

## UNITAT DIDÀCTICA 3

## ÀLGEBRA

Pàgina 62

Reflexiona i resol

Un grapat d'ametlles

*Tres amics, l'Antoni, en Joan i en Pau, van anar amb els seus fills, en Juli, en Josep i en Lluís, a un magatzem de fruita seca. Davant d'un sac d'ametlles, l'amo els va dir:*

*–Preneu les que vulgueu.*

*Cada un dels sis va ficar la mà dins el sac un nombre n de vegades i, cada vegada, es va emportar n ametlles (és a dir, si un d'ells va ficar la mà dins el sac 9 vegades, cada vegada va prendre 9 ametlles i, per tant, es va endur 81 ametlles). A més, cada pare va prendre, en total, 45 ametlles més que el seu fill.*

*L'Antoni va ficar la mà 7 vegades més que en Lluís, i en Juli, 15 vegades més que en Pau.*

- *Com es diu el fill de l'Antoni?*
- *I el d'en Joan?*
- *Quantes ametlles es van emportar entre tots?*

Les claus per resoldre aquest problema són:

a) Cada persona s'emporta un nombre d'ametlles que és quadrat perfecte:

$$x \text{ grapats} \rightarrow x^2 \text{ ametlles}$$

$$y \text{ grapats} \rightarrow y^2 \text{ ametlles}$$

b) La diferència d'ametlles que prenen cada pare i el seu fill és de 45.

$$x^2 - y^2 = 45 \rightarrow (x + y)(x - y) = 45$$

(Recorda: *suma per diferència* és igual a *diferència de quadrats*.)

Tenim, per tant, el producte de dos nombres naturals igual a 45. Això solament passa en els casos següents:

$$9 \times 5; 15 \times 3; 45 \times 1$$

- 1<sup>r</sup> cas:  $9 \times 5$

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$x + y = 9 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sumant: } 2x = 14 \rightarrow x = 7 \\ \text{Restant: } 2y = 4 \rightarrow y = 2 \end{array} \right\}$$

$$x - y = 5$$

*Solució:  $x = 7, y = 2$*

Interpreta aquesta solució, estudia els altres casos i resol, finalment, el problema complet.

- 2<sup>n</sup> cas:  $15 \times 3$

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$x + y = 15 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sumant: } 2x = 18 \rightarrow x = 9 \\ \text{Restant: } 2y = 12 \rightarrow y = 6 \end{array} \right\}$$

$$x - y = 3$$

Això vol dir que un altre pare va agafar 9 grapats de 9 ametlles (81 ametlles), i el seu fill 6 grapats de 6 ametlles (36 ametlles).

- 3<sup>r</sup> cas:  $45 \times 1$

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$x + y = 45 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sumant: } 2x = 46 \rightarrow x = 23 \\ \text{Restant: } 2y = 44 \rightarrow y = 22 \end{array} \right\}$$

$$x - y = 1$$

Un dels pares es va endur 23 grapats de 23 ametlles (529 ametlles), i el seu fill 22 grapats de 22 ametlles (484 ametlles).

Com que l'Antoni va ficar la mà 7 vegades més que en Lluís, l'Antoni en va agafar 9 grapats i en Lluís 2.

Com que en Juli va ficar la mà 15 vegades més que en Pau, en Juli en va agafar 22 grapats i en Pau 7.

Per tant:

- L'Antoni se n'emporta 9 grapats i en Josep 6.

- En Joan n'agafa 23 grapats i en Juli 22.

- En Pau se n'emporta 7 grapats i en Lluís 2.

- El fill de l'Antoni és en Josep, el d'en Joan és en Juli i el d'en Pau és en Lluís.

Finalment, el nombre total d'ametlles que es van emportar entre tots serà:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1183 \text{ ametlles.}$$

### Pàgina 63

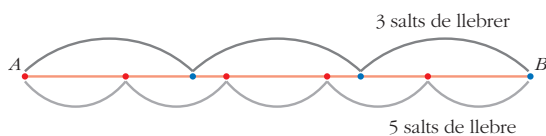
#### El gos i la llebre

*Un gos llebrer persegueix una llebre.*

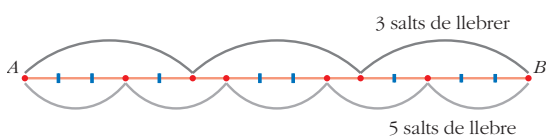
*La llebre porta 30 salts dels seus d'avançatge al llebrer. Mentre el llebrer fa dos salts, la llebre en fa tres. Tres salts de llebrer equivalen a cinc de la llebre. Quants salts farà cada un fins al moment de la captura?*

Aquest problema sembla difícil. Tanmateix, si realitzem una bona representació i elegim adequadament la unitat, pot ser molt senzill. Vegem-ho.

Se'ns diu que tres salts de llebrer coincideixen amb cinc salts de llebre. Ho representem:



Sembla raonable prendre com a unitat de longitud  $u$ , la quinzena part del segment  $AB$ .



**Resol el problema raonant sobre aquesta gràfica:**

- 1 salt de llebrer =  $5u$

- 1 salt de llebre =  $3u$

«Mentre el llebrer fa dos salts, la llebre en fa tres» vol dir:

- llebrer  $\rightarrow 2 \cdot 5u = 10u$

- llebre  $\rightarrow 3 \cdot 3u = 9u$

El llebrer avança  $1u$  més que la llebre.

«La llebre porta 30 salts dels seus al llebrer»:  $30 \cdot 3u = 90u$

Prosegueix d'aquesta manera, fins a acabar el problema.

Cada 2 salts del llebrer i 3 de la llebre, el llebrer s'apropa  $1u$ .

Cada  $2 \cdot 2$  salts del llebrer i  $3 \cdot 2$  de la llebre, el llebrer s'apropa  $2u$ .

Cada  $2 \cdot 3$  salts del llebrer i  $3 \cdot 3$  de la llebre, el llebrer s'apropa  $3u$ .

... ..

### Pàgina 65

**1. Descompon de manera factorial els polinomis següents:**

a)  $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b)  $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c)  $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

a)  $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

$$x^3(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$$

$$x^3(x-2)(x-5)(x-2)$$

b)  $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

$$x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$$

$$x(x-1)(x+1)(x-4)(x^2+x+2)$$

c)  $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

Factoritzem el polinomi, aplicant Ruffini:

## ÀLGEBRA

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\ & & 1 & 7 & 16 & 16 & 15 & 9 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & 16 & 15 & 9 & 0 \end{array}$$

1 és arrel

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & & -1 & -6 & -10 & -6 & -9 \\ & 1 & 6 & 10 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

-1 és arrel

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & & -3 & -9 & -3 & -9 \\ & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

-3 és arrel.

Per tant, la descomposició queda així:

$$x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 =$$

$$(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x^3 + 3x^2 + x + 3)$$

2. a) Intenta factoritzar  $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$ .

b) Fes-ho ara sabent que és divisible per  $x^2 + x + 1$ .

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 : x^2 + x + 1 =$$

$$= x^2 + 3x + 4 \text{ (irreductible)}$$

per tant,

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3. Intenta factoritzar  $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$ .

Fes-ho ara sabent que  $-\frac{1}{2}$  i  $\frac{1}{3}$  són arrels del polinomi.

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(6x^2 + 6x + 6) \text{ irreductible.}$$

Pàgina 67

4. Redueix prèviament a denominador comú les fraccions algebraiques següents i suma-les:

$$\frac{x+7}{x} \quad \frac{x-2}{x^2+x} \quad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\frac{x^2+7x}{x^2+x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x^2+x}{x^2+x} = \frac{-x^2+7x-2}{x^2+x}$$

5. Efectua:

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{x^2-1} = \frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

Pàgina 68

6. Efectua aquestes operacions:

a)  $\frac{x^2-2x+3}{x-2} \cdot \frac{2x+3}{x+5}$

b)  $\frac{x^2-2x+3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5}$

a)  $\frac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$ ; b)  $\frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

7. Calcula:

a)  $\frac{x+2}{x} : \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1}\right)$

$$\frac{6x^2+15x+6}{x^3-x}$$

b)  $\frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4}$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Pàgina 69

8. Resol les equacions següents:

a)  $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b)  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

a)  $x^4 - x^2 - 12 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - y - 12 = 0$



## ÀLGEBRA

Quina és la distància,  $x$ , de  $B$  a  $P$ ?

$$\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{6 - x}{5} = \frac{99}{60}$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} + 12(6 - x) = 99$$

$$(5\sqrt{x^2 + 9})^2 = (9 + 4x)^2$$

$$25x^2 + 225 = 81 + 72x + 16x^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4 \text{ km}$$

Pàgina 71

12. Resol les equacions següents:

a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$

b)  $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

a)  $10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$

$$-3x^2 + 11x + 30 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{481}}{-6} \begin{cases} x = \frac{-11 + \sqrt{481}}{-6} \\ x = \frac{-11 - \sqrt{481}}{-6} \end{cases}$$

b)  $12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$

$$-10x^2 + 38x - 24 = 0$$

$$-5x^2 + 19x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 240}}{-10} \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ x = 3 \end{cases}$$

c)  $4x + 4 = 3x^2$

$$-3x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-6} \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

13. Resol:

a)  $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

b)  $\frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$

c)  $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$

a)  $x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x+1)(x-1)$

$$x = 3$$

b)  $10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x+3)(x+2)$

$$-x^2 - x + 12 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{-2} \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

c)  $35(x+3)(x^2-1) - (x^2+1)(x-1)35 =$   
 $= 26(x-1)(x^2-1)$

$$-26x^3 + 166x^2 - 44x - 96 = 0$$

$$(x-1)(-13x^2 + 70x + 48)$$

$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 4(-13)(48)}}{-26} \begin{cases} x = \frac{-8}{13} \\ x = 6 \end{cases}$$

