Unitat didàctica 4
Resolució de triangles

Pàgina 96

Reflexiona i resol

L'alçària de l'arbre

Per calcular l'alçària d'un arbre, podem seguir el procediment que va utilitzar Tales de Milet per trobar la d'una piràmide d'Egipte: comparar-ne l'ombra amb la d'una vara vertical la longitud de la qual és coneguda.

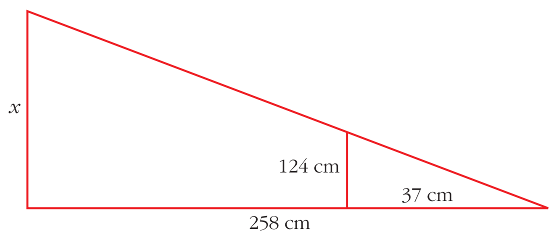
Fes-ho tu tot seguint aquest mètode i sabent que:

– la vara mesura 124 cm;

– l'ombra de la vara mesura 37 cm;

– l'ombra de l'arbre mesura 258 cm.

Per solucionar aquest problema hauràs hagut d'utilitzat la semblança de dos triangles.



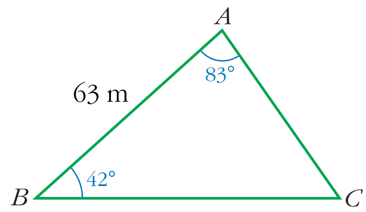
864,65 cm.

A quina distància es troba?

En Bernat coneix la distància $\overline{AB}$ a la qual es troba de l'arbre i els angles $\widehat{CBA}$ i $\widehat{BAC}$; i vol calcular la distància $\overline{BC}$ a la qual està de la Carme.

Dades: $\overline{AB} = 63$ m; $\widehat{CBA} = 42°$; $\widehat{BAC} = 83°$.

Per resoldre el problema, fes primer un dibuix a escala 1:1 000 (1 m → 1 mm). Després mesura la longitud del segment BC i, desfent l'escala, obtindràs la distància a la qual en Bernat es troba de la Carme.



$\simeq$ 76 m.

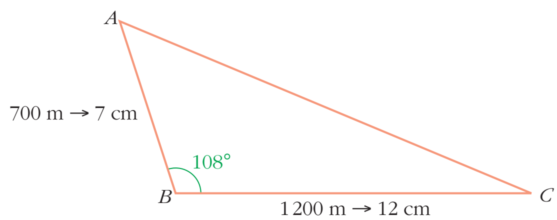
Pàgina 97

Distàncies entre 3 punts

Anàlogament pots resoldre aquest altre: En Bernat veu des de casa seva el castell i l'abadia. Coneix les distàncies que hi ha a tots dos llocs, ja que ha fet el camí a peu moltes vegades; i vol esbrinar la distància del castell a l'abadia. Per això, prèviament, ha de mesurar l'angle $\widehat{CBA}$.

Dades: $\overline{BC} = 1\,200$ m; $\overline{BA} = 700$ m; $\widehat{CBA} = 108°$.

Empra ara l'escala 1:10 000 (100 m → 1 cm).

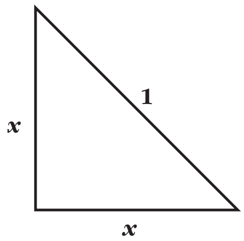


$\simeq$ 1 188 m.

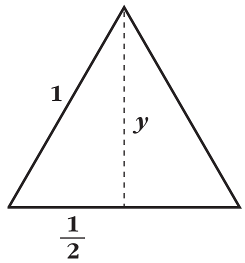
Teorema de Pitàgores

Calcula tot aplicant el teorema de Pitàgores:

a) Els costats iguals d'un triangle rectangle isòsceles la hipotenusa del qual mesura 1.



b) L'altura d'un triangle equilàter de costat 1.



Fes els càlculs mantenint els radicals, fins a arribar a les solucions $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Apliquem el Teorema de Pitàgores:
La hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels catets al quadrat.

$1^2 = x^2 + x^2$

$1^2 = 2x^2$

$1 = 2x^2$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Els costats mesuren $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $1^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$1 = y^2 + \frac{1}{4}$

$1 - \frac{1}{4} = y^2$

$\frac{4-1}{4} = y^2$

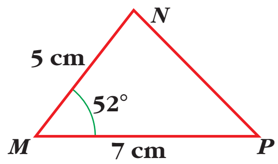
$\frac{3}{4} = y^2$

$y = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

L'altura del triangle mesura $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pàgina 98

1. Considera aquest triangle:



sin 52° = 0,788
cos 52° = 0,616

a) Calcula la projecció de *MN* sobre *MP*.
b) Troba l'altura corresponent a la base *MP*.
c) Calcula l'àrea del triangle.

a) *AB′* = 5 · *cos* 52 = 3,08 cm
b) *sin* 52 · 5 = 3,94 cm
c) 13,8 cm^2

Pàgina 99

2. Troba *tg* 76° i *cos* 38° 15′ 43″.
4,01 i 0,785

3. Passa a graus, minuts i segons (°′″) l'angle 39,87132°.
39° 52′ 16,75″

4. Troba α i β sabent que *cos* α = 0,83 i *tg* β = 2,5.
α = 33° 54′ 4,54″ i β = 68° 11,54′ 93″

5. Sabent que *tg* β = 0,6924, troba *cos* β.

cos β = 0,822

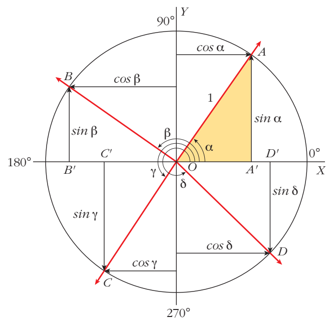
Pàgina 100

6. Per determinar l'alçària d'un pal d'electricitat hem seguit el procediment següent: ens hem allunyat 7 m de la base i hem mesurat l'angle que forma la visual en el punt més alt amb l'horitzontal, el qual val 40°. Quant mesura el pal d'electricitat?

5,87 m

Pàgina 102

7. Raonant sobre el triangle acolorit que tens a continuació, i tenint en compte que la hipotenusa és $\overline{OA}$ = 1, justifica que els segments $\overline{OA'}$ i $\overline{A'A}$ corresponen, efectivament, a les raons trigonomètriques *cos* α, *sin* α.



$cos\ \alpha = \dfrac{c.\ contigu}{hipotenusa} = \dfrac{OA'}{1}$; per tant,

$OA' = cos\ \alpha$

ídem *sin* α

8. Aplicant el teorema de Pitàgores en el corresponent triangle rectangle, justifica que $(sin\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1$. (Tingues en compte que $(-x)^2 = x^2$.)

