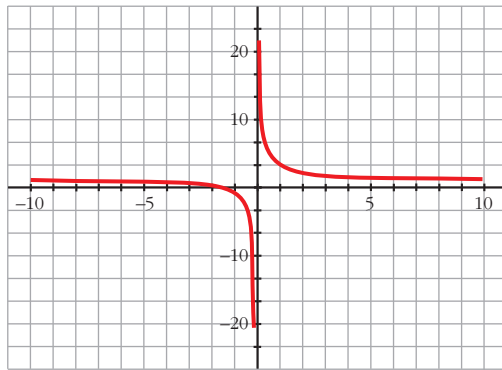
52. Calcula els límits següents i representa-hi els resultats que obtinguis:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

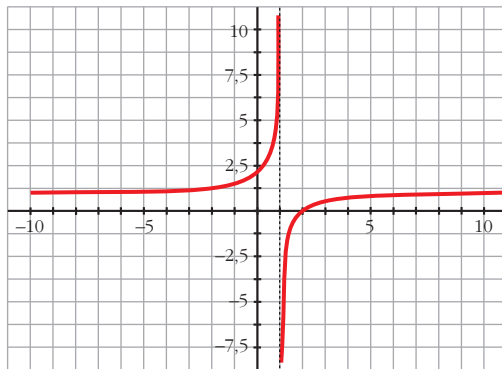
a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{5}{3}$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{2}{3}$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

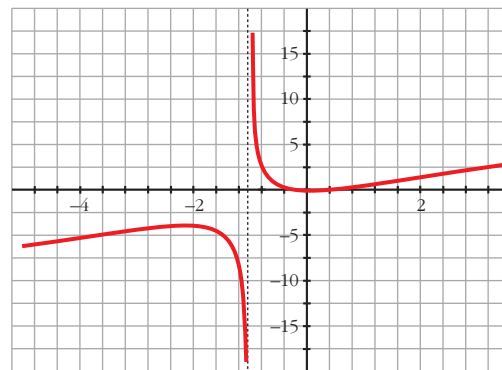


$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = 0$$



$$b) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = -\infty$$



53. Calcula els límits següents i representa-hi els resultats que obtinguis:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$$

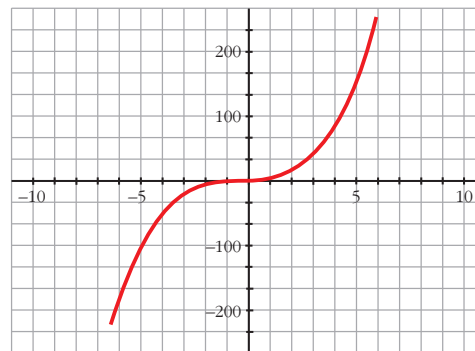
$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \infty$$

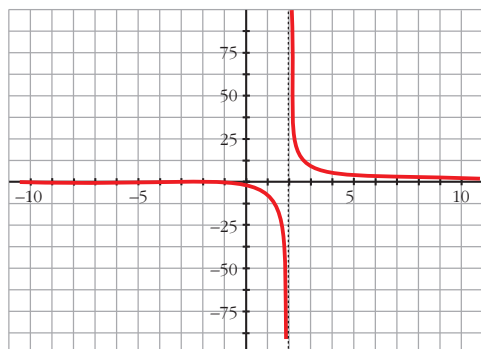
$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$$



LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \infty$

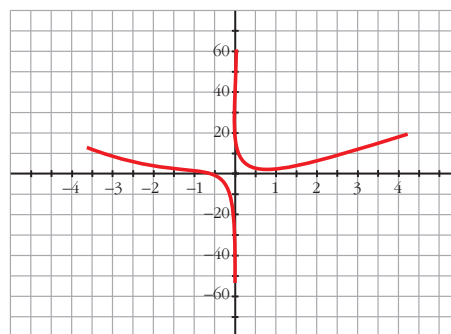
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = -\infty$



b) asímptota vertical $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 1}{x} = -\infty$



54. Troba les asímptotes de les funcions següents:

a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{x^3 + 1}{x}$

c) $y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$

d) $y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

e) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

f) $y = x + 1 + \frac{5}{x}$

a) asímptotes verticals $x = 1$

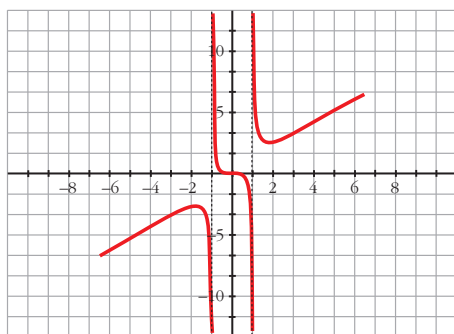
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$

asímtotes verticals $x = -1$

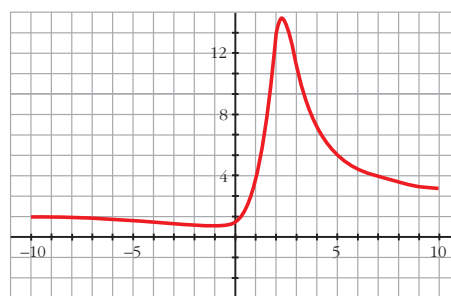
$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$



c) asímptota horitzontal

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5} = 2$



d) $y = 0, x = \pm 1$; e) $x = 5, y = x$; f) $x = 0, y = x + 1$

55. Representa les funcions següents i explica si són discontinües en algun dels seus punts:

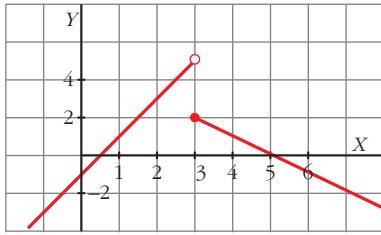
a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