Solucions:  $1, \frac{-8}{13}, 6$

Pàgina 73

14. Resol les equacions següents:

a)  $2^{3x} = 0,5^{3x+2}$

b)  $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

c)  $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$

d)  $7^{x+2} = 5764801$

a)  $2^{3x} = 0,5^{3x+2}$

$$2^{3x} = 2^{-(3x+2)}$$

$$3x = -3x - 2$$

$$x = \frac{-1}{3}$$

b)  $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

$$3^{4-x^2} = 3^{-2}$$

## ÀLGEBRA

$$4 - x^2 = -2$$

$$x^2 = 6 \begin{cases} x = +\sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases}$$

$$c) \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$$

$$2^{2(x-1) - (x+2)} = 186$$

$$(2x - x - x - 2) \cdot \log^2 = \log 186$$

$$x - 4 = \frac{\log 186}{\log^2}$$

$$x \approx 7,54 + 4 = 11,54$$

$$d) 7^{x+2} = 5764801$$

$$7^{x+2} = 7^8$$

$$x + 2 = 8$$

$$x = 6$$

**15. Resol:**

$$a) 3^x + 3^{x+2} = 30$$

$$b) 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$$

$$c) 2\log x - \log(x+6) = 3\log 2$$

$$d) 4\log_2(x^2 + 1) = \log_2 625$$

$$a) 3^x + 3^{x+2} = 30$$

$$y = 3^x$$

$$\text{Per tant, } 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = y \cdot 9 = 9y$$

$$y + 9y = 30$$

$$10y = 30$$

$$y = 3$$

$$y = 3^x$$

$$3 = 3^x \rightarrow x = 1$$

$$b) 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$$

$$5^x = y$$

$$\text{Per tant, } 5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1 = y \cdot 5 = 5y$$

$$5^{x-1} = 5^x \cdot 5^{-1} = y \cdot 5^{-1} = \frac{y}{5}$$

$$5y + y + \frac{y}{5} = \frac{31}{5}$$

$$25y + 5y + y = 31$$

$$31y = 31$$

$$y = 1$$

$$5^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$c) 2\log x - \log(x+6) = 3\log 2$$

$$\log x^2 - \log(x+6) = \log 2^3$$

$$\log \frac{x^2}{x+6} = \log 8$$

$$\frac{x^2}{x+6} = 8$$

$$x^2 = 8x + 48 \rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$x \begin{cases} -4 \\ 12 \end{cases}$$

$$d) 4\log_2(x^2 + 1) = \log_2 625$$

$$(x^2 + 1)^4 = 5^4$$

$$x^2 + 1 = 5$$

$$x = \pm 2$$

**Pàgina 75****16. Resol aquests sistemes d'equacions:**

$$a) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$$

$$y = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = 7 \\ x = -2 \rightarrow y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{6/x} = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{6} = \frac{5}{6}$$

$$6 + x^2 = 5x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 2 \\ x = 2 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

## ÀLGEBRA

$$c) \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{2y+1+y} - \sqrt{2y+1-y} = 2$$

$$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2$$

$$(\sqrt{3y+1})^2 = (2 + \sqrt{y+1})^2$$

$$(2y-4)^2 = (4\sqrt{y+1})^2$$

$$4y^2 - 32y = 0 \begin{cases} y = 0 \rightarrow x = 1 \\ y = 8 \rightarrow x = 17 \end{cases}$$

**17. Resol:**

$$a) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)^2 + y(1 - y) + y^2 = 21 \end{cases}$$

$$y^2 - y - 20 = 0$$

$$y \begin{cases} y = 5 \rightarrow x = -4 \\ y = -4 \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$$

$$\log x - \log 10 = \log y$$

$$\log \frac{x}{10} = \log y$$

$$\begin{cases} \frac{x}{10} = y \\ x - y = 27 \end{cases}$$

$$x - \frac{x}{10} = 27$$

$$9x = 270$$

$$x = 30 \rightarrow y = 3$$

$$c) \begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = \log 10 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y}{x - 2y} = 10 \\ x + 1 = 2y + 2 \end{cases}$$

$$\frac{(2y+1)^2 + y}{2y+1-2y} = 10$$

$$4y^2 + 4y + 1 + y = 10$$

$$4y^2 + 5y - 9 = 0$$

$$y \begin{cases} y = 1 \rightarrow x = 3 \\ x = \frac{-18}{8} = \frac{-9}{4} \rightarrow x = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

**Pàgina 76****18. Reconeix com a esglaonats i resol:**

$$a) \begin{cases} x & = 7 \\ 2x - 3y & = 8 \\ 3x + y - z & = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 4y & = 0 \\ 2y & = -6 \\ 5x + y - z & = 17 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x & = -3 \\ 5y & = 20 \\ 2x + y - z & = -2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y & = 4 \\ x - z & = 11 \\ y - z & = 7 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x & = 7 \\ 2x - 3y & = 8 \\ 3x + y - z & = 12 \end{cases}$$

$$1) x = 7$$

$$2) 2 \cdot 7 - 3y = 8$$

$$y = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$3) 3 \cdot 7 + 2 - z = 12$$

$$z = -11$$

## ÀLGEBRA

$$b) \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$$

1)  $y = -3$

2)  $3x + 4 \cdot (-3) = 0$

$x = 4$

3)  $5 \cdot 4 + (-3) - z = 17$

$z = 0$

$$c) \begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

1)  $x = -1$

2)  $y = 4$

3)  $2 \cdot (-1) + 4 - z = -2$

$z = 4$

$$d) \begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$$

1)  $y = 4$

2)  $4 - z = 7 \rightarrow z = -3$

3)  $x + 3 = 11$

$x = 8$

**19. Resol els sistemes d'equacions següents:**

$$a) \begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

$y = -5$

$z = 4$

$x = 1$

$$b) \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$$

1)  $y = -2$

2)  $3x - 2 = -5$

$x = -1$

3)  $-1 + 2(-2) - z = -3$

$-z = 2$

$z = -2$

$$c) \begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$$

1)  $z = 1$

2)  $3y - 1 = 5$

$y = 2$

3)  $x - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$

$x = 15$

$$d) \begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$$

1)  $x = 3$

2)  $y = 4$

3)  $4 \cdot 3 + 4 - z = 7 \rightarrow z = 9$

**Pàgina 77**

**20. Resol pel mètode de Gauss:**

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$



## ÀLGEBRA

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{cases}$$

1)  $x = 1$

2)  $2 \cdot 1 + 2z = 8$

$z = 3$

3)  $1 + y + 3 = 2$

$y = -2$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x - 3y = 6 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = 20 \\ 3x - 3y = 6 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

1)  $x = 4$

2)  $3 \cdot 4 - 3y = 6$

$y = 2$

3)  $2 \cdot 4 - 2 - z = 9$

$z = -3$

**21. Resol:**

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1a) + 4(2a) & \begin{cases} 13x - 5z = 13 \\ (2a) & \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ (3a) - 3(2a) & \begin{cases} -2x & 10z = -2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1a) & \begin{cases} 13x - 5z = 13 \\ (2a) & \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ (3a) + 2(1a) & \begin{cases} 26x & = 26 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

1)  $x = 1$

2)  $13 \cdot 1 - 5z = 13$

$z = 0$

3)  $2 \cdot 1 + y - 2 \cdot 0 = 1$

$y = -1$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

1)  $x = 2$

2)  $5 \cdot 2 - 3z = 13$

$z = -1$

3)  $2 \cdot 2 - 5y + 4(-1) = -1$

$y = \frac{1}{5}$

**Pàgina 78****22. Resol aquestes inequacions:**

a)  $3x + 2 \leq 10$

b)  $x - 5 > 1$

a)  $x \leq 8/3$

b)  $x > 6$

$$\text{23. Resol a) } \begin{cases} 3x + 2 \leq 10 \\ x - 5 > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 3x \leq 8 & \rightarrow x \leq 8/3 \\ x > 6 \end{aligned} \right\} \text{No té solució}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 2x \geq 11 & \rightarrow x \geq 11/2 \\ 3x \leq 14 & \rightarrow x \leq 14/3 \end{aligned} \right\} \text{No té solució}$$

## Pàgina 79

## 24. Resol les inequacions següents:

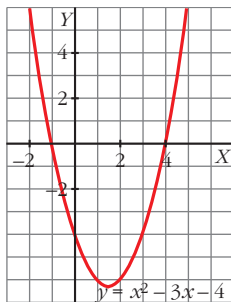
a)  $x^2 - 3x - 4 < 0$

b)  $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c)  $x^2 + 7 < 0$

d)  $x^2 - 4 \leq 0$

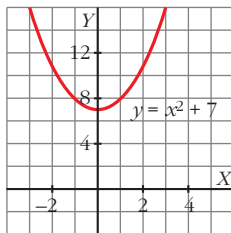
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow \text{interval } (-1, 4)$

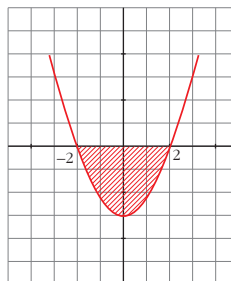
b)  $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c)



$x^2 + 7 < 0 \rightarrow \text{No té solució}$

d)  $x^2 - 4 \leq 0$



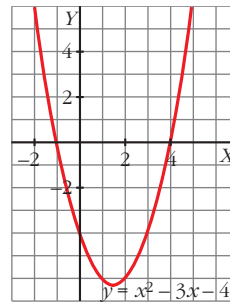
Solució:  $[-2, 2]$

## 25. Resol els sistemes d'inequacions següents:

a)  $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a)

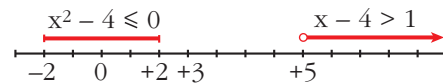


$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solució:  $(6, +\infty)$

b)  $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$



No té solucions comunes.

## Pàgina 80

## 1. De les següents igualtats, quines són identitats?

a)  $(x - 3)(x - 2)x = x^3 - 5x^2 + 6x$

b)  $(x - 3)(x - 2)x = x^3$

c)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

d)  $\frac{x^3 - 3x - 5}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{x - 2}$

Comprova que la igualtat és certa per a qualsevol valor de les variables (fes la comprovació per a diversos nombres).

Són identitats a), c) i d).

## ÀLGEBRA

**2. Resol, pas a pas, l'equació**

$$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$$

i explica en cada pas per què l'equació que s'obté és equivalent a la que hi havia.

Quan el pas consisteixi a obtenir una expressió idèntica a una altra, assenyala quina és l'expressió transformada, quina és l'obtinguda i quina operació permet passar de l'una a l'altra.

