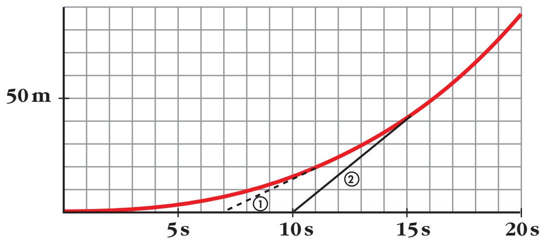
Pàgina 156

Reflexiona i resol

1. Agafar un autobús en marxa

A la gràfica següent, la línia vermella representa el moviment d'un autobús que surt de la parada i, a poc a poc, va guanyant velocitat. ① i ② corresponen a passatgers que arriben tard i corren per agafar l'autobús en marxa.



El passatger ① arriba a la parada 7 s després que surti l'autobús, i l'agafa 4 s després de la parada 20 m més enllà.
Va córrer a $\frac{20}{4}$ = 5 m/s 5 · 3,6 = 18 km/h.

(Recorda que per passar de m/s a km/h es multiplica per 3,6; és a dir, *V* m/s = 3,6*V* km/h.)

La velocitat de l'autobús en l'instant en què s'agafa la trobarem, aproximadament:
En l'instant 10 s es troba a 16 m de la parada. En l'instant 12 s es troba a 25 m de la parada.
Velocitat mitjana = $\frac{9 \text{ m}}{2 \text{ s}}$ = 4,5 m/s = = 16,2 km/h
Com que el passatger ① arriba a l'autobús amb una velocitat aproximadament igual a la d'aquest en aquest instant, hi accedirà *suaument*.

a) Al viatger ② l'acosten amb bicicleta. Descriu-ne el moviment i troba la velocitat a què corre.

b) Quina és la velocitat aproximada de l'autobús en el moment que l'agafa el passatger ②? Aquest passatger entra suaument a l'autobús?

a) El passatger 2 arriba a la parada 10 s després que hagi sortit l'autobús, i l'atrapa 6 s després, 50 m més enllà.

Per tant, va córrer a $\frac{50}{6}$ = 8,33 m/s. És a dir: 8,33 · 3,6 = 30 km/h

b) En l'instant 15 s l'autobús està a 43 m de la parada. En l'instant 17 s, a 59 m.

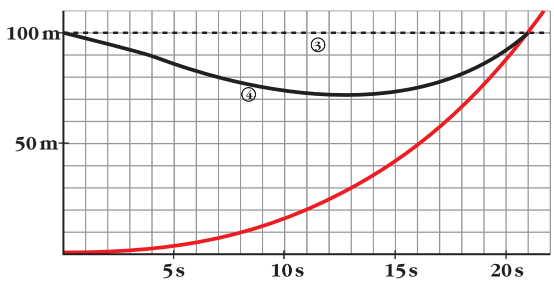
Velocitat mitjana = $\frac{16 \text{ m}}{2 \text{ s}}$ = 8 m/s = = 28,8 km/h

Les velocitats del passatger 2 i de l'autobús són, aproximadament, iguals en el moment que el passatger accedeix a l'autobús; per tant, hi accedirà suaument.

Pàgina 157

2. És preferible esperar o córrer darrere l'autobús?

Els viatgers ③ i ④, en el moment de la sortida de l'autobús, eren a 100 m de la parada. El ③ decideix esperar-lo i entrar-hi quan passi per allí.
El ④ té un comportament estrany. Estrany?

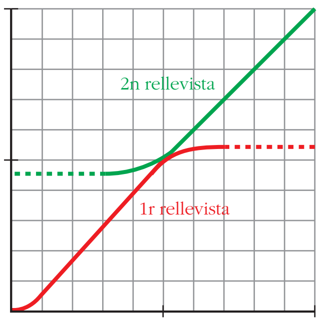


a) Descriu el moviment del passatger ④.
b) Explica per què el comportament del passatger ④ és molt més sensat que el del ③, el qual tindrà molt difícil l'entrada a l'autobús.

a) Intenta assolir la velocitat de l'autobús per accedir-hi suaument.
b) El passatger 4 accedeix suaument a l'autobús (amb la mateixa velocitat, aproximadament); no obstant això, el 3 no.

3. Cursa de relleus

La gràfica següent reflecteix el comportament de dos atletes, del mateix equip, en una cursa de relleus:



a) Per què a les curses de relleus 4 × 100 m cada rellevista comença a córrer abans que arribi el seu company?
b) Què passaria si esperés quiet l'arribada de l'altre?
c) És raonable que les gràfiques dels seus moviments siguin tangents? Com són les seves velocitats en el moment del lliurament del testimoni?

a) Perquè el testimoni passi del rellevista que arriba al que se'n va sense brusquedat.
b) L'intercanvi seria molt brusc i es perdria temps.
c) Sí, així tots dos portaran aproximadament la mateixa velocitat.

Pàgina 159

1. Troba la TVM de la funció $y = x^2 - 8x + 12$ en els intervals: [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]

$$\text{TVM }[1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 5}{1} = -5$$

$$\text{TVM }[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 5}{3} = -4$$

$$\text{TVM }[1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

$$\text{TVM }[1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$\text{TVM }[1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{0 - 5}{5} = -1$$

$$\text{TVM }[1, 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$\text{TVM }[1, 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

2. Troba la TVM de $y = x^2 - 8x + 12$ en l'interval variable [1, 1 + h]. Comprova, donant a h els valors adequats, que s'obtenen els resultats de l'exercici anterior.

$$\text{TVM }[1, 1 + \text{h}) = \frac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} =$$

$$= \frac{(1 + \text{h})^2 - 8(1 + \text{h}) + 12 - 5}{\text{h}} = \frac{\text{h}^2 - 6\text{h}}{\text{h}} =$$

$$= \frac{\text{h}(\text{h} - 6)}{\text{h}} = \text{h} - 6$$

Donant a h els valors 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 s'obtenen els resultats de l'exercici anterior.

Pàgina 161

3. Troba la derivada de $y = 5x - x^2$ en els punts d'abscisses 4 i 5.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(4+h) - (4+h)^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{20 + 5h - 16 - h^2 - 8h - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-h-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h - 3) = -3$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(5+h) - (5+h)^2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)(5-5-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-5 - h) = -5$$

4. Troba la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en els punts d'abscisses 1, –1 i 5.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(1+h-2)] - (-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-1)] + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h - 3}{(h-1)h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(-1+h-2)] - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-3)] + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 3}{h(h-3)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(5+h-2)] - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h+3)] - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{h(h+3)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h+3} = -\frac{1}{3}$$

5. Troba la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ en els punts d'abscisses –2, –1, 1 i 2.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(1/-2+h) - (1/-2)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + (-2+h)/2(-2+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h/-4+2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-4+2h} = -\frac{1}{4}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{((1/-1+h) - (1/-1))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h/-1+h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-1+h} = -1$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1/1+h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h/1+h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} -\frac{1}{1+h} = -1$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1/2+h) - 1/2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h/2(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{4+2h} = -\frac{1}{4}$$

6. Troba la derivada de $y = x^2 - 2x$ en els punts d'abscisses –2, –1, 0, 1, 2, 3 i 4.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 - 2(-2+h) - 8}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 - 4h + 4 - 2h - 8}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-6)}{h} = -6$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 - 2h + 2 - 2h - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h} = -2$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(+1+h)^2 - 2(1+h) - (-1)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 2 - 2h + 1}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} = 0$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 0}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 4 - 2h}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 6 - 2h - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 2(4+h) - 8}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 8 - 2h - 8}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+6)}{h} = 6$$

Pàgina 162

7. Troba la derivada de la funció $f(x) = 5x - x^2$ i comprova que, a partir d'aquesta, es poden obtenir els valors concrets trobats en l'exercici resolt 1 i en l'exercici proposat 3 de la pàgina anterior.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - (x+h)^2 - (5x - x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{5x + h - x^2 - h^2 - 2xh - 5x + x^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 2xh + 5h}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-h - 2x + 5)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (-h - 2x + 5) = -2x + 5$$

Substituint x pels valors indicats, obtenim:
$f'(1) = 3$, $f'(0) = 5$, $f'(3) = -1$, $f'(4) = -3$, $f'(5) = -5$

8. Troba la derivada de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3x h^2 + 3x^2 h}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h^2 + 3x h + 3x^2)}{h} = 3x^2$$

9. Troba la derivada de $f(x) = \frac{3}{x-2}$ i comprova que, a partir d'aquesta, es poden obtenir els valors concrets calculats en l'exercici resolt 2 i en l'exercici proposat 4 de la pàgina anterior.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3/(x+h-2) - 3/(x-2)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x-2) - 3(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x - 6 - 3x - 3h + 6}{h(x-2)(x+h-2)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(x-2)(x+h-2)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x-2)(x+h-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

Substituint x pels valors indicats, obtenim:
$f'(4) = -\frac{3}{4}$; $f'(1) = -3$; $f'(-1) = -\frac{1}{3}$;
$f'(5) = -\frac{1}{3}$

10. Troba la funció derivada de $y = x^3 + x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 + (x+h)^2] - (x^3 + x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h + 2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2)}{h} =$$
$$= 3x^2 + 2x$$

Pàgina 164

Troba la funció derivada de les funcions següents:

11. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 6x - 6$

12. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

13. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x)^2}}$$

14. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} =$$
$$= \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

15. $f(x) = \sin x \cos x$

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

16. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

17. $f(x) = x\ e^x$

$f'(x) = e^x + x\ e^x = e^x(1 + x)$

18. $f(x) = x \cdot 2^x$

$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot ln\ 2 = 2^x(1 + x\ ln\ 2)$

19. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot log_2\ x$

$f'(x) = 2x\ log_2\ x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 2} =$

$= 2x\ log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x\ ln\ 2}$

20. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\ 2x}{(x^2 - 1)^2} =$

$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

21. $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$

$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} =$

$= \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2} = 2x + 3 - \frac{3}{x^2}$

22. $f(x) = \frac{log\ x}{x}$

$f'(x) = \frac{[1/ln\ 10)] - log\ x}{x^2} = \frac{1 - ln\ 10\ log\ x}{x^2\ ln\ 10}$

Pàgina 165

Troba la funció derivada de les funcions següents:

23. $f(x) = sin\ (x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\ cos(x^2 - 5x + 7)$

24. $f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$f'(x) = \frac{2}{3}\ (5x + 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$

25. $f(x) = sin(3x + 1) \cdot cos(3x + 1)$

$f'(x) = 3[cos^2(3x + 1) - sin^2(3x + 1)]$

26. $f(x) = \frac{log\ x^2}{x}$

$f(x) = \frac{2\ log\ x}{x}$; $f'(x) = \frac{2(1 - ln\ 10\ log\ x)}{x^2\ ln\ 10}$

27. $f(x) = cos\ (3x - \pi)$

$f'(x) = -3\ sin\ (3x - \pi)$

28. $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$

29. $f(x) = x\ e^{2x + 1}$

$f'(x) = e^{2x + 1} + x\ e^{2x + 1} \cdot 2 = e^{2x + 1}(1 + 2x)$

30. $f(x) = \frac{sin\ (x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1 + x^2}\ cos\ (x^2 + 1) +}{1 - x^2}$

$\frac{+ [x\ sin\ (x^2 + 1)]/\sqrt{1 + 2x^2}}{1 - x^2} =$

$= \frac{2x\ (1 - x^2)\ cos\ (x^2 + 1) + x\ sin\ (x^2 + 1)}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$

Pàgina 166

31. Calcula la funció derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ i troba:

a) Els pendents de les rectes tangents a les abscisses –1, 1 i 3.

b) Les equacions d'aquestes rectes tangents.

c) Les abscisses dels possibles màxims i mínims relatius.

d) És $f(x)$ creixent o decreixent en $x = 2$?