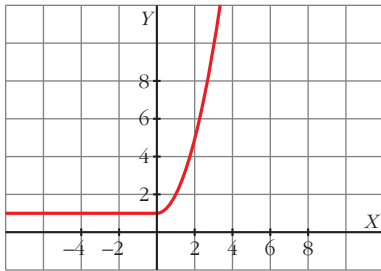
c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

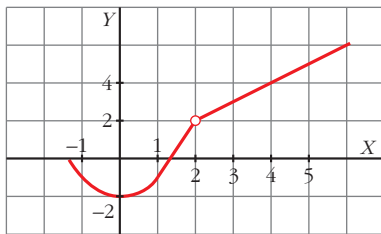
a) Discontínua en $x = 3$.



b) Funció contínua.



c) Discontínua en $x = 2$.



56. a) Calcula el límit de les funcions de l'exercici anterior en $x = -3$ i $x = 5$.

b) Troba, en cada una, el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -7$; $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 26$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$;

c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 7$; $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

57. Calcula els límits quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = 2^{x-1}$; b) $f(x) = 0,75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$; d) $f(x) = 1/e^x$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

58. Troba les branques infinites de les funcions exponencials següents:

a) $y = 2^{x+3}$ b) $y = 1,5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$ d) $y = e^{-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Asíptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$: $y = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Asíptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$: $y = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

Asíptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$: $y = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$: $y = 0$

59. Calcula, en cada cas, el valor de k perquè la funció $f(x)$ sigui contínua en qualsevol \mathbb{R} .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 5 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= 3 + k \end{aligned} \right\} 5 = 3 + k \Rightarrow k = 2$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array} \right\}$$

$$5 = 4 + 2k \Rightarrow k = 1/2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \\ f(0) = k \end{array} \right\} k = 1$$

60. Estudia la continuïtat d'aquestes funcions:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \Rightarrow$$

\Rightarrow Contínua en $x = 1$

$x \neq 1 \Rightarrow$ Contínua

És contínua en \mathbb{R}

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow Contínua en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow Contínua en $x = 1$

$x \neq 1$ i $x \neq -1 \Rightarrow$ Contínua

És contínua en \mathbb{R}

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \Rightarrow$$

\Rightarrow Discontínua en $x = 0$

Si $x \neq 0$, és contínua.

61. Calcula a perquè les funcions següents siguin contínues en $x = 1$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - a \end{array} \right\} 2 = 4 - a \Rightarrow a = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array} \right\} a = 2$$

62. En una empresa es fan muntatges en cadena. El nombre de muntatges realitzats per un treballador sense experiència depèn dels dies d'entrenament segons la funció $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ (t en dies).

a) Quants muntatges farà el primer dia? I el desè dia?

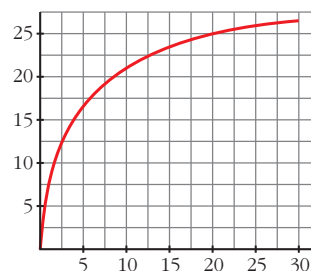
b) Representa'n la funció sabent que el període d'entrenament és d'un mes.

c) Què passaria amb el nombre de muntatges si l'entrenament no s'acabés mai?

a) $M(1) = 6$ muntatges el primer dia.

$M(10) = 21,43 \rightarrow 21$ muntatges el desè dia.

b)



c) S'aproparia a 30 (així $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$).

Pàgina 155

63. Les despeses d'una empresa depenen dels ingressos, x . Així:

$$g(x) = \begin{cases} 0,6x + 200 & \text{si } 0 \leq x \leq 1000 \\ 1000x/(x+250) & \text{si } x > 1000 \end{cases}$$

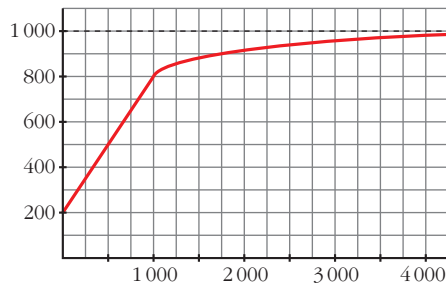
LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

en què els ingressos i les despeses s'expressen en euros.

a) Representa $g(x)$ i digues si és funció contínua.

b) Calcula el límit de $g(x)$ quan $x \rightarrow +\infty$ i explica'n el significat.

a) És contínua.



b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1000$.