1) Apliquem propietat distributiva, on  $(x^2 - 6x + 9)x^2$  és igual a  $x^4 - 6x^3 + 9x^2$   
 $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$

2) Traslladem termes

$$x^4 - x^4 - 6x^3 + 6x^3 + 9x^2 - 36 = 0$$

3) Simplifiquem

$$9x^2 - 36 = 0$$

4) Resolem l'equació

$$9x^2 = 36$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = \begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases}$$

**Pàgines 84****Equacions de primer i segon grau**

**26. Entre les sis equacions de primer grau següents, n'hi ha dues que no tenen solució, dues que tenen infinites solucions i dues que tenen solució única. Identifica cada cas i resol les que sigui possible:**

a)  $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$

b)  $x + \frac{3-x}{3} - 1 = \frac{2}{3}x$

c)  $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

d)  $0,2x + 0,6 - 0,25(x-1)^2 =$

$$= 1,25x - (0,5x + 2)^2$$

e)  $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

f)  $\frac{2x+1}{7} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}$

a)  $2(x+1) = 4x - 2x - 3$

$$0 = -5$$

No té solució.

b)  $3x + 3 - x - 3 = 2x$

$$0 = 0$$

Infinites solucions.

c)  $x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x =$

$$= x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$$

$$0 = 0$$

Té infinites solucions.

d)  $\frac{x}{5} + \frac{3}{5} - \frac{(x^2+1-2x)}{4} = \frac{5x}{4} - \frac{x^2}{4} - 4 - 2x$

$$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x =$$

$$= 25x - 5x^2 - 80 - 40x$$

$$29x = -87$$

$$x = -\frac{87}{29}$$

$$x = -3$$

e)  $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$

$$9 = 0$$

No té solució.

f)  $4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 =$

$$= 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$$

$$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$$

$$x = \frac{58}{24} = \frac{29}{12}$$

**27. Resol les equacions següents:**

a)  $\frac{x^2-1}{3} + (x-2)^2 = \frac{x^2+2}{2}$

b)  $0,5(x-1)^2 - 0,25(x+1)^2 = 4 - x$

c)  $(0,5x-1)(0,5x+1) = (x+1)^2 - 9$

## ÀLGEBRA

$$d) \frac{3}{2} \left( \frac{x}{2} - 2 \right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$$

$$e) \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} = \frac{(3x-2)^2}{8} + 1$$

$$f) 0,3x^2 - x - 1,3 = 0$$

Expressa els decimals periòdics en forma de fracció i obtindràs solucions enteres.

$$a) 2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 320}}{10}$$

$$x = \frac{24 \pm 16}{10} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4/5 \end{cases}$$

$$b) \frac{1}{2}(x^2 + 1 - 2x) - \frac{1}{4}(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} = 4 - x$$

$$2x^2 + 2 - 4x - x^2 - 1 - 2x = 16 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$c) \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \left( \frac{x}{2} + 1 \right) = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$\frac{x^2}{4} - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$x^2 - 4 = 4x^2 + 4 + 8x - 36$$

$$0 = 3x^2 + 8x - 28$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -14/3 \end{cases}$$

$$d) 3x^2 - 24x + 48 - x - 1 = 1 - 2x + 2$$

$$3x^2 - 23x + 44 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 4 \cdot 3 \cdot 44}}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$e) 4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x = 9x^2 - 12x + 4 + 8$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-3)(-12)}}{-6} = \frac{-4 \pm \sqrt{-128}}{-6}$$

No té solució.

$$f) \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3} = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1(-4)}}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

**28. Resol aquestes equacions incompletes de segon grau sense aplicar-hi la fórmula general.**

**Recorda:**  $ax^2 + c = 0$  es resol aïllant  $x$ .

$ax^2 + bx = 0$  es resol traient factor comú i igualant a zero cada factor.

$$a) (x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$$

$$b) \frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$$

$$c) \frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$$

$$d) (x-a)^2 + x(x+b) = 8b^2 - x(2a-b) + a^2$$

$$a) x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x =$$

$$= x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$$

$$6x - 3 = 2x^2 + 6x - 11$$

$$8 = 2x^2$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$b) 6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x =$$

$$= 2x^2 - 8x + 30$$

$$x^2 - 13x = 0$$

$$x(x-13) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 13$$

$$c) 6x + 2 - 15x^2 - 9 =$$

$$= 3x^2 - 3 - 2x - 4$$

$$0 = 18x^2 - 8x$$

$$2x(9x-4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$$

$$d) x^2 - 2ax + a^2 + x^2 + bx =$$

$$= 8b^2 - 2ax - bx + a^2$$

## ÀLGEBRA

$$2x^2 = 8b^2$$

$$x = \sqrt{4b^2} \begin{cases} x = +2b \\ x = -2b \end{cases}$$

## Equacions biquadrades

29. Resol aquestes equacions biquadrades:

a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  b)  $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c)  $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$  d)  $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

a)  $x^2 = z$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \begin{cases} z = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$z = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

b)  $x^2 = z$

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \begin{cases} z = -4 \text{ (no val)} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$z = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

c)  $x^2 = z$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \begin{cases} z = -2 \text{ (no val)} \\ z = -1 \text{ (no val)} \end{cases}$$

No té solució.

d)  $x^2 = z$

$$z^2 - 9z + 8 = 0$$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \begin{cases} z = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$z = 8 \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

30. Resol:

a)  $(x^2 - 2)^2 = 1$

b)  $\frac{3x^4 - 1}{4} + \frac{1}{2} \left( x^4 - 2 - \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{x^2 - 5}{4}$

a)  $(x^2 - 2)^2 = 1$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 1$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = y \rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \begin{cases} y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 3 \begin{cases} x = +\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x^2 = 1 \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b)  $\frac{3x^4 - 1}{4} + \frac{1}{2} \left( x^4 - 2 - \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{x^2 - 5}{4}$

$$\frac{3x^4 - 1}{4} + \frac{x^4}{2} - 1 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{x^2 - 5}{4}$$

$$3x^4 - 1 + 2x^4 - 4 - x^2 = x^2 - 5$$

$$5x^4 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(5x^2 - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{2}{5}} \\ x = -\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

## Equacions amb radicals

31. Resol les equacions següents:

a)  $\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$

b)  $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

c)  $\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$

d)  $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 5} = 0$

a)  $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{-8} \begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$$

## ÀLGEBRA

$$b) 7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} x = 2 \text{ (no val)} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$c) 2 - 5x = (-x\sqrt{3})^2$$

$$2 - 5x = x^2 \cdot 3$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$d) (\sqrt{2x+3})^2 = (-\sqrt{x-5})^2$$

$$x = -8. \text{ Solució no vàlida.}$$

**32. Resol:**

$$a) \sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$$

$$b) \sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$$

$$c) \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$$

$$a) (\sqrt{5x-6})^2 = (4 - \sqrt{2x})^2$$

$$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$$

$$(8\sqrt{2x})^2 = (-3x + 22)^2$$

$$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$$

$$128x = 9x^2 + 484 - 132x$$

$$0 = 9x^2 - 260x + 484$$

$$x = \frac{260 \pm \sqrt{67600 - 17424}}{18}$$

$$x = 484/18 = 242/9 \text{ (no val)}$$

$$x = 2$$

$$b) \left(\sqrt{\frac{7x+1}{4}}\right)^2 = \left(\frac{5x-7}{6}\right)^2$$

$$-25x^2 + 133x - 40 = 0$$

$$x = \frac{-133 \pm \sqrt{17689 - 4(-25)(-40)}}{-50}$$

$$x = \begin{cases} x = 5 \text{ Vàlida} \\ x = \frac{8}{25} \text{ Vàlida} \end{cases}$$

$$c) (\sqrt{x-2})^2 = (3 - \sqrt{x+1})^2$$

$$x - 2 = 3^2 + (\sqrt{x+1})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{x+1}$$

$$x - 2 = 9 + x + 1 - 6\sqrt{x+1}$$

$$x - 2 - 9 - x - 1 = -6\sqrt{x+1}$$

$$-12 = -6\sqrt{x+1}$$

$$-12^2 = (-6\sqrt{x+1})^2$$

$$144 = 36(x+1)$$

$$144 = 36x + 36$$

$$144 - 36 = 36x$$

$$108 = 36x$$

$$x = \frac{108}{36} = 3$$

**Factorització****33. Descompon en factors aquests polinomis i digues quines són les seves arrels:**

$$a) x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$b) x^4 - 5x^2 + 4$$

$$c) 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

$$d) x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$$

$$e) 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$$

$$f) x^5 - 16x$$

$$g) 4x^3 - 25x$$

$$h) 4x^2 + 4x + 1$$

$$a) (x-1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+1) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = 2; x = -1$$

$$b) (x-1)(x^3 + x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x-2) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = -1; x = -2; x = 2$$

$$c) (x-1)(2x^2 - x - 10) = 0$$

$$(x-1)(x+2)\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = -2; x = \frac{5}{2}$$

$$d) (x-1)(x-2)(x-5)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = 2; x = 5$$

$$e) (x-2)(x+2)(6x^2 - 5x + 1) = 0$$

## ÀLGEBRA

$$(x-2)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Arrels:  $x = 2$ ;  $x = -2$ ;  $x = \frac{1}{2}$ ;  $x = \frac{1}{3}$

f)  $x(x^4 - 16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^4 - 16 = 0 \end{cases}$

$$x^4 - 16 = 0 \begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Arrels:  $x = 0$ ;  $x = +2$ ;  $x = -2$

g)  $x(4x^2 - 25) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 25 = 0 \end{cases}$

$$4x^2 - 25 = 0 \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Arrels:  $x = 0$ ;  $x = \frac{5}{2}$ ;  $x = -\frac{5}{2}$

h)  $4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Arrels:  $x = -\frac{1}{2}$

## Pàgina 85

34. Troba, en cada un dels casos següents, el M.C.D.  $[A(x), B(x)]$  i el m.c.m.  $[A(x), B(x)]$ :

a)  $A(x) = x^2 + x - 12$ ;  $B(x) = x^3 - 9x$

b)  $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ;  $B(x) = x^3 - x$

c)  $A(x) = x^6 - x^2$ ;  $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a)

$$\begin{array}{r|rr} x^2 + x - 12 & (x+4) & x^3 - 9x & x \\ x - 3 & (x-3) & x^2 - 9 & x + 3 \\ 1 & & x - 3 & x - 3 \\ & & 1 & \end{array}$$