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

a) 11, –5 i 3

b) $y = 11\,(x + 1) - 4$; $y = -5\,(x - 1) - 2$; $y = 3\,(x - 3) - 8$

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 8/3$

d) $f'(2) = -4 < 0 \Rightarrow$ decreixent

Pàgina 167

Llenguatge matemàtic

1. En la fórmula que serveix per trobar l'equació de la recta tangent a una corba en un punt:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

digues el paper que té cada una de les lletres que hi intervenen. La *x* és la variable independent, de quina funció?

y: variable dependent

$f(a)$: valor de la funció f en $x = a$

$f'(a)$: valor de la funció derivada f' en $x = a$

x és la variable independent de la funció de la recta tangent a una corba.

Pàgina 169

32. Representa aquestes funcions:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

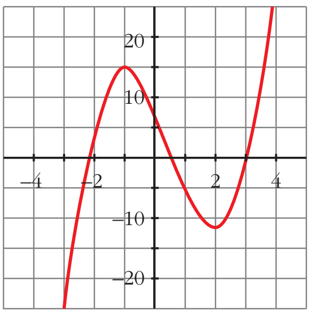
b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

c) $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Màxim en $(-1, 15)$.

Mínim en $(2, -12)$.

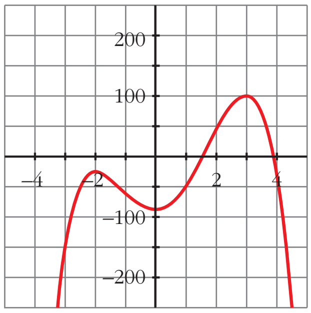


b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x\,(x^2 - x - 6) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Màxim en $(-2, -26)$ i en $(3, 99)$.

Mínim en $(0, -90)$.



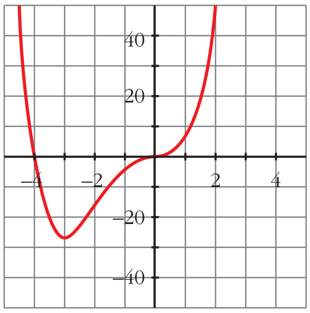
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2\,(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínim en $(-3, -27)$.

Punt d'inflexió en $(0, 0)$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3\,(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Punts de tall amb els eixos: $(0, 0)$ i $(-4, 0)$.



Pàgina 171

33. Representa les funcions racionals següents, seguint els passos de la pàgina anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$; **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$; **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

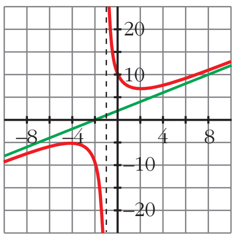
e) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$; **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

Màxim en $(-4, -5)$.
Mínim en $(2, 7)$.
Asímptota vertical: $x = -1$
Asímptota obliqua: $y = x + 2$



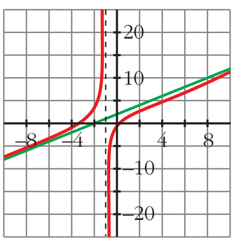
b) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} =$

$=$

$\dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} \neq 0$

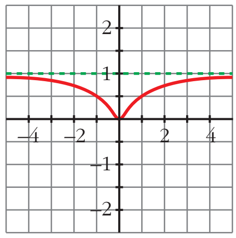
Punts de tall amb els eixos: $(0, 0)$ i $(-3, 0)$
Asímptota vertical: $x = -1$
Asímptota obliqua: $y = x + 2$



c) $f'(x) = \dfrac{2x\,(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$

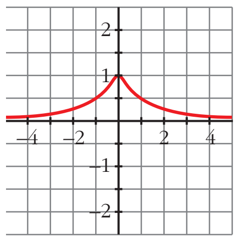
$= \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Mínim en $(0, 0)$.
Asímptota horitzontal: $y = 1$



d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Màxim en $(0, 1)$
Asímptota horitzontal: $y = 0$



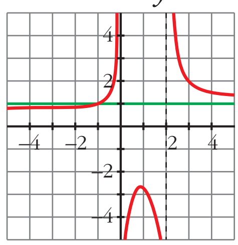
e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} =$

$= \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} =$

$= \dfrac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} =$

$= \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$

Màxim en $(0{,}73;\ -2{,}73)$.
Mínim en $(-2{,}73;\ 0{,}73)$.
Asímptotes verticals: $x = 0,\ x = 2$
Asímptota horitzontal: $y = 1$



f) $f'(x) = \dfrac{2x\,(x^2) - (x^2 - 1)2x}{(x^2)^2} =$

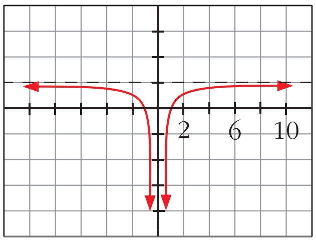
$= \dfrac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ No hi ha màxim/mínim

Asímptota horitzontal $y = 1$

Asímptota vertical $x = 0$

Punts de tall (1, 0) i (–1, 0).



Pàgina 176

Per practicar

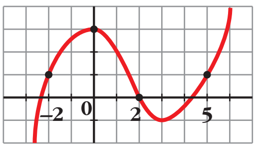
Taxa de variació mitjana

34. Calcula la taxa de variació mitjana d'aquesta funció en els intervals:

a) [–2, 0]

b) [0, 2]

c) [2, 5]



a) TVM [–2, 0] $= \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \dfrac{3 - 1}{2} = 1$

b) TVM [0, 2] $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{0 - 3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

c) TVM [2, 5] $= \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{1 - 0}{3} = \dfrac{1}{3}$

35. Troba la taxa de variació mitjana d'aquestes funcions en l'interval [1, 3] i indica si creixen o decreixen en aquest interval:

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

Si la TVM és positiva, la funció creix.

TVM [1, 3] $= \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{f(3) - f(1)}{2}$

a) TVM [1, 3] $= \dfrac{1/3 - 1}{2} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ Decreix

b) TVM [1, 3] $= \dfrac{-1 - 1}{2} = -1 \Rightarrow$ Decreix

c) TVM [1, 3] $= \dfrac{7 - 1}{2} = 3 \Rightarrow$ Creix

d) TVM [1, 3] $= \dfrac{8 - 2}{2} = 3 \Rightarrow$ Creix

36. Partint de la funció $f(x) = x^2 - 1$, troba la TVM en l'interval [2, 2 + h].

TVM [2, 2 + h] $= \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$

$= \dfrac{4 + h^2 + 4h - 1 - 3}{h} = h + 4$

37. Comprova que la TVM de la funció $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en l'interval [1, 1 + h] és igual a –h + 3. Calcula la TVM d'aquesta funció en els intervals [1, 2], [1; 1,5], utilitzant-hi l'expressió anterior.

TVM [1, 1 + h] $= \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} =$

$= \dfrac{-(1 + h^2 + 2h) + 5 + 5h - 3 - 1}{h} =$

$= 3 - h = -h + 3$

TVM [1, 2] = 2

TVM [1; 1,5] = 2,5

38. Compara la TVM de les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 3^x$ en els intervals [2, 3] i [3, 4] i digues quina de les dues creix més en cada interval.

Per a $f(x)$: TVM [2, 3] = 19

TVM [3, 4] = 37

Per a $g(x)$: TVM [2, 3] = 18

TVM [3, 4] = 54

En [2, 3] creix més $f(x)$.

En [3, 4] creix més $g(x)$.

Definició de derivada en un punt

39. Aplicant-hi la definició de derivada, calcula $f'(-2)$ i $f'(3)$, sent $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$.

$$f'(-2) = \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2(-2+h)-3}{5} + \dfrac{7}{5}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4 + 2h - 3 + 7}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f'(3) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2(3+h)-3}{5} - \dfrac{3}{5}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6 + 2h - 3 - 3}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

40. Troba la derivada de les funcions següents en $x = 1$, utilitzant-hi la definició de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x + 2)$

a) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h^2 + 2h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3h + 6)}{h} = 6$$

b) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2(1+h)+1)^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2h+3)^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4h + 12)}{h} = 12$$

c) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3/(1+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$$

d) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+h+2} - \dfrac{1}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{3(h+3)\,h} = -\frac{1}{9}$$

41. Troba el valor del creixement de $f(x) = (x - 3)^2$ en els punts $x = 1$ i $x = 3$, aplicant la definició de derivada.

$f'(x) = 2(x - 3)$

$f'(1) = -4$; $f'(3) = 0$

42. Troba el pendent de la tangent a la corba $y = x^2 - 5x + 1$ en el punt d'abscissa $x = -2$, utilitzant la definició de derivada.

$f'(x) = 2x - 5$; $m = f'(-2) = -9$

43. Troba el pendent de la tangent a la corba $y = 4x - x^2$ en el punt d'abscissa $x = 2$, aplicant la definició de derivada.

