Reflexiona i resol

Aproximacions successives

El valor de la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$ per a $x = 5$ no es pot obtenir directament perquè el denominador es fa zero. L'obtindrem per aproximacions successives, donant a x els valor: 4; 4,9; 4,99. Comprova que:

$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995$

$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995...$

Calcula $f(4,999); f(4,9999); f(4,99999)$...

$f(4,999) = 6,9995; f(4,9999) = 6,99995; f(4,99999) = 6,999995...$

A la vista dels resultats anteriors, et sembla raonable afirmar que, quan x s'aproxima a 5, el valor de $f(x)$ s'aproxima a 7? Ho expressem així: $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 7$

Quan x s'aproxima a 5, $f(x)$ s'aproxima a 7 $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 7$

Calcula, anàlogament, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

$f(2) = 5,5;$

$f(2,9) = 5,95;$

$f(2,99) = 5,995...$

Quan $\lim\limits_{x \to 3}$, $f(x) = 6$

Pàgina 253

1. Explica per què la funció $y = x^2 - 5$ és contínua en tot $\mathbb{R}$.

Perquè està definida en tot $\mathbb{R}$.

2. Explica per què la funció $y = \sqrt{5 - x}$ és contínua en $(-\infty, 5]$.

Perquè el seu domini és $(-\infty, 5]$.

3. Cada una de les funcions següents té un punt o més on no és contínua. Indica quins són aquests punts i quin tipus de discontinuïtat presenta:

a) $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2}$

e) $y = \begin{cases} 3x - 4, & x < 3 \\ x + 1, & x \geq 3 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} 3 \text{ si } x \neq 4 \\ 1 \text{ si } x = 4 \end{cases}$

a) Branca infinita en $x = 3$ (asímptota vertical).

b) Discontinuïtat evitable en $x = 0$ (li falta aquest punt).

c) Branca infinita en $x = 0$ (asímptota vertical).

d) Branca infinita en $x = 0$ (asímptota vertical).

e) Salt en $x = 3$.

f) Salt en $x = 4$.

Pàgina 256

4. Calcula el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0

5. Calcula aquests límits:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$ b) -1

Pàgina 257

6. Calcula k perquè la funció $y = f(x)$ sigui contínua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array}\right\}$$

$21 + k = 7 \Rightarrow k = -14$

Pàgina 259

7. Calcula els límits de les funcions següents en els punts que s'hi indiquen. On convingui, especifica el valor del límit a l'esquerra i a la dreta del punt. Representa'n els resultats gràficament.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **en –2, 0 i 2**

b) $f(x) = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ **en 2, 0 i 3**

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ **en 1 i –3**

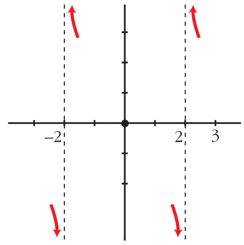
d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ **en 0 i –3**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+2)(x-2)}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existeix } \lim\limits_{x \to -2} f(x)$$

$$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existeix } \lim\limits_{x \to 2} f(x)$$

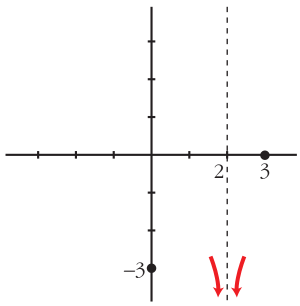


b) $f(x) = \dfrac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

$$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$$

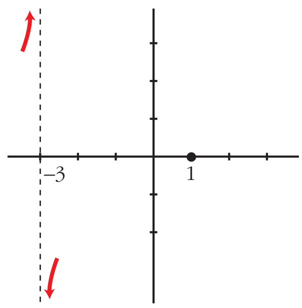
$$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$$



c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$

$$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$$

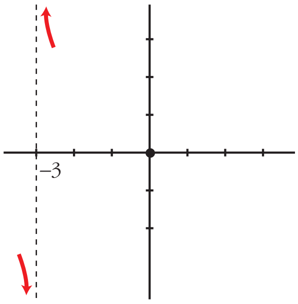
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{No existeix } \lim\limits_{x \to -3} f(x)$$



d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2(x+3)}$

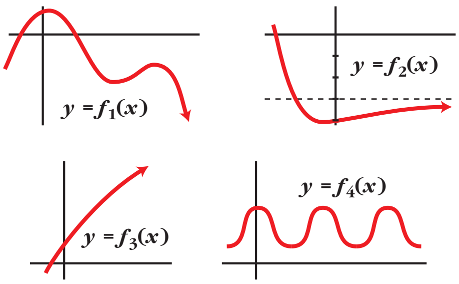
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ No existeix $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$



Pàgina 260

8. Digues el límit quan $x \to +\infty$ de les següents funcions donades per les seves gràfiques:



$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existeix

Pàgina 261

9. Digues el valor del límit de les funcions següents quan $x \to +\infty$:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) 0, e) 0, f) $-\infty$.

10. Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, troba un valor de x per al qual $x^3 - 200x^2$ sigui més gran que 1 000 000.

Per exemple, per a $x = 1\,000$,

$f(x) = 800\,000\,000$

11. Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, troba un valor de x per al qual $\dfrac{1}{x^2 - 10x}$ sigui més petit que 0,0001.

Per exemple, per a $x = 1\,000$,

$f(x) = 0{,}00000101$

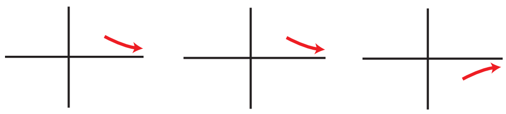
Pàgina 262

12. Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:

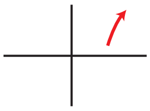
a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$; **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$; **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$;

d) $f(x) = 3x - 5$

a) 0 b) 0 c) 0



d) $+\infty$

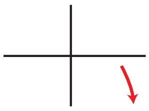
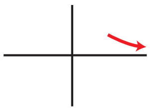
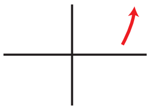


13. Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:

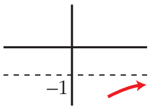
a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$

d) -1

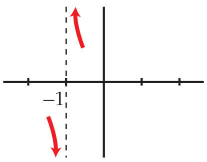


Pàgina 263

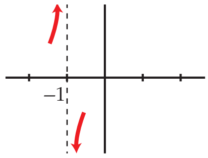
14. Troba les asímptotes verticals i situa'n la corba respecte a aquestes:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = -1$ és asímptota vert.



b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = -1$ és asímptota vert.