M.C.D.:  $(x-3)$

m.c.m.:  $x(x+3)(x-3)(x+4)$

b)

$$\begin{array}{r|rr} x^3 + x^2 - x - 1 & x-1 & x^3 - x & x \\ x^2 + 2x + 1 & x+1 & x^2 - 1 & x-1 \\ x+1 & x+1 & x+1 & x+1 \\ 1 & & 1 & \end{array}$$

M.C.D.:  $(x-1)(x+1)$

m.c.m.:  $x(x-1)(x+1)^2$

c)

$$\begin{array}{r|rr} x^6 + x^2 & x & \\ x^5 - x & x & \\ x^4 - 1 & x-1 & \\ x^3 + x^2 + x + 1 & x+1 & \\ x^2 + 1 & x^2 + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} x^3 - x^2 + x - 1 & x-1 & \\ x^2 + 1 & x^2 + 1 & \end{array}$$

M.C.D.:  $(x^2 + 1)(x-1)$

m.c.m.:  $x^2(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$

35. Resol les equacions següents, factoritzant prèviament:

a)  $x^3 - 7x - 6 = 0$

b)  $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

c)  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

d)  $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

e)  $x^5 - 16x = 0$

f)  $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

g)  $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

a)  $(x+1)(x^2 - x - 6) = 0$

$(x+1)(x-3)(x+2) = 0$

Solucions:  $x = -1$ ;  $x = 3$ ;  $x = -2$

b)  $(x-1)(2x^2 - x - 10) = 0$

$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right) = 0$

Solucions:  $x = 1$ ;  $x = -2$ ;  $x = \frac{5}{2}$

## ÀLGEBRA

$$c) (x-1)(x+1)(x^2-5x+6) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)(x-2) = 0$$

Solucions:  $x = 1$ ;  $x = -1$ ;  $x = 3$ ;  $x = 2$

$$d) (x-1)(3x^2-7x+2) = 0$$

$$(x-1)(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Solucions:  $x = 1$ ;  $x = 2$ ;  $x = \frac{1}{3}$

$$e) x^5 - 16x = 0$$

$$x(x^4 - 16) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = +2$$

$$x = -2$$

$$f) x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

$$g) x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^2+4) = 0$$

$$(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$(x^2+4) = 0 \rightarrow \text{Sense solució}$$

## Fraccions algebraiques

## 36. Simplifica les fraccions:

$$a) \frac{9-x^2}{x^2-3x} \quad b) \frac{3x^2-2x^2-7x-2}{x^3-4x}$$

$$a) \frac{9-x^2}{x^2-3x} = \frac{(3+x)(3-x)}{x(x-3)} =$$

$$= \frac{(3+x)(3-x)}{-x(3-x)} = \frac{-(3+x)}{x}$$

$$b) \frac{3x^3-2x^2-7x-2}{x^3-4x} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x-2/3)}{x(x+2)(x-2)}$$

No es pot simplificar.

## 37. Opera i simplifica el resultat:

$$a) \frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1}$$

$$b) \frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$$

$$c) \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2}$$

$$d) \left( \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2} \right) : \left( 1 + \frac{x}{x+2} \right)$$

$$e) \left( 1 - \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2} \right) : \frac{1}{x+2}$$

$$a) \frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1}$$

$$\frac{3a^3-3a+3a^2-3}{12a^3+24a^2+12a-12a^2-24a-12} =$$

$$\frac{3(a^3+a^2-a-1)}{12(a^3+a^2-a-1)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$b) \frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1} =$$

$$\frac{(x-1)(x+3)(x-2)^2}{(x-2)^3(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$

$$c) \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2} =$$

$$= \frac{x(x-1) - x(x-2) - x}{(x-2)(x-1)} =$$

$$= \frac{x(x-1-x+2-1)}{(x-2)(x-1)} = 0$$

$$d) \left( \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2} \right) : \left( 1 + \frac{x}{x+2} \right)$$

$$\frac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)} : \frac{x+2+x}{x+2}$$

$$\frac{x^2+2x+x+2-x^2}{x(x+2)} : \frac{2x+2}{x+2}$$

$$\frac{(3x+2)(x+2)}{x(x+2)(2x+2)} = \frac{3x+2}{x(2x+2)}$$

$$e) \left( 1 - \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2} \right) : \frac{1}{x+2}$$



## ÀLGEBRA

$$\frac{(x+2)^2 - (x+1)(x+3)}{(x+2)^2} : \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x - x - 3}{x+2} = \frac{1}{x+2}$$

38. Demosta les identitats següents:

a)  $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$

b)  $\frac{a^2 - 1}{a^2 - 3a + 2} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - a - 2} = 1$

c)  $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = 2x-5$

a)  $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{1-x+2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{(1+x)(1-x)}{x(1-x)(1+x)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

b)  $\frac{a^2 - 1}{a^2 - 3a + 2} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - a - 2} = 1$

$$\frac{(a^2 - 1)(a^2 - a - 2)}{(a^2 - 3a + 2)(a^2 + 2a + 1)} =$$

$$\frac{(a+1)(a-1)(a-2)(a+1)}{(a-1)(a-2)(a+1)(a+1)} = 1$$

c)  $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = 2x-5$

$$\frac{(x-2)^2 - (x-3)^2}{(x-3)(x-2)} : \frac{(x-2) - (x-3)}{(x-3)(x-2)} =$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 6x + 9)}{1} = 2x - 5$$

**Equacions amb la  $x$  al denominador**

39. Resol aquestes equacions i comprova la validesa de les solucions:

a)  $\frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$ ;

b)  $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

c)  $\frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{2-x}$

Tingues en compte que  $2-x = -(x-2)$ .

d)  $\frac{x}{x-6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x+6}{6-x}$

e)  $\frac{3x+1}{x^3} + \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{2x+3}{x^2}$

f)  $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}x$

a)  $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2}$$

$$x = 2$$

b)  $8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$

$$2x^2 - 14x - 60 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{4}$$

$$\begin{cases} x_1 = (14 + 26)/4 = 10 \\ x_2 = (14 - 26)/4 = -3 \end{cases}$$

$$x_2 = (14 - 26)/4 = -3$$

c)  $(x-2)(x-2) = x^2 + (x-1)(x-1)$

$$-x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{-2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

d)  $6x - 3(x-6) = x(x-6) - 6(x+6)$

$$-x^2 + 15x + 54 = 0$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 4 \cdot (-1) \cdot 54}}{-2} \begin{cases} x = 18 \\ x = -3 \end{cases}$$

e)  $3x + 1 + x^2(x+1) = x^3 + x(2x+3)$

$$-x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases}$$

f)  $x^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}x)^2$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x = +\sqrt{2} \text{ i } x = -\sqrt{2}$$

## Equacions exponencials i logarítmiques

Pàgina 86

40. Resol les equacions següents exponencials:

a)  $3^x = \sqrt[3]{9}$

Expressa  $\sqrt[3]{9}$  com a potència de base 3.

b)  $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

Multipliqua el primer membre.

c)  $5 \cdot 7^{-x} = 35$

Divideix els dos membres per 5.

d)  $(0,5)^x = 16$

0,5 és una potència de base 2.

e)  $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$

f)  $2^{1/x} = 16$

g)  $\frac{3^{3x-2}}{3^{x+3}} = 81$

h)  $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$

i)  $2^x \cdot 5^x = 0,1$

Recorda que  $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x$ .

a)  $3^x = 9^{1/3} \rightarrow 3^x = 3^{2/3} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

b)  $2^{x+x+1} = 8 \rightarrow 2^{2x+1} = 2^3 \rightarrow$   
 $\rightarrow 2x+1 = 3 \rightarrow x = 1$

c)  $7^{-x} = 7 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$

d)  $(2^{-1})^x = 2^4 \rightarrow -x = 4 \rightarrow x = -4$

e)  $7^{x/2} = 7^{-2} \rightarrow \frac{x}{2} = -2 \rightarrow x = -4$

f)  $2^{1/x} = 2^4 \rightarrow \frac{1}{x} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

g)  $3^{(3x-2)-(x+3)} = 3^4 \rightarrow 2x-5 = 4 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{9}{2}$

h)  $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \rightarrow x = 3$

i)  $10^x = 10^{-1} \rightarrow x = -1$

41. Resol, prenent logaritmes, aquestes equacions:

a)  $\frac{1}{e^x} = 27$

b)  $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c)  $2^x \cdot 3^x = 81$

d)  $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

a)  $e^{-x} = 27$

$-x \ln e = 3 \ln 3$

$x = -3 \ln 3 \approx -3,30$

b)  $(x-9) \ln e = \ln \sqrt{73}$

$x = \ln \sqrt{73} + 9 \approx 11,15$

c)  $6^x = 3^4 \rightarrow x \log 6 = 4 \log 3$

$x = \frac{4 \log 3}{\log 6} \approx 2,4526$

d)  $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \rightarrow$

$\rightarrow x(\log 2 - \log 3) = \log 3$

$x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3} \approx -2,7095$

42. Resol les equacions següents mitjançant un canvi de variable:

a)  $2^x + 2^{1-x} = 3$

b)  $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c)  $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d)  $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e)  $9^x - 3^x - 6 = 0$

f)  $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

a)  $2^x = y$

$y + \frac{2}{y} = 3 \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

$\begin{cases} y = 1 \rightarrow 1 = 2^x \rightarrow x = 0 \\ y = 2 \rightarrow 2 = 2^x \rightarrow x = 1 \end{cases}$

b)  $2^x = y$

## ÀLGEBRA

$$2y + \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow 4y + y = 5 \rightarrow y = 1$$

$$1 = 2^x \rightarrow x = 0$$

$$c) 2^{3x} = y$$

$$8y + \frac{y}{2} = \frac{17}{16} \rightarrow 136y = 17 \rightarrow y = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} = 2^{3x} \rightarrow 2^{-3} = 2^{3x} \rightarrow x = -1$$

$$d) 2^x = y$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 4 \rightarrow 4 = 2^x \rightarrow x = 2 \\ y = 1 \rightarrow 1 = 2^x \rightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

$$e) 3^x = y$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3 \rightarrow 3 = 3^x \rightarrow x = 1 \\ y = -2 \rightarrow -2 = 3^x \text{ No té solució} \end{array} \right.$$

$$f) 7^x = y$$

$$7y^2 - 50y + 7 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 7 \rightarrow 7^x = 7 \rightarrow x = 1 \\ y = \frac{1}{7} \rightarrow 7^x = \frac{1}{7} \rightarrow 7^x = 7^{-1} \rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