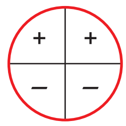
$catet^2 + catet^2 = hipotenusa^2$

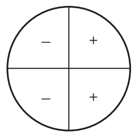
$sin^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1^2$ per a qualsevol angle β, ja que $(-cos\ \beta)^2 = cos^2\ \beta$ i $(-sin\ \beta)^2 = sin^2\ \beta$

9. Digues el valor de *sin* α i *cos* α per als angles de 0°, 90°, 180°, 270° i 360°.

	0°	90°	180°	270°	360°
sin α	0	1	0	–1	0
cos α	1	0	–1	0	1

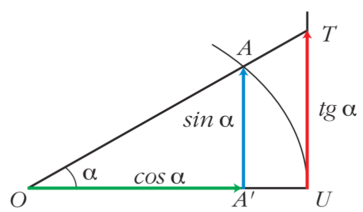
10. En aquest cercle es dóna el signe de *sin* φ segons el quadrant en el qual es trobi situat l'angle φ. Comprova que és correcte i fes alguna cosa similar per a *cos* φ.





Pàgina 103

11. Tenint en compte la semblança dels triangles *OA'A* i *OUT*, i que $\overline{OU}$ = 1, demostra que:



$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

$$\frac{OU}{OA'} = \frac{TU}{AA'}$$

$$\frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha}{sin\ \alpha}$$ i, per tant, $tg\ \alpha = \dfrac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$

12. Construeix una circumferència de 10 cm de radi sobre paper mil·limetrat. (Els fulls d'aquest paper solen tenir 19 cm d'amplària. Talla de dalt una tira d'1 cm i enganxa-la al lateral; així podràs dibuixar la circumferència completa.) Pren com a unitat 10 cm. (Per tant, 1 cm = 0,1; 1 mm = 0,01). Amb el transportador, assenyala angles diversos: 27°, 71°, 113°, 162°, 180°, 211°, 270°, 280°, 341°. Llegeix sobre la quadrícula el sinus i el cosinus de cadascun, i tingues cura de fer el signe correctament.

	27°	71°	113°	162°	180°	211°	270°	280°	341°
sin α	0,45	0,12	0,92	0,31	0	–0,52	–1	–0,98	–0,33
cos α	0,89	0,33	–0,39	–0,95	–1	–0,86	0	0,17	0,95

Pàgina 104

13. Calcula les raons trigonomètriques de l'angle 2 397°:

a) Obtenint l'expressió de l'angle en l'interval (0°, 360°).

b) Obtenint l'expressió de l'angle en l'interval (–180°, 180°).

c) Directament amb la calculadora.

a) 2 397° |360°
237° 6

2 397° = 237° + 6 · 360° = 237°

b) Com que 237° > 180°, restem 360°:

237° – 360° = –123°

Per tant 2 397° = 237° = –123°

c) sin 2 397° = –0,84

cos 2 397° = –0,54

tg 2 397° = 1,54

14. Passa cadascun dels angles següents a l'interval (0°, 360°) i a l'interval (–180°, 180°):

a) 396° **b) 492°**

c) 645° **d) 3895°**

e) 7612° **f) 1980°**

a) 396°

[0°, 360°) → 396° |360°
036 1

396° = 36° + 1 360° = 36°

(180°, 180°] → 36°

b) 492°

[0°, 360°) → 492° |360°
132 1

492° = 132° + 1 360° = 132°

(–180°, 180°] → 132°

c) 645°

[0°, 360°) → 645° |360°
285 1

645° = 285° + 1 360° = 285°

(–180°, 180°] → 285° – 360 = –75°

d) 3 895°

[0°, 360°) → 3 895° |360°
0295 10

3 895° = 295° + 10 360° = 295°

(–180°, 180°] → 295° – 360° = –65°

e) 7 612°

[0°, 360°) → 7 612° |360°
0412 21
052

7 612° = 52° + 21 360° = 52°

(–180°, 180°] → 52°

f) 1 980°

[0°, 360°) → 1 980° |360°
180 5

1 980° = 180° + 5 360° = 180°

(–180°, 180°] → 180°

Pàgina 105

15. Digues el valor de les raons trigonomètriques següents sense utilitzar la calculadora. Després, comprova-ho amb el seu ajut:

a) *sin* $(37 \times 360° - 30°)$

b) *cos* $(-5 \times 360° + 120°)$

c) *tg* $(11 \times 360° - 135°)$

d) *cos* $(27 \times 180° + 135°)$

a) –0,5 b) –0,5 c) 1 d) 0,707

16. Repeteix amb la calculadora aquests càlculs:

INV tan 1 EXP 10 = 89.99999999

INV tan 1 EXP 20 = 90

Explica els resultats. Com és possible que digui que l'angle la tangent del qual és 10^{20} sigui 90° si 90° no té tangent?

Perquè és un nombre tan pròxim a 90º que ho aproxima incorrectament a 90º.

Pàgina 107

17. Calcula les raons trigonomètriques de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° i 325° a partir de les raons trigonomètriques de 35°:

$\sin 35° = 0{,}57$; $\cos 35° = 0{,}82$; $\mathrm{tg}\, 35° = 0{,}70$.

a) $\sin 55 = \cos 35 = 0{,}82$

$\cos 55 = \sin 35 = 0{,}57$

$$\mathrm{tg}\, 55 = \frac{\sin 55}{\cos 55} = \frac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}44$$

b) $\cos 125 = -\sin 35 = -0{,}57$

$\sin 125 = \cos 35 = 0{,}82$

$$\mathrm{tg}\, 125 = \frac{\sin 125}{\cos 125} = \frac{0{,}82}{-0{,}57} = -1{,}44$$

c) $\sin 145 = \sin 35 = 0{,}57$

$\cos 145 = -\cos 35 = -0{,}82$

$$\mathrm{tg}\, 145 = \frac{\sin 145}{\cos 145} = \frac{0{,}57}{-0{,}82} = -0{,}70$$

d) $\sin 215 = -\sin 35 = -0{,}57$

$\cos 215 = -\cos 35 = -0{,}82$

$$\mathrm{tg}\, 215 = \frac{\sin 215}{\cos 215} = \frac{-0{,}57}{-0{,}82} = 0{,}70$$

e) $\sin 235 = -\cos 35 = -0{,}82$

$\cos 235 = -\sin 35 = -0{,}57$

$$\mathrm{tg}\, 235 = \frac{\sin 235}{\cos 235} = \frac{-0{,}82}{-0{,}57} = 1{,}44$$

f) $\sin 305 = -\cos 35 = -0{,}82$

$\cos 305 = \sin 35 = 0{,}57$

$$\mathrm{tg}\, 305 = \frac{\sin 305}{\cos 305} = \frac{-0{,}82}{0{,}57} = -1{,}44$$

g) $\sin 325 = -\sin 35 = -0{,}57$

$\cos 325 = \cos 35 = 0{,}82$

$$\mathrm{tg}\, 325 = \frac{\sin 325}{\cos 325} = \frac{-0{,}57}{-0{,}82} = -0{,}70$$

18. Esbrina les raons trigonomètriques de 718°, 516° i 342°, emprant la calculadora només per trobar raons trigonomètriques d'angles compresos entre 0° i 90°.