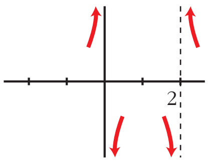


15. Troba les asímptotes verticals i situa'n la corba respecte a aquestes:

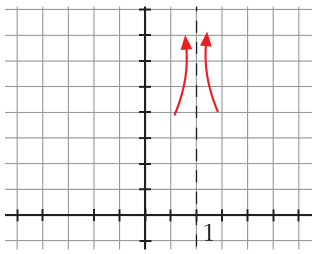
a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = 0$ és asímptota vert.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 2$ és asímptota vert.



b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1$ és asímptota vert.



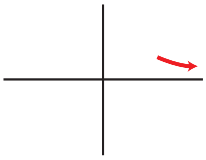
Pàgina 265

16. Troba les branques infinites, $x \to +\infty$, de les funcions següents. Situa la corba respecte a l'asímptota:

a) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

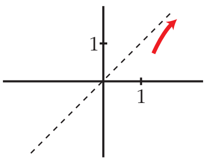
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

$y = 0$ és una asímptota horitzontal



b) $y = x + \dfrac{-x}{x^2 + 1}$;

$y = x$ és una asímptota obliqua

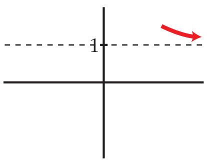


17. Troba les branques infinites, $x \to +\infty$, de les funcions següents. Situa la corba respecte a les seves asímptotes, si n'hi ha:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$;

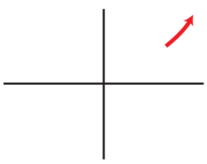
$y = 1$ és una asímptota horitzontal



b) grau de P – grau de $Q \geq 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

branca parabòlica cap amunt

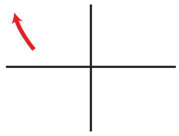


Pàgina 266

18. Troba $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i representa la branca corresponent:

$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 7x^4 = +\infty$

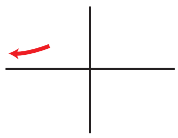


19. Troba $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i traça les branques corresponents:

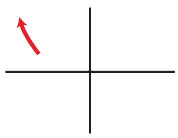
a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$

b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$



Pàgina 267

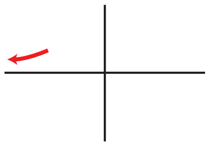
20. Troba les branques infinites $x \to -\infty$ d'aquestes funcions, i situa la corba respecte a les asímptotes.

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; **b)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$; **c)** $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$;

d) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

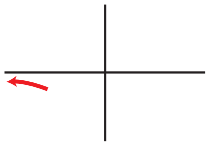
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

$y = 0$ és una asímptota horitzontal



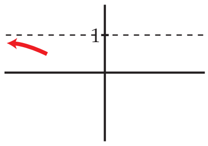
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

$y = 0$ és una asímptota horitzontal

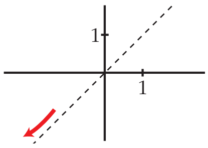


c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$;

$y = 1$ és una asímptota horitzontal



d) $y = x + \dfrac{-x}{1 + x^2}$; $y = x$ és una asímptota obliqua



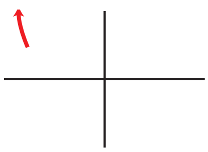
21. Troba les branques infinites quan $x \to -\infty$, i si tenen asímptotes, situa la corba respecte a aquestes:

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

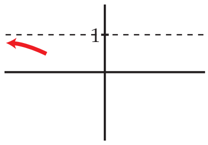
c) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x}$

a) grau P – grau $Q \geq 2$

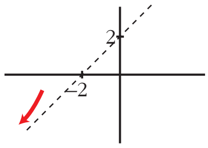
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; branca parabòlica



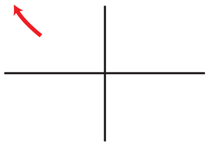
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $y = 1$ és una asímptota horitzontal



c) $y = x + 2 + \dfrac{-2}{x + 1}$; $y = x + 2$ és una asímptota obliqua



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$



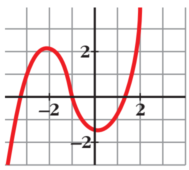
Pàgina 275

Per practicar

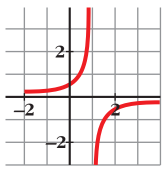
Discontinuïtats i continuïtat

22. a) Quina de les gràfiques següents correspon a una funció contínua?
b) Assenyala, en cada una de les altres cinc, la raó de la seva discontinuïtat.

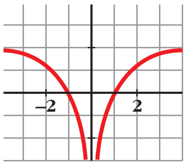
a)



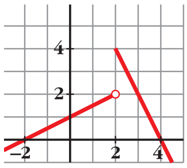
b)



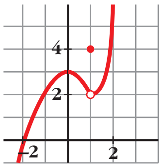
c)



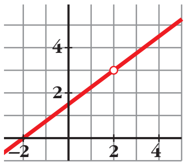
d)



e)



f)



a) Només la a).

b) b) Branca infinita en $x = 1$ (asímptota vertical)

c) Branca infinita en $x = 0$ (asímptota vertical)

d) Salt en $x = 2$

e) Punt desplaçat en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

f) No està definida en $x = 2$

23. Troba els punts de discontinuïtat, si n'hi ha, de les funcions següents:

a) $y = x^2 + x - 6$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2+2}$

a) Contínua; b) 2; c) $-\dfrac{1}{2}$; d) Contínua;

e) 0 i 5; f) $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

24. Comprova si les funcions següents són contínues en $x = 0$ i en $x = -2$:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **b)** $y = \dfrac{x}{x^2-4}$; **c)** $y = \sqrt{x^2-4}$;

d) $y = \sqrt{7-2x}$

a) No és contínua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.

b) Sí que és contínua en $x = 0$, no en $x = -2$.

c) No és contínua en $x = 0$, però sí en $x = -2$.

d) Contínua en $x = 0$ i en $x = -2$.

25. Indica per a quins valors de $\mathbb{R}$ són contínues les funcions següents:

a) $y = 5 - \dfrac{x}{2}$; **b)** $y = \sqrt{x-3}$; **c)** $y = \dfrac{1}{x}$

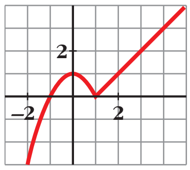
d) $y = \sqrt{-3x}$; **e)** $y = \sqrt{5-2x}$; **f)** $y = x^2 - x$

a) $\mathbb{R}$; b) $[3, +\infty)$; c) $(-\infty, 0) \cap (0, +\infty)$;

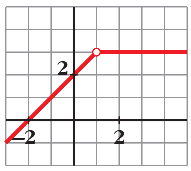
d) $(-\infty, 0]$; e) $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$; f) $\mathbb{R}$.

