Unitat didàctica 5

Funcions i fórmules trigonomètriques

Pàgina 122

1. Encara que el mètode per resoldre les preguntes que hi ha a continuació se sistematitza a la pàgina següent, pots resoldre-les ara:

a) Quants radians corresponen als 360° d'una circumferència?

b) Quants graus mesura un radian?

c) Quants graus mesura un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians?

d) Quants radians equivalen a 270°?

a) 2π;

b) $\frac{360°}{2\pi} = 57°\ 17'\ 44{,}8''$;

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90°$

d) $\frac{3\pi}{2}$ radians $= 270°$

Pàgina 123

2. Passa a radians els angles següents:

a) 30° b) 72° c) 90° d) 127°

e) 200° f) 300°

Expressa el resultat en funció de π i després en forma decimal. Per exemple:

$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0{,}52$ rad

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0{,}52$ rad

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1{,}26$ rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad $\approx 1{,}57$ rad

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2{,}22$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9}$ rad $\approx 3{,}49$ rad

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{5}$ rad $\approx 5{,}24$ rad

3. Passa a graus els angles següents:

a) 2 rad; b) 0,83 rad; c) $\frac{\pi}{5}$ rad;

d) $\frac{5\pi}{6}$ rad; e) 3,5 rad; f) π rad

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114°\ 35'\ 29{,}6''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0{,}83 = 47°\ 33'\ 19{,}8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3{,}5 = 200°\ 32'\ 6{,}8''$

f) π rad = 180°

4. Completa la taula següent afegint-hi les raons trigonomètriques (sinus, cosinus i tangent) de cada un dels angles. Et serà útil per al proper apartat:

GRAUS	0	30		60	90		135	150		210	225		270			330	360
RADIANS			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La taula completa està en el següent apartat (pàgina següent) del llibre de text. Tan sols falta l'última columna, que és igual que la primera.

Pàgina 127

5. Demostra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:

***cos* (α + β) = cos α cos β – sin α sin β**

cos (α – β) = *cos* (α + (–β)) =

= *cos* α *cos* (–β) – *sin* α *sin* (–β) =

= *cos* α *cos* β – *sin* α (–*sin* β) =

= *cos* α *cos* β + *sin* α *sin* β

6. Demostra la fórmula II.3 a partir de la fórmula:

$$\boldsymbol{tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta}}$$

$tg\ (\alpha - \beta) = tg\ (\alpha + (-\beta)) =$

$$= \frac{tg\,\alpha + tg\,(-\beta)}{1 - tg\,\alpha\ tg\,(-\beta)} \overset{(*)}{=} \frac{tg\,\alpha + (-tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha\ (-tg\,\beta)} =$$

$$= \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\ tg\,\beta}$$

(*) Com que $\left.\begin{array}{l} sin\ (-\alpha) = -sin\ \alpha \\ cos\ (-\alpha) = \cos\ \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha$

7. Demostra la fórmula II.3 a partir de les següents fórmules:

$\sin\ (\alpha - \beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\ \sin\ \beta$

$\cos\ (\alpha - \beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \alpha\ \sin\ \beta$

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{sin\ (\alpha - \beta)}{cos\ (\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{sin\,\alpha\ cos\,\beta - cos\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta - sin\,\alpha\ sin\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$\frac{\dfrac{sin\,\alpha\ cos\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta} - \dfrac{cos\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}}{\dfrac{cos\,\alpha\ cos\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta} + \dfrac{sin\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\ tg\,\beta}$$

(*) Dividim numerador i denominador per $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

8. Si $sin\ 12° = 0{,}2$ i $sin\ 37° = 0{,}6$, troba $cos\ 12°$, $tg\ 12°$, $cos\ 37°$ i $tg\ 37°$. Calcula, després, a partir d'aquestes, les raons trigonomètriques de 49° i de 25°, emprant les fórmules (I) i (II).

- $sin\ 12° = 0{,}2$

$cos\ 12° = \sqrt{1 - sin^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

$$tg\ 12° = \frac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$$

- $sin\ 37° = 0{,}6$

$cos\ 37° = \sqrt{1 - sin^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

$$tg\ 37° = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

- $49° = 12° + 37°$, llavors:

$sin\ 49° = sin\ (12° + 37°) =$

$= sin\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sin\ 37° =$

$= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

$cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) =$

$= cos\ 12°\ cos\ 37° - sin\ 12°\ sin\ 37° =$

$= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

$$tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \frac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} =$$

$$= \frac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$$

$\left(\text{Podria calcular-se } tg\ 49° = \dfrac{sin\ 49°}{cos\ 49°}\right).$

- $25° = 37° - 12°$, llavors:

$sin\ 25° = sin\ (37° - 12°) =$

$= sin\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sin\ 12° =$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

$cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) =$

$= cos\ 37°\ cos\ 12° + sin\ 37°\ sin\ 12° =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

$$tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \frac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} =$$

$$= \frac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$$

9. Demostra la igualtat següent:

$$\boldsymbol{\frac{cos\ (a + b) + cos\ (a - b)}{sin\ (a + b) + sin\ (a - b)} = \frac{1}{tg\ a}}$$

$$\frac{cos\ (a + b) + cos\ (a - b)}{sin\ (a + b) + sin\ (a - b)} =$$

$$= \frac{cos\ a\ cos\ b - sin\ a\ sin\ b + cos\ a\ cos\ b + sin\ a\ sin\ b}{sin\ a\ cos\ b + cos\ a\ sin\ b + sin\ a\ cos\ b + cos\ a\ sin\ b} =$$

$$= \frac{2\ cos\ a\ cos\ b}{2\ sin\ a\ cos\ b} = \frac{cos\ a}{sin\ b} = \frac{1}{tg\ a}$$

10. Demostra les tres fórmules (III.1), (III.2) i (III.3) fent α = β en les fórmules (I).

$sin\ 2\alpha = sin\ (\alpha + \alpha) =$

$= sin\ \alpha\ cos\ \alpha + cos\ \alpha\ sin\ \alpha =$

$= 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha$

$cos\ 2\alpha = cos\ (\alpha + \alpha) =$

$= cos\ \alpha\ cos\ \alpha - sin\ \alpha\ sin\ \alpha =$

$= cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha$

$$tg\ 2\alpha = tg\ (\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

11. Troba les raons trigonomètriques de 60° a partir de les de 30°.

$sin\ 60° = sin\ (2 \cdot 30°) = 2\ sin\ 30°\ cos\ 30° =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sin^2\ 30° =$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

12. Troba les raons trigonomètriques de 90° a partir de les de 45°.

$sin\ 90° = sin\ (2 \cdot 45°) = 2\ sin\ 45°\ cos\ 45° =$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$cos\ 90° = cos\ (2 \cdot 45°) = cos^2\ 45° - sin^2\ 45° =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tg\ 90° = tg\ (2 \cdot 45°) = \frac{2\ tg\ 45°}{1 - tg^2\ 45°} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow \text{No existeix.}$$