a) $\sin 718° = -\sin 2° = -0{,}03$; $\cos 2° = 0{,}99$; $\mathrm{tg}\, 2° = -0{,}03$

b) $\sin 516° = \sin 24° = 0{,}41$; $\cos 516° = -\cos 24° = -0{,}91$; $-\mathrm{tg}\, 24° = 0{,}45$

c) $\sin 342° = -\sin 18° = -0{,}31$; $\cos 18° = 0{,}95$; $-\mathrm{tg}\, 18° = -0{,}32$

19. Dibuixa, sobre la circumferència goniomètrica, angles que compleixin les condicions següents i calcula, en cada cas, el valor de les raons trigonomètriques restants:

a) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\, \alpha > 0$

b) $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{3}{4},\ \alpha > 90°}$

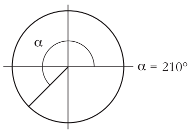
c) $\boldsymbol{tg\ \beta = -1,\ cos\ \beta < 0}$

d) $\boldsymbol{tg\ \alpha = 2,\ cos\ \alpha < 0}$

a) $\alpha = 210°$

$cos\ \alpha = -0{,}87$

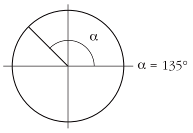
$tg\ \alpha = 0{,}57$



b) $\alpha = 135°$

$sin\ \alpha = 0{,}71$

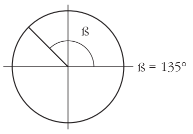
$cos\ \alpha = -0{,}71$



c) $\beta = 135°$

$cos\ \beta = -\ 0{,}71$

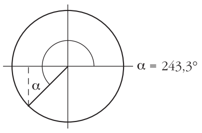
$sin\ \beta = 0{,}71$



d) $\alpha = 243{,}3°$

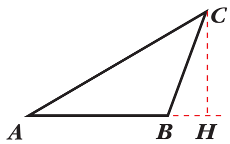
$cos\ \alpha = -0{,}45$

$sin\ \alpha = -0{,}90$



Pàgina 108

20. Repeteix la demostració anterior en el cas que $\hat{B}$ sigui obtús. Tingues en compte que *sin* $(180° - \hat{B})$ = *sin* $\hat{B}$.



$$\left.\begin{array}{l} sin\ (180° - \hat{B}) = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \\[2ex] sin\ \hat{A} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \end{array}\right\}$$

com $sin\ (180° - \hat{B}) = sin\ \hat{B}$

$sin\ \hat{B} \cdot \overline{BC} = sin\ \hat{A} \cdot \overline{AC}$

$\dfrac{\overline{BC}}{sin\ \hat{A}} = \dfrac{\overline{AC}}{sin\ \hat{B}}$, és a dir

$$\frac{a}{sin\ \hat{A}} = \frac{b}{sin\ \hat{B}}$$

21. Demostra, detalladament, la relació següent basant-te en la demostració anterior:

$$\boldsymbol{\frac{a}{sin\ \hat{A}} = \frac{c}{sin\ \hat{C}}}$$

alçada des de B = alç

$$\left.\begin{array}{l} sin\ \hat{A} = \dfrac{alç}{c} \\[2ex] sin\ \hat{C} = \dfrac{alç}{a} \end{array}\right\}$$

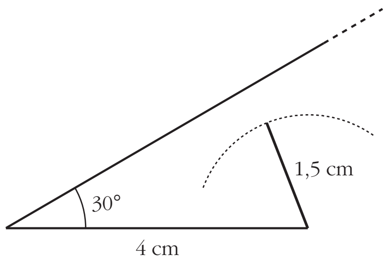
igualem les alçades i...

$$\frac{a}{sin\ \hat{A}} = \frac{c}{sin\ \hat{C}}$$

Pàgina 109

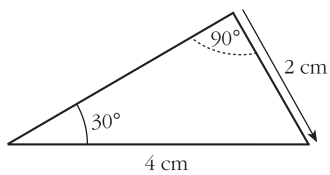
22. Resol el problema resolt 21 d'aquesta mateixa pàgina (a = 4 cm, $\hat{B}$ = 30°) prenent per a *b* els valors següents: *b* = 1,5 cm, *b* = 2 cm, *b* = 3 cm, *b* = 4 cm. Justifica gràficament per què s'obtenen, segons els casos, cap, una o dues solucions.

a) $\dfrac{4}{sin\ A} = \dfrac{1{,}5}{sin\ 30} \rightarrow sin\ A = 1{,}\widehat{3}$ (impossible)



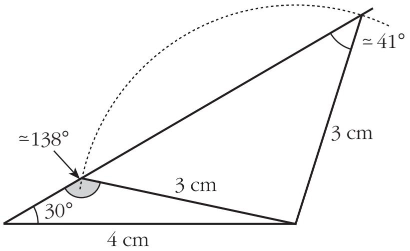
no es pot completar cap triangle

b) $\dfrac{4}{sin\ A} = \dfrac{2}{sin\ 30} \rightarrow sin\ A = 1 \rightarrow A = 90°$

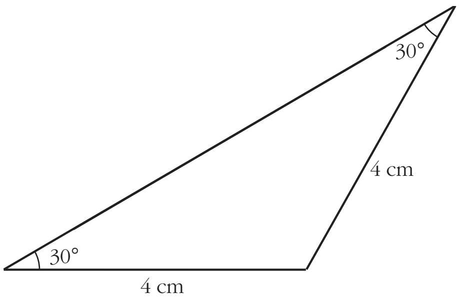


Quan A = 90°. Única solució.

c) $\frac{4}{sin\ A} = \frac{3}{sin\ 30} \rightarrow sin\ A = 0,\widehat{6} \rightarrow$
$\rightarrow A$ = 41° 48′ i 138° 11′



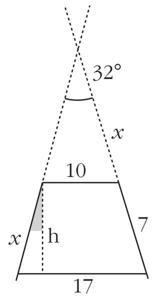
d) $\frac{4}{sin\ A} = \frac{3}{sin\ 30} \rightarrow A$ = 30° (descartem A = 150° perquè 150° + 30° ja sumaria els 180° màxims que pot tenir un triangle)



Pàgina 111

23. Resol els triangles següents:
a) a = 12 cm; b = 16 cm; c = 10 cm
b) b = 22 cm; a = 7 cm; $\hat{C}$ = 40°
c) a = 8 m; b = 6 m; c = 5 m
d) b = 4 cm; c = 3 cm; $\hat{A}$ = 105°
e) a = 4 m; $\hat{B}$ = 45° i $\hat{C}$ = 60°
f) b = 5 m; $\hat{A}$ = $\hat{C}$ = 35°
a) $\hat{A}$ = 48° 30′; $\hat{B}$ = 92° 51′; $\hat{C}$ = 38° 39′
b) c = 17,24 cm; $\hat{B}$ = 124° 48′; $\hat{A}$ = 15° 11′
c) $\hat{A}$ = 92° 51′; $\hat{B}$ = 48° 30′; $\hat{C}$ = 38° 38′
d) a = 5,59 cm; $\hat{B}$ = 43° 47′; $\hat{C}$ = 31° 12′
e) $\hat{A}$ = 75°; b = 2,93 m; c = 3,59 m
f) $\hat{B}$ = 110°; a = c = 3,05 m