26. Comprova que les gràfiques d'aquestes funcions corresponen a l'expressió analítica i digues si són contínues o discontínues en $x = 1$.

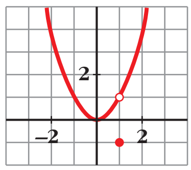
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Contínua; b) Discontínua; c) Discontínua.

27. Comprova si la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$ **és contínua en** $x = 0$**.**

Recorda que perquè f sigui contínua en x = 0, ha de verificar-se que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

És contínua en $x = 0$

28. Comprova si les funcions següents són contínues en els punts que s'hi indiquen:

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

a) No, perquè no existeix $f(-1)$.

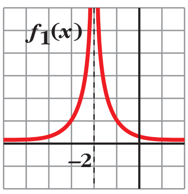
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí és contínua en $x = 2$.

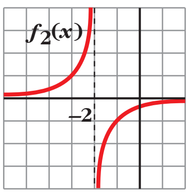
c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No és contínua en $x = 1$.

Pàgina 276

Visió gràfica del límit

29.





Aquestes són, respectivament, les gràfiques de les funcions:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x + 2)^2} \text{ i } f_2(x) = \frac{-1}{x + 2}$$

Quin és el límit de cada una d'aquestes funcions quan $x \to -2$**?**

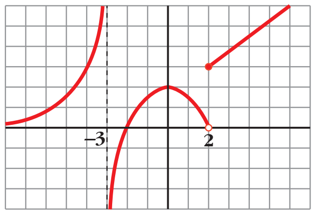
Observa la funció quan $x \to -2$ ***per l'esquerra i per la dreta.***

$$\lim_{x \to -2^-} f_1(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^+} f_1(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2} f_1(x) = +\infty \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{No existeix } \lim_{x \to -2} f_2(x)$$

30. Sobre la gràfica de la funció $f(x)$**, troba:**



a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$; **b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$; **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; **e)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$;

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; **h)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 2; d) 0; e) 0; f) 3; g) $+\infty$; h) 0

Límit en un punt

31. Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$;

c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1 - x}{x - 2}$; **d)** $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$;

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$; **f)** $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$;

g) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$; **h)** $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

a) 5; b) 0; c) –2; d) $\sqrt{2}$; e) 2; f) 2; g) 1; h) e^2

32. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ troba:}$$

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$; **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Perquè hi hagi límit en el punt de ruptura, els límits laterals han de ser iguals.

a) 5; b) 4; c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = $

$= \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

33. Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^3 - 2h^2}{h}$ **d)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 7h}{4h}$

Treu-ne factor comú i simplifica cada fracció.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x(x-2)} = -2;$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(2x+3)}{x} = 3;$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2(3h-2)}{h} = 0;$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h-7)}{4h} = -\dfrac{7}{4}$

34. Resol els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x-1)(x^3-x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = 2$

35. Calcula el límit de la funció

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x}$ **en $x = 3$, $x = 0$ i $x = -1$.**

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{3}{4}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

Límit quan $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

36. Calcula els límits següents i representa la informació que n'obtinguis:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - x)^2$

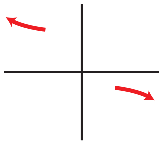
Vegeu solució en l'exercici 37.

37. Calcula el límit de les funcions de l'exercici anterior quan $x \to -\infty$ i representa la informació que n'obtinguis.

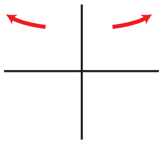
Resolució dels exercicis 36 i 37:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty$;

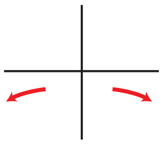
$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$



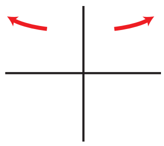
b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17 = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$

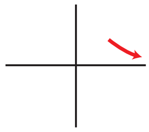


38. Comprova, donant valors grans a x, que les funcions següents tendeixen a 0 quan $x \to +\infty$.

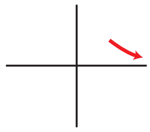
a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10}$ **b)** $f(x) = \dfrac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x}}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2}{10x^2 - x^3}$

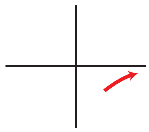
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;



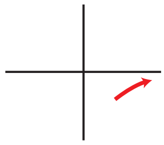
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



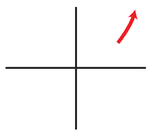
39. Calcula el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ de cada una de les funcions següents. Representa el resultat que n'obtinguis.

a) $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

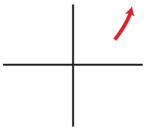
c) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{-3}$

Dóna a x «valors grans» i treu-ne conclusions.

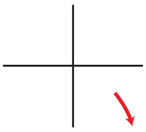
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



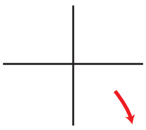
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



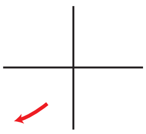
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



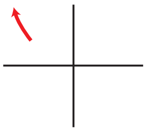
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



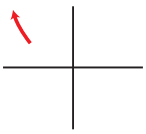
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



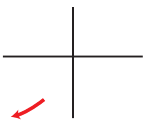
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Pàgina 277

40. Calcula els límits següents i representa-hi les branques que n'obtinguis:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x}$

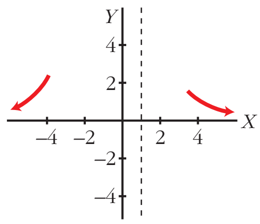
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

Vegeu solució en l'exercici 41.

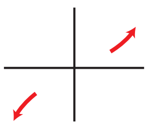
41. Calcula el límit de totes les funcions de l'exercici anterior quan $x \to -\infty$.