13. Demostra que: $\dfrac{\mathbf{2\ sin\ \alpha - sin\ 2\alpha}}{\mathbf{2\ sin\ \alpha + sin\ 2\alpha}} = \dfrac{\mathbf{1 - cos\ \alpha}}{\mathbf{1 + cos\ \alpha}}$**.**

$$\frac{2\ sin\ \alpha - sin\ 2\alpha}{2\ sin\ \alpha + sin\ 2\alpha} = \frac{2\ sin\ \alpha - 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sin\ \alpha + 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\ sin\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sin\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$

Pàgina 128

14. Seguint les indicacions que es donen, demostra detalladament les fórmules IV.1, IV.2 i IV.3.

- $cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right) = cos^2\ \dfrac{\alpha}{2} - sin^2\ \dfrac{\alpha}{2}$

Com que per la igualtat fonamental:

$$cos^2\ \frac{\alpha}{2} + sin^2\ \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow 1 = cos^2\ \frac{\alpha}{2} + sin^2\ \frac{\alpha}{2}$$

D'aquí:

a) Sumant ambdues igualtats:

$$1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2\ \frac{\alpha}{2} \Rightarrow cos^2\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}$$

b) Restant les igualtats (2.ª – 1.ª):

$$1 - cos\ \alpha = 2\ sin^2\ \frac{\alpha}{2} \Rightarrow sin^2\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sin\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$$

- Per últim:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\,\alpha/2}{cos\,\alpha/2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}$$

15. Sabent que *cos* 78° = 0,2, calcula *sin* 78° i *tg* 78°. Esbrina les raons trigonomètriques de 39° aplicant les fórmules de l'angle meitat.

• $cos\ 78° = 0{,}2$

$sin\ 78° = \sqrt{1 - cos^2 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$

$tg\ 78° = \dfrac{0{,}98}{0{,}2} = 4{,}9$

• $sin\ 39° = sin\,\dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 78°}{2}} =$

$= \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}2}{2}} = 0{,}63$

$cos\ 39° = cos\,\dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + cos\ 78°}{2}} =$

$= \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}2}{2}} = 0{,}77$

$tg\ 39° = tg\,\dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} =$

$= \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}2}{1 + 0{,}2}} = 0{,}82$

16. Troba les raons trigonomètriques de 30° a partir de *cos* 60° = 0,5.

• $cos\ 60° = 0{,}5$

• $sin\ 30° = sin\,\dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}5}{2}} = 0{,}5$

$cos\ 30° = cos\,\dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}5}{2}} = 0{,}866$

$tg\ 30° = tg\,\dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}5}{1 + 0{,}5}} = 0{,}577$

17. Troba les raons trigonomètriques de 45° a partir de *cos* 90° = 0.

• $cos\ 90° = 0$

• $sin\ 45° = sin\,\dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 45° = cos\,\dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + 0}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 45° = tg\,\dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0}{1 + 0}} = \sqrt{1} = 1$

18. Demostra que $2tg\,\alpha \cdot sin^2\,\dfrac{\alpha}{2} + sin\,\alpha = tg\,\alpha$.

$2\,tg\,\alpha \cdot sin^2\,\dfrac{\alpha}{2} + sin\,\alpha = 2\,tg\,\alpha \cdot \dfrac{1 - cos\,\alpha}{2} +$

$+ sin\,\alpha = \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\,(1 - cos\,\alpha) + sin\,\alpha =$

$= sin\,\alpha\left(\dfrac{1 - cos\,\alpha}{cos\,\alpha} + 1\right) =$

$= sin\,\alpha\left(\dfrac{1 - cos + cos\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) = sin\,\alpha \cdot \dfrac{1}{cos\,\alpha} =$

$= \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$

19. Demostra que $\dfrac{2\,sin\,\alpha - sin\,2\alpha}{2\,sin\,\alpha + sin\,2\alpha} = tg^2\,\dfrac{\alpha}{2}$.

$\dfrac{2\,sin\,\alpha - sin\,2\alpha}{2\,sin\,\alpha + sin\,2\alpha} = \dfrac{2\,sin\,\alpha - 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,sin\,\alpha + 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha} =$

$= \dfrac{2\,sin\,\alpha\,(1 - cos\,\alpha)}{2\,sin\,\alpha\,(1 + cos\,\alpha)} = \dfrac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} = tg^2\,\dfrac{\alpha}{2}$

Pàgina 129

20. Per demostrar les fórmules (V.3) i (V.4), fes els passos següents:

• Expressa en funció d'α i β:

$cos\,(\alpha + \beta) = \ldots\quad cos\,(\alpha - \beta) = \ldots$

• Suma i resta com hem fet a dalt i obtindràs dues expressions.

• Transforma en producte i calcula:

$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = A\\ \alpha - \beta = B\end{array}\right\}\ \alpha\ \dfrac{A + B}{2},\ \beta = \dfrac{A - B}{2}$

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
  $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

Sumant $\rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$ (1)

Restant $\rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta$ (2)

- Anomenant

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = A\\ \alpha + \beta = B\end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2},\ \beta = \frac{A-B}{2}$$

(en resoldre el sistema)

- Aleshores, substituint a (1) i (2), s'obté:

(1) $\rightarrow \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

(2) $\rightarrow \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

21. Transforma en producte i calcula:

a) $\sin 75° - \sin 15°$

b) $\cos 75° + \cos 15°$

c) $\cos 75° - \cos 15°$

a) $\sin 75° - \sin 15° =$

$$= 2 \cos \frac{75° + 15°}{2} \sin \frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= 2 \cos 45° \sin 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\cos 75° + \cos 15° =$

$$= 2 \cos \frac{75° + 15°}{2} \cos \frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= 2 \cos 45° \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

c) $\cos 75° - \cos 15° =$

$$= -2 \sin \frac{75° + 15°}{2} \sin \frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= -2 \sin 45° \cos 30° = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

22. Expressa en forma de producte el numerador i el denominador d'aquesta fracció i simplifica'n el resultat:

$$\frac{\sin 4a + \sin 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$$

$$\frac{\sin 4a + \sin 2a}{\cos 4a + \cos 2a} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{4a + 2a}{2} \cos \frac{4a - 2a}{2}}{2 \cos \frac{4a + 2a}{2} \cos \frac{4a - 2a}{2}} =$$

$$= \frac{2 \sin 3a}{2 \cos 3a} = tg\ 3a$$

Pàgina 131

23. Resol aquestes equacions:

a) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

b) $2 \sin^2 x - 1 = 0$

c) $tg^2 x - tg\ x = 0$

d) $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3$

a) $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} =$

$$= \begin{cases} 1/2 \Rightarrow x_1 = 60°,\ x_2 = 300° \\ -1 \Rightarrow x_3 = 180° \end{cases}$$

Les tres solucions són vàlides (es comprova en l'equació inicial).

b) $2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x =$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Si $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = 45°,\ x_2 = 135°$

- Si $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_3 = -45° =$

$= 315°,\ x_4 = 225°$

En comprovar les solucions, totes tres són vàlides.

c) $tg^2 x - tg\ x = 0 \Rightarrow tg\ x\,(tg\ x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg\ x = 0 \Rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ tg\ x = 1 \Rightarrow x_1 = 45°,\ x_2 = 225° \end{cases}$$

Totes les solucions són vàlides.

d) $2\ sin^2\ x + 3\ cos\ x = 3 \overset{(*)}{\Rightarrow} 2\ (1 - cos^2\ x) + 3\ cos\ x = 3$

(*) Com que $sin^2\ x + cos^2\ x = 1 \Rightarrow sin^2\ x = 1 - cos^2\ x$

$2 - 2\ cos^2\ x + 3\ cos\ x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ cos^2\ x - 3\ cos\ x + 1 = 0$

$$cos\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

Aleshores: • Si $cos\ x = 1 \Rightarrow x = 0°$

• Si $cos\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_2 = 60°,\ x_3 = -60° = 300°$

Les tres solucions són vàlides.