$f'(x) = 4 - 2x$; $f'(2) = 0$

44. Comprova, utilitzant la definició de derivada en un punt que:

a) $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$

b) $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 14x$

c) $f(x) = x^2 + x \rightarrow f'(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(x+h) - 5x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5x + 5h - 5x}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5h}{h} = 5$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7(x+h)^2 - 7x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7(x^2 + h^2 + 2xh) - 7x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7h^2 + 14xh}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(7h + 14x)}{h} =$

$= 14x$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h} = \lim\limits_{h \to 0}$

$\dfrac{h^2 + 2xh + h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h + 2x + 1)}{h} =$

$= 2x + 1$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

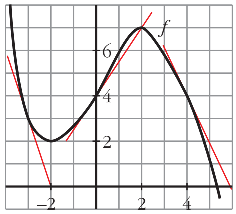
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(x+h) - 3/x}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3}{x^2 + xh} = \dfrac{-3}{x^2}$

45. Troba f' en els punts d'abscisses –3, 0 i 4.

Troba els pendents de les rectes tangents traçades en aquests punts.

$f'(-3) = -3$, $f'(0) = \dfrac{3}{2}$, $f'(4) = -2$

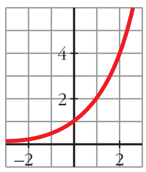


46. Indica, en la gràfica de l'exercici anterior, els punts en els quals la derivada és zero. En $x = 1$, la derivada és positiva o negativa? I en $x = 3$?

$f'(x) = 0$ en $(-2, 2)$ i en $(2, 7)$.

En $x = 1$ la derivada és positiva. En $x = 3$ és negativa.

47. Existeix algun punt en aquesta funció en el qual la derivada sigui negativa? Ordena de més petit a més gran els valors de $f'(-2)$, $f'(2)$ i $f'(0)$.



No, perquè és creixent.

$f'(-2) < f'(0) < f'(2)$

Regles de derivació

Troba la funció derivada d'aquestes funcions i calcula'n el valor en els punts que s'indiquen:

48. $y = 2x^3 + 3x^2 - 6;\ x = 1$

$y' = 6x^2 + 6x;\ y'(1) = 12$

49. $y = \cos(2x + \pi);\ x = 0$

$y' = -2 \sin(2x + \pi);\ y'(0) = 0$

50. $y = \dfrac{x}{3} + \sqrt{2};\ x = -\dfrac{17}{3}$

$y' = \dfrac{1}{3};\ y'\left(-\dfrac{17}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

51. $y = \dfrac{1}{7x+1};\ x = 0$

$y' = \dfrac{-7}{(7x+1)^2};\ y'(0) = -7$

52. $y = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2};\ x = \pi$

$y' = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\right);\ y'(\pi) = -\dfrac{1}{2}$

53. $y = \dfrac{2}{(x+3)^3};\ x = -1$

$y' = \dfrac{-4}{(x+3)^3};\ y'(-1) = -\dfrac{1}{2}$

54. $y = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{x}{2};\ x = 2$

$y' = \dfrac{3}{2}x^2 + 3x - \dfrac{1}{2};\ y'(2) = \dfrac{23}{2}$

Pàgina 177

55. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}};\ x = 8$

$y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}};\ y'(8) = -\dfrac{1}{16}$

56. $y = x \sin(\pi - x);\ x = \dfrac{\pi}{2}$

$y' = \sin(\pi - x) - x\cos(\pi - x);\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

57. $y = (5x-2)^3;\ x = \dfrac{1}{5}$

$y' = 15\,(5x-2)^2;\ y'\left(\dfrac{1}{5}\right) = 15$

58. $y = \dfrac{x+5}{x-5};\ x = 3$

$y' = \dfrac{-10}{(x-5)^2};\ y'(3) = -\dfrac{5}{2}$

Troba la funció derivada d'aquestes funcions:

59. a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $y = (x^2 - 3)^3$

a) $y' = \dfrac{e^x}{2} - e^{-2x}$ b) $y' = 6x(x^2-3)^2$

60. a) $y = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$; b) $y = \sqrt{x^2+1}$

a) $y' = 1$ (si $x \neq 0$); b) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

61. a) $y = \sqrt[3]{(x+6)^2}$; b) $y = \sqrt{\sin x}$

a) $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x+6)}}$; b) $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

62. a) $y = \dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $y = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$

a) $y = -3\,(1-x^2)^{-1/2}$

$y' = \dfrac{3}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

b) $y = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$

$y' = 7^{x+1} \cdot \ln 7 \cdot e^{-x} + 7^{x+1} \cdot (-e^{-x})$

$y' = 7^{x+1} \cdot e^{-x}\,(\ln 7 - 1)$

63. **a)** $y = \frac{1}{3x} + \frac{x}{3}$; **b)** $y = ln\ 3x + e^{\sqrt{x}}$

a) $y' = \frac{-1}{3x^2} + \frac{1}{3}$ b) $y' = \frac{1}{x} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

64. **a)** $y = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2$; **b)** $y = e^{2x} \cdot tg\ x$

a) $y' = \frac{-2x}{1+x^2}$

b) $y' = 2e^{2x}\ tg\ x + e^{2x}(1 + tg^2\ x) =$
$= e^{2x}(2\ tg\ x + 1 + tg^2\ x) = e^{2x}\ (1 + tg\ x)^2$

65. **a)** $y = \frac{x^3}{(x^2-1)^2}$; **b)** $y = cos^2\ x + e^{sin\,x}$

a) $y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$

$= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} =$

$= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$

b) $y' = 2 \cdot cos\ x + e^{sin\,x} \cdot cos\ x + sin\ x \cdot e^{sin\,x}$

66. **a)** $y = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$

b) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{1-x}$

a) $y' = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)\ 2\sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}}$

b) $y' = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 e^{1-x} -$

$- \left[\left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot (-x)\ e^{1-x}\right]$

67. **a)** $y = sin\ \frac{3\pi}{2}$; **b)** $y = log\ \frac{x^2}{3-x}$

a) $y' = 0$

b) $y = log\ x^2 - log\ (3-x) =$

$= 2\ log\ x - log\ (3-x)$

$y' = \frac{2}{x\ ln\ 10} + \frac{1}{(3-x)\ ln\ 10}$

68. **a)** $y = tg^3 x^2$; **b)** $y = \sqrt{ln\ x}$

a) $y' = 3\ tg^2\ x^2 \cdot (1 + tg^2\ x^2) \cdot 2x$

b) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

69. **a)** $y = arc\ sin\ \frac{x^2}{3}$

b) $y = arc\ tg\ (x^2 + 1)$

a) $y' = \frac{2x}{3\sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}}$

b) $y' = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

70. **a)** $y = arc\ cos\ \frac{1}{x}$

b) $y = arc\ tg\ \frac{\sqrt{x}}{2}$

a) $y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}}$

b) $y' = \frac{\frac{1}{4\sqrt{x}}}{1 + \frac{x}{4}}$

71. **a)** $y = \sqrt{arc\ tg\ x}$; **b)** $y = arc\ cos\ e^{-x}$

a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{arctg\,x}\ (1+x)^2}$

b) $y' = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$

72. **a)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

b) $y = arc\ tg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

a) $y' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

b) $y' = \dfrac{-\dfrac{2}{(1+x)^2}}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}$

Punts en els quals la derivada val *k*

73. Troba els punts en què la derivada és igual a 0 en les funcions següents:
a) $y = 3x^2 - 2x + 1$ b) $y = x^3 - 3x$

a) $y' = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$. Punt $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

b) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = 1$.
Punts $(-1, 2)$ i $(1, -2)$

74. Obtén els punts en què $f'(x) = 1$ en els casos següents:
a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+5}$

a) $f'(x) = 2x - 3 = 1$
$x = 2$; punt $(2, 0)$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+5)^2} = 1 \rightarrow x = -7$ i $x = -3$
Per tant, $(-7, 3)$ i $(-3, -1)$

75. Troba els punts en els quals la derivada de cada una de les funcions següents és igual a 2:
a) $y = x^2 - 2x$ b) $y = \dfrac{x}{x+2}$
c) $y = 4\sqrt{x+3}$ d) $y = ln\,(4x - 1)$

a) $y' = 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$ per tant $(2, 0)$

b) $y' = \dfrac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow x = -1$ i $x = 3$
per tant, $(-1, -1)$ i $(-3, 3)$

c) $y' = \dfrac{4}{2\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow x = -2$
per tant, $(-2, 4)$

d) $y' = \dfrac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow x = \dfrac{3}{4}$
per tant $(\dfrac{3}{4}, ln^2)$

76. Troba els punts en els quals la derivada val 0 en cada un dels casos següents:
a) $y = 2x^2 - 8x + 5$ b) $y = -x^2 + 5x$
c) $y = x^4 - 4x^2$ d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $y' = 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$; per tant, $(2, -3)$

b) $y' = -2x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2}$
per tant, $(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4})$

c) $y' = 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow x = 0$; $x = +\sqrt{2}$;
$x = -\sqrt{2}$;
per tant, $(0, 0)$; $(\sqrt{2}, -4)$ i $(-\sqrt{2}, -4)$

d) $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$
per tant, $(0, 1)$

Recta tangent

77. Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^2 - 5x + 6$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

$y' = 2x - 5$; $m = y'(2) = -1$, $y(2) = 0$
La recta és $y = -(x - 2) = 2 - x$.

78. Escriu l'equació de la recta tangent a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punt d'abscissa $x = -1$.

$y' = -2x + 2$; $m = y'(-1) = 4$, $y(-1) = 2$
La recta és $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$.

79. Escriu l'equació de la recta tangent a $y = x^2 + 4x + 1$, el pendent de la qual sigui igual a 2.

$y' = 2x + 4 = 2 \Rightarrow x = -1$; $y(-1) = -2$
La recta és $y = 2(x + 1) - 2 = 2x$.

80. Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $m = y'(0) = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = 1$

La recta és $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

Punts singulars

81. Obtén els punts singulars de les funcions següents:

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$
c) $y = x^4 - 4x^3$ **d)** $y = x^3 - 12x$

a) $y' = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{14}{3} \rightarrow \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

b) $y' = 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = 1$

$f(0) = 1$ i $f(1) = 0$, per tant, $(0, 1)$ i $(1, 0)$

c) $y' = 4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = 3$

$f(0) = 0$ i $f(3) = -27$

per tant, $(0, 0)$ i $(3, -27)$

d) $y' = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = 2$ i $x = -2$

$f(2) = -16$ i $f(-2) = 16$

per tant $(2, -16)$ i $(-2, 16)$

82. Troba els punts singulars de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

a) $y' = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1$ i $x = -1$

$f(1) = 2$ i $f(-1) = -2$

per tant, $(1, 2)$ i $(-1, -2)$

b) $y' = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 0$; per tant, $(0, 0)$

Pàgina 178

83. Comprova que les funcions següents no tenen punts singulars:

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $y' = 3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 \neq -1 \rightarrow$
$\rightarrow$ no és possible

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2} = 0 \rightarrow -1 \neq 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ no és possible

c) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ no és possible

d) $y' = \dfrac{1}{x} = 0 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ no és possible

Creixement i decreixement

84. Observa els resultats obtinguts en els exercicis del 48 al 58 i digues si cada una de les funcions donades és creixent o decreixent en el punt que s'indica.