Resolució dels exercicis 40 i 41:

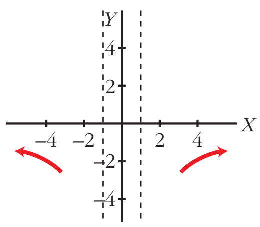
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



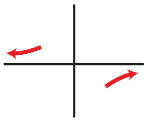
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



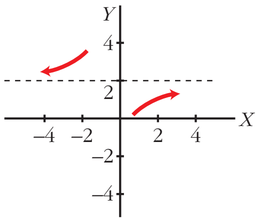
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$



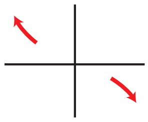
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0$



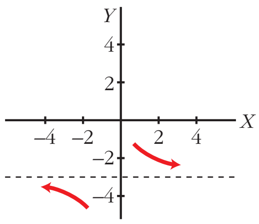
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



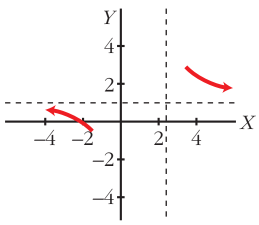
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



42. Resol els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - (x-2)^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+1}{5x}$

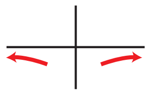
a) 3; b) $-\infty$; c) 0; d) $+\infty$.

43. Calcula el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ de les funcions següents i representa-hi les branques que n'obtinguis:

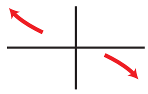
a) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ **b)** $f(x) = 10x - x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

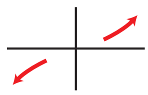
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0;$



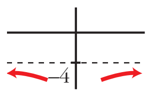
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;$



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$



Asímptotes

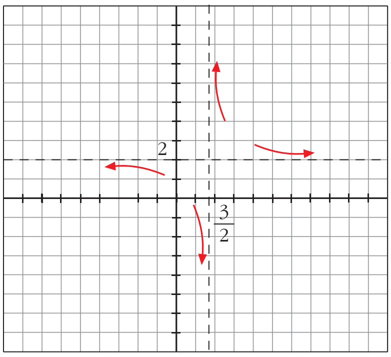
44. Troba les asímptotes de les funcions següents i situa-hi la corba respecte a aquestes:

a) $y = \dfrac{4x + 1}{2x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{3x}{2x - 5}$

c) $y = \dfrac{2x + 3}{4 - x}$ **d)** $y = \dfrac{2}{1 - x}$

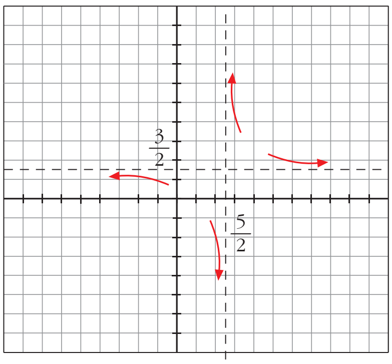
a) Asímptota vertical $x = \dfrac{3}{2}$

Asímptota horitzontal $y = 2$



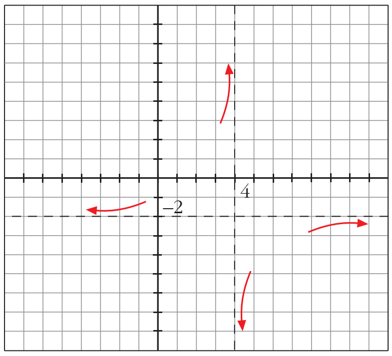
b) Asímptota vertical $x = \dfrac{5}{2}$

Asímptota horitzontal $y = \dfrac{3}{2}$



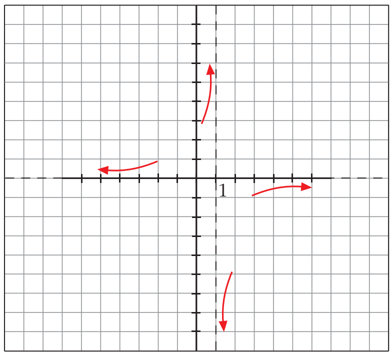
c) Asímptota vertical $x = 4$

Asímptota horitzontal $y = -2$



d) Asímptota vertical $x = 1$

Asímptota horitzontal $y = 0$

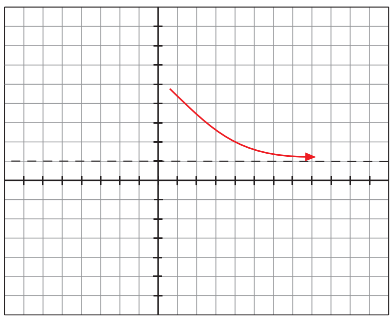


45. Troba les asímptotes de les funcions següents i situa-hi la corba respecte a aquestes:

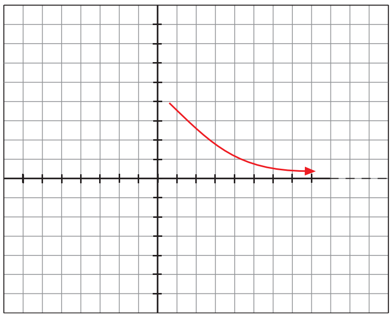
a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

c) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^4}{x - 1}$

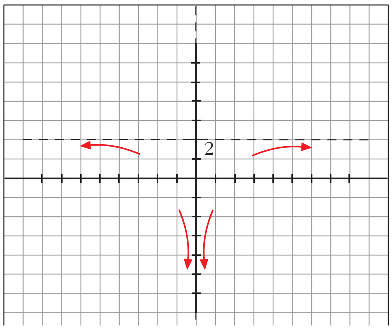
a) Asímptota horitzontal $y = 1$



b) Asímptota horitzontal $y = 0$



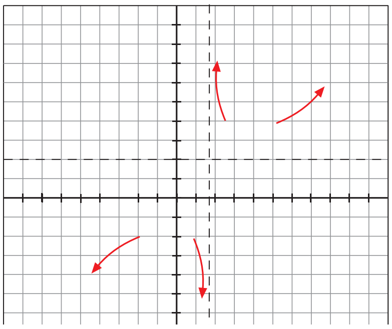
c) Asímptota vertical $x = 0$
Asímptota horitzontal $y = 2$



d) Asímptota vertical $x = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x-1} = -\infty$$



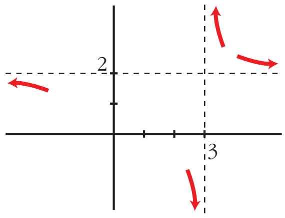
46. Troba les asímptotes de les funcions següents i situa-hi la corba respecte a aquestes:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

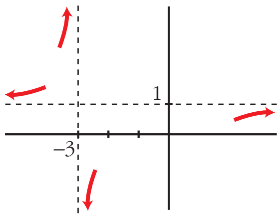
c) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

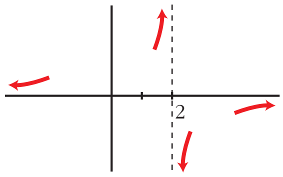
a) Asímptota vertical: $x = 3$
Asímptota horitzontal: $y = 2$



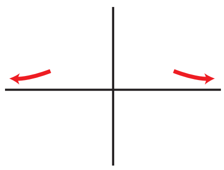
b) Asímptota vertical: $x = -3$
Asímptota horitzontal: $y = 1$



c) Asímptota vertical: $x = 2$
Asímptota horitzontal: $y = 0$

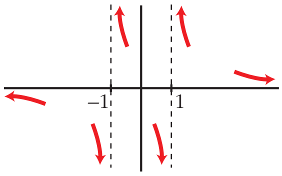


d) Asímptota vertical: $y = 0$
No té més asímptotes.