24. Resol:

a) $4\ cos\ 2x + 3\ cos\ x = 1$

b) $tg\ 2x + 2\ cos\ x = 0$

c) $\sqrt{2}\ cos\ (x/2) - cos\ x = 1$

d) $2\ sin\ x\ cos^2\ x - 6\ sin^3\ x = 0$

a) $4\ cos\ 2x + 3\ cos\ x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\ (cos^2\ x - sin^2\ x) + 3\ cos\ x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\ (cos^2\ x - (1 - cos^2\ x)) + 3\ cos\ x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\ (2\ cos^2\ x - 1) + 3\ cos\ x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\ cos^2\ x - 4 + 3\ cos\ x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\ cos^2\ x + 3\ cos\ x - 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow cos\ x = \frac{-7 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$$

• Si $cos\ x = 0{,}625 \Rightarrow x_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13''$, $x_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$

• Si $cos\ x = -1 \Rightarrow x_3 = 180°$

En comprovar les solucions, les tres són vàlides.

b) $tg\ 2x + 2\ cos\ x = 0 \Rightarrow \dfrac{2\ tg\ x}{1 - tg^2\ x} + 2\ cos\ x = 0 \Rightarrow \dfrac{tg\ x}{1 - tg^2\ x} + cos\ x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{sin\ x/cos\ x}{1 - (sin^2\ x/cos^2\ x)} + cos\ x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{sin\ x\ cos\ x}{cos^2\ x - sin^2\ x} + cos\ x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow sin\ x\ cos\ x + cos\ x\ (cos^2\ x - sin^2\ x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ x\ (sin\ x + cos^2\ x - sin^2\ x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ x\ (sin\ x + 1 - sin^2\ x - sin^2\ x) \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ x\ (1 + sin\ x - 2\ sin^2\ x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \\ 1 + sin\ x - 2\ sin^2\ x = 0 \Rightarrow sin\ x = \end{cases}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases}$$

• Si $cos\ x = 0 \Rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270°$

• Si $sin\ x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 210°,\ x_4 = 330° = -30°$

• Si $sin\ x = 1 \Rightarrow x_5 = 90° = x_1$

En comprovar les solucions, veiem que totes elles són vàlides.

c) $\sqrt{2}\ cos\ \dfrac{x}{2} - cos\ x = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\frac{1 + cos\ x}{2}} - cos\ x = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{1 + cos\ x} - cos\ x = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - cos\ x} = 1 + cos\ x \Rightarrow 1 + cos\ x = 1 + cos^2\ x + 2\ cos\ x \Rightarrow cos^2\ x + cos\ x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ x\ (cos\ x + 1) = 0$

• Si $cos\ x = 0 \Rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270°$

• Si $cos\ x = -1 \Rightarrow x_3 = 180°$

En comprovar les solucions, podem comprovar que les úniques vàlides són: $x_1 = 90°$ i $x_3 = 180°$

d) $2\ sin\ x\ cos^2\ x - 6\ sin^3\ x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ sin\ x\ (cos^2\ x - 3\ sin^2\ x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ sin\ x\ (cos^2\ x + sin^2\ x - 4\ sin^2\ x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ sin\ x\ (1 - 4\ sin^2\ x) = 0$

• Si $sin\ x = 0 \Rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180°$

• Si $sin^2\ x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow sin\ x = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 150°,\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330°$

Comprovem les solucions i observem que són vàlides totes elles.

25. Transforma en producte *sin* 3*x* – *sin* *x* i resol després l'equació *sin* 3*x* – *sin* *x* = 0.

$sin\ 3x - sin\ x = 0 \Rightarrow 2\ cos\ \frac{3x+x}{2}\ sin\ \frac{3x-x}{2} =$

$= 0 \Rightarrow 2\ cos\ 2x\ sin\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} cos\ 2x = 0 \\ sin\ x = 0 \end{cases}$

• Si $cos\ 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 90° & \rightarrow x_1 = 45° \\ 2x = 270° & \rightarrow x_2 = 135° \\ 2x = 90° + 360° & \rightarrow x_3 = 225° \\ 2x = 270° + 360° & \rightarrow x_4 = 315° \end{cases}$

• Si $sin\ x = 0 \Rightarrow x_5 = 0°,\ x_6 = 180°$
Comprovem que les sis solucions són vàlides.

26. Resol les següents equacions trigonomètriques:

a) $\boldsymbol{sin\ (\pi - x) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi}$

b) $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2}\ sin\ x = 0}$

a) $\left.\begin{array}{l} sin\ (\pi - x) = sin\ x \\ cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -sin\ x \\ cos\ \pi = -1 \end{array}\right\}$ Aleshores, l'equació queda:

$sin\ x = -sin\ x - 1 \Rightarrow 2\ sin\ x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow sin\ x = \frac{-1}{2}$

Si $sin\ x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6}$rad, $x_2 = \frac{11\pi}{6}$rad

En comprovar, veiem:

$x_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow sin\ (\pi - x) = sin\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) =$

$= sin\ \frac{-\pi}{6} = \frac{-1}{2}$

$cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}\right) = cos\ \frac{2\pi}{6} =$

$= cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Aleshores la solució és vàlida, ja que:

$sin\ (\pi - x) = \frac{-1}{2} = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi =$

$= \frac{1}{2} + (-1)$

$x_2 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow sin\ (\pi - x) = sin\left(\pi - \frac{11\pi}{6}\right) =$

$= sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{11\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{-2\pi}{6}\right) =$

$= cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Aleshores, també és vàlida aquesta solució, ja que:

$sin\ (\pi - x) = \frac{-1}{2} = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi =$

$= \frac{1}{2} + (-1)$

Per tant, les dues solucions són vàlides:

$x_1 = \frac{7\pi}{6}$ rad i $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ rad

b) $sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = sin\ \frac{\pi}{4}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{4}\ sin\ x =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sin\ x$

Aleshores l'equació queda:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sin\ x + \sqrt{2}\ sin\ x =$

$= 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sin\ x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ x + sin\ x = 0 \Rightarrow cos\ x = -sin\ x \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4}$ rad, $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ rad

Comprovem que cap solució no és vàlida. Aleshores l'equació no té solució.