48) creixent; 49) és màxim o mínim; 50) creixent; 51) decreixent; 52) decreixent; 53) decreixent; 54) creixent; 55) decreixent; 56) creixent; 57) creixent; 58) decreixent.

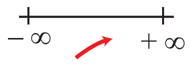
85. Obtén els intervals de creixement i decreixement de cada una de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{3x+1}{2}$ **b)** $y = 5 - 2x$

c) $y = x^2 - 3x + 2$ **d)** $y = 2x - x^2$

e) $y = x^3$ **f)** $y = x^3 - 3x$

a) $y' = \dfrac{3}{2} \rightarrow$ és creixent per $(-\infty, \infty)$

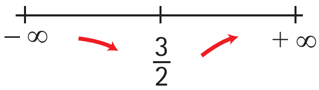


b) $y' = -2 \rightarrow$ és decreixent en l'interval $(-\infty, \infty)$

c) $y' = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$;

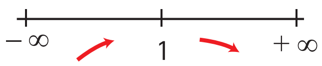
creixent per $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ i

decreixent per $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$



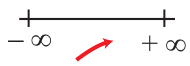
d) $y' = 2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1$

creixent per $(-\infty, 1)$ i decreixent per $(1, +\infty)$

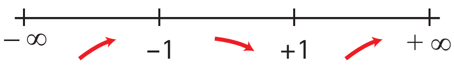


e) $y' = 3x^2$

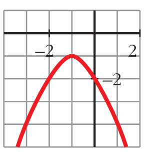
creixent en tot el seu domini $(+\infty, -\infty)$

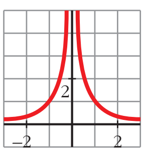


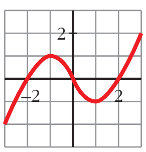
f) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = +1$ i $x = -1$



86. Indica en cada una d'aquestes funcions els valors de x en els quals f' és positiva i aquells en els quals f' és negativa.

a)


b)


c)


Observa'n el creixement i el decreixement. La primera creix si x < –1.

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

87. Donada la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén-ne la funció derivada i estudia'n el signe. Quins són els intervals de creixement i de decreixement de f? Té f màxim o mínim?

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\,(x^2 - 4x + 3) = 3\,(x - 1)\,(x - 3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 3$

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \rightarrow$ Intervals de creixement

$f'(x) < 0$ en $(1, 3) \rightarrow$ Interval de decreixement

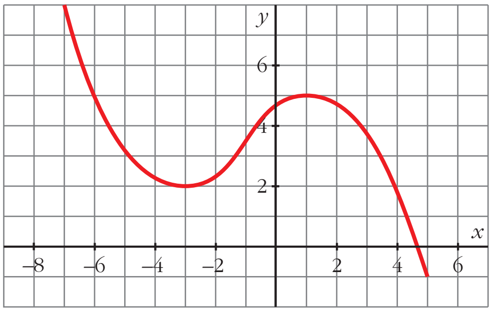
Màxim en $(1, 8)$ i mínim en $(3, 4)$.

Gràfiques de funcions polinòmiques i racionals

88. Representa una funció $y = f(x)$ de la qual sabem:

- **És contínua;**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
- **Té tangent horitzontal en (–3, 2) i en (1, 5).**

Indica si els punts de tangent horitzontal són màxims o mínims.



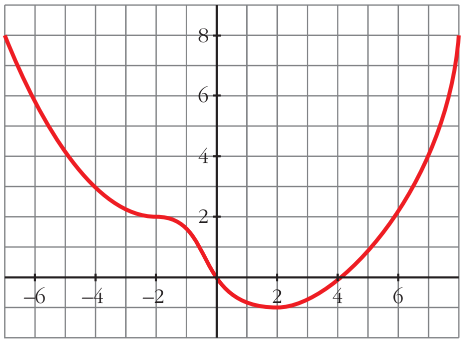
(–3, 2) és un mínim.

(1, 5) és un màxim.

89. D'una funció polinòmica sabem que:

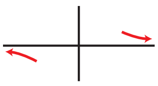
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
- **La seva derivada és 0 en (–2, 2) i en (2, –1).**
- **Talla els eixos en (0, 0) i en (4, 0).**

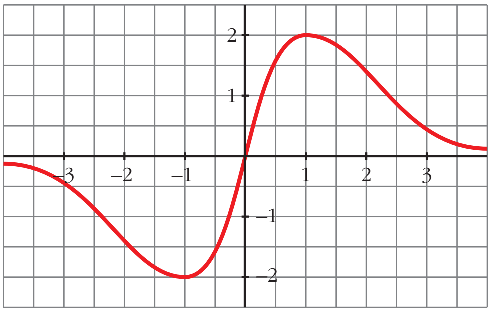
Representa-la gràficament.



90. Representa la funció contínua $y = f(x)$ de la qual sabem:

- **En els punts (–1, –2) i (1, 2) la tangent és horitzontal.**
- **Les branques infinites són així:**





91. Comprova que la funció $y = (x - 1)^3$ passa pels punts (0, –1), (1, 0) i (2, 1). La seva derivada s'anul·la en el punt (1, 0). Aquest punt, pot ser un màxim o un mínim?

$y(0) = -1$ passa per $(0, -1)$.

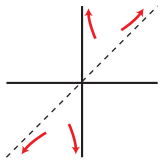
$y(1) = 0$ passa per $(1, 0)$.

$y(2) = 1$ passa per $(2, 1)$.

$y'(x) = 3\,(x - 1)^2 \to y'(1) = 0$

El punt (1, 0) no és ni màxim ni mínim.

92. Comprova que la funció $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ té dos punts de tangent horitzontal, (–1, –2) i (1, 2); les asímptotes són $x = 0$ i $y = x$ i la posició de la corba respecte de les asímptotes és la que s'indica en la il·lustració de la dreta. Representa-la.



$$y = x + \frac{1}{x}$$

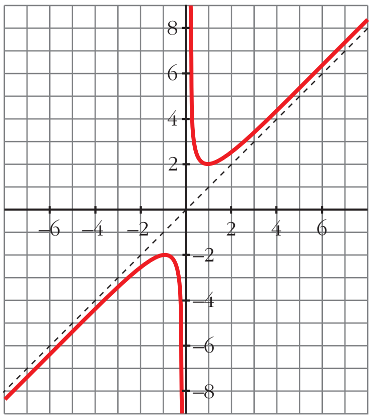
$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$$

Punts (–1, –2) i (1, 2).

$\lim\limits_{h \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{h \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asímptota vertical en $x = 0$.

Asímptota obliqua en $y = x$.



93. Comprova que la funció $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$:
• Té derivada nul·la en (0, 0);
• La recta $y = 2$ és una asímptota horitzontal.
• Posició de la corba respecte a l'asímptota:
Si $x \to -\infty$, $y < 2$
Si $x \to +\infty$, $y < 2$
Representa-la.

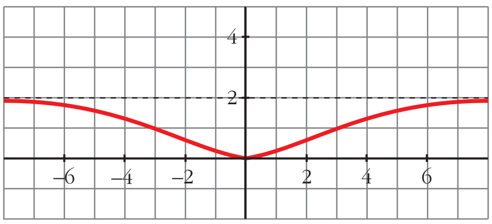
• $y'(x) = \dfrac{4x\,(x^2+1) - 2x(2x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$y'(0) = 0$; $y(0) = 0$

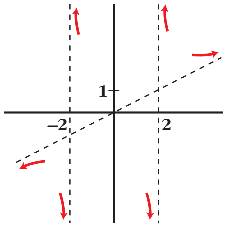
• $= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$

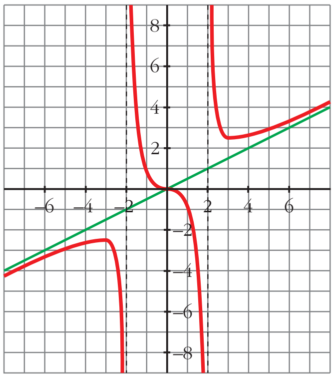
• $= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} =$

$= 2 \begin{cases} \text{si } x \to -\infty, \ y < 2 \\ \text{si } x \to +\infty, \ y < 2 \end{cases}$



94. Completa la gràfica d'una funció de la qual sabem que té tres punts singulars:
$\left(-3, -\dfrac{5}{2}\right)$ **(0, 0) i** $\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$ **i que les branques infinites són les representades.**

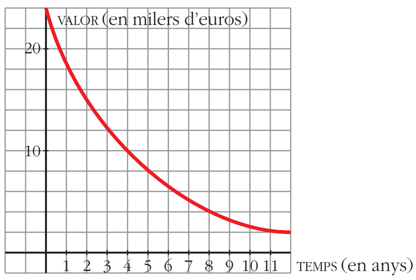




Pàgina 179

Per resoldre

95. Els cotxes, una vegada que es compren, comencen a perdre valor: un 20 % cada any, aproximadament. Aquesta gràfica mostra el valor d'un cotxe des que va ser adquirit fins a 12 anys més tard. Calcula quant es deprecia el cotxe en els dos primers anys, entre els anys 4 i 6, i entre els anys 8 i 10. La depreciació, és constant?



Depreciació: [0, 2] → 9 000 €
[4, 6] → 3 500 €

[8, 10] → 1 500 €
La depreciació no és constant.

96. Escriu les equacions de les rectes tangents a la corba $y = x^3 - 3x$ que siguin paral·leles a la recta $6x - y + 10 = 0$.
El pendent de la recta és el coeficient de x quan la y està aïllada.