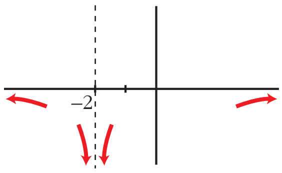
e) Asímptota vertical: $x = 1$, $x = -1$

Asímptota horitzontal: $y = 0$



f) Asímptota vertical: $x = -2$

Asímptota horitzontal: $y = 0$



47. Cada una de les funcions següents té una asímptota obliqua. Troba-la i estudia la posició de la corba respecte a aquesta:

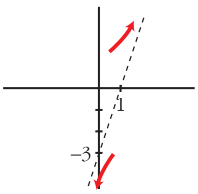
a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

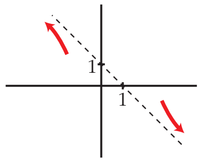
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asímptota obliqua: $y = 3x - 3$



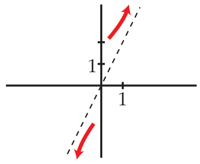
b) $\dfrac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asímptota obliqua: $y = -x + 1$



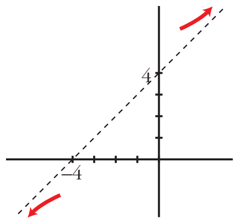
c) $\dfrac{4x^2-3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asímptota obliqua: $y = 2x$



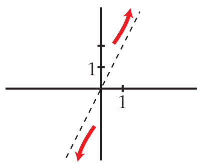
d) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

Asímptota obliqua: $y = x + 4$



e) $\dfrac{2x^3-3}{x^2-2} = 2x + \dfrac{4x-3}{x^2-2}$

Asímptota obliqua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2+3}{2x-2} = -x - 1 + \dfrac{1}{2x-2}$

Asímptota obliqua: $y = -x - 1$

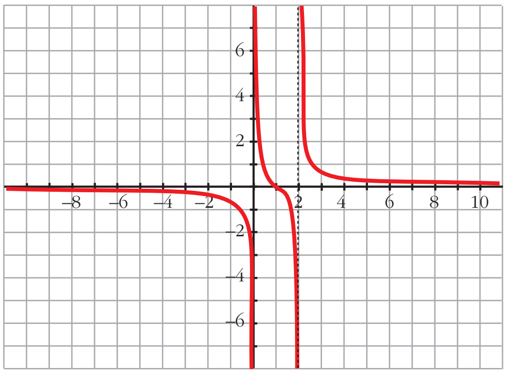
48. Calcula els límits de les funcions següents en els punts que anul·len el seu denominador:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+4}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$; **d)** $f(t) = \dfrac{t^3-2t^2}{t^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2-2x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x^2-2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x^2-2x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x^2-2x} = -\infty$$

c) $f(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$;

d) $f(t) = \dfrac{t^2(t-2)}{t^2}$; $\lim\limits_{x \to 0} f(t) = -2$

49. Troba les asímptotes de les funcions següents i situa la corba respecte a cada una:

a) $y = \dfrac{(3-x)^2}{2x+1}$ **b)** $y = \dfrac{5x-2}{2x-7}$

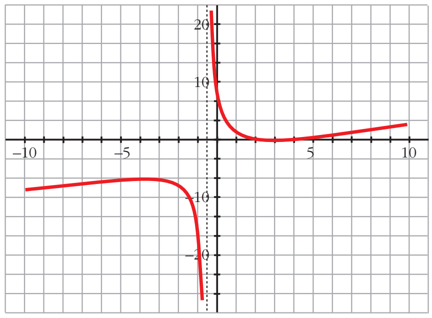
c) $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

e) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ **f)** $y = \dfrac{3x^2}{x+2}$

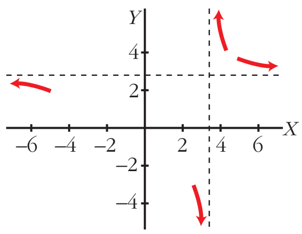
a) Asímptotes: $y = -\dfrac{1}{2}$; $x = -\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -1/2^+} \frac{(3-x)^2}{2x+1} = +\infty$$

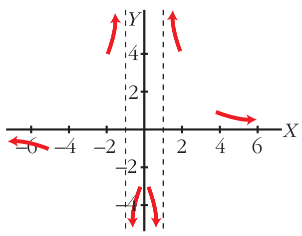
$$\lim_{x \to -1/2^-} \frac{(3-x)^2}{2x+1} = -\infty$$



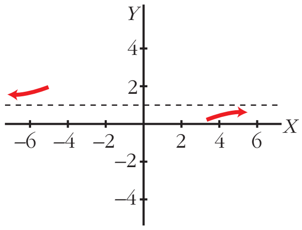
b) Asímptotes: $y = \dfrac{5}{2}$; $x = \dfrac{7}{2}$



c) Asímptotes: $y = 0$; $x = \pm 1$



d) Asímptotes: $y = 1$



e) Asímptota en $x = 2$

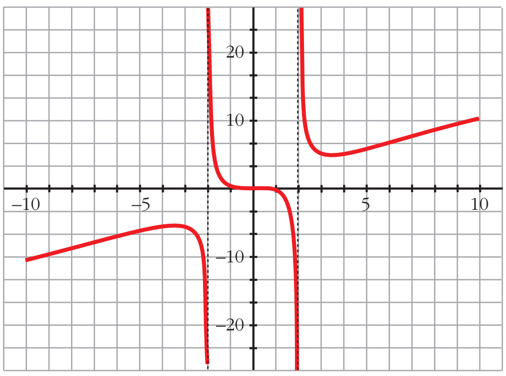
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