27. Escriu, en radians, l'expressió general de tots els angles que verifiquen:
a) $tg\ x = -\sqrt{3}$; b) $sin\ x = cos\ x$
c) $sin^2\ x = 1$; d) $sin\ x = tg\ x$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bé
$x = 300° + k \cdot 360°$

Les dues solucions queden recollides en:

$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi$ rad =
$= x$ amb $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ rad amb $k \in \mathbb{Z}$

c) Si $sin\ x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi$ rad
Si $sin\ x = -1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi$ rad
$\}\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ rad
amb $k \in \mathbb{Z}$

d) En aquest cas ha d'ocórrer que:
O bé $sin\ x = 0 \Rightarrow x = k\,\pi$ rad
O bé $cos\ x = 1 \Rightarrow x = 2k\,\pi$ rad
$\}\Rightarrow x = k\,\pi$ rad amb $k \in \mathbb{Z}$

Pàgina 136

Per practicar

Graus i radians

28. Expressa en graus sexagesimals els angles següents expressats en radians:

a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $\frac{4\pi}{3}$; c) $\frac{5\pi}{4}$; d) $\frac{7\pi}{6}$; e) $\frac{9\pi}{2}$

Fes-ho mentalment tenint en compte que: π radians = 180°.

a) 120°; b) 240°; c) 225°; d) 210°; e) 810°

29. Expressa en graus sexagesimals els angles següents que tens en radians:
a) 1,5; b) 3,2; c) 5; d) 2,75

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 1{,}5 = 85°\ 56'\ 37''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3{,}2 = 183°\ 20'\ 47''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 5 = 286°\ 28'\ 44''$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2{,}75 = 157°\ 33'\ 48''$

30. Passa a radians els angles següents expressats en graus. Expressa'ls en funció de π:

a) 40° b) 108° c) 135°;
d) 240° e) 270° f) 126°

Simplifica l'expressió que obtinguis sense multiplicar per 3,14...

a) = $\frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 40° = \frac{2\pi}{9}$

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 108° = \frac{3\pi}{5}$

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 135° = \frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 240° = \frac{4\pi}{3}$

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 270° = \frac{3\pi}{2}$

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 126° = \frac{7\pi}{10}$

31. Troba sense emprar la calculadora:

a) $5\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3\pi}{2} +$

$+ \cos 2\pi$

b) $5tg\,\pi + 3\cos\frac{\pi}{2} - 2tg\,0 +$

$+ \sin\frac{3\pi}{2} - 2\sin 2\pi$

c) $\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin\pi -$

$- \frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{2}$

Comprova el resultat obtingut utilitzant la calculadora

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + (-1) - 2 \cdot 0 = -1$

c) $\frac{2}{3} \cdot 1 - 4(-1) + 3 \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1 =$

$\frac{2}{3} + 4 + 0 - \frac{5}{3} = 3$

32. Prova que:

a) $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{2} = 3$

a) $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi = 4 \cdot \frac{1}{2} +$

$+ \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{2} =$

$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 =$

$= 3 + 2 - 2 = 3$

33. Troba el valor exacte de cada una d'aquestes expressions sense utilitzar la calculadora:

a) $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi$

b) $\cos\pi - \cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2}$

c) $\sin\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6} + tg\frac{4\pi}{3} + tg\frac{11\pi}{6}$

Comprova els resultats amb la calculadora.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

b) $-1 - 1 + 0 - 0 = -2$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{10}{6}\sqrt{3} =$

$\frac{5}{3}\sqrt{3}$

34. Troba el valor exacte d'aquestes expressions sense usar la calculadora:

a) $\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{7\pi}{4}$

b) $\cos\frac{5\pi}{3} + tg\frac{4\pi}{3} - tg\frac{7\pi}{6}$

c) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}$

Comprova els resultats amb la calculadora.

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} =$

$= \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6}$

c) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

35. Troba, en radians, l'angle α tal que: $\boldsymbol{sin\ \alpha = 0{,}72}$ i $\boldsymbol{cos\ \alpha < 0}$.

$$\left.\begin{array}{l} sin\ \alpha = 0{,}72 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\}$$

$\}\ \alpha \in$ 2n quadrant $\rightarrow \alpha \approx 0{,}8$ rad

36. Indica, sense passar a graus, en quin quadrant es troba cada un dels angles següents:

a) 2 rad b) 3,5 rad c) 5 rad

Tingues en compte que:

$\frac{\pi}{2}$ ***1,57;*** $\pi \approx$ ***3,14;*** $\frac{3\pi}{2} \approx$ ***4,7;*** $2\pi \approx$ ***6,28***

a) 2n quadrant

b) 3r quadrant

c) 4t quadrant

Fórmules trigonomètriques

37. Troba les raons trigonomètriques de l'angle de 75° sabent que 75° = 30° + 45°.

$sin\ 75° = sin\ (30° + 45°) =$

$= sin\ 30°\ cos\ 45° + cos\ 30°\ sin\ 45° =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°) =$

$= cos\ 30°\ cos\ 45° - sin\ 30°\ sin\ 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$tg\ 75° = tg\ (30° + 45°) = \frac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30°\ tg\ 45°} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}/3 + 1}{1 - \sqrt{3}/3} = \frac{(\sqrt{3} + 3)/3}{(\sqrt{3} - 3)/3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6}\ \ 2 + \sqrt{3}$$

NOTA: També el podem resoldre d'aquesta manera:

$$tg\ 75° = \frac{sin\ 75°}{cos\ 75°} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{6 - 2}$$

$$= \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

38. Sabent que $\boldsymbol{sin\ x = \frac{3}{5}}$ i que $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < x < \pi}$, calcula, sense trobar prèviament el valor de $\boldsymbol{x}$:

a) $\boldsymbol{sin\ 2x}$ b) $\boldsymbol{tg\ \frac{x}{2}}$ c) $\boldsymbol{sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

d) $\boldsymbol{cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ e) $\boldsymbol{cos\ \frac{x}{2}}$ f) $\boldsymbol{tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Has de calcular $\boldsymbol{cos\ x = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} =}$

$\boldsymbol{= -\frac{4}{5}}$ ***i*** $\boldsymbol{tg\ x = -\frac{3}{4}}$ ***i aplicar-hi les fórmules.***

$$cos\ x = \sqrt{1 - sin^2\ x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

(Negatiu, per ser 2n quadrant).

$$tg\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x} = -\frac{3}{4}$$

a) $sin\ 2x = 2sin\ x\ cos\ x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) =$

$$= -\frac{24}{25}$$

b) $tg = \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{\frac{1 - (-4/5)}{1 + (-4/5)}} =$

$$= \sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = 3$$

Signe positiu, ja que si $x \in$ 2n quadrant, aleshores $\frac{x}{2} \in$ 1r quadrant.

c) $sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = sin\ x\ cos\ \frac{\pi}{6} + cos\ x\ sin\ \frac{\pi}{6} =$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\ x\ cos\ \frac{\pi}{3} + sin\ x\ sin\ \frac{\pi}{3} =$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$$

e) $$cos\,\frac{x}{2} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{1 + cos\,x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 4/5}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

(*) Signe positiu, perquè $\frac{x}{2} \in$ 1r quadrant

f) $$tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\,x + tg\,\pi/4}{1 - tg\,x + tg\,\pi/4} =$$

$$= \frac{-3/4 + 1}{1 - (-3/4) \cdot 1} = \frac{1 - 3/4}{1 + 3/4} = \frac{1}{7}$$