**43. Resol les equacions:**

$$a) \log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$$

$$b) \ln(x - 3) + \ln(x + 1) = \ln 3 + \ln(x - 1)$$

$$c) 2 \ln(x - 3) = \ln x - \ln 4$$

$$d) \log(x + 3) - \log(x - 6) = 1$$

$$a) \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{13}{12} \rightarrow 12x^2 + 12 = 13x^2 - 13$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ x = -5 \end{array} \right. \text{ Totes dues vàlides}$$

$$b) (x - 3)(x + 1) = 3(x - 1)$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ No vàlida} \\ x = 5 \text{ Vàlida} \end{array} \right.$$

$$c) (x - 3)^2 = \frac{x}{4}$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \text{ Vàlida} \\ x = \frac{9}{4} \text{ No vàlida} \end{array} \right.$$

$$d) \frac{x+3}{x-6} = 10$$

$$9x = 63$$

$$x = 7 \text{ Vàlida}$$

**44. Resol les equacions:**

$$a) \log(x + 9) = 2 + \log x$$

$$b) \log \sqrt{3x + 5} + \log \sqrt{x} = 1$$

$$c) 2(\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$$

$$d) \log(x^2 - 7x + 110) = 2$$

$$e) \log(x^2 + 3x + 36) = 1 + \log(x + 3)$$

$$f) \ln x + \ln 2x + \ln 4x = +3$$

$$a) (x + 9) = 100x$$

$$x = \frac{1}{11} \text{ Vàlida}$$

$$b) \sqrt{x}(\sqrt{3x + 5}) = 10$$

$$3x + 5 = \frac{100}{x}$$

$$3x^2 + 5x - 100 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5 \text{ Vàlida} \\ x = \frac{-20}{3} \text{ No vàlida} \end{array} \right.$$

$$c) \log x = y$$

$$2y^2 + 7y - 9 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{-9}{2} \rightarrow \log x = \frac{-9}{2} \rightarrow x = 10^{-9/2} \rightarrow \\ y = 1 \rightarrow \log x = 1 \rightarrow x = 10 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{10^9}} \text{ Totes dues vàlides}$$

$$d) x^2 - 7x + 110 = 100$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Totes dues vàlides.

$$e) x^2 + 3x + 36 = 10(x + 3)$$

## ÀLGEBRA

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \end{cases}$$

Totes dues vàlides.

$$f) \ln 8x^3 = 3$$

$$8x^3 = e^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{e^3}{8}} = \frac{e}{2}$$

## Sistemes d'equacions

## 45. Resol:

$$a) \begin{cases} xy = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

Suma les dues equacions.

$$d) \begin{cases} (x + y)(x - y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$a) x = \frac{15}{y}$$

$$\frac{15}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{15}{y^2} = \frac{5}{3}; 45 = 5y^2; y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = -3$$

$$b) \begin{cases} x = \frac{6y}{5y-6} \\ 2x + 3y = 2 \text{ (substituïm la } x) \end{cases}$$

$$\frac{12y}{5y-6} + 3y = 2$$

$$15y^2 - 16y + 12 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 720}}{30} \text{ No té solució}$$

## c) Reducció

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 / -10x / + 12 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{4} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

per a  $x_1 = 3$

$$9 + y^2 - 15 - 5y + 10 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

per a  $x_2 = 2$

$$4 + y^2 - 10 - 5y + 10 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \begin{cases} y_3 = 4 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

Solucions

$$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 4$$

$$x_1 = 3 \rightarrow y_2 = 1$$

$$x_2 = 2 \rightarrow y_3 = 4$$

$$x_2 = 2 \rightarrow y_4 = 1$$

$$d) \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \frac{4y}{3} \end{cases}$$

$$\frac{16y^2}{9} - y^2 = 7$$

$$16y^2 - 9y^2 = 63; y^2 = 9$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; x_2 = -4, y_2 = -3$$

## 46. Resol:

$$a) \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} (y-1)^2 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{substitució}} \sqrt{(y-1)^2} + y = 5$$

## ÀLGEBRA

$$2y = 6$$

$$y = 3 \rightarrow x = 4$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = 2\sqrt{x+1} - 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{substitució}}$$

$$\xrightarrow{\text{substitució}} 2x - 3(2\sqrt{x+1} - 1) = 1$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0 \begin{cases} x_1 = 8 \rightarrow y = 5 \\ x_2 = -1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ y = 2x - 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{substitució}}$$

$$\xrightarrow{\text{substitució}} \sqrt{3(x+2x-6)} + x = 12$$

$$-x^2 + 33x - 162 = 0$$

$$x = \frac{-33 \pm \sqrt{1089 - 4 \cdot (-1) \cdot (-162)}}{-2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 27 \end{cases}$$

$$\text{per a } x_1 = 6 \rightarrow y_1 = 6$$

$$\text{per a } x_2 = 27 \rightarrow y_2 = 48$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{substitució}}$$

$$\xrightarrow{\text{substitució}} \sqrt{x+2x-5} + 2 = x + 1$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{-2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = -1 \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 1 \end{cases}$$

**47. Resol els sistemes d'equacions següents:**

$$\text{a) } \begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = 1 + x \\ 2^x + 2^{1+x} = 12 \end{cases}$$

$$2x = a$$

$$a + 2a = 12$$

$$3a = 12$$

$$a = 4 \rightarrow 2^x = 4$$

$$x = 2 \rightarrow y = 3$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5^{x+y} = 5^0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$x = -y$$

$$-y - y = 2$$

$$-2y = 2$$

$$y = -1 \rightarrow x = 1$$

**48. Resol:**

$$\text{a) } \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log(x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \\ 2 \log x - \log y = 2 \end{cases}$$

Reducció

$$\log x = 1 \rightarrow x_1 = 10$$

$$\text{Per a } x_1 = 10 \rightarrow 1 + \log y = 3$$

$$y_1 = 100$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ 2 \log x - \log y = 3 \end{cases} \rightarrow$$

Reducció

$$\rightarrow \begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ 6 \log x - 3 \log y = 9 \\ \hline 7 \log x \quad \quad \quad = 14 \end{cases}$$

$$\log x = 2 \rightarrow x_1 = 100$$

$$\text{Per a } x_1 = 100 \rightarrow 2 + 3 \log y = 5$$

$$y_1 = 10$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2 \log x + \log y = 2 \\ \log x - 2 \log y = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \log x + \log y = 2 \\ -2 \log x + 4 \log y = -12 \\ \hline \quad \quad \quad 5 \log y = -10 \end{cases}$$

$$y_1 = 10^{-2}$$

$$\text{Per a } y_1 = 10^{-2} \rightarrow 2 \log x - 2 = 2$$

$$x_1 = 100$$

$$\text{d) } x^2 - y^2 = 11$$

$$\log x = 1 + \log y \rightarrow \log x = \log 10y$$

$$x = 10y$$

substitució

$$100y^2 - y^2 = 11$$

$$y = \sqrt{\frac{11}{99}} \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{1}{3} \begin{cases} x_1 = \frac{10}{3} \\ x_2 = \frac{-10}{3} \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{-1}{3} \begin{cases} x_3 = \frac{10}{3} \\ x_4 = \frac{-10}{3} \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - \log 10 \rightarrow y = \frac{x}{10} \end{cases}$$

substitució

$$x - \frac{x}{10} = 25$$

$$x_1 = \frac{250}{9} \rightarrow y_1 = \frac{25}{9}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \ln \frac{x}{y} = 2 \\ \ln xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = e^2 \\ xy = e^4 \end{cases}$$

$$x = e^2 \cdot y$$

$$e^2 \cdot y^2 = e^4$$

$$y^2 = e^2 \rightarrow y = e \rightarrow x = e^3$$

### Mètode de Gauss

#### 49. Resol els sistemes següents reconeixent prèviament que són esglaonats:

$$\text{a) } \begin{cases} 13x - 2y = 9 \\ 7x \quad \quad = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -y + z = -5 \\ \quad \quad -7z = 14 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 13x - 2y = 9 \\ 7x \quad \quad = 3 \end{cases}$$

$$1) x = \frac{3}{7}$$

$$2) 13 \cdot \frac{3}{7} - 2y = 9$$

$$\frac{39}{7} - \frac{14y}{7} = \frac{63}{7}$$

$$-14y = 24$$

$$y = \frac{-24}{14} = \frac{-12}{7}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -y + z = -5 \\ \quad \quad -7z = 14 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$1) z = -2$$

$$2) -y + (-2) = -5$$

$$-y = -3$$

$$y = 3$$

$$3) x + 3 - 2 = 2$$

$$x = 1$$

## ÀLGEBRA

Pàgina 87

50. Transforma els sistemes següents en esglaonats i resol-los:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + z = 7 \\ y - z = -5 \end{cases}$$

b) Substitueix la 3a equació per (3a) + (2a)

$$\begin{cases} 15x + 10y = 35 \\ 8x - 10y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 10y = 35 \\ 23x = 35 \end{cases}$$

$$x = \frac{35}{23}$$

$$15 \cdot \frac{35}{23} + 10y = 35$$

$$525 + 230y = 805$$

$$y = \frac{280}{230} = \frac{28}{23}$$

$$b) \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + z = 7 \\ y - z = -5 \end{cases}$$

$$1) 2x = 2$$

$$x = 1$$

$$2) 1 + z = 3$$

$$z = 2$$

$$3) 2 \cdot 1 - y + 2 = 7$$

$$y = -3$$

51. Resol pel mètode de Gauss:

$$a) \begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 7x = 0 \end{cases}$$

$$1) x = 0$$

$$2) 2 \cdot 0 + y = 1 \rightarrow y = 1$$

$$3) 0 - 1 - z = -10$$

$$z = 9$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{cases}$$

$$1) x = 1$$

$$2) 3 \cdot 1 + 2z = 5$$

$$z = 1$$

$$3) 1 + y + 1 = 3$$

$$y = 1$$

52. Aplica el mètode de Gauss per resoldre els sistemes següents:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 6x = 72 \end{cases}$$

$$1) x = 12$$

$$2) 12 - z = 6$$

$$z = 6$$

## ÀLGEBRA

$$3) 12 + y + 6 = 18$$

$$y = 0$$

$$b) \begin{cases} x - y - z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases}$$