$y' = 3x^2 - 3 = 6 \Rightarrow x = -\sqrt{3}\,,\ x = \sqrt{3}$

$f(-\sqrt{3}\,) = (-\sqrt{3}\,)^3 - 3(-\sqrt{3}\,) = 0$

$f(\sqrt{3}\,) = (\sqrt{3}\,)^3 - 3\sqrt{3} = 0$

Rectes: $y = 6\ (x + \sqrt{3}\,)$, $y = 6\ (x - \sqrt{3}\,)$

97. Escriu les equacions de les rectes tangents a la funció $y = 4 - x^2$ en els punts de tall amb l'eix d'abscisses.

Punts de tall amb l'eix de les abscisses:
$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$
Punts (2, 0) i (–2, 0).
$y' = -2x,\ y'(2) = -4,\ y'(-2) = 4$
Les rectes són: • En $x = -2 \rightarrow y = 4x + 8$
• En $x = 2 \rightarrow y = -4x + 8$

98. a) Quina és la derivada de $y = 2x - 8$ en qualsevol punt?
b) Quant ha de valer x perquè la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sigui igual a 2?
c) En quin punt la recta tangent a la gràfica de la funció $y = x^2 - 6x + 5$ és paral·lela a la recta $y = 2x + 8$?

a) $y' = 2$
b) $y' = 2x - 6 = 2 \Rightarrow x = 4$
c) $y' = 2x - 6 = 2 \Rightarrow x = 4$.
En el punt (4, –3).

99. En quins punts la recta tangent a $y = x^3 - 4x$ té el pendent igual a 8?

$y' = 3x^2 - 4 = 8 \Rightarrow x = -2,\ x = 2$
Punts (–2, 0) i (2, 0).

100. Escriu les equacions de les rectes tangents a la corba $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que són paral·leles a la recta $2x + y = 0$.

$y' = \dfrac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} =$
$= -2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$
En (0, 0) → $y = -2x$
En (2, 4) → $y = -2\ (x - 2) + 4 = -2x + 8$

101. Troba els punts de tangent horitzontal de la funció $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 3$.
Punts (–1, 4) i (3, –28).

102. En quins punts de $y = 1/x$ la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del segon quadrant? ¿Existeix cap punt de tangent horitzontal en aquesta funció?

$y' = -\dfrac{1}{x^2} = -1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$.
Punts (–1, –1) i (1, 1).
No existeix cap punt de tangent horitzontal, perquè $y' = \dfrac{1}{x^2} = 0$ no té solució.

103. L'equació de la recta tangent a una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és $4x - 3y + 1 = 0$. Quin és el valor de $f'(2)$? I el de $f(2)$?
Troba el pendent d'aquesta recta i tingues en compte la seva relació amb la derivada.

La recta tangent és $y = \dfrac{4x+1}{3}$; el seu pendent és $\dfrac{4}{3} = f'(2)$.
$f(2) = 3$

104. Aplica les propietats dels logaritmes per derivar les funcions següents:

a) $y = ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $y = ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

c) $y = ln\ x\ e^{-x}$ **d)** $y = log \dfrac{(3x-5)^3}{x}$

e) $y = log\ (tg\ x)^2$ **f)** $y = ln\ x^x$

a) $y = ln\ (x^2 + 1) - ln\ (x^2 - 1)$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{x^4 - 1} =$$

$$= \frac{-4x}{x^4 - 1}$$

b) $y = \dfrac{1}{2}[ln\ x - ln\ (x^2 + 1)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] =$$

$$= \frac{1 - x^2}{2x^3 + 2x}$$

c) $y = ln\ x + ln\ e^{-x} = ln\ x - x$

$$y' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

d) $y = 3\ log\ (3x - 5) - log\ x$

$$y' = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{ln\ 10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 10} =$$

$$= \frac{1}{ln\ 10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{ln\ 10} \cdot$$

$$\cdot \frac{9x - 3x + 5}{(3x^2 - 5x)} = \frac{6x + 5}{(3x^2 - 5x)\ ln\ 10}$$

e) $y = 2\ log\ (tg\ x)$

$$y' = 2 \cdot \frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x} \cdot \frac{1}{ln\ 10} = \frac{2(1 + tg^2\ x)}{tg\ x \cdot ln\ 10}$$

f) $y = x\ ln\ x$

$$y' = ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$$

105. Troba els punts singulars de cada una de les funcions següents, i, amb ajuda de les branques infinites, decideix si són màxims o mínims.
Representa-les.

a) $y = x^3 - 3x^2$
b) $y = x^3 - 3x + 2$
c) $y = x^4 + 4x^3$
d) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
e) $y = 12x - x^3$
f) $y = -x^4 + x^2$
g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$
h) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

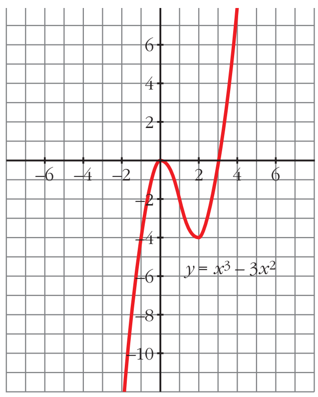
a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0) \\ x = 2 \to f(2) = -4 \to (2, -4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$$



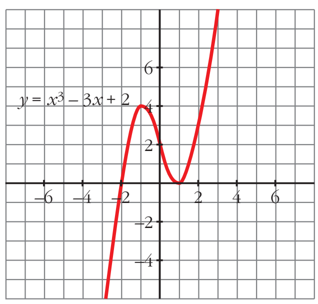
b) $y' = 3x^2 - 3$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \to (1, 0) \\ f(-1) = 4 \to (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$

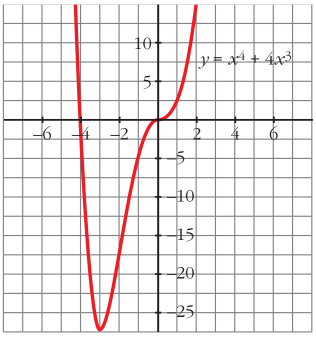


c) $y' = 4x^3 + 12x^2$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,\ 0) \\ x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3,\ -27) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = \lim_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$$



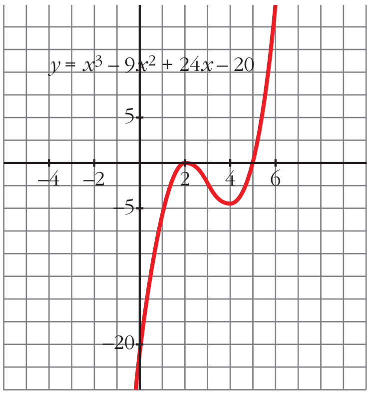
d) $y' = 3x^2 - 18x + 24$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4,\ -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2,\ 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$$

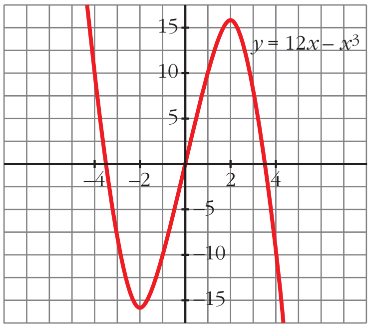


e) $y' = 12 - 3x^2$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$$\begin{cases} f(2) = 16 \rightarrow (2,\ 16) \\ f(-2) = -16 \rightarrow (-2,\ -16) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

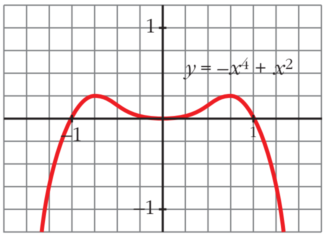
$$\lim_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$



f) $y'(x) = -4x^3 + 2x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,\ 0) \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{4}\right) \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \rightarrow \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$$

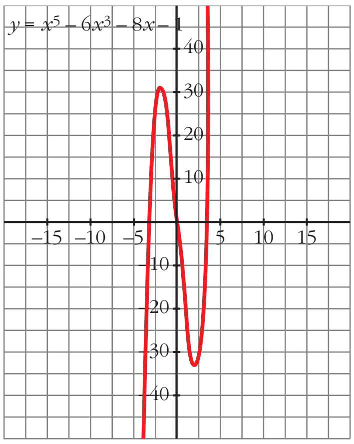


g) $y' = 5x^4 - 18x^2 - 8$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2,\ -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2,\ 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

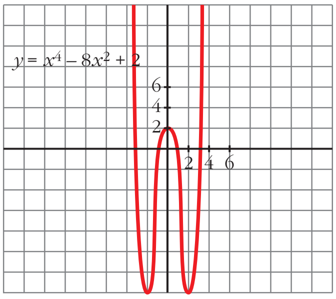


h) $y' = 4x^3 - 16x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \to f(0) = 2 \to (0,\ 2) \\ x = 2 \to f(2) = -14 \to (-2,\ -14) \\ x = -2 \to f(-2) = -14 \to (-2,\ -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$



106. Representa aquestes funcions trobant els punts de tangent horitzontal i estudiant-ne les branques infinites:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$; **b)** $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4}$; **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{x}{(x + 5)^2}$; **f)** $y = \dfrac{2x^2}{x + 2}$

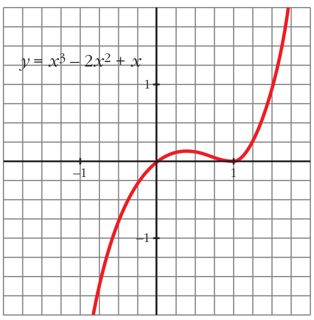
a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3},\ x = 1$

Punts de tangent horitzontal:

$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{27}\right)$, $(1,\ 0)$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$



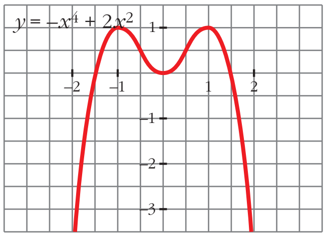
b) $y' = -4x^3 + 4x = -4x\,(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1$

Punts de tangent horitzontal:

$(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$ i $(1,\ 1)$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$



c) $y' = \dfrac{x^2 + 5x + 4 - x(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} =$

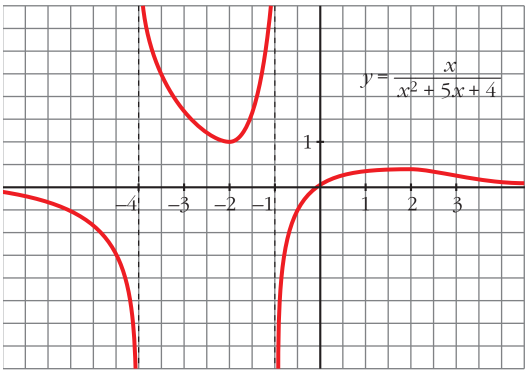
$= \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$

Punts de tangent horitzontal:

$(-2,\ 1)$, $\left(2,\ \dfrac{1}{9}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