Pàgina 137

39. Troba les raons trigonomètriques de l'angle de 15° de dues maneres, considerant:

a) 15° = 45° – 30° b) 15° = $\frac{30°}{2}$

a) $sin\ 15° = sin\ (45° - 30°) =$

$$= sin\ 45°\ cos\ 30° - cos\ 45°\ sin\ 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$$

$$= 0{,}258819$$

$cos\ 15° = cos\ (45° - 30°) =$

$$= cos\ 45°\ cos\ 30° + sin\ 45°\ sin\ 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} =$$

$$= 0{,}965926$$

$$tg\ 15° = \frac{sin\ 15°}{cos\ 15°} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} =$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}267949$$

b) $$sin\ 15° = sin\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} =$$

$$= 0{,}258819$$

$$cos\ 15° = cos\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0{,}9659258$$

$$tg\ 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{0{,}258819}{0{,}9659258} = 0{,}2679491$$

Pàgina 137

40. Sabent que *sin x* = $\frac{2}{3}$ i que *x* és un angle del primer quadrant, calcula:

a) *sin* 2*x* b) *tg* $\frac{x}{2}$ c) *cos* (30° – *x*)

$$\left.\begin{array}{l} sin\ x = \frac{2}{3} \\ x \in 1\text{r quadrant} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} cos\ x,\ tg\ x > 0 \\ \frac{x}{2} \in 1\text{r quadrant} \rightarrow \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} sin\ x/2 > 0 \\ cos\ x/2 > 0 \\ tg\ x/2 > 0 \end{array}\right.$$

• $$cos\ x = \sqrt{1 - sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

• $$tg\ x = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

a) $$sin\ 2x = 2\ sin\ x\ cos\ x = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

b) $$tg\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{5}/5}{1 + 2\sqrt{5}/5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{25 + 4 \cdot 5 - 20\sqrt{5}}{25 - 4 \cdot 5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{45 - 20\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

c) $cos\ (30° - x) = cos\ 30°\ cos\ x +$

$$+ sin\ 30°\ sin\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} =$$

$= \frac{\sqrt{15}}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{15}+5}{15}$

41. Si $tg\ \alpha = -4/3$ i $90° < \alpha < 180°$, calcula:

a) $sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; b) $cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

$90° < \alpha < 180° \rightarrow \begin{cases} sin\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{cases}$

A més, $\frac{\alpha}{2} \in$1r quadrant

• $tg\ \alpha = -\frac{4}{3}$

• $\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow$

$\rightarrow cos^2\alpha = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

• $sin\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} =$

$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

a) $sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\ \frac{\pi}{2}\ cos\ \alpha - cos\ \frac{\pi}{2}\ sin\ \alpha =$

$= 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 0 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

b) $cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right) = cos\ 180°\ cos\ \frac{\alpha}{2} +$

$+ sin\ 180°\ sin\ \frac{\alpha}{2} = -cos\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} =$

$= -\sqrt{\frac{1 + (-3/5)}{2}} = -\sqrt{\frac{5-3}{10}} = -\sqrt{\frac{2}{10}} =$

$= -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

42. Sabem que $cos\ x = -\frac{3}{4}$ i $sin\ x < 0$.
Sense trobar el valor de x, calcula:
a) $sin\ x$; b) $cos\ (\pi + x)$; c) $cos\ 2x$
d) $tg\ \frac{x}{2}$; e) $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; f) $cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$

$\left.\begin{array}{l} cos\ x = -3/4 \\ sin\ x < 0 \end{array}\right\} \rightarrow x \in$3r quadrant $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \in$2n quadrant

a) $sin\ x = -\sqrt{1 - cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} =$

$= -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $cos\ (\pi + x) = cos\ \pi\ cos\ x - sin\ \pi\ sin\ x =$

$= -cos\ x = \frac{3}{4}$

c) $cos\ 2x = cos^2 x - sin^2 x = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} =$

$= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

d) $tg\ \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = -\sqrt{\frac{1 + 3/4}{1 - 3/4}} =$

$= \sqrt{\frac{7}{1}} = \sqrt{7}$

e) $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\ \frac{\pi}{2}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{2}\ sin\ x =$

$= cos\ x = -\frac{3}{4}$

f) $cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = cos\ \pi\ cos\ \frac{x}{2} + sin\ \pi\ sin\ \frac{x}{2} =$

$= -cos\ \frac{x}{2} = -\left(-\sqrt{\frac{1 + cos\ x}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1 - 3/4}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$

43. Si $cos\ 78° = 0{,}2$ i $sin\ 37° = 0{,}6$, calcula la $sin\ 41°$, $cos\ 41°$ i $tg\ 41°$.

$41° = 78° - 37°$

• $sin\ 78° = \sqrt{1 - cos^2 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$

• $cos\ 37° = \sqrt{1 - sin^2 37°} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Ara ja podem calcular:

• $sin\ 41° = sin\ (78° - 37°) =$

$= sin\ 78°\ cos\ 37° - cos\ 78°\ sin\ 37° =$

$= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

- $\cos 41° = \cos (78° - 37°) =$

$= \cos 78° \cos 37° + \sin 78° \sin 37° =$

$= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

- $tg\ 41° = \dfrac{\sin 41°}{\cos 41°} = \dfrac{0{,}664}{0{,}748} = 0{,}8877$

44. Si $tg\,(\alpha + \beta) = 4$ i $tg\,\alpha = -2$, troba $tg\,2\beta$.

$tg\,(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} \rightarrow 4 =$

$= \dfrac{-2 + tg\,\beta}{1 + 2\,tg\,\beta} \rightarrow 4 + 8\,tg\,\beta = -2 + tg\beta \rightarrow$

$\rightarrow 7\,tg\,\beta = -6 \rightarrow tg\,\beta = -\dfrac{6}{7}$

Aleshores:

$tg\,2\beta = \dfrac{2\,tg\,\beta}{1 - tg^2\,\beta} = \dfrac{2 \cdot (-6/7)}{1 - 36/49} = \dfrac{-12/7}{13/49} =$

$= \dfrac{-12 \cdot 49}{7 \cdot 13} = -\dfrac{84}{13}$

Equacions trigonomètriques

45. Resol les equacions següents:

a) $2\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$

b) $\sin^2 x - \sin x = 0$

Treu-ne el factor comú i iguala a zero cada factor.

c) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

a) $2\cos^2 x \underbrace{- \sin^2 x + 1}_{\cos^2 x} = 0$

$\rightarrow 2\cos^2 x - \cos^2 x = 0$

$\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

En comprovar-les a l'equació inicial, les dues solucions són vàlides. Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

Cosa que podem expressar com:

$x = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x\,(\sin x - 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ \sin x = 1 \rightarrow x_3 = 90° \end{cases}$

Comprovant les possibles solucions, veiem que totes tres són vàlides. Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

O, d'una altra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 així inclou les solucions x_1 i x_2 anteriors)

c) $\cos x\,(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Les quatre solucions són vàlides. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Observi's que les dues primeres solucions es podrien escriure com una sola de la forma següent:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

46. Resol:

a) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

b) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

c) $2\cos^2 x + \sin x = 1$

d) $3tg^2 x - \sqrt{3}\, tg\, x = 0$

a) $(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 \rightarrow 1 - 2\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$$

Les dues solucions són vàlides. Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

O, el que és igual:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

b) $(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 0 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Si $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45°,\ x_2 = 135°$
- Si $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = 225°,\ x_4 = 315°$

Comprovem que totes les solucions són vàlides. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_3 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

O, el que és el mateix:

$$x = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1 \rightarrow 2 - 2\sin^2 x + \sin x = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90° \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 210°,\ x_3 = 330° \end{cases}$$

Les tres solucions són vàlides, és a dir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

d) $tg\, x\,(3\, tg\, x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} tg\, x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ tg\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 210° \end{cases}$$

Comprovem les possibles solucions en l'equació inicial i veiem que les quatre són vàlides.

Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\}$$

amb $k \in \mathbb{Z}$

Cosa que es podria expressar amb tan sols dues solucions que englobessin les quatre anteriors.

$$x_1 = k \cdot 180° = k\pi$$

$x_2 = 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\,\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

47. Resol les equacions següents:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

b) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$

Desenvolupa sin 2x i treu-ne factor comú.

c) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

Desenvolupa cos 2x i substitueix $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\,\sin x = 0$

a) $\sin\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$

Comprovem i veiem que:

$x_1 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$x_2 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Són vàlides les dues solucions. Ja que:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi = 60° + k \cdot 360° \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi = 300° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\}$$ amb $k \in \mathbb{Z}$

b) $2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos x(\sin x - \cos x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ \sin x = \cos x \rightarrow x_3 = 45°,\ x_4 = 225° \end{cases}$$

Comprovem les solucions. Totes són vàlides:

$x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi$

$x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi$

$x_3 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi$

$x_4 = 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi$

També ho podríem expressar com:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 &= 45° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \end{aligned}\right\}$$ amb $k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos^2 x - \sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} =$

$= \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 30°,\ x_2 = 150° \\ -2 \rightarrow \text{Impossible!, ja que } |\sin x| \leq 1 \end{cases}$

Comprovem que les dues solucions són vàlides.

Ja que:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2\ & 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\}$$ amb $k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sqrt{2}\,\sin x = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \sqrt{2}\,\sin x = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0 \rightarrow \cos x - \sin x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \sin x \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{5\pi}{4}$

En comprovar, podem veure que ambdues solucions són vàlides. Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = 225° + k \cdot 360° \end{array}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

Podem agrupar les dues solucions en:

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45° + k \cdot 180°$ amb $k \in \mathbb{Z}$

48. Resol aquestes equacions:

a) $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

En fer $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, en resulta una equació biquadrada.

Fes $\cos^2 x = z$ i comprova si són vàlides les solucions que obtens.

b) $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$

Divideix per $\cos^2 x$ i obtindràs una equació amb $tg\ x$.

c) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$

d) $tg^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$

e) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

a) $4(1 - \cos^2 x)\cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

$4\cos^2 x - 4\cos^4 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

$4\cos^4 x - 6\cos^2 x + 2 =$

$= 0 \rightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$

Sigui $\cos^2 x = z \rightarrow \cos^4 x = z^2$

Així:

$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} =$

$= \frac{3 \pm 1}{4} <$

$z_1 = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 < \begin{array}{l} x_1 = 0° \\ x_2 = 180° \end{array}$

$z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} < \begin{array}{l} x_3 = 45°,\ x_4 = 315° \\ x_5 = 135°,\ x_6 = 225° \end{array}$

Comprovem les possibles solucions, veiem que totes són vàlides. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_5 = 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_6 = 225° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

O, agrupant les solucions:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

b) Dividint per $\cos^2 x$:

$\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4\,tg^2 x + tg\ x - 3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow tg\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8} =$

$$= \begin{cases} \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' \\ x_2 = 216°\ 52'\ 11{,}6'' \end{cases} \\ -1 \rightarrow \begin{cases} x_3 = 135° \\ x_4 = 315° \end{cases} \end{cases}$$

Les quatre solucions són vàlides:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 36° \, 52' \, 11{,}6'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi \\ x_2 = 216° \, 52' \, 11{,}6'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{6\pi}{5} + 2k\pi \\ x_3 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{5} + 2k\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{5} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

O el que és el mateix:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 36° \, 52' \, 11{,}6'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{\pi}{5} + k\pi \\ x_2 = 135° + k \cdot 180° = \dfrac{3\pi}{5} + k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

c) $\dfrac{1 + \cos x}{2} + \cos x - \dfrac{1}{2} = 0 \rightarrow 1 + \cos x +$

$+ 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow 3 \cos x = 0 \rightarrow \cos x =$
$= 0 \rightarrow x_1 = 90°, \; x_2 = 270°$

Les dues solucions són vàlides. Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupant les solucions:

$x = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

d) $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + 1 = \cos x \rightarrow 1 - \cos x + 1 +$

$+ \cos x = \cos x + \cos^2 x \rightarrow 2 = \cos x + \cos^2 x \rightarrow$
$\rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x =$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \; \begin{cases} 1 \rightarrow x = 0° \\ -2 \rightarrow \text{Impossible!, ja que } |\cos x| \leq 1 \end{cases}$$

Ja que:

$x = k \cdot 360° = 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

e) $2 \cdot \dfrac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \cos x \, (2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°, \; x_2 = 270° \\ \cos x = 1/2 \rightarrow x_3 = 60°, \; x_4 = 300° \end{cases}$$

Es comprova que són vàlides totes. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 60° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 = 300° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupant les solucions quedaria:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 = 60° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 300° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

Identitats trigonomètriques

49. Demostra que:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}$$

Aplica les fórmules de sin ($\alpha + \beta$) i sin ($\alpha - \beta$). Divideix tant el numerador com el denominador entre cos α cos β i simplifica-ho.

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$\frac{\dfrac{sin\,\alpha\ cos\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}+\dfrac{cos\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}}{\dfrac{sin\,\alpha\ cos\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}-\dfrac{cos\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{tg\,\alpha-tg\,\beta}$$

(*) Dividim numerador i denominador entre $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

50. Prova que $2\ tg\ x\ cos^2\ \dfrac{x}{2} - sin\ x = tg\ x$.

Substitueix $cos^2\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+cos\ x}{2}$.

Com que $cos\ \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\ x}{2}} \rightarrow cos^2\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+cos\ x}{2}$

I substituint en l'expressió:

$$2\ tg\ x\ cos^2\ \frac{x}{2} - sin\ x =$$

$$= 2\frac{sin\ x}{cos\ x}\cdot\frac{1+cos\ x}{2} - sin\ x =$$

$$= \frac{sin\ x\,(1+cos\ x) - sin\ x\ cos\ x}{cos\ x} \stackrel{(*)}{=}$$

$$= \frac{sin\ x\,[1+cos\ x - cos\ x]}{cos\ x} = \frac{sin\ x}{cos\ x} = tg\ x$$

(*) Traient el factor comú.

51. Demostra que $cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) - cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = cos\ x$.