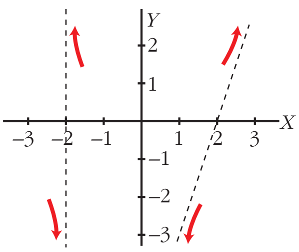
en $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$



f) Asímptotes: $x = -2$; $y = 3x - 6$



50. Troba les branques infinites d'aquestes funcions. Quan tinguin asímptotes, situa-hi la corba:

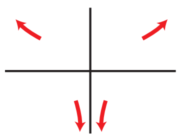
a) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2}$

c) $y = \dfrac{1}{9 - x^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

e) $y = \dfrac{2x^2}{x + 3}$ **f)** $y = \dfrac{x^3}{2x - 5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asímptota vertical: $x = 0$

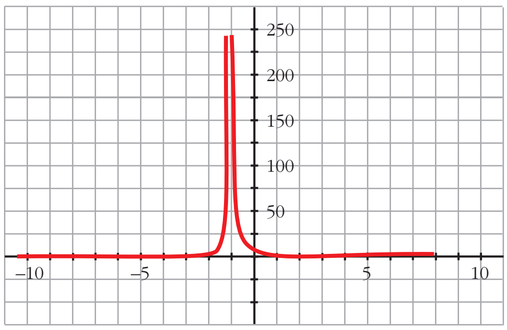


b) Asímptota vertical $x = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2} = +\infty$$

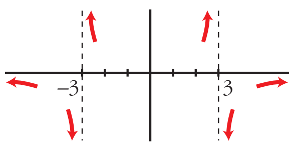
Asímptota horitzontal $y = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2} = 1$$



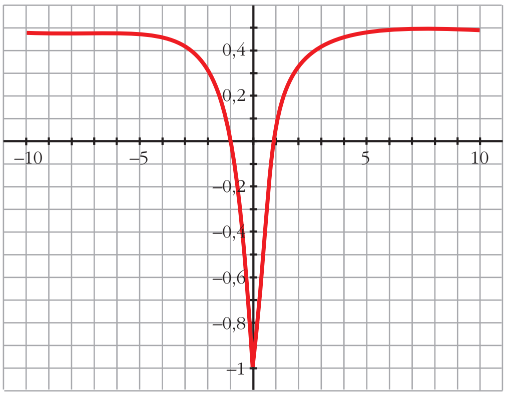
c) Asímptotes verticals: $x = 3$, $x = -3$

Asímptota horitzontal: $y = 0$



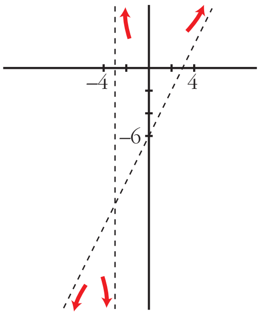
d) Asímptota horitzontal en $y = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 - 1)}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$



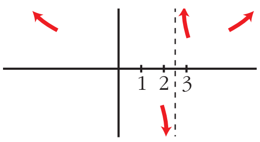
e) Asímptota vertical: $x = -3$

Asímptota obliqua: $y = 2x - 6$



f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asímptota vertical: $x = \dfrac{5}{2}$



Pàgina 278

51. Demostra que la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solament té una asímptota vertical i una altra d'horitzontal.

En trobar $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} f(x)$ veuràs que no és ∞.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

Asímptota vertical: $x = 0$

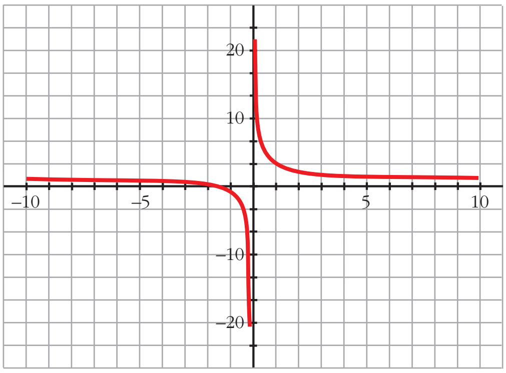
Asímptota horitzontal: $y = 1$

52. Calcula els límits següents i representa-hi els resultats que obtinguis.

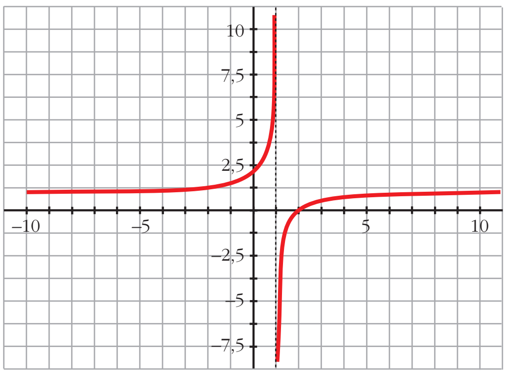
a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{5}{3}$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{2}{3}$



b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = 0$



53. Calcula els límits següents i representa-hi els resultats que obtinguis:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

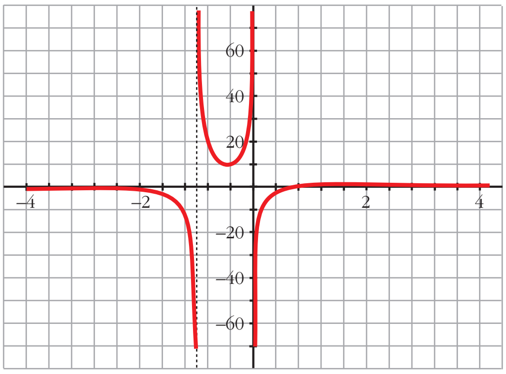
b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

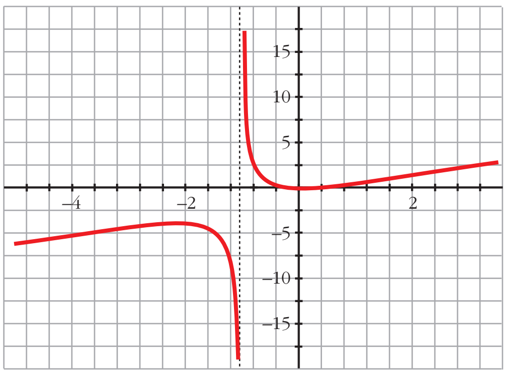
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \infty$