24. Les bases d'un trapezi mesuren 17 cm i 10 cm i un dels costats 7 cm. L'angle que formen les rectes sobre les quals es troben els costats no paral·lels és de 32°. Calcula quant mesura l'altre costat i l'àrea del trapezi.



a) $\frac{x+7}{x} = \frac{17}{10} \rightarrow x$ = 10 i ara podem aplicar el teorema del cosinus
El costat mesura 11,87 cm

b) cos (180-32-90) = $\frac{h}{11,87} \rightarrow h$ = 6,29 cm
a = 84,92 cm^2

25. Un vaixell B demana auxili i se'n reben els senyals en dues estacions de ràdio, A i C, que disten entre si 50 km. Des de les estacions es mesuren els angles següents: $\widehat{BAC}$ = 46° i $\widehat{BCA}$ = 53°. A quina distància de cada estació es troba el vaixell?
40,43 km de l'estació A i 36,42 km de l'estació C.

26. Per trobar a quina l'altura es troba un globus, realitzem les mesures indicades a la figura. Quant dista el globus del punt A? Quant dista del punt B? A quina altura es troba el globus?
Dista 25,2 m del punt A i 26,9 m del punt B
x = 24,3 m d'altura.

Pàgina 116

Resolució de triangles rectangles

27. Troba les mides de tots els elements desconeguts i resol els triangles rectangles següents ($\hat{C}$ = 90°).
a) a = 5 cm, b = 12 cm. Troba c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.
b) a = 43 m, $\hat{A}$ = 37°. Troba b, c, $\hat{B}$.
c) a = 7 m, $\hat{B}$ = 58°. Troba b, c, $\hat{A}$.
d) c = 5,8 km, $\hat{A}$ = 71°. Troba a, b, $\hat{B}$.
e) c = 5 cm, $\hat{B}$ = 43°. Troba a, b, $\hat{A}$.

a) c = 13 cm; $\hat{A}$ = 22° 37′ 11,51″;
$\hat{B}$ = 67° 22′ 48,49″
b) b = 57,06 m; c = 71,45 m; $\hat{B}$ = 53°
c) b = 11,20 m; c = 13,21 m; $\hat{A}$ = 32°
d) a = 5,48 km; b = 1,89 km; $\hat{B}$ = 19°
e) a = 3,66 cm; b = 3,41 cm; $\hat{A}$ = 47°

28. Si volem que una cinta transportadora de 25 metres elevi una càrrega fins a una altura de 15 metres, a quin angle s'haurà d'inclinar la cinta?

36° 52′ 11,63″

29. Una persona d'1,78 m d'estatura projecta una ombra de 66 cm, i en aquest moment un arbre fa una ombra de 2,3 m.
a) Quin angle formen els rajos solars amb l'horitzontal?
b) Quina és l'alçària de l'arbre?

a) 69° 39′ 21,24″
b) 6,2 m

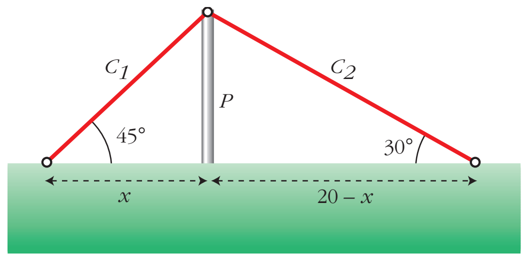
30. Calcula els costats iguals i l'àrea d'un triangle isòsceles el costat desigual del qual mesura 24 cm i l'angle oposat a la base mesura 40°.

costats = 35,08 cm
àrea = 322,47 cm^2

31. El costat d'un rombe mesura 8 cm i l'angle més petit és de 38°.
Quant mesuren les diagonals del rombe?

2,60 cm i 7,56 cm

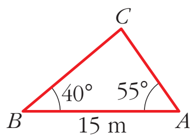
32. Hem col·locat un cable sobre un pal que el subjecta com mostra la figura. Quant mesuren el pal i el cable?



$$\left.\begin{array}{l} sin\ 45 \cdot C1 = sin\ 30 \cdot C2 \\ cos\ 45 \cdot C1 + cos\ 30 \cdot C2 = 20 \end{array}\right\}$$

Teorema del sinus

33. Calcula a i b en el triangle ABC.



Dades	Incògnites
c = 15 m	a = ?
$\hat{A}$ = 55°	b = ?
$\hat{B}$ = 40°	
$\hat{C}$ = 180° – ($\hat{A}$ + $\hat{B}$) = 85°	

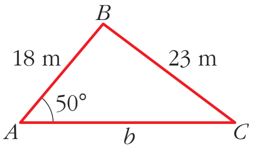
$$\frac{a}{sin\ \hat{A}} = \frac{c}{sin\ \hat{C}} \rightarrow \frac{a}{sin\ 55°} = \frac{15}{sin\ 85°} \rightarrow$$

$$a = 15 \cdot \frac{sin\ 55°}{sin\ 85°} = 12{,}33 \text{ m}$$

$$\frac{b}{sin\ \hat{B}} = \frac{c}{sin\ \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{sin\ 40°} = \frac{15}{sin\ 85°} \rightarrow$$

$$b = 15 \cdot \frac{sin\ 40°}{sin\ 85°} = 9{,}68 \text{ m}$$

34. Calcula l'angle $\hat{C}$ i el costat b.



Dades	Incògnites
$\hat{A} = 50°$	$\hat{C} = ?$
$a = 23$ m	$b = ?$
$c = 18$ m	

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{23}{\sin 50°} = \frac{18}{\sin \hat{C}} \rightarrow$$

$$\sin \hat{C} = \frac{18}{23} \cdot \sin 50° = 0{,}60 \text{ m}$$

$\hat{C} = 36°\ 50'\ 6'' \simeq 36°$

$\hat{B} = 180 - (50° + 36°) = 94°$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{\sin 94°} = \frac{18}{\sin 36} \rightarrow$$

$$b = 18 \cdot \frac{\sin 94°}{\sin 36°} = 30{,}55 \text{ m}$$

35. Resol els triangles següents:

a) $\hat{A} = 35°$ $\quad \hat{C} = 42°$ $\quad b = 17$ m

b) $\hat{B} = 105°$ $\quad b = 30$ m $\quad a = 18$ m

a) $\hat{A} = 35°$ $\quad \hat{C} = 42°$ $\quad b = 17$ m

$\hat{B} = 180° - (35° + 42°) = 103°$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{17 \text{ m}}{\sin 103°} = \frac{c}{\sin 42°} \rightarrow$$

$$c = 17 \cdot \frac{\sin 42°}{\sin 103°} = 11{,}67 \text{ m}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{a}{\sin 35°} = \frac{17}{\sin 103°} \rightarrow$$