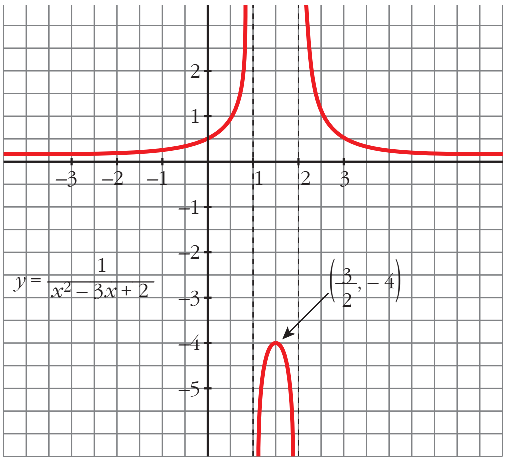


d) $y' = \dfrac{-(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Punts de tangent horitzontal: $\left(\dfrac{3}{2},\ -4\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$



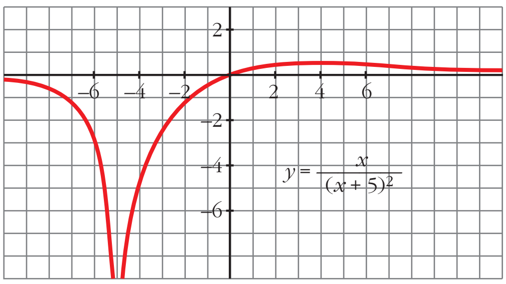
e) $y' = \dfrac{(x+5)^2 - x \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} = \dfrac{5 - x}{(x+5)^3} =$

$= 0 \Rightarrow x = 5$

Punts de tangent horitzontal:

$\left(5, \dfrac{1}{20}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$



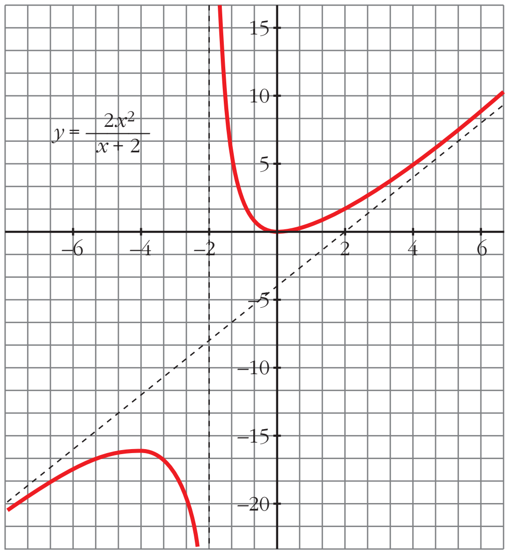
f) $y' = \dfrac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{2x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -4$

Punts de tangent horitzontal:

$(-4, -16)$, $(0, 0)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x+2} = 2x - 4$$



Pàgina 180

107. Comprova que aquestes funcions no tenen punts de tangent horitzontal. Representa-les estudiant-ne les branques infinites i els punts de tall amb els eixos:

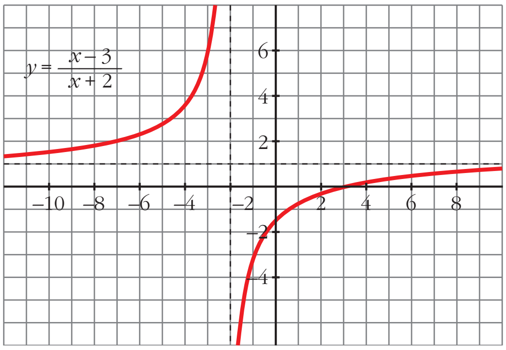
a) $y = \dfrac{x - 3}{x + 2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

a) Els punts de tall són:

$\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$

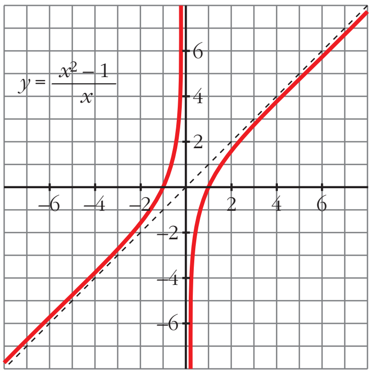
$y' = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$



b) Els punts de tall són:

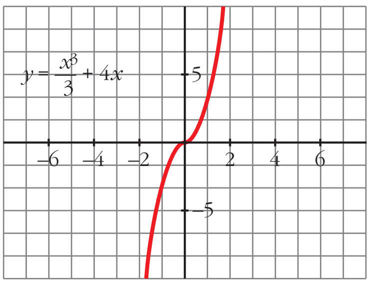
(1, 0), (–1, 0)

$y' = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$



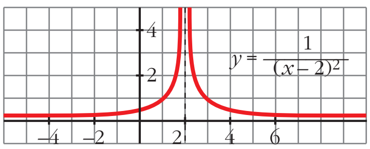
c) El punt de tall és: (0, 0)

$y' = x^2 + 4 \neq 0$



d) El punt de tall és: $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$

$y' = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$



108. Estudia i representa les funcions següents:

a) $y = \dfrac{x}{x^2-16}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

c) $y = \dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$ **d)** $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

e) $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

g) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$ **h)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

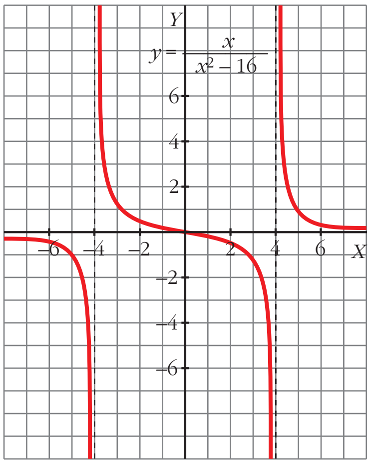
i) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ **j)** $y = \dfrac{x^2-5}{2x-4}$

a) $y' = \dfrac{-x^2-16}{(x^2-16)^2}$

Asímptotes verticals: $x = -4$, $x = 4$

Asímptotes horitzontals: $y = 0$

No hi ha ni asímptotes obliqües ni punts de tangent horitzontal.

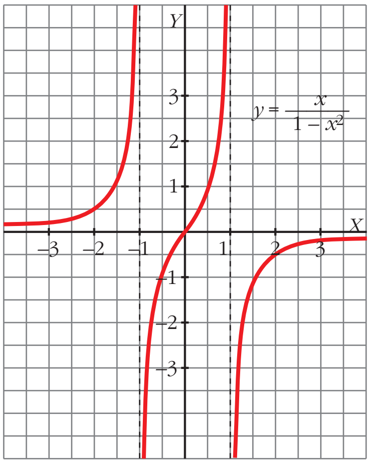


b) $y' = \dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 1$, $x = -1$

Asímptotes horitzontals: $y = 0$

No hi ha ni asímptotes obliqües ni punts de tangent horitzontal.



c) $y' = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

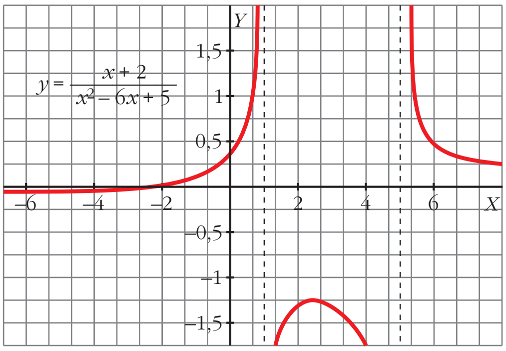
Asímptotes verticals: $x = 5$, $x = 1$

Asímptotes horitzontals: $y = 0$

No hi ha asímptotes obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són, aproximadament:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $y' = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

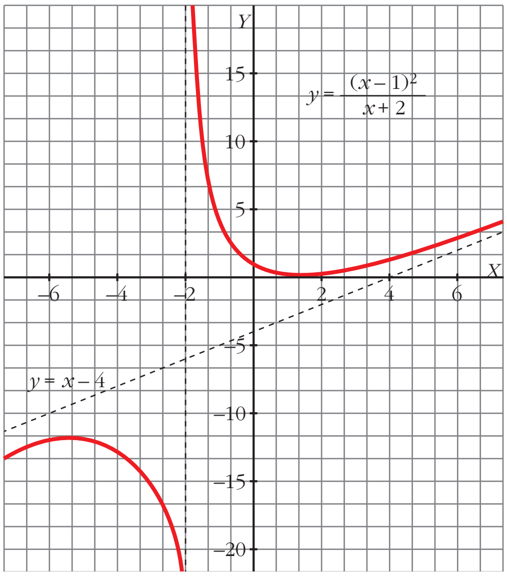
Asímptotes verticals: $x = -2$

Asímptotes obliqües: $y = x - 4$

No hi ha asímptotes horitzontals.

Els seus punts de tangent horitzontal són:

(1, 0), (–5, –12)



e) $y' = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

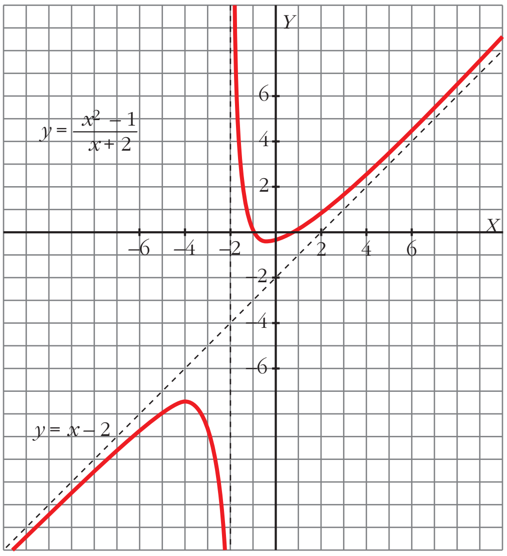
Asímptotes verticals: $x = -2$

Asímptotes obliqües: $y = x - 2$

No hi ha asímptotes horitzontals.