Com a màxim gasten 1000 € al mes.

Qüestions teòriques

64. ¿Es pot calcular el límit d'una funció en un punt en el qual la funció no estigui definida? Aquesta funció pot ser contínua en aquest punt?

Sí que es pot calcular, però no pot ser contínua.

65. Una funció pot tenir dues asíptotes verticals? En cas afirmatiu, posa'n un exemple.

Sí. Per exemple, $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$ té $x = 0$ i $x = 1$ com a asíptotes verticals.

66. El denominador d'una funció $f(x)$ s'anul·la en $x = a$. Existeix necessàriament una asíptota vertical en $x = a$? Posa'n exemples.

No. Per exemple, $f(x) = \frac{3x^2 + x}{x}$ en $x = 0$; perquè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x+1)}{x} = 1$$

67. Una funció pot tenir més de dues asíptotes horitzontals?

Sí.

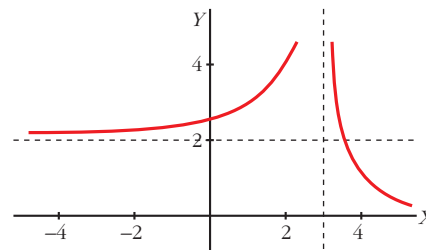
68. Representa una funció que compleixi aquestes condicions:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

És discontinua en algun punt?

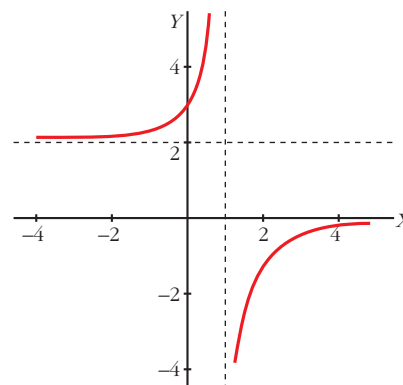
Sí, és discontinua almenys en $x = 3$.



69. Representa una funció que compleixi aquestes condicions:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$



LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

70. Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, podem afirmar que f és contínua en $x = 2$?

No. Perquè, si fos contínua, hauria de ser, a més a més, $f(2) = 5$.

71. Existeix cap valor de k per al qual la funció $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sigui contínua en $x = 0$? Justifica'n la resposta.

No, perquè no existeix $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Per aprofundir

72. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$;

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x|} = 3$

73. Atès que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x) = +\infty$, troba un valor de x per al qual $x^2 - 3x$ sigui més gran que 5000.

Per exemple, per a $x = 100$, $f(x) = 9700$.

74. Troba un valor de x per al qual $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sigui més petit que 0,001.

Per exemple, per a $x = 1000$, $f(x) = 0,00033$.

75. Troba els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^3)$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,75^x - x)$

a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) 0; d) $+\infty$.

76. Quina és l'asíptota vertical d'aquestes funcions logarítmiques? Troba'n el límit quan $x \rightarrow +\infty$:

a) $y = \log_2(x - 3)$

b) $y = \ln(x + 2)$

a) Asíptota vertical: $x = 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asíptota vertical: $x = -2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Per pensar una mica més

77. La Raquel vol pujar amb bicicleta al mirador de la muntanya i després baixar, de manera que la velocitat mitjana amb la qual realitzi el recorregut d'anada i tornada sigui de 40 km/h. Ja hi ha pujat i ho ha fet a 20 km/h. Es demana a quina velocitat haurà de baixar per aconseguir-ne l'objectiu.

a) Troba la velocitat mitjana final per a velocitats de baixada de 60, 80, 100 i 200 km/h.

b) Troba l'expressió de la velocitat mitjana final, V , per a una velocitat de baixada de x km/h.

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

c) Comprova que la velocitat mitjana desitjada, 40 km/h, és el límit $\lim_{x \rightarrow +\infty} V$.

Què significa això?

d) Torna a l'enunciat i raona de la manera següent: si la velocitat mitjana en la pujada és la meitat de la desitjada, és perquè el temps que ha emprat ha estat el doble, és a dir, el temps que ha tardat a pujar és tant com el que tenia per pujar i baixar. S'ha quedat sense temps. Ha de baixar a velocitat infinita!

a)

VELOCITAT DE BAIXADA	60	80	100	200
VELOCITAT MITJANA FINAL	30	32	33,33	36,36

b) Anomenem d = la distància que ha de recórrer en la pujada. Per tant, entre la pu-

jada i la baixada recorre $2d$.

Recordem que: velocitat = $\frac{\text{espai}}{\text{temps}}$

El temps que tarda en total serà el que tarda en pujar (a 20 km/h) més el que tarda en baixar (a x km/h):

$$\frac{d}{20} + \frac{d}{x} = d \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{x} \right) = d \left(\frac{x+20}{20x} \right)$$

c) La velocitat mitjana final serà:

$$V = \frac{2d}{t} = \frac{2d}{d[(x+20)/20x]} = \frac{2 \cdot 20x}{x+20} = \frac{40x}{x+20} \rightarrow V(x) = \frac{40x}{x+20}$$

Per tant: $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 40$