$$a = 17 \cdot \frac{\sin 35°}{\sin 103°} = 10 \text{ m}$$

b) $\hat{B} = 105°$ $\quad b = 30$ m $\quad a = 18$ m

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{18}{\sin \hat{A}} = \frac{30}{\sin 105°} \rightarrow$$

$$\sin \hat{A} = \frac{18}{30} \cdot \sin 105° = 0{,}58 \text{ m}$$

$\hat{A} = 35°\ 25'\ 9{,}42'' \simeq 35°$

$\hat{C} = 180 - (105° + 35°) = 40°$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{30}{\sin 105°} = \frac{c}{\sin 40°} \rightarrow$$

$$c = 30 \cdot \frac{\sin 40°}{\sin 105°} = 20 \text{ m}$$

36. Calcula $\hat{B}$ i b en el triangle ABC, en el qual $\hat{A} = 50°$, $a = 50$ cm i $c = 25$ cm.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{50}{\sin 50°} = \frac{25}{\sin \hat{C}} \rightarrow$$

$$\sin \hat{C} = \frac{25}{50} \cdot \sin 50° = 0{,}38 \text{ m}$$

$\hat{C} = 22°\ 31'\ 15{,}64'' \simeq 22°$

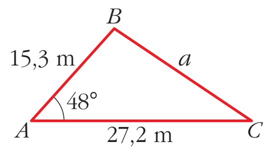
$\hat{B} = 180 - (50° + 22°) = 108°$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{50}{\sin 50°} = \frac{b}{\sin 108°} \rightarrow$$

$$b = 50 \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 50°} = 62{,}07 \text{ cm}$$

Teorema del cosinus

37. Calcula a en el triangle ABC.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = (27{,}2)^2 + (15{,}3)^2 - 2 \cdot 27{,}2 \cdot 15{,}3 \cdot \cos 48° = 416{,}99$

$a = 20{,}4$ m

38. Calcula els angles del triangle ABC en el qual $a = 11$ m, $b = 28$ m i $c = 35$ m.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{11^2 - 28^2 - 35^2}{-2 \cdot 28 \cdot 35} = 0{,}96$$

$\hat{A} = 15°\ 34'\ 41{,}14'' \simeq 15°$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$$\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \cos \hat{B}$$

$\cos \hat{B} = \dfrac{28^2 - 11^2 - 35^2}{-2 \cdot 11 \cdot 35} = 0{,}73$

$\hat{B} = 43^\circ\ 07'\ 28{,}17'' \simeq 43^\circ$

$\hat{C} = 180^\circ - (15^\circ + 43^\circ) = 122^\circ$

39. Resol els triangles següents:

a) *b* = 32 cm *a* = 17 cm $\hat{C}$ = 40°

b) *a* = 85 cm *c* = 57 cm $\hat{B}$ = 65°

c) *a* = 23 cm *b* = 14 cm *c* = 34 cm

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 17^2 + 32^2 - 2 \cdot 17 \cdot 32 \cdot \cos 40^\circ = 479{,}5$

$c = 21{,}9 \simeq 22$ cm

$\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{17^2 - 32^2 - 22^2}{-2 \cdot 32 \cdot 22} = 0{,}86 \rightarrow \hat{A} = 30^\circ$

$\hat{B} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65^\circ = 6\,378{,}8$

$b = 79{,}9 \simeq 80$ cm

$\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{85^2 - 80^2 - 57^2}{-2 \cdot 80 \cdot 57} = 0{,}26$

$\hat{A} = 74^\circ\ 35'\ 10{,}07'' \simeq 74^\circ$

$\hat{C} = 180^\circ - (65^\circ + 74^\circ) = 41^\circ$

c) $\cos \hat{A} = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{23^2 - 14^2 - 34^2}{-2 \cdot 14 \cdot 34} = 0{,}86$

$\hat{A} = 30^\circ\ 10'\ 29{,}35'' \simeq 30^\circ$

$\cos \hat{B} = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$

$\cos \hat{B} = \dfrac{14^2 - 23^2 - 34^2}{-2 \cdot 23 \cdot 34} = 0{,}95$

$\hat{B} = 17^\circ\ 48'\ 56{,}22'' \simeq 17^\circ$

$\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 17^\circ) = 133^\circ$

Relació entre raons trigonomètriques

40. Sabent que l'angle α és obtús, completa la taula següent:

sin α	**0,92**	0,6	0,99	0,36	**0,5**	0,97
cos α	–0,15	–0,8	**–0,12**	**–0,8**	–0,75	–0,24
tg α	$-6{,}1\widehat{3}$	**–0,75**	–8,21	–0,45	$0{,}\widehat{6}$	**–4**

41. Troba les raons trigonomètriques de α restants:

a) *sin* α = –4/5, α < 270°

b) *cos* α = 2/3, *tg* α < 0

c) *tg* α = –3, α < 180°

a) *cos* α = –0,6, *tg* α = $-1{,}\widehat{3}$

b) *sin* α = –0,74, *tg* α = –1,12

c) *cos* α = –0,32, *sin* α = 0,95

42. Expressa amb un angle del primer quadrant:

a) *sin* 150°; b) *cos* 135°; c) *tg* 210°; d) *cos* 225°; e) *sin* 315°; f) *tg* 120°; g) *tg* 340°; h) *cos* 200°; i) *sin* 290°

a) *sin* 30°; b) –*cos* 45°; c) *tg* 30°; d) –*cos* 45°; e) –*sin* 45°; f) –*tg* 60°; g) –*tg* 20°; h) –*cos* 20°; i) –*sin* 70°

Pàgina 117

43. Si *sin* α = 0,35 i α < 90°, troba:

a) *sin* (180° – α); b) *sin* (α + 90°); c) *sin* (180° + α); d) *sin* (360° – α); e) *sin* (90° – α); f) *sin* (360° + α)

a) 0,35; b) 0,94; c) –0,35; d) –0,35; e) 0,94; f) 0,35

44. Busca un angle del primer quadrant les raons trigonomètriques del qual coincideixin, en valor absolut, amb l'angle donat:
a) 124°; b) 214°; c) 318°; d) –100°; e) 190° 50'; f) 1 295°; g) 840°; h) 258°
a) 56°; b) 34°; c) 42°; d) –80°; e) 10° 50′; f) –35°; g) 60°; h) 78°

45. Si $tg\ \alpha = 2/3$ i $0 < \alpha < 90°$, troba:
a) $sin\ \alpha$; b) $cos\ \alpha$; c) $tg\ (90° - \alpha)$; d) $sin\ (180° - \alpha)$; e) $cos\ (180° + \alpha)$;
f) $tg\ (360° - \alpha)$
a) 0,55; b) 0,83; c) 1,51; d) 0,55; e) –0,83;
f) $-\dfrac{2}{3}$