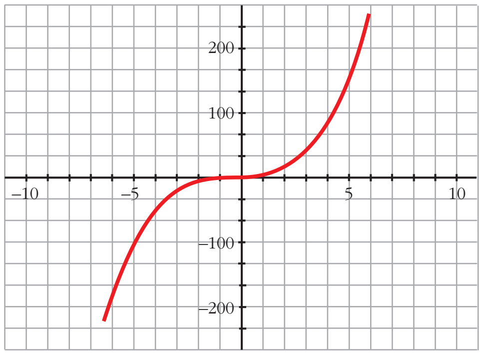


b) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = -\infty$

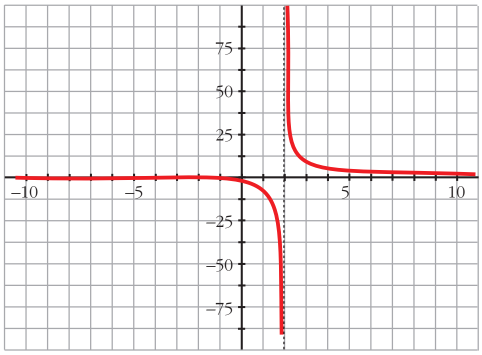


c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$



d) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = -\infty$



54. Troba les asímptotes de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

c) $y = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

e) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ **f)** $y = x + 1 + \dfrac{5}{x}$

a) asímptotes verticals $x = 1$

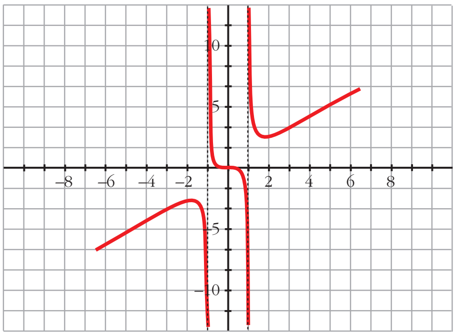
$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

asímptotes verticals $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$$

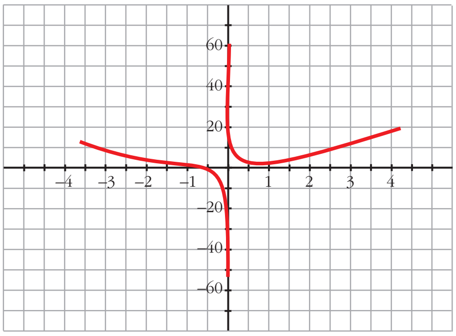
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$



b) asímptota vertical $x = 0$

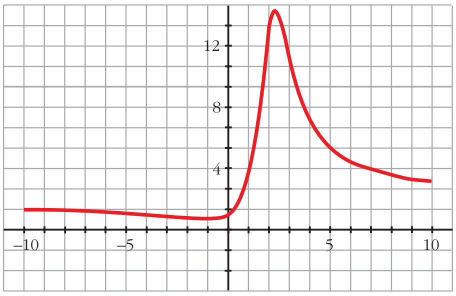
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 + 1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + 1}{x} = -\infty$$



c) asímptota horitzontal

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5} = 2$$



d) $y = 0$, $x = \pm 1$; e) $x = 5$, $y = x$; f) $x = 0$, $y = x + 1$

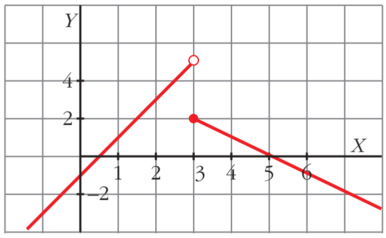
55. Representa les funcions següents i explica si són discontínues en algun dels seus punts:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

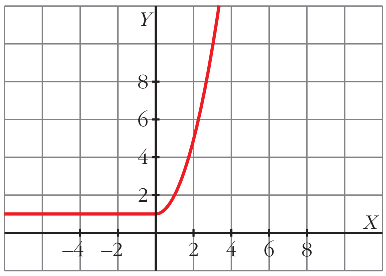
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

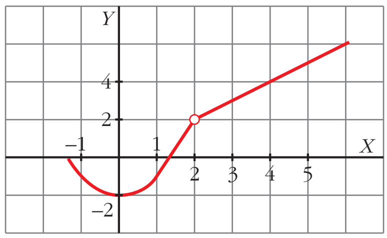
a) Discontínua en $x = 3$.



b) Funció contínua.



c) Discontínua en $x = 2$.



56. a) Calcula el límit de les funcions de l'exercici anterior en $x = -3$ i $x = 5$. b) Troba, en cada una, el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$.

a) $\lim_{x \to -3} f(x) = -7$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

b) $\lim_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 26$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$;

c) $\lim_{x \to -3} f(x) = 7$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 5$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

57. Calcula els límits quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ de les funcions següents:
a) $f(x) = 2^{x-1}$; b) $f(x) = 0{,}75^x$
c) $f(x) = 1 + e^x$; d) $f(x) = 1/e^x$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

58. Troba les branques infinites de les funcions exponencials següents:
a) $y = 2^{x+3}$ b) $y = 1{,}5^x - 1$
c) $y = 2 + e^x$ d) $y = e^{-x}$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$: $y = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$: $y = -1$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +8$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$: $y = 2$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$: $y = 0$

59. Calcula, en cada cas, el valor de k perquè la funció $f(x)$ sigui contínua en qualsevol $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ &\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{aligned}\right\} 5 = 3 + k \Rightarrow k = 2$

b) $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{aligned}\right\}$

$5 = 4 + 2k \Rightarrow k = 1/2$

c) $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \\ &f(0) = k \end{aligned}\right\} k = 1$

60. Estudia la continuïtat d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \ge x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Contínua en $x = 1$

$x \ne 1 \Rightarrow$ Contínua

És contínua en $\mathbb{R}$

b) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Contínua en $x = -1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Contínua en $x = 1$

$x \neq 1$ i $x \neq -1 \Rightarrow$ Contínua

És contínua en $\mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Discontínua en $x = 0$

Si $x \neq 0$, és contínua.

61. Calcula *a* perquè les funcions següents siguin contínues en $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \Rightarrow a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

62. En una empresa es fan muntatges en cadena. El nombre de muntatges realitzats per un treballador sense experiència depèn dels dies d'entrenament segons la funció $M(t) = \dfrac{30t}{t + 4}$ (*t* en dies).

a) Quants muntatges farà el primer dia? I el desè dia?

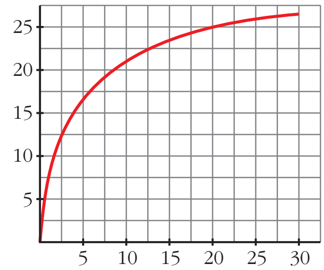
b) Representa'n la funció sabent que el període d'entrenament és d'un mes.

c) Què passaria amb el nombre de muntatges si l'entrenament no s'acabés mai?

a) $M(1) = 6$ muntatges el primer dia.