Desenvolupa i substitueix les raons de: $\dfrac{\pi}{3}$ i $\dfrac{2\pi}{3}$.

$$cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \left[cos\ x\ cos\ \frac{\pi}{3} - sin\ x\ sin\ \frac{\pi}{3}\right] -$$

$$- \left[cos\ x\ cos\ \frac{2\pi}{3} - sin\ x\ sin\ \frac{2\pi}{3}\right] =$$

$$= \left[(cos\ x)\ \frac{1}{2} - (sin\ x)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right] -$$

$$- \left[(cos\ x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (sin\ x)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ sin\ x + \frac{1}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ sin\ x =$$

$$= cos\ x$$

52. Demostra que: $cos\ \alpha\ cos\ (\alpha-\beta) + sin\ \alpha\ sin\ (\alpha-\beta) = cos\ \beta$.

Aplica les fórmules de la diferència d'angles, simplifica-ho i extreu-ne factor comú.

$$cos\ \alpha\ cos\ (\alpha-\beta) + sin\ \alpha\ sin\ (\alpha-\beta) =$$
$$= cos\ \alpha\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta + sin\ \alpha\ sin\ \beta) +$$
$$+ sin\ \alpha\ (sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta) =$$
$$= cos^2\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \alpha\ sin\ \beta +$$
$$+ sin^2\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ cos\ \alpha\ sin\ \beta =$$
$$= cos^2\ \alpha\ cos\ \beta + sin^2\ \alpha\ cos\ \beta \stackrel{(*)}{=}$$
$$\stackrel{(*)}{=} cos\ \beta\ (cos^2\ \alpha + sin^2\ \alpha) = cos\ \beta\cdot 1 = cos\ \beta$$

(*) Traiem el factor comú.

Pàgina 138

53. Prova que: $\dfrac{2\ sin\ \alpha - sin\ 2\ \alpha}{2\ sin\ \alpha + sin\ 2\ \alpha} = tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}$.

$$\frac{2\ sin\ \alpha - sin\ 2\ \alpha}{2\ sin\ \alpha + sin\ 2\ \alpha} = \frac{2\ sin\ \alpha - 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sin\ \alpha + 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\ sin\ \alpha\ (1-cos\ \alpha)}{2\ sin\ \alpha\ (1+cos\ \alpha)} = \frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha} = tg^2\ \frac{\alpha}{2}$$

54. Simplifica: $\dfrac{2\ cos\ (45°+\alpha)\ cos\ (45°-\alpha)}{cos\ 2\ \alpha}$

En desenvolupar el numerador obtindràs una diferència de quadrats.

$$\frac{2\ cos\ (45°+\alpha)\ cos\ (45°-\alpha)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$\frac{2\ cos\ (45°\ cos\ \alpha - sin\ 45°\ sin\ \alpha)\ \cdot}{cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha}$$

$$\frac{\cdot\,(cos\,45°\ cos\,\alpha + sin\,45°\ sin\,\alpha)}{cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{2(cos^2\,45°\ cos^2\,\alpha - sin^2\,45°\ sin^2\,\alpha)}{cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha} =$$

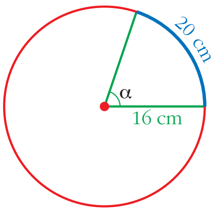
$$= \frac{2\cdot[(\sqrt{2}/2)^2\ cos^2\,\alpha - (\sqrt{2}/2)^2\ sin^2\,\alpha]}{cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot 1/2\ cos^2\,\alpha - 2\cdot 1/2\ sin^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha} = 1$$

Per resoldre

55. En una circumferència de 16 cm de radi, un arc mesura 20 cm. Troba l'angle central en graus i en radians.
Troba la longitud de la circumferència i escriu la proporció entre les longituds dels arcs i la mesura dels angles.



Com que la circumferència completa (α = 100,53 cm) són 2π rad, aleshores:

$$\frac{100{,}53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20\cdot 2\pi}{100{,}53} = 1{,}25 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{360°}{2\pi}\cdot 1{,}25 = 71°\ 37'\ 11''$$

56. Troba, en radians, l'angle comprès entre 0 i 2π de manera que les raons trigonomètriques coincideixin amb les de $\frac{11\pi}{4}$.

$0 < \alpha < 2\pi$

$$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{4} \rightarrow \frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

57. Demostra: $\dfrac{cos\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)} = \dfrac{1 + tg\,\alpha\ tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta}$

$$\frac{cos\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)} = \frac{cos\,\alpha\ cos\,\beta + sin\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta - sin\,\alpha\ sin\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$\frac{\dfrac{cos\,\alpha\ cos\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta} + \dfrac{sin\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}}{\dfrac{cos\,\alpha\ cos\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta} - \dfrac{sin\,\alpha\ sin\,\beta}{cos\,\alpha\ cos\,\beta}} = \frac{1 + tg\,\alpha\ tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta}$$

(*) Dividim numerador i denominador entre: $cos\ \alpha\ cos\ \beta$

58. Simplifica l'expressió $\dfrac{sin\,2\alpha}{1 - cos^2\,\alpha}$ i calcula'n el valor per a α = 90°.

$$\frac{sin\,2\alpha}{1 - cos^2\,\alpha} = \frac{2\ sin\,\alpha\ cos\,\alpha}{sin^2\,\alpha} = \frac{2\ cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$$

Per tant, si $\alpha = 90° \Rightarrow \dfrac{sin\,2\,\alpha}{1 - cos^2\,\alpha} =$

$$= \frac{2\ cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{2\cdot 0}{1} = 0$$

59. Resol les equacions següents:
a) $cos\ 2x + 3\ sin\ x = 2$
b) $tg\ 2x\cdot tg\ x = 1$
c) $cos\ x\ cos\ 2x + 2\ cos^2\ x = 0$
d) $2\ sin\ x = tg\ 2x$
e) $\sqrt{3}\,sin\ \dfrac{x}{2} + cos\ x - 1 = 0$
f) $sin\ 2x\ cos\ x = 6\ sin^3\ x$
g) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x = 1$

a) $cos^2\ x - sin^2\ x + 3\ sin\ x = 2 \rightarrow$
$\rightarrow 1 - sin^2\ x - sin^2\ x + 3\ sin\ x = 2 \rightarrow$
$\rightarrow 2\ sin^2\ x - 3\ sin\ x + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \sin x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} <$

$< \begin{matrix} 1 \rightarrow x_1 = 90° \\ 1/2 \rightarrow x_1 = 30°,\ x_2 = 150° \end{matrix}$

Les tres solucions són vàlides:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\, tg\, x}{1 - tg^2\, x} \cdot tg\, x = 1 \rightarrow 2\, tg^2\, x =$

$= 1 - tg^2\, x \rightarrow tg^2\, x = \dfrac{1}{3} \rightarrow tg\, x =$

$= \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30°,\ x_2 = 210° \\ x_3 = 150°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Les quatre solucions són vàlides:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupant:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x_2 &= 150° + k \cdot 180° = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

c) $\cos x\, (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x\, (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x\, (2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x^2 = 270°$

$\cos x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \approx$

$\approx \begin{matrix} -1{,}366 \rightarrow \text{Impossible! Ja que } |\cos x| \leq -1 \\ 0{,}366 \rightarrow x^3 = 68°\ 31'\ 51{,}1'',\ x^4 = 291°\ 28'\ 8{,}9'' \end{matrix}$

Les solucions són totes vàlides:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 68°\ 31'\ 51{,}1'' + k \cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\pi \\ x_4 &= 291°\ 28'\ 8{,}9'' + k \cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupades, serien:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 68°\ 31'\ 51{,}1'' + k \cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\pi \\ x_3 &= 291°\ 28'\ 8{,}9'' + k \cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

d) $2 \sin x = \dfrac{2\, tg\, x}{1 - tg^2\, x} \rightarrow 2 \sin x -$

$- 2 \sin x\, tg^2\, x = 2\, tg\, x \rightarrow$

$\rightarrow \sin x - \sin x\, \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \rightarrow$