Els seus punts de tangent horitzontal són, aproximadament:

(–0,26; –0,54), (–3,73; –7,46)



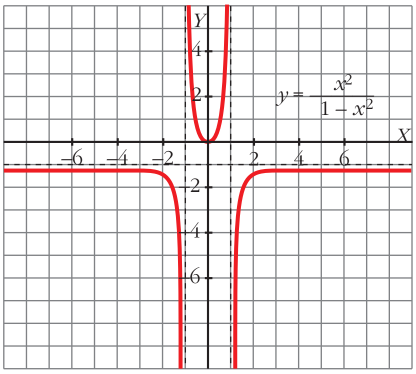
f) $y' = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 1$, $x = -1$

Asímptotes horitzontals: $y = -1$

No hi ha asímptotes obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són: $(0,\ 0)$



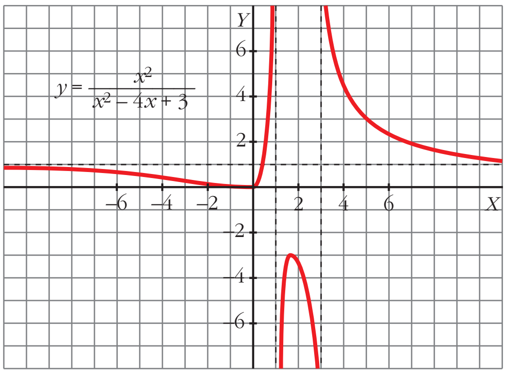
g) d) $y' = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 3,\ x = 1$

Asímptotes horitzontals: $y = 1$

No hi ha asímptotes obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són: $(0,\ 0),\ \left(\dfrac{3}{2},\ -3\right)$



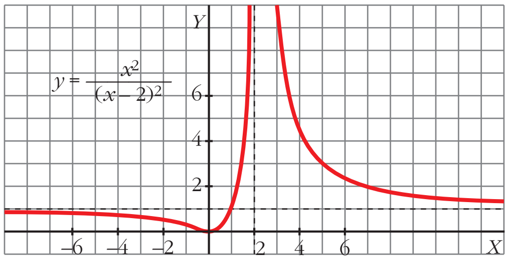
h) $y' = 2\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2 \cdot \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 2$

Asímptotes horitzontals: $y = 1$

No hi ha asímptotes obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són: $(0,\ 0)$

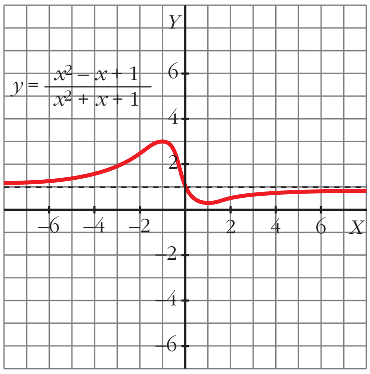


i) $y' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asímptotes horitzontals: $y = 1$

No hi ha ni asímptotes verticals ni obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són: $\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right),\ (-1,\ 3)$

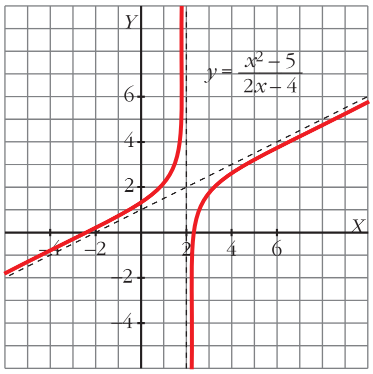


j) $y' = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2} =$

Asímptotes verticals: $x = 2$

Asímptotes obliqües: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hi ha ni asímptotes horitzontals ni punts de tangent horitzontal.



109. Troba una funció de segon grau sabent que passa per (0, 1) i que el pendent de la recta tangent en el punt (2, –1) val 0.

Anomena la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ i tingues en compte que $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ i $f'(2) = 0$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \Rightarrow 1 = c \\ f(2) = -1 \Rightarrow -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La funció és $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

110. Troba el vèrtex de la paràbola $y = x^2 + 6x + 11$ tenint en compte que en aquest punt la tangent és horitzontal.

$f'(x) = 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$

Punt (–3, 2).

111. Determina la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ que és tangent a la recta $y = 2x - 3$ en el punt $A(2, 1)$ i que passa pel punt $B(5, -2)$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(5) = -2 \Rightarrow 25a + 5b + c = -2 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La funció és $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

112. Troba el valor de x per al qual les tangents a les corbes $y = 3x^2 - 2x + 5$ i $y = x^2 + 6x$ siguin paral·leles, i escriu les equacions d'aquestes tangents.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow y' = 6x - 2 \\ y = x^2 + 6x \rightarrow y' = 2x + 6 \end{array}\right\}$$

$6x - 2 = 2x + 6 \Rightarrow x = 2$

Per a $y = 3x^2 - 2x + 5$ la tangent en $x = 2$ és:

$y = 10(x - 2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$

Per a $y = x^2 + 6x$ la tangent en $x = 2$ és:

$y = 10\ (x - 2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$

113. Troba a, b i c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de manera que la gràfica de f tingui tangent horitzontal en $x = -4$ i en $x = 0$ i que passi per (1, 1).

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \Rightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{array}$$

La funció és $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$

Qüestions teòriques

114. Calcula la TVM de $f(x) = 3x - 2$ en els intervals [–1, 2], [1, 3] i [–3, 4]. Justifica per què obtens el mateix resultat.

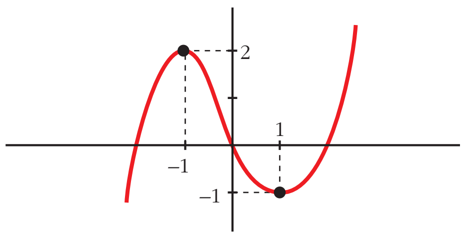
$\text{TVM}\ [-1, 2] = \dfrac{4 + 5}{3} = 3$

$\text{TVM}\ [1, 3] = \dfrac{7 - 1}{2} = 3$

$\text{TVM}\ [-3, 4] = \dfrac{10 + 11}{7} = 3$

TVM = 3. Per a tots. La funció és una recta de pendent 3.

115. Dibuixa una funció que tingui derivada nul·la en $x = 1$ i en $x = -1$, derivada negativa en l'interval [–1, 1] i positiva per a qualsevol altre valor de x.



116. Posa exemples de funcions f la derivada de la qual sigui $f'(x) = 2x$. Quantes n'hi ha?

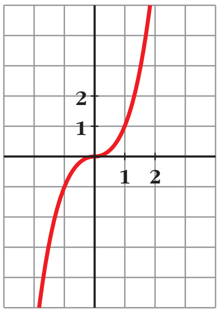
N'existeixen infinites.

$f(x) = x^2 + k$, on k és qualsevol número.

117. Aquesta és la gràfica de la funció $y = x^3$.

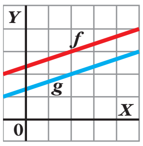
Troba'n la tangent en $x = 0$ i comprova que obtens la recta $y = 0$.

Per què podem assegurar que l'eix d'abscisses és la tangent d'aquesta corba en (0, 0)?



L'equació de l'eix d'abscisses és $y = 0$.

118. Quina relació hi ha entre f i g? I entre f' i g'?

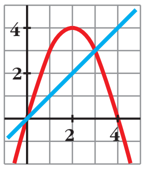


$\left.\begin{array}{l} f = g + 1 \\ f' = g' \end{array}\right\}$ Són rectes paral·leles (d'igual pendent).

119. Existeix cap punt de la funció $y = 4x - x^2$ en què la tangent sigui paral·lela a la recta que passa pels punts (0, 0) i (3, 3)? En cas afirmatiu, troba'l.

$\left.\begin{array}{l} y' = 4 - 2x \\ \text{Pendent de la recta} = 1 \end{array}\right\} 4 - 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Punt $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$



120. Demostra, utilitzant la derivada, que l'abscissa del vèrtex de la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ és $x = \dfrac{-b}{2a}$.

$y' = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$

121. Si $f'(2) = 0$, quina de les afirmacions següents és correcta?

a) La funció f té màxim o mínim en $x = 2$.

b) La recta tangent en $x = 2$ és horitzontal.

c) La funció passa pel punt (2, 0).

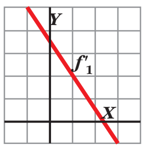
La correcta és la b).

122. Aquesta és la gràfica de la funció derivada de f_1.

a) ¿Té f_1 cap punt de tangent horitzontal?

b) És creixent o decreixent?

Justifica'n les respostes.



a) Sí, en $x = 2{,}3$, perquè $f'_1(2{,}3) = 0$

b) Si $x < 2{,}3$ és creixent, perquè $f'_1 > 0$; i si $x > 2{,}3$ és decreixent, perquè $f'_1 > 0$.

Pàgina 181

Per aprofundir

123. Troba la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punt d'abscissa 2 aplicant la definició.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

124. Troba els punts singulars de les funcions següents i estudia'n el creixement i el decreixement per decidir si són màxims o mínims.

a) $y = x\,e^x$ **b)** $y = \dfrac{x}{e^x}$ **c)** $y = e^{-x^2}$

a) $y' = (1 + x)\,e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} y' > 0 \text{ si } x < -1 \to \text{Decreix} \\ y' < 0 \text{ si } x > -1 \to \text{Creix} \end{array}\right\} \text{Mínim en } \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

b) $y' = \dfrac{1 - x}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} y' > 0 \text{ si } x < 1 \to \text{Creix} \\ y' < 0 \text{ si } x > 1 \to \text{Decreix} \end{array}\right\} \text{Màxim en } \left(1, \frac{1}{e}\right)$$

c) $y' = -2x\,e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y' > 0 \text{ si } x < 0 \to \text{Creix} \\ y' < 0 \text{ si } x > 0 \to \text{Decreix} \end{array}\right\} \text{Màxim en } (0, 1)$$

125. Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = \ln x$ que és paral·lela a la recta $y = 3x - 2$.

$y' = \dfrac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3};\ f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3$

La recta és $y = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right) - \ln 3 =$

$= 3x - 1 - \ln 3.$

126. Quins són els punts singulars de les funcions $y = \sin x$ i $y = \cos x$ en l'interval $[0, 2\pi]$?

$y = \sin x \to y' = \cos x = 0 \to x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$

Màxim en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ i mínim en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$.

$y = \cos x \to y' = -\sin x = 0 \to x = 0,\ x = \pi$

Màxim en $(0, 1)$ i mínim en $(\pi, -1)$.

127. La funció $y = tg\ x$, té cap punt de tangent horitzontal?

No, perquè $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ per a tot x.