$M(10) = 21{,}43 \to 21$ muntatges el desè dia.

b)



c) S'aproparia a 30 $\left(\text{així } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{30t}{t + 4} = 30\right)$.

Pàgina 279

63. Les despeses d'una empresa depenen dels ingressos, *x*. Així:

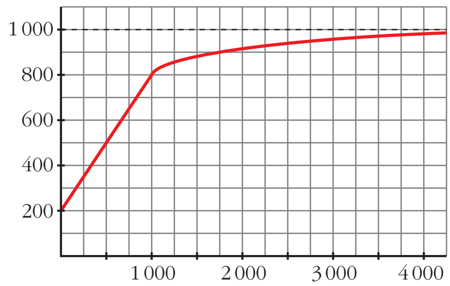
$g(x) = \begin{cases} 0{,}6x + 200 & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,000 \\ 1\,000x/(x + 250) & \text{si } x > 1\,000 \end{cases}$

en què els ingressos i les despeses s'expressen en euros.

a) Representa $g(x)$ i digues si és funció contínua.

b) Calcula el límit de $g(x)$ quan $x \to +\infty$ i explica'n el significat.

a) És contínua.



b) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1\,000$.

Com a màxim gasten 1 000 € al mes.

Qüestions teòriques

64. ¿Es pot calcular el límit d'una funció en un punt en el qual la funció no

estigui definida? Aquesta funció pot ser contínua en aquest punt?

Sí que es pot calcular, però no pot ser contínua.

65. Una funció pot tenir dues asímptotes verticals? En cas afirmatiu, posa'n un exemple.

Sí. Per exemple, $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$ té $x = 0$ i $x = 1$ com a asímptotes verticals.

66. El denominador d'una funció $f(x)$ s'anul·la en $x = a$. Existeix necessàriament una asímptota vertical en $x = a$? Posa'n exemples.

No. Per exemple, $f(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x}$ en $x = 0$; perquè:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x + 1)}{x} = 1$$

67. Una funció pot tenir més de dues asímptotes horitzontals?

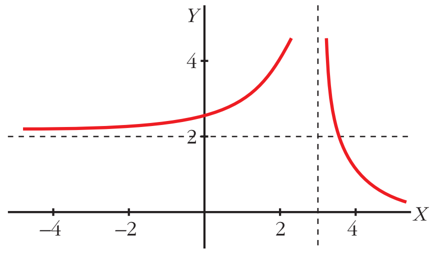
Sí.

68. Representa una funció que compleixi aquestes condicions:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

És discontínua en algun punt?

Sí, és discontínua almenys en $x = 3$.



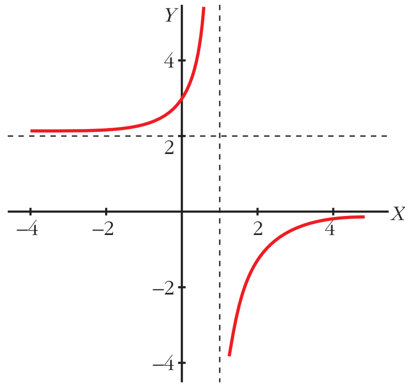
69. Representa una funció que compleixi aquestes condicions:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$



70. Si $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$, podem afirmar que f és contínua en $x = 2$?

No. Perquè fos contínua hauria de ser, a més a més, $f(2) = 5$.

71. Existeix cap valor de k per al qual la funció $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sigui contínua en $x = 0$? Justifica'n la resposta.

No, perquè no existeix $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Per aprofundir

72. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x + 3}{x - 2}}$; b) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x + 1}{x}}$;

c) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$; d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$;

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1} =$

$= \sqrt{1} = 1$

b) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{|x|} = 3$

73. Atès que $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x) = +\infty$, troba un valor de x per al qual $x^2 - 3x$ sigui més gran que 5 000.

Per exemple, per a $x = 100$, $f(x) = 9\,700$.

74. Troba un valor de x per al qual $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sigui més petit que 0,001.

Per exemple, per a $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}00033$.

75. Troba els límits següents:

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - x)$ b) $\lim_{x \to +\infty} (2^x - x^3)$;

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$ d) $\lim_{x \to -\infty} 0{,}75^x - x$

a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) 0; d) $+\infty$.

76. Quina és l'asímptota vertical d'aquestes funcions logarítmiques? Troba'n el límit quan $x \to +\infty$:

a) $y = \log_2(x - 3)$

b) $y = \ln(x + 2)$

a) Asímptota vertical: $x = 3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asímptota vertical: $x = -2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Per pensar una mica més

77. La Raquel vol pujar amb bicicleta al mirador de la muntanya i després baixar, de manera que la velocitat mitjana amb la qual realitzi el recorregut d'anada i tornada sigui de 40 km/h. Ja hi ha pujat i ho ha fet a 20 km/h. Es demana a quina velocitat haurà de baixar per aconseguir-ne el seu objectiu.

a) Troba la velocitat mitjana final per a velocitats de baixada de 60, 80, 100 i 200 km/h.

b) Troba l'expressió de la velocitat mitjana final, V, per a una velocitat de baixada de x km/h.

c) Comprova que la velocitat mitjana desitjada, 40 km/h, és el límit $\lim_{x \to +\infty} V$. Què significa això?

d) Torna a l'enunciat i raona de la manera següent: si la velocitat mitjana en la pujada és la meitat de la desitjada, és perquè el temps que ha emprat ha estat el doble, és a dir, el temps que ha tardat a pujar és tant com el que tenia per pujar i baixar. S'ha quedat sense temps. Ha de baixar a velocitat infinita!

a)

VELOCITAT DE BAIXADA	60	80	100	200
VELOCITAT MITJANA FINAL	30	32	33,33	36,36

b) Anomenem d = la distància que ha de recórrer en la pujada. Per tant, entre la pujada i la baixada recorre $2d$.

Recordem que: velocitat $= \frac{\text{espai}}{\text{temps}}$

El temps que tarda en total serà el que tarda en pujar (a 20 km/h) més el que tarda en baixar (a x km/h):

$$\frac{d}{20} + \frac{d}{x} = d\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{x}\right) = d\left(\frac{x+20}{20x}\right)$$

c) La velocitat mitjana final serà:

$$V = \frac{2d}{t} = \frac{2d}{d[(x+20)/20x]} = \frac{2 \cdot 20x}{x+20} =$$

$$= \frac{40x}{x+20} \rightarrow V(x) = \frac{40x}{x+20}$$

Per tant: $\lim\limits_{x \to +\infty} V(x) = 40$