46. Troba amb la calculadora l'angle α:
a) $sin\ \alpha = -0{,}75$, $\alpha < 270°$
b) $cos\ \alpha = -0{,}37$, $\alpha > 180°$
c) $tg\ \alpha = 1{,}38$, $sin\ \alpha < 0$
d) $cos\ \alpha = 0{,}23$, $sin\ \alpha < 0$
a) $\alpha = 228°\ 35'$
b) $\alpha = 248°\ 17'$
c) $\alpha = 234°\ 4'$
d) $\alpha = -76°\ 42'$ o $\alpha = 283°\ 17'$

Resolució de triangles qualssevol

47. Resol els triangles següents:
a) $a = 100$ m, $\hat{B} = 47°$, $\hat{C} = 63°$
b) $b = 17$ m, $\hat{A} = 70°$, $\hat{C} = 35°$
c) $a = 70$ m, $b = 55$ m, $\hat{C} = 73°$
d) $a = 122$ m, $c = 200$ m, $\hat{B} = 120°$
e) $a = 25$ m, $b = 30$ m, $c = 40$ m
f) $a = 100$ m, $b = 185$ m, $c = 150$ m
g) $a = 15$ m, $b = 9$ m, $\hat{A} = 130°$
h) $b = 6$ m, $c = 8$ m, $\hat{C} = 57°$
a) $\hat{A} = 70°$, $c = 94{,}82$ m, $b = 77{,}83$ m
b) $\hat{B} = 75°$, $c = 10{,}09$ m, $a = 16{,}54$ m
c) $\hat{A} = 62°\ 43'$, $c = 75{,}32$ m, $\hat{B} = 44°\ 17'$
d) $\hat{C} = 37°\ 57'$, $\hat{A} = 22°\ 2'$, $b = 281{,}57$ m
e) $\hat{A} = 38°\ 37'$, $\hat{B} = 48°\ 30'$, $\hat{C} = 92°\ 52'$
f) $\hat{A} = 32°\ 39'$, $\hat{B} = 93°\ 17'$, $\hat{C} = 54°\ 3'$
g) $\hat{B} = 27°\ 21'$, $\hat{C} = 22°\ 38'$, $c = 7{,}54$ m
h) $\hat{B} = 38°\ 58'$, $\hat{A} = 84°\ 1'$, $a = 10{,}39$ m

Per resoldre

48. Una estàtua de 2,5 m està col·locada sobre un pedestal. Des d'un punt del terra es veu el pedestal sota un angle de 15° i l'estàtua sota un angle de 40°. Calcula l'altura del pedestal.

$$\left.\begin{aligned}\frac{2{,}5 + x}{sin\ 40} &= \frac{b}{sin\ 50}\\ \frac{x}{sin\ 15} &= \frac{b}{sin\ 75}\end{aligned}\right\} x = 1{,}19$$

49. Un avió vola entre dues ciutats, *A* i *B*, que disten 80 km. Les visuals des de l'avió a *A* i a *B* formen angles de 29° i 43° amb l'horitzontal, respectivament. A quina altura es troba l'avió?

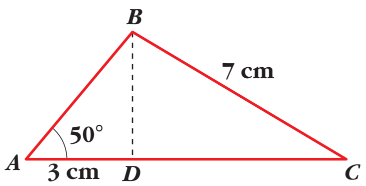
$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{sin\ 43} &= \frac{80 - d}{sin\ 47}\\ \frac{x}{sin\ 29} &= \frac{d}{sin\ 61}\end{aligned}\right\} x = 27{,}75 \text{ km}$$

50. D'un triangle rectangle se sap que l'àrea és de 864 cm² i un catet mesura 48 cm. Calcula les raons trigonomètriques dels angles.

α	$sin\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$tg\ \alpha$
90°	1	0	∞
53° 7′	0,8	0,6	$1,\hat{3}$
36° 52′	0,6	0,8	0,75

RESOLUCIÓ DE TRIANGLES

51. Calcula els costats i els angles del triangle *ABC*.



En el triangle rectangle ABD, troba $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$. En BDC, troba $\hat{C}$ i $\overline{DC}$. Per trobar $\hat{B}$, saps que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

AB = 4,67 cm

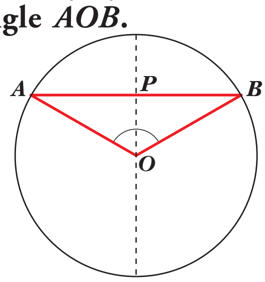
BD = 3,58 cm

AC = 9,02 cm

$\hat{C}$ = 30° 45′

$\hat{B}$ = 59° 15′

52. En una circumferència de radi 6 tracem una corda AB a 3 cm del centre. Troba l'angle $\widehat{AOB}$.



Els triangles AOP i BOP són iguals. En ambdós coneixes un catet i una hipotenusa. Troba l'angle $\widehat{AOP}$, que és la meitat d'$\widehat{AOB}$.

$\widehat{AOB}$ = 120°

53. Per localitzar una emissora clandestina, dos receptors, *A* i *B*, que disten entre si 10 km, orienten les antenes cap al punt on hi ha l'emissora. Aquestes direccions formen amb AB angles de 40° i 65°. A quina distància d'*A* i *B* es troba l'emissora?

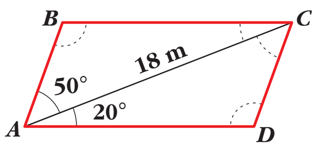
distància des d'*A*: 9,38 km

distància des de *B*: 6,65 km

54. En un entrenament de futbol es col·loca la pilota en un punt situat a 5 m i 8 m de cada un dels pals de la porteria, l'amplària de la qual és de 7 m. Sota quin angle es veu la porteria des d'aquell punt?

α = 60°

55. Calcula l'àrea i les longituds dels costats i de l'altra diagonal:



$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50°$. Calcula els costats del triangle ACD i l'àrea. Per trobar l'altra diagonal, considera el triangle ABD.

Àrea = 90,32 m^2

$AB = CD$ = 6,55 m

$BC = AD$ = 14,67 m

BD = 13,87 m

56. Dos vaixells parteixen d'un port amb rumbs diferents que formen un angle de 127°. El primer surt a les 10 del matí amb una velocitat de 17 nusos, i el segon surt a les 11 h 30 min, amb una velocitat de 26 nusos. Si l'abast dels equips de ràdio és de 150 km, podrien posar-se en contacte a les 3 de la tarda?

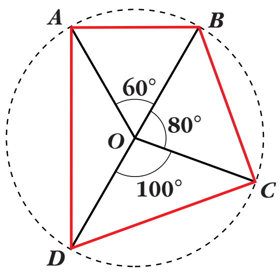
(Nus = milla / hora; milla = 1850 m.)

No, estan a 285,61 km de distància.

Pàgina 118

57. Troba el perímetre del quadrilàter *ABCD* inscrit en una circumferència de 6 cm de radi.

Tingues en compte que els triangles AOB, BOC, COD i DOA són isòsceles.