128. Estudia i representa les funcions següents:

a) $y = \dfrac{4 - 2x^2}{x}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{3(x+1)}$

c) $y = \dfrac{4 + 2x^2 - x^3}{x^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$

a) $y' = \dfrac{-4x^2 - 4 + 2x^2}{x^2} = \dfrac{-2x^2 - 4}{x^2} \neq 0$

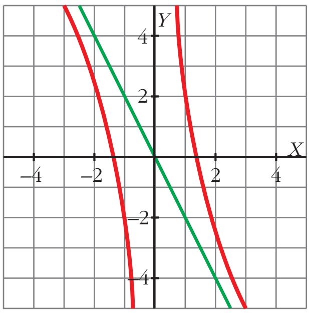
No hi ha punts de tangent horitzontal.

Punts de tall amb els eixos: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

Domini $= \mathbb{R} - \{0\}$

Asímptota vertical: $x = 0$

Asímptota obliqua: $y = -2x$



b) $y' = \dfrac{3x^2 \cdot 3(x+1) - x^3 \cdot 3}{9(x+1)^2} =$

$= \dfrac{9x^3 + 9x^2 - 3x^3}{9(x+1)^2} = \dfrac{6x^3 + 9x^2}{3(x+1)^2} = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{3(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^2(2x+3)}{3(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$

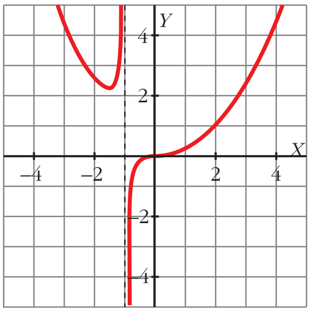
Mínim en (–1,5; 2,25)

Punt d'inflexió en (0, 0)

Punts de tall amb els eixos: (0, 0)

Domini = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asímptota vertical: $x = -1$



c) $y' = \dfrac{(4x - 3x^2)x^2 - (4 + 2x^2 - x^3)2x}{x^4} =$

$= \dfrac{(4x - 3x^2)x - (4 + 2x^2 - x^3)2}{x^3} =$

$= \dfrac{4x^2 - 3x^3 - 8 - 4x^2 + 2x^3}{x^3} = \dfrac{-x^3 - 8}{x^3} =$

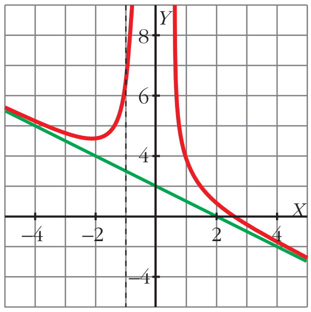
$= 0 \Rightarrow x = -2$

Mínim en (–2, 5)

Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

Asímptota vertical: $x = 0$

Asímptota obliqua: $y = 2 - x$



d) $y' = \dfrac{(4x^3 - 4x)(x^2 - 1) - (x^4 - 2x^2)2x}{(x^2 - 1)^2} =$

$= \dfrac{4x(x^2 - 1)^2 - 2x(x^4 - 2x^2)}{(x^2 - 1)^2} =$

$= \dfrac{2x[2x^4 + 2 - 4x^2 - x^4 + 2x^2]}{(x^2 - 1)^2} =$

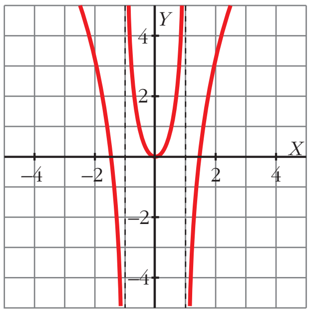
$= \dfrac{2x(x^4 - 2x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Mínim en (0, 0)

Punts de tall amb els eixos: (0, 0), $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

Domini = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asímptotes verticals: $x = -1$, $x = 1$



129. Calcula el punt de tall de les tangents a les corbes $f(x) = x^2 - 5x + 1$ i $g(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 1$.

Recta tangent a $f(x) = x^2 - 5x + 1$ en $x = 1$:

$f'(x) = 2x - 5;\ f'(1) = -3;\ f(1) = -3$

$y = -3\,(x - 1) - 3 = -3x + 3 - 3 = -3x$

Recta tangent a $g(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 1$:

$g'(x) = \frac{-1}{x^2}$; $g'(1) = -1$; $g(1) = 1$

$y = -1\ (x - 1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$

Punt de tall:

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$$

$\}-3x = -x + 2$; $-2x = 2$; $x = -1$; $y = 3$

Punt $(-1, 3)$

130. Troba els polinomis de segon grau que passen per l'origen de coordenades i tenen un mínim en $x = -\frac{1}{2}$. Quin d'aquests passa pel punt (5, 4)?

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow b = a$; $a > 0$

(perquè sigui mínim)

Són els polinomis de la forma $f(x) = ax^2 + ax$, amb $a > 0$.

El que passa per (5, 4) serà:

$f(5) = 4 \Rightarrow 25a + 5a = 4$; $30a = 4$; $a = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$f(x) = \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}x$

131. Un capital de 350 000 € invertit en fons d'inversió se suposa que variarà segons la funció:

$C = 3{,}5 + 0{,}04\ t - 0{,}001\ t^2$

on t és el temps que dura la inversió, en mesos, i C el valor en milers d'euros.

a) Quan convé treure el capital perquè el seu valor sigui màxim?

b) En quin moment el que queda és igual al capital inicial?

c) En quin moment ens quedaríem sense res?

a) $c' = 0{,}04 - 0{,}002t$

$0 = 0{,}04 - 0{,}002t$

$t = 20$ mesos

b) $3{,}5 = 3{,}5 + 0{,}04t - 0{,}001t^2$

$0 = 0{,}04t - 0{,}001t^2$

$0 = (0{,}04 - 0{,}001t)t$

a $t = 0$ i a $t = 40$ mesos

c) $0 = 3{,}5 + 0{,}04t - 0{,}001t^2$

$t = 82{,}45$ mesos

132. El cost total (en dòlars) de fabricació de q unitats d'un determinat article és: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

El cost mitjà per unitat és:

$M(q) = \frac{C(q)}{q}$

a) Quantes unitats s'han de fabricar perquè el cost mitjà per unitat sigui mínim?

b) Calcula $C(q)$ i $M(q)$ per al valor de q que has trobat a l'apartat a).

a) $M(q) = \frac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$M' = \frac{(6q + 5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} =$

$= \frac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75)}{q^2} =$

$= \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \Rightarrow q^2 = 25 \Rightarrow q = 5$ unitats

S'han de fabricar 5 unitats.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

133. La funció $f(x) = \frac{60x}{x^2 + 9}$ indica els beneficis obtinguts per una empresa des que va començar a funcionar ($f(x)$ en milers d'euros, x en anys, $x = 0$ indica el moment de la constitució de l'empresa).

a) Fes una representació gràfica aproximada de la funció, tenint en compte

el domini vàlid en el context del problema.
b) Al cap de quant de temps obté l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici?
c) L'empresa perdrà diners en algun moment? ¿És possible que arribi un moment en què no obtingui ni beneficis ni pèrdues? Raona'n la resposta.

a) $f'(x) = \dfrac{60(x^2+9) - 60x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} =$

$= \dfrac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-60x^2+540}{(x^2+9)^2} =$

$= 0 \Rightarrow x = 3$ ($x = -3$ no està en el domini)
Màxim en (3, 10).
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ asímptota horitzontal:
$y = 0$
La gràfica seria:

b) Benefici màxim en $x = 3 \Rightarrow$ al cap de tres anys.
El benefici seria $f(3) = 10$ milers d'euros.
c) No perdrà diners ni arribarà el dia que no obtingui ni beneficis ni pèrdues, perquè $f(x) = 0$ i $f(x) > 0$ per a tot $x > 0$.

Per pensar una mica més

134. Esbrina quina funció $y = f(x)$ compleix les condicions següents:
a) La seva derivada és $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$.
b) Passa pel punt (–2, 6).

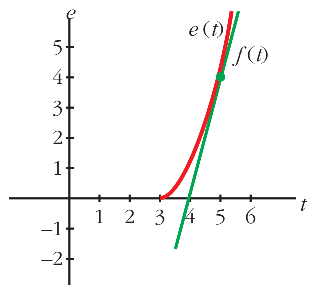
$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + k$, on k és constant.
Trobem el valor de k tenint en compte que:
$f(-2) = 6 \Rightarrow -8 + 8 - 10 + k = 6 \Rightarrow k =$
$= 16$
Per tant:
$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 16$

135. L'equació d'un moviment és $e = t^2 - 6t + 9$, $t \geq 3$ (e = recorregut en metres, t = temps en segons).
Troba l'equació d'un moviment uniforme (velocitat constant) que en l'instant $t = 5$ es troba en el mateix lloc i amb la mateixa velocitat que l'anterior.
Representa ambdues equacions en un diagrama $e - t$.

Anomenem $f(t) = at + b$ la funció buscada
Ha de complir que $f(5) = e(5)$ i que $f'(5) =$
$= e'(5)$
Com que $f'(t) = a$, $e'(t) = 2t - 6$, tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} f(5) = e(5) \Rightarrow 5a + b = 4 \\ f'(5) = e'(5) \Rightarrow a = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -16 \end{array}$$

Per tant: $f(t) = 4t - 16$
Les gràfiques seran:



Pàgina 182

Resol tu

Deixem mil mosques en una illa on no n'hi havia cap, en la qual hi ha condi-

cions perquè en visquin, com a màxim, 600 000. Cada dia, el nombre de mosques augmenta el 2 %.

a) Expressa el creixement segons el model exponencial, com si no hi hagués limitació.

b) Expressa el creixement segons el model logístic.

c) Compara el nombre de mosques que hi hauria als 10, 100, 150, 200, 250, 300 i 400 dies segons cada model i raona sobre les diferències observades.

a) $N = 1\,000 \cdot 1{,}02^t$ (t: temps en dies)

b) $N' = l \cdot \dfrac{1}{1 + k\,a^{-t}}$, i la $k = \dfrac{1}{c} - 1$

En el nostre problema: $l = 600\,000$;

$a = 1{,}02$, $C = 1\,000 \rightarrow k = \dfrac{600\,000}{1\,000} - 1 =$
$= 599$

Obtenim la funció logística buscada:

$$N' = 600\,000 \cdot \frac{1}{1 + 599 \cdot 1{,}02^{-t}}$$

c)

Temps (dies)	**N: model exponencial**	**N': model logístic**	**Diferència N – N'**
10	1 219	1 219	0
100	7 245	7 170	75
150	19 500	18 916	534
200	52 485	48 337	4 148
250	141 268	114 500	26 768
300	380 235	232 979	147 256
400	2 754 664	492 834	2 261 831