$$1) z = 3$$

$$2) y + 3 \cdot 3 = 7$$

$$y = -2$$

$$3) x - 2 + 3 = 2$$

$$x = 1$$

**53. Resol pel mètode de Gauss:**

$$a) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{cases}$$

$$1) z = \frac{-5}{2}$$

$$2) 3x + 2 \cdot \frac{-5}{2} = 13$$

$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$3) \frac{8}{3} + y + 2 \cdot \frac{5}{2} = 9$$

$$8 + 3y + 15 = 27$$

$$y = \frac{4}{3}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$1) x = 0$$

$$2) 6 \cdot 0 - 2y = 0$$

$$y = 0$$

$$3) 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + z = 0$$

$$z = 0$$

**54. Resol pel mètode de Gauss:**

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x = -3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$1) x = \frac{3}{2}$$

$$2) \frac{3}{2} - y = 1$$

$$3 - 2y = 2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$3) \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - z = 0$$

$$z = 2$$

$$b) \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

$$1) x = 2$$

$$2) 2 + 2z = 5$$

$$z = \frac{3}{2}$$

$$3) 2 \cdot 2 - y - \frac{3}{2} = 2$$



ÀLGEBRA

$$8 - 2y - 3 = 4$$

$$y = \frac{1}{2}$$

**Inequacions**

**55. Resol aquestes inequacions:**

a)  $5(2 + x) > -5x$

b)  $\frac{x-1}{2} > x - 1$

c)  $x^2 + 5x < 0$

d)  $9x^2 - 4 > 0$

e)  $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f)  $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a)  $10 + 5x > -5x \rightarrow 10x > -10 \rightarrow x > -1$ ;  
 $(-1, +\infty)$

b)  $x - 1 > 2x - 2 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1$ ;  $(-\infty, 1)$

c)  $x(x + 5) < 0 \rightarrow -5 < x < 0$ ;  $(-5, 0)$

d)  $(3x - 2)(3x + 2) > 0 \rightarrow$

$\rightarrow \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e)  $(x + 2)(x + 4) \geq 0 \rightarrow (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f)  $(x + 3)(x - 5) \leq 0 \rightarrow [-3, 5]$

**56. Resol els següents sistemes d'inequacions:**

a)  $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

*Resol cada inequació i busca les solucions comunes. Un dels sistemes no té solució.*

a)  $4x < 4 \rightarrow x < 1$   
 $x > -4$  }  $(-4, 1)$

b)  $3x > -5 \rightarrow x > -5/3$   
 $x > 4$  }  $(4, +\infty)$

c)  $x > 17$   
 $5x > 19 \rightarrow x > 19/5$  }  $(17, +\infty)$

d)  $x > 3/2$   
 $x < -1/5$  } No té solució

**57. Resol:**

a)  $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

b)  $x^2 - 7x + 6 > 0$

c)  $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$

d)  $x(x^2 + 3) < 0$

$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

a)  $[1, 6]$ ; b)  $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

c)

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
$x + 1$	-	+	+	+
$x^2$	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$(x + 1)x^2(x - 3)$				

.....++ +.+-=- +.+-=- +.++++

Solució:  $x < -1$  i  $x > 3$

$(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

d)  $x < 0$        $0 < x$

$x$	-	+
$x^2 + 3$	+	+
$x(x^2 + 3)$	- · + = -	+ · + = +

Solució:  $x < 0$

$(-\infty, 0)$

**58. Resol aquestes inequacions:**

a)  $\frac{2}{x-3} > 0$

b)  $\frac{3x+5}{x^2+1} \geq 0$

c)  $\frac{x^2}{x+4} < 0$

## ÀLGEBRA

$$d) \frac{x-3}{x+2} < 0$$

$$a) \begin{array}{rcc} x < 3 & & 3 < x \\ 2 & + & + \\ x-3 & - & + \\ \frac{2}{x-3} & + : - = - & + : + = + \end{array}$$

Solució:  $x > 3$

$(3, +\infty)$

$$b) \begin{array}{rcc} x < \frac{-5}{3} & & \frac{-5}{3} < x \\ 3x+5 & - & + \\ x^2+1 & + & + \\ \frac{3x+5}{x^2+1} & - : + = - & + : + = + \end{array}$$

Solució:  $x \geq \frac{-5}{3}$

$$\left[ \frac{-5}{3}, +\infty \right)$$

$$c) \begin{array}{rcc} x < -4 & & -4 < x \\ x^2 & + & + \\ x+4 & - & + \\ \frac{x^2}{x+4} & + : - = - & + : + = + \end{array}$$

Solució:  $x < -4$

$(-\infty, -4)$

$$d) \begin{array}{rcc} x < -2 & -2x < 3 & 3 < x \\ x-3 & - & - & + \\ x+2 & - & + & + \\ \frac{x-3}{x+2} & - : - = + & - : + = - & + : + = + \end{array}$$

Solució:  $-2 < x < 3$

$(-2, 3)$

Per resoldre

59. Un inversor, que té 28 000 €, col·loca part del seu capital en un banc al 8% i la resta en un altre banc al 6%. Si la primera part li produeix anualment 200 €

més que la segona, quant ha col·locat en cada banc?

$$\left. \begin{array}{l} 28\,000 \text{ €} \\ \left. \begin{array}{l} x \text{ al } 8\% \xrightarrow{1 \text{ any}} 0,08x \\ (28\,000 - x) \text{ al } 6\% \xrightarrow{1 \text{ any}} 0,06(28\,000 - x) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$0,08x = 0,06(28\,000 - x) + 200$$

$$0,08x = 1\,680 - 0,06x + 200$$

$$x = 13\,428,57 \text{ € al } 8\%$$

60. Dues aixetes omplen un dipòsit de 1500 litres en una hora i dotze minuts. Si ragen separatament, el primer tardaria una hora més que el segon. Quant tardaria a emplenar el dipòsit cada aixeta separatament?

$F_1$ : flux de l'aixeta 1 (l/temps)

$F_2$ : flux de l'aixeta 2 (l/temps)

$$F_1 \cdot 72(\text{min}) + F_2 \cdot 72(\text{min}) = 1500 \text{ l}$$

$t$ : temps que tarda l'aixeta 1 a omplir el dipòsit (min)

$$F_1 \cdot t = 1500$$

$$F_2 \cdot (t + 60) = 1500$$

$$\frac{1500}{t} \cdot 72 + \frac{1500}{t+60} \cdot 72 = 1500$$

$$-t^2 + 84t + 4320 = 0$$

$$\begin{cases} t = -36 \text{ no és possible} \\ t = 120 \text{ min tarda l'aixeta 1} \\ (t + 60) 180 \text{ min tarda l'aixeta 2} \end{cases}$$

61. Un granger espera obtenir 36 € per la venda d'ous. Pel camí al mercat se li'n trenquen quatre dotzenes. Per obtenir el mateix benefici, augmenta en 0,45 € el preu de la dotzena. Quantes dotzenes tenia al principi?

*Iguala el cost de les dotzenes que es trenquen al que augmenta el cost de les que queden.*

## ÀLGEBRA

$$\begin{cases} x \cdot y = 36 \\ (x - 4)(y + 0 \cdot 45) = 36 \end{cases}$$

$x$  = nombre de dotzenes al principi

$y$  = preu inicial de la dotzena

$$x = \frac{36}{y}$$

$$\left(\frac{36}{y} - 4\right)(y + 0 \cdot 45) = 36$$

$$\frac{36y}{y} + \frac{0,45 \cdot 36}{y} - 4y - 4 \cdot 0 \cdot 45 = 36$$

$$36 + \frac{16,2}{y} - 4y - 1,8 = 36$$

$$36y + 16,2 - 4y^2 - 1,8y = 36y$$

$$-4y^2 - 1,8y + 16,2 = 0$$

$$y \begin{cases} -2,25 \text{ (no vàlida)} \\ 1,8 \text{ €/dotzena} \end{cases}$$

$$x - 1,8 = 36$$

$x = 20$  dotzenes d'ous inicials

**62.** Un botiguer inverteix 125 € en la compra d'una partida de pomes. En rebutja 20 kg perquè són defectuoses i ven la resta, augmentant 0,40 € cada quilogram sobre el preu de compra, per 147 €. Quants quilograms de pomes va comprar? *Iguala el cost de les que es rebutgen més els guanys, a l'augment de cost de les que queden.*

Va comprar  $x$  kg  $\rightarrow \frac{125}{x}$  €/kg

Ven  $(x - 20)$  kg  $\rightarrow \left(\frac{125}{x} + 0,40\right)$  €/kg

$$\left(\frac{125}{x} + 0,40\right)(x - 20) = 147$$

$$(125 + 0,40x)(x - 20) = 147x$$

$$125x - 2500 + 0,40x^2 - 8x = 147x$$

$$0,40x^2 - 30x - 2500 = 0$$

$$x = 125 \text{ (} x = -50 \text{ no val)}$$

Va comprar 125 kg.

**63.** Uns quants amics prenen un refresc en una terrassa i han de pagar 6 € pel total de les consumicions. Com que n'hi ha dos que no tenen diners, els altres els conviden, i aquests han d'augmentar la seva aportació en 0,80 € cadascun. Quants amics són?

Nombre d'amics  $\rightarrow x \rightarrow \frac{6}{x}$  €/consumició

$$(x - 2)\left(\frac{6}{x} + 0,80\right) = 6$$

$$(x - 2)(6 + 0,80x) = 6x$$

$$6x + 0,80x^2 - 12 - 1,6x = 6x$$

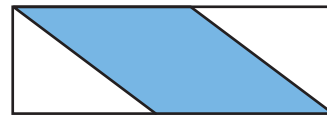
$$0,80x^2 - 1,6x - 12 = 0$$

$$x = 5 \text{ (} x = -3 \text{ no val)}$$

Són 5 amics.

## Pàgina 88

**64.** El quadrilàter central és un rombe de 40 m de perímetre. Calcula les dimensions del rectangle sabent que la base és el triple que l'altura.