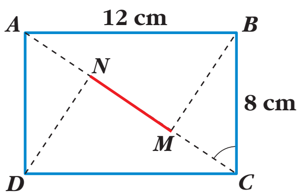


$$\left.\begin{array}{l} AD = 10{,}39 \text{ cm} \\ AB = 6 \text{ cm} \\ BC = 7{,}71 \text{ cm} \\ CD = 9{,}19 \text{ cm} \end{array}\right\} \text{perímetre} = 33{,}29 \text{ cm}$$

58. En un rectangle *ABCD* de costats 8 i 12 cm, es traça des de *B* una perpendicular a la diagonal *AC*, i des de *D*, una altra perpendicular a la mateixa diagonal. *M* i *N* són els punts on aquestes perpendiculars tallen la diagonal. Troba la longitud del segment $\overline{MN}$.

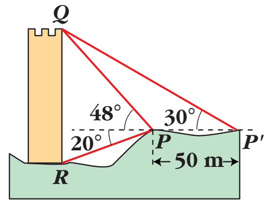
En el triangle ABC, troba $\hat{C}$. En el triangle BMC, troba $\overline{MC}$. Tingues en compte que:

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\,\overline{MC}$$



$\overline{MN} = 5{,}5$ cm

59. Troba l'altura de la torre *QR* de peu inaccessible i més baix que el punt d'observació, amb les dades de la figura.



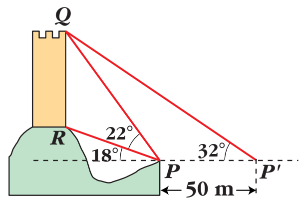
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{50 + x}{sin\ 60} = \dfrac{y}{sin\ 30} \\[2ex] \dfrac{x}{sin\ 42} = \dfrac{y}{sin\ 48} \end{array}\right\}$$

i una vegada calculats y/x...

$$\frac{x}{sin\ 70} = \frac{d}{sin\ 20}$$

essent l'altura de la torre $y + d \simeq 75$ m

60. Calcula l'altura de *QR*, el peu de la qual és inaccessible i més alt que el punt on es troba l'observador, amb les dades de la figura.



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{50 + x}{sin\ 58} = \dfrac{y}{sin\ 32} \\[2ex] \dfrac{x}{sin\ 40} = \dfrac{y}{sin\ 50} \end{array}\right\}$$

i una vegada calculats x/y...

$$\frac{x}{sin\ 72} = \frac{d}{sin\ 18}$$

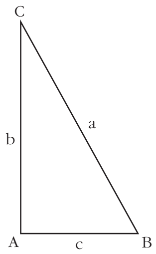
essent l'altura de la torre $y - d \simeq 73{,}2$ m

61. La longitud del costat d'un octàgon regular és 8 cm. Troba els radis de les circumferències inscrites i circumscrites en l'octàgon.

Radi circumferència circumscrita = 10,5 cm
Radi circumferència inscrita = 9,7 cm

Qüestions teòriques

62. Explica si les igualtats següents referides al triangle *ABC* són vertaderes o falses:



1) $a = \dfrac{b}{\sin \hat{B}}$; **2)** $c = a \cos \hat{B}$; **3)** $c = \dfrac{b}{tg\, \hat{C}}$;
4) $b = a \sin \hat{C}$; **5)** $tg\, \hat{B} \cdot tg\, \hat{C} = 1$;
6) $c\, tg\, \hat{B} = b$; **7)** $\sin \hat{B} - \cos \hat{C} = 0$;
8) $a = \dfrac{b}{\cos \hat{C}}$; **9)** $b = \dfrac{c}{tg\, \hat{B}}$;
10) $\sqrt{1 - \sin^2 \hat{B}} = \dfrac{c}{a}$;
11) $\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = 1$; **12)** $\dfrac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{C}} = 1$

1) Vertader.
A partir de $\sin \hat{B} = \dfrac{b \text{ (catet oposat)}}{a \text{ (hipotenusa)}}$

2) Vertader.
A partir de $\cos \hat{B} = \dfrac{c \text{ (catet continu)}}{a \text{ (hipotenusa)}}$

3) Fals. $tg\, \hat{C} = \dfrac{c}{b}$

4) Fals. $\sin \hat{C} = \dfrac{c}{a}$

5) Vertader. $\left.\begin{array}{l} tg\, \hat{B} = \dfrac{b}{c} \\ tg\, \hat{C} = \dfrac{c}{b} \end{array}\right\} \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{b} = 1$

6) Vertader. $tg\, \hat{B} = \dfrac{b}{c}$

7) Vertader. $\left.\begin{array}{l} \sin \hat{B} = \dfrac{b}{a} \\ \sin \hat{C} = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{a} = 0$

8) Vertader. $\cos \hat{C} = \dfrac{b}{a}$

9) Fals. $b = c\, tg\, \hat{B}$

10) Vertader. $\sqrt{1 - \sin^2 \hat{B}} = \cos \hat{B} = \dfrac{c}{a}$

11) Fals. $\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} \neq 1$

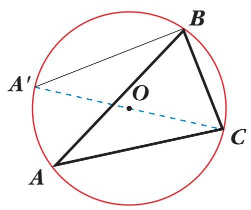
12) Vertader. $\dfrac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{C}} = \dfrac{b/a}{b/a} = 1$

63. Prova que en un triangle qualsevol es verifica:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

***R* és el radi de la circumferència circumscrita.**

Traça el diàmetre des d'un dels vèrtexs del triangle ABC. Aplica el teorema del sinus en els triangles ABC i A′BC.



En el triangle ABC $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}}$

El triangle $A'BC$ l'anomenarem $A'B'C'$, i per bé que els punts B i B' coincideixen els angles corresponents no.

$$\frac{a'}{sin\ \hat{A}'} = \frac{b'}{sin\ \hat{B}'}$$

$a' = a$
$\hat{A}' = \hat{A}$

perquè tots dos angles estan inscrits en la mateixa circumferència i abracen el mateix angle.

$b' = 2R$ (en un diàmetre de la circumferència)

$\hat{B}' = 90º$ (està inscrit en una circumferència)
$sin\ \hat{B}' = sin\ 90º = 1$
Substituint:

$$\frac{B}{sin\ \hat{A}} = \frac{2R}{1}$$

Per tant,

$$\frac{a}{sin\ \hat{A}} = \frac{b}{sin\ \hat{B}} = \frac{c}{sin\ \hat{C}} = 2R$$

64. Prova que només existeix un triangle amb aquestes dades:
$b = \sqrt{3}$ m, $a = 1{,}5$ m, $\hat{A} = 60°$
Hi ha cap triangle amb aquestes altres dades?
$\hat{C} = 135°$, $b = 3\sqrt{2}$ cm, $c = 3$ cm

a) $\frac{\sqrt{3}}{sin\ \hat{B}} = \frac{1{,}5}{sin\ 60°} \rightarrow \hat{B} = 90°$

L'angle que fa que $sin\ \alpha = 1$, només és 90°
$\hat{C} = 30°$

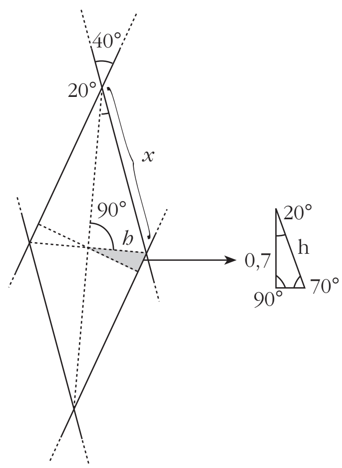
b) $\frac{3}{sin\ 135°} = \frac{3\sqrt{2}}{sin\ \hat{B}} \rightarrow \hat{B} = 90°$

No n'existeix cap, ja que 90° + 135° > 180°, condició que impedeix que sigui cap triangle.

Pàgina 119

Per aprofundir

65. Dues vies de tren d'1,4 m d'amplària s'encreuen formant un rombe. Si un angle de tall és de 40°, quant valdrà el costat del rombe?

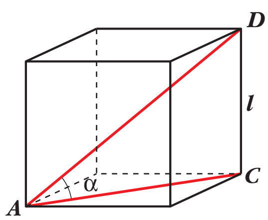


$sin\ 70 = \frac{0{,}7}{h}$; $h = 0{,}74$

així…

$sin\ 20 = \frac{0{,}74}{x}$; $x = 2{,}16$ m

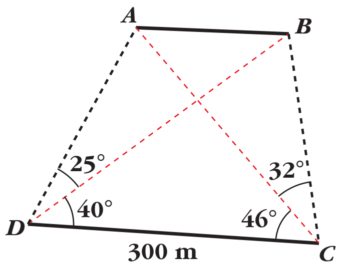
66. Troba l'angle que forma la diagonal de la cara d'un cub i la diagonal del cub.



Anomena l l'aresta del cub i expressa, en funció de l, la diagonal AD. Calcula sin a en el triangle ADC.

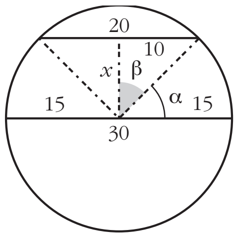
$sin\ \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + l^2}} \rightarrow sin\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 45°$

67. Volem calcular la distància entre dos punts inaccessibles *A* i *B*. Des de *C* i *D* prenem les dades: $\overline{CD}$ = 300 m, $\widehat{ADB}$ = 25°, $\widehat{ACB}$ = 32°, $\widehat{ACD}$ = 46°, $\widehat{BDC}$ = 40° Calcula $\overline{AB}$.



156,96 m.

68. En un cercle de 15 cm de radi, troba l'àrea compresa entre una corda de 20 cm de longitud i el diàmetre paral·lel a aquesta.



$sin\ \beta = \dfrac{10}{15} \rightarrow \beta = 41°\ 48' \rightarrow \alpha = 48°\ 11'$

$x^2 = 15^2 - 10^2 \Rightarrow x = 11{,}18$ cm

Àrea triangle gran →

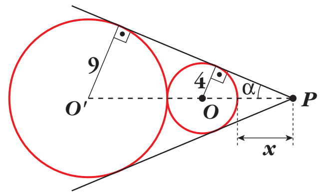
$\rightarrow \dfrac{20 \cdot 11{,}18}{2} = 111{,}80\ \text{cm}^2$

Àrea segments circulars →

$\rightarrow \dfrac{48°\ 11' \cdot \pi}{360°} \cdot (15)^2 = 94{,}61\ \text{cm}^2$

Àrea total = $111{,}80 + 2 \cdot 94{,}61 = 301{,}02\ \text{cm}^2$

69. Dues circumferències són tangents exteriorment i els seus radis mesuren 9 m i 4 m, respectivament.
Troba l'angle, 2α, que formen les tangents comunes.



Els radis formen amb les tangents dos triangles rectangles.
Com que $\overline{OP}$ = 4 + x, es té:

$\boldsymbol{sin\ \alpha = \dfrac{4}{4 + x}}$ **i** $\boldsymbol{sin\ \alpha = \dfrac{9}{17 + x}}$

Calcula *x* i després α.

45° 14′

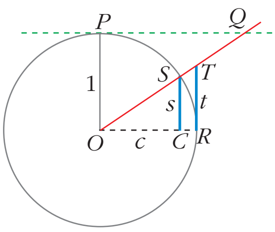
Per pensar una mica més

70. Les raons trigonomètriques *sin*, *cos* i *tg* s'amplien amb aquestes altres:

***secant*: $\boldsymbol{sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}}$**

***cosecant*: $\boldsymbol{cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sin\ \alpha}}$**

***cotangent*: $\boldsymbol{cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha}}$**



Demostra, mitjançant la semblança de triangles, que aquestes raons trigonomètriques es representen sobre la circumferència goniomètrica de la manera següent:

$\boldsymbol{sec\ \alpha = \overline{OT},\ cosec\ \alpha = \overline{OQ},\ cotg\ \alpha = \overline{PQ}}$

a) $\dfrac{\overline{OT}}{\overline{OS}} = \dfrac{\overline{OR}}{\overline{OC}} \rightarrow \overline{OS} = \overline{OR} = 1 \rightarrow$

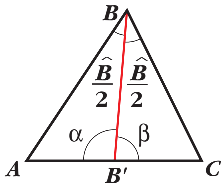
$\rightarrow \dfrac{\overline{OT}}{1} = \dfrac{1}{\overline{OC}} \rightarrow \overline{OT} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

b) $\dfrac{\overline{QO}}{\overline{OS}} = \dfrac{1}{\overline{SC}} \rightarrow \overline{OS} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\overline{QO}}{1} = \dfrac{1}{\overline{SC}} \rightarrow \overline{QO} = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$

c) $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OC}} = \dfrac{1}{\overline{SC}} \rightarrow \overline{PQ} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{SC}} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

71. En un triangle qualsevol, cada bisectriu interior divideix el costat oposat en dos segments proporcionals als altres dos costats. És a dir:



$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$$

Demostra aquesta igualtat i expressa les igualtats corresponents a les altres dues bisectrius, AA′ i CC′.

a) $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{BA}} = \sin\dfrac{\hat{B}}{2}$ i $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{BC}} = \sin\dfrac{\hat{B}}{2}$

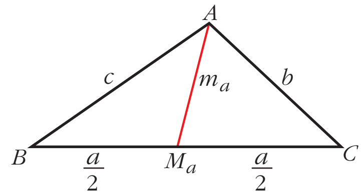
$\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{BC}} \rightarrow B'A \cdot BC = B'C \cdot BA \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$

b) $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ i $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

72. Demostra que en un triangle de costats *a*, *b*, *c* el valor de la mediana, m_a, sobre el costat *a* és:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$



(Aplica el teorema del cosinus en els triangles ABM_a i ABC utilitzant, en tots dos casos, l'expressió en la qual figura *cos* $\hat{B}$.)

$$\left.\begin{aligned} M_a^2 &= c^2 + \frac{a^2}{2^2} - 2c \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos B \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \end{aligned}\right\} \cos B : \cos B$$