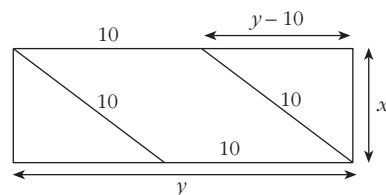


$$3x = y$$

$$10^2 = x^2 + (y - 10)^2$$

$$10x^2 - 60x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ No} \\ x = 6 \\ y = 18 \end{cases}$$

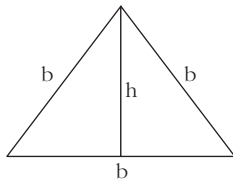


## ÀLGEBRA

**65.** El nombre de visitants a una certa exposició durant el mes de febrer s'ha incrementat en un 12% respecte al mes de gener. Tanmateix, el març ha sofert un descens del 12% respecte al febrer. Si el nombre de visitants de gener ha superat en 36 persones el de març, quantes persones van veure l'exposició el mes de gener?

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Gener} & \xrightarrow{+12\%} & \text{Febrer} & \xrightarrow{-12\%} & \text{Març} & & \\ x & & 1,12x & & 0,88 \cdot 1,12x = 0,9856x & & \\ x = 0,9856x + 36 & \Rightarrow & x = 2500 & \text{persones} & & & \end{array}$$

**66.** La superfície d'un triangle equilàter és de  $50 \text{ m}^2$ . Calcula'n el costat.



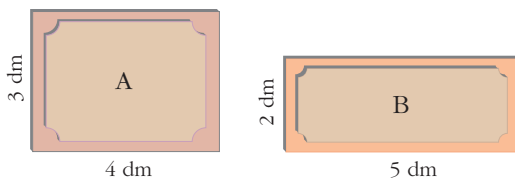
$$\left. \begin{array}{l} \frac{h \cdot b}{2} = 50 \text{ m}^2 \\ \text{(Pitàgores)} \quad b^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{array} \right\}$$

$$b = \frac{2h}{\sqrt{3}} \rightarrow 2h^2 = 100\sqrt{3}$$

$$h \approx 9,30$$

$$b \approx 10,75 \text{ m mesura el costat del triangle}$$

**67.** Per cobrir el terra d'una habitació, un enrajolador disposa de dos tipus de rajoles:



Si elegís el tipus A, caldrien 40 rajoles menys que si elegís el tipus B. Quina és la superfície de l'habitació?

$x$ : núm. rajoles tipus A

$y$ : superfície de l'habitació

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot 12 \text{ (dm}^2 \text{ de rajola A)} = y \\ (x + 40) \cdot 10 \text{ (dm}^2 \text{ de rajola B)} = y \end{array} \right\}$$

$$12x = 10(x + 40)$$

$$x = 200 \text{ rajoles A}$$

Solució:  $2400 \text{ dm}^2$  de superfície de l'habitació.

**68.** En un nombre de dues xifres, les desenes són el triple de les unitats. Si s'inverteix l'ordre de les xifres, s'obté un altre nombre 54 unitats menor. Calcula el nombre inicial.

nombre:  $xy$

$$\left. \begin{array}{l} x \ 3y \\ (10x + y) - 54 = 10y + x \end{array} \right\}$$

$$\frac{\quad}{xy} \qquad \frac{\quad}{yx}$$

$$18y = 54$$

$$y = 3 \rightarrow x = 9$$

Solució: El nombre és 93

**69.** Vaig demanar al meu pare:

–Quant val la xocolata amb ensaimades a la cafeteria de la cantonada?

–No ho sé. Mai no m'hi he fixat.

–Però, home..., n'acabem de prendre la mare, l'àvia, les meves dues germanes, tu i jo. Quant has pagat?

–Una mica més de 14 euros.

–Diumenge passat, a més de nosaltres sis, vas convidar dos amics meus. Quant vas pagar?

–Era una mica menys de 20 euros, perquè hi vaig posar un bitllet i vaig deixar el canvi.

Quant val la xocolata amb ensaimades a la cafeteria de la cantonada?

## ÀLGEBRA

$x$ : preu de la xocolata amb ensaïmades

$$6x > 14 \rightarrow x > 2,3$$

$$8x < 20 \rightarrow x < 2,5$$

$$2,3 < x < 2,5$$

Valdria 2,40 €

**70. Resol:**

a)  $3x^4 - 75x^2 = 0$

b)  $\sqrt{4x+5} = x+2$

c)  $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

d)  $\frac{1}{x+2} + \frac{x}{5(x+3)} = \frac{3}{10}$

e)  $x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

f)  $(x^2 - 9)(\sqrt{x} + 3) = 0$

g)  $(\sqrt{x} - x + 2)x = 0$

a)  $x^2(3x^2 - 75) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{25} \end{cases}$

$$x = \sqrt{25} \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Solucions:  $x = 0$ ;  $x = 5$ ;  $x = -5$

b)  $(\sqrt{4x+5})^2 = (x+2)^2$

$$x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Totes dues vàlides.

c)  $(\sqrt{2x-3})^2 = (2 + \sqrt{x-5})^2$

$$(x-2)^2 = (4\sqrt{x-5})^2$$

$$x^2 - 20x + 84 = 0 \begin{cases} x = 14 \\ x = 6 \end{cases}$$

Totes dues vàlides.

d)  $50(x+3) + 10x(x+2) = 15(x+2)(x+3)$

$$-x^2 - x + 12 = 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

e) Solucions:  $x = 0$ ;  $x = -1$ ;  $x = 2$ ;  $x = \frac{1}{2}$

f)  $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$$\sqrt{x} + 3 = 0 \rightarrow x = 9$$

Solucions:  $x = 3$ ;  $x = -3$ ;  $x = 9$

g)  $(\sqrt{x} - x + 2)x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x} - x + 2 = 0 \end{cases}$

$$(x = y^2) y - y^2 + 2 = 0 \begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \rightarrow x = 2^2 = 4 \\ y = -1 \rightarrow x = -1^2 = 1 \end{cases}$$

$$x = 0; x = 4 \text{ i } x = 1$$

**71. Resol:**

a)  $\left|\frac{x-3}{2}\right| = 4$

b)  $|x^2 - 1| = 3$

a)  $\frac{x-3}{2} = 4 \text{ i } \frac{x-3}{2} = -4$

$$x = 11 \text{ i } x = -5$$

b)  $x^2 - 1 = 3 \text{ i } x^2 - 1 = -3$

$$x^2 - 1 = 3 \rightarrow x = 2 \text{ i } x = -2$$

$$x^2 - 1 = -3 \rightarrow x = \sqrt{-2} \text{ No té solució.}$$

**72. Resol aquestes equacions de grau superior a dos, de les quals puguis aïllar la incògnita:**

a)  $\frac{3x}{5} + \frac{25}{9x^2} = 0$ ; b)  $\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0$ ;

c)  $\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = 0$ ; d)  $\frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = 0$ ;

e)  $\frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^3+x^2} = 0$

a)  $27x^3 + 125 = 0$ ;

$$x = \sqrt[3]{\frac{-125}{27}}$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

b)  $81x^4 - 16 = 0$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$$

c)  $x^3 - 2 = 0$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

## ÀLGEBRA

$$d) \frac{2}{5x} = \frac{5x^3}{2} \rightarrow x^4 = \frac{4}{25} \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$e) \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2(x+1)} = 0$$

$$(x+1)^2 - x^3 - 1 = 0$$

$$-x^3 + x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x^2 + x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

**73. Resol:**

$$a) \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2y} \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{4y+2x} = \sqrt{3y+x} - 1 \\ y + x = -5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2y} \\ x + y = 8 \rightarrow x = 8 - y \end{cases} \xrightarrow{\text{substitució}}$$

$$\sqrt{8-y+y} - \sqrt{8-y-y} = \sqrt{2y} \rightarrow$$

$$\sqrt{8} - \sqrt{8-2y} = \sqrt{2y}$$

S'eleva al quadrat en els dos membres:

$$8 + (8-2y) - 2\sqrt{8} \cdot \sqrt{8-2y} = 2y$$

$$16 - 4y = 2\sqrt{64-16y}$$

Dividim per quatre tots dos membres i els elevem al quadrat:

$$(4-y)^2 = 16 - 4y \rightarrow$$

$$16 + y^2 - 8y = 16 - 4y \rightarrow$$

$$y^2 - 4y = 0 \rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = 4$$

$$\text{Si } y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 8 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\text{Si } y_2 = 4 \rightarrow x_2 = 4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

Solucions:

$$x_1 = 8, y_1 = 0$$

$$x_2 = 4, y_2 = 4$$

Comprovades sobre les equacions inicials, veiem que totes dues solucions són vàlides.

$$b) \begin{cases} x = -5 - y \\ \sqrt{4y+2x} = \sqrt{3y-x} - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{substitució}}$$

$$\sqrt{4y-10-2y} = \sqrt{3y-5-y} - 1$$

$$(\sqrt{2y-10})^2 = (\sqrt{2y-5} - 1)^2$$

$$6^2 = (2\sqrt{2y-5})^2$$

$$y = 7$$

$$x = -12$$

Vàlida.

$$c) \begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

No hi ha solució (ni  $x = -3, y = 5, x = 2$  o  $y = 1$  és comuna a totes dues equacions).

**74. Resol les equacions següents:**

$$a) |x-5| = 3x-1$$

$$b) |x+2| = |x-6|$$

$$c) |x^2-3x+1| = 1$$

$$d) |x^2-x| = |1-x^2|$$

$$a) x-5 = 3x-1 \rightarrow x = -2$$

$$-x+5 = 3x-1 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$b) x+2 = x-6 \rightarrow \text{No té solució}$$

$$-x-2 = x-6 \rightarrow x = 2$$

$$x+2 = -x+6 \rightarrow x = 2$$

$$-x-2 = -x+6 \rightarrow \text{No té solució}$$

$$c) x^2-3x+1 = 1 \rightarrow x^2-3x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(x-3) \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$-x^2+3x-1 = 1 \rightarrow -x^2+3x-2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$d) x^2-x = 1-x^2 \rightarrow 2x^2-x-1 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-x^2+x = 1-x^2 \rightarrow \text{No té solució}$$

$$x^2-x = -1+x^2 \rightarrow \text{No té solució}$$

## ÀLGEBRA

$$-x^2 + x = -1 + x^2 \rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

## Pàgina 89

75. Resol per tempteuig:

a)  $2^x = x^3$

b)  $\ln x = -x$

a)  $x \approx 1,35$

b)  $x \approx 0,5$

76. Resol per tempteuig les equacions següents, sabent que tenen una solució en l'interval indicat:

a)  $x^3 - x - 2 = 0$  en  $[1, 2]$

b)  $3x^3 + x^2 - 3 = 0$  en  $[0, 1]$

a)  $x \approx 1,52$

b)  $x \approx 0,90$

77. Volem repartir, mitjançant un sistema d'equacions, 330 euros entre tres persones de manera que la primera rebi 20 euros més que la segona i la tercera la meitat del que han rebut entre les altres dues. Com ho fem?

$$\begin{cases} x + y + z = 330 \\ x - 20 = y \\ \frac{x+y}{2} = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 3x + 3y = 660 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 6x = 720 \end{cases}$$

1)  $x = 120$  €

2)  $120 - y = 20$

$y = 100$  €

3)  $120 + 100 + z = 330$

$z = 110$  €

120 € per al primer, 100 € per al segon i 110 € per al tercer.

78. La suma de les tres xifres d'un número és igual a 7. La xifra de les desenes és una unitat major que la suma de les altres dues.

Si invertim l'ordre de les xifres, el número augmenta en 99 unitats. Quin és aquest número?

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ y - 1 = x + z \\ 100x + 10y + z + 99 = 100z + 10y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -x + y - z = 1 \\ 99x - 99z = -99 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -x + y - z = 1 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -2x - 2z = -6 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -4z = -8 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

1)  $z = 2$

2)  $x - 2 = -1$

$x = 1$

3)  $1 + y + 2 = 7$

$y = 4$

El número és el 142.

## ÀLGEBRA

## Qüestions teòriques

79. Quins valors ha de prendre  $k$  perquè  $x^2 - 6x + k = 0$  no tingui solucions reals?

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$$

$$36 - 4 \cdot 1 \cdot k \geq 0$$

$$36 - 4k \geq 0$$

$$-4k \geq -36$$

$$k \leq \frac{-36}{-4}$$

$$k \leq 9$$

80. Escriu un polinomi les arrels del qual siguin: 1, 4, -4 i 0.

$$(x-1)(x-4)(x+4)x$$

$$x^4 - x^3 - 16x^2 + 16x$$

81. Troba el valor de  $m$  perquè el polinomi  $5x^4 + mx^3 + 2x - 3$  sigui divisible per  $x + 1$ .

$$\begin{array}{r} 5 \quad m \quad 0 \quad 2 \quad -3 \\ -1 \quad \quad -5 \quad -m+5 \quad m-5 \quad -m+3 \\ \hline 5 \quad m-5 \quad -m+5 \quad m-3 \quad 0 \end{array}$$

$$-3 + (-m + 3) = 0$$

$$-m = 0 \rightarrow m = 0$$

82. Troba el valor numèric del polinomi  $P(x) = x^6 + 4x^5 - 2x + 3$  per a  $x = -2$ . És divisible  $P(x)$  entre  $x + 2$ ?

$$P(-2) = -57$$

No ho és.

83. Troba  $m$  perquè, en dividir el polinomi  $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$  entre  $x + 4$ , la resta sigui igual a 12.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 9 \quad 2 \quad -6 \quad m \\ -4 \quad \quad -8 \quad -4 \quad 8 \quad -8 \\ \hline 2 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad m-8 \end{array}$$

$$m - 8 = 12$$

$$m = 20$$

84. Escriu un polinomi de grau 4 que només tingui per arrels 0 i 1.

$$x \cdot x \cdot (x-1)(x-1)$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2$$

85. Justifica per què aquest sistema d'equacions no pot tenir solució:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

La 1a i la 3a equacions són incompatibles, ja que  $x + y - z$  només pot tenir una solució.

86. Inventat equacions que tinguin per solucions els valors:

a) 3; -3;  $\sqrt{7}$  i  $-\sqrt{7}$  b) 5; 0,3 i -2

$$a) (x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = 0$$

$$b) (x-5)(x-0,3)(x+2) = 0$$

## Per aprofundir

87. Resol aquestes equacions de segon grau en les quals la incògnita és  $x$ :

$$a) abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$$

En aplicar la fórmula general, veuràs que el discriminant és un quadrat perfecte:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$b) (x-a)^2 - 2x(x+a) - 4a^2 = 0$$

$$c) ax^2 + bx + b - a = 0$$

$$d) (a+b)x^2 + bx - a = 0$$

$$a) \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab \cdot 1}}{2ab} =$$

$$= \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2}}{2ab}$$



## ÀLGEBRA

$$\begin{cases} \frac{2a}{2ab} = \frac{1}{b} \\ \frac{2b}{2ab} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\text{b) } x^2 - 2ax + a^2 - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$$

$$-x^2 - 4ax - 3a^2 = 0$$

$$\frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3a^2)}}{-2}$$

$$\begin{cases} \frac{6a}{-2} = -3a \\ \frac{2a}{-2} = -a \end{cases}$$

$$\text{c) } \frac{-b \pm (\sqrt{b^2 - 4a(b-a)})}{2a} = \frac{-b \pm (\sqrt{(2a-b)^2})}{2a}$$

$$\begin{cases} \frac{2a-2b}{2a} = \frac{a-b}{a} \\ \frac{-2a}{2a} = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \frac{-b \pm (\sqrt{b^2 - 4(a+b)(-a)})}{2a+2b} = \frac{-b \pm (\sqrt{(2a+b)^2})}{2a+2b}$$

$$\begin{cases} \frac{2a}{2a+2b} = \frac{a}{a+b} \\ \frac{-2a-2b}{2a+2b} = -1 \end{cases}$$

88. Resol les inequacions següents:

a)  $x^4 - 4x^2 < 0$

b)  $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c)  $\frac{4-x^2}{(x-3)^2} > 0$

d)  $\frac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a)  $x^2(x^2 - 4) < 0$

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$x^2$	+	+	+
$x^2 - 4$	-	-	+
$x^2(x^2 - 4)$	+ · - = -	+ · - = -	+ · + = +

Solució:  $x < 2$

$(-\infty, 2)$

b)  $x(x-3)(x+2) < 0$

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
$x$	-	-	+	+
$(x-3)$	-	-	-	+
$(x+2)$	-	+	+	+
$x(x-3)(x+2)$	- · - · - = -	- · - · + = +	+ · - · + = -	+ · + · + = +

Solució:  $x < -2$  i  $0 < x < 3$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c)  $x < 2$        $2 < x < 3$        $3 < x$

$4 - x^2$	+	-	-
$(x-3)^2$	+	+	+
$\frac{4-x^2}{(x-3)^2}$	+ : + = +	- : + = -	- : + = -

Solució:  $x < 2$

$(-\infty, 2)$

d)  $x < 1$        $1 < x$

$-2$	-	-
$(x-1)^3$	-	+
$\frac{-2}{(x-1)^3}$	- : - = +	- : + = -

Solució:  $x > 1$

$(1, +\infty)$

Per pensar una mica més

89. Un atuell conté una mescla d'alcohol i aigua en una proporció de 3 a 7. En un altre atuell, la proporció és de 3 a 2. Quants cullerots hem de treure de cada atuell per obtenir 12 cullerots d'una mescla en la qual la proporció alcohol-aigua sigui de 3 a 5?

$x$ cullerots $V_1$	$(12-x)$ cullerots $V_2$	12 cullerots
3 alcohol 7 aigua	3 alcohol 2 aigua	3 alcohol 5 aigua

$\frac{3}{10}$  alcohol     $\frac{3}{5}$  alcohol     $\frac{3}{8}$  alcohol

## ÀLGEBRA

La proporció d'alcohol és:

$$\frac{3}{10}x + (12 - x) \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8} \cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{36 - 2x}{5} = \frac{9}{2} \quad 3x + 72 - 6x = 45$$

$$x = \frac{-27}{-3} = 9$$

*Solució:* 9 cullerots del primer i 3 del segon.

90. Un viatger que ha de prendre un tren ha cobert 3,5 km en una hora i s'adona que, a aquest pas, arribarà una hora tard. Llavors accelera el pas i recorre la resta del camí a una velocitat de 5 km/h, i arriba mitja hora abans que surti el tren.

Quina distància havia de recórrer?



$t$  = temps que tarda a recórrer  $x$  a 3,5 km/h  
Si va a 5 km/h tarda  $t - 1,5$  (1 hora i mitja menys)

Llavors:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3,5t \\ x = 5(t - 1,5) \end{array} \right\} 3,5t = 5t - 7,5; t = 5 \text{ hores}$$

$$x = 17,5 \text{ km}$$

Havia de recórrer 17,5 km (21 km si tenim en compte els 3,5 km del principi).

**Per acabar**

**Resol tu**

En unes eleccions hi ha 20 000 votants i es reparteixen 10 escons. Hi concorren cinc partits, A, B, C, D, E, que obtenen els nombres de vots que figuren a la primera columna.

	1	2	3	4	5
A	8435 (1)	4217 (3)	2812 (6)	2109 (7)	1687 (9)
B	6043 (2)	3021 (5)	2014 (8)	1511	
C	3251 (4)	1625 (10)			
D	1150				
E	1121				

a) Comprova la validesa dels resultats calculant les columnes restants i digues quin seria el repartiment d'escons segons el mètode d'Hondt.

b) Fes el repartiment d'escons aplicant el mètode del residu major.

c) Suposant que el nombre d'escons a repartir fos vuit, fes novament el repartiment per tots dos mètodes.

a) A, B, A, C, B, A, A, B, A, C

A → 5

B → 3

C → 2

D → 0

E → 0

b) 2 000 vots/escó

A 8435 → 4

B 6043 → 3

C 3251 → 1

D 1150 → 0

E 1121 → 0

Residu	Total
435 → +1	5
43	3
1251 → +1	2
–	0
–	0

c) A → 4

B → 3

C → 1

D → 0

E → 0

Mètode Hondt

## ÀLGEBRA

Mètode del residu major  $20000/8 = 2500$

$$A \quad 8435 \rightarrow 3935 + 1 \rightarrow 4$$

$$B \quad 6043 \rightarrow 21093 + 1 \rightarrow 3$$

$$C \quad 3251 \rightarrow 1751 \rightarrow 1$$

$$D \quad 1150 \rightarrow 0 - \rightarrow 0$$

$$E \quad 1121 \rightarrow 0 - \rightarrow 0$$