$\rightarrow \sin x \cos^2 x - \sin x \sin^2 x = \sin x \cos x \rightarrow$

$\rightarrow \sin x\, (\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \sin x\, (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0° \rightarrow \cos x = \end{cases}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} <$

$< \begin{matrix} 1 \rightarrow x_3 = 0° = x_1 \\ -1/2 \rightarrow x_4 = 240°,\ x_5 = 120° \end{matrix}$

Les quatre solucions són vàlides. Ja que:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 &= 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_4 &= 240° + k \cdot 360° = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ x_5 &= 120° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

Que, agrupant solucions, quedaria:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180° = k\pi \\ x_2 &= 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 240° + k \cdot 360° = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

e) $\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}} + \cos x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{3 - 3\cos x}{2} = (1 - \cos x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 3 - 3\cos x = 2\,(1 + \cos^2 x - 2\cos x) \rightarrow$

$\rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} =$

$= \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 0° \\ 1/2 \rightarrow x_2 = 120°,\ x_3 = 240° \end{cases}$

En comprovar, veiem que les tres solucions són vàlides:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 &= 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 240° + k \cdot 360° = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

f) $2\sin x \cos x \cos x = 6\sin^3 x \rightarrow$

$\rightarrow 2\sin \cos^2 x = 6\sin^3 x \rightarrow$

$\rightarrow 2\sin x\,(1 - \sin^2 x) = 6\sin^3 x \rightarrow$

$\rightarrow 2\sin x - 2\sin^3 x = 6\sin^3 x$

$\rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180°$

$\sin^2 x = \dfrac{1}{4} \rightarrow \sin x = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_3 = 30°,\ x_4 = 150° \\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{cases}$

Comprovem que totes les solucions són vàlides.

Donem les solucions agrupant les dues primeres per un costat i la resta per l'altre:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180° = k\pi \\ x_2 &= 30° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}\text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

g) $\dfrac{tg\,(\pi/4) + tg\,x}{1 - tg\,(\pi/4)\,tg\,x} + tg\,x = 1 \rightarrow \dfrac{1 + tg\,x}{1 - tg\,x} +$

$+ tg\,x = 1 \rightarrow 1 + tg\,x + tg\,x - tg^2\,x =$

$= 1 - tg\,x \rightarrow tg^2\,x - 3\,tg\,x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow tg\,x\,(tg\,x - 3) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} tg\,x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ tg\,x = 3 \rightarrow x_3 = 71°\ 33'\ 54{,}2'', \\ \qquad\qquad x_4 = = 251°\ 33'\ 54{,}2'' \end{cases}$

Les quatre solucions són vàlides:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 &= 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 71°\ 33'\ 54{,}2'' + k \cdot 360° \approx \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \\ x_4 &= 251°\ 33'\ 54{,}2'' + k \cdot 360° \approx \frac{7\pi}{5} + 2k\pi \end{aligned}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

O, el que és igual:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180° = k\pi \\ x_2 &= 71°\ 33'\ 54{,}2'' + k \cdot 180° \approx \frac{2\pi}{5} + k\pi \end{aligned}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

60. Resol les equacions següents:

a) $\boldsymbol{\sin 3x - \sin x = \cos 2x}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1}$

c) $\boldsymbol{\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos 3x} = \sqrt{3}}$

d) ***sin 3x − cos 3x = sin x − cos x***
Transforma les sumes o diferències de sinus i cosinus en productes.

a) $2\cos\dfrac{3x+x}{2}\sin\dfrac{3x-x}{2} = \cos 2x$

$2\cos 2x \sin x = \cos 2x \rightarrow 2\sin x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30°,\ x_2 = 150°$

Comprovant, veiem que les dues solucions són vàlides. Doncs:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k\cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 150° + k\cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\sin 4x\cos x}{2\sin 2x\cos x} = 1 \rightarrow \dfrac{\sin 4x}{\sin 2x} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\sin(2\cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \rightarrow \dfrac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x} =$

$= 1 \rightarrow 2\sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 30° \rightarrow x_1 = 15° + k\cdot 360° = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150° \rightarrow x_2 = 75° + k\cdot 360° = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390° \rightarrow x_3 = 195° + k\cdot 360° = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510° \rightarrow x_4 = 255° + k\cdot 360° = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

En comprovar veiem que totes les solucions són vàlides.

c) $\dfrac{2\sin 2x\cos x}{-2\sin 2x\sin x} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\dfrac{1}{tg\, x} =$

$= \sqrt{3} \rightarrow tg\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{cases}$

Ambdues solucions són vàlides. Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 150° + k\cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 330° + k\cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

d) $\sin 3x - \sin x = \cos 3x - \cos x \rightarrow$
$\rightarrow 2\cos 2x \sin x = -2\sin 2x\sin x \rightarrow$
$\rightarrow$ (dividim entre $2\sin x$)

$\rightarrow \cos 2x = -\sin 2x \rightarrow \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} =$

$= -1 \rightarrow tg\, 2x = -1 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 315° \rightarrow x_1 = 157{,}5° + k\cdot 360° \\ 2x = 135° \rightarrow x_2 = 67{,}5° + k\cdot 360° \\ 2x = 675° \rightarrow x_3 = 337{,}5° + k\cdot 360° \\ 2x = 495° \rightarrow x_4 = 247{,}5° + k\cdot 360° \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

Podem comprovar que les quatre solucions són vàlides. Agrupant-les:

$x = 67{,}5° + k\cdot 90°$ amb $k \in \mathbb{Z}$

61. a) Demostra que:
sin 3x = 3 sin x cos² x − sin³ x.
b) Resol l'equació *sin 3x* − 2 *sin x* = 0.
a) Fes sin 3x = sin (2x + x) i desenvolupa-ho. b) Substitueix sin 3x pel resultat anterior.

a) $\sin 3x = \sin(2x + x) =$
$= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x =$
$= 2\sin x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$
$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x =$
$= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$

b) $\sin 3x - 2\sin x = 0 \rightarrow$ pel resultat de l'apartat anterior:

$3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - 2\sin x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x - 2\sin x =$
$= 0 \rightarrow 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x - 2\sin x =$
$= 0 \rightarrow 4\sin^3 x - \sin x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \sin x(4\sin^2 x - 1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 150° \\ \sin x = \pm 1/2 \rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 150°, \\ \qquad x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{array}\right.$$

Totes les solucions són vàlides i es poden expressar així:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 180° = \pi/6 + k\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 180° = 5\pi/6 + k\pi \end{array}\right\}$$

$\}$ amb $k \in \mathbb{Z}$

62. Demostra les igualtats següents:

a) $\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta) \cdot cos\ (\alpha - \beta) = cos^2\ \alpha - sin^2\ \beta}$

b) $\boldsymbol{sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta}$

c) $\boldsymbol{cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta}$

a) $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) =$
$= (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta)\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta +$
$+ sin\ \alpha\ sin\ \beta) = cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sin^2\ \alpha\ sin^2\ \beta =$
$= cos^2\ \alpha\ (1 - sin^2\ \beta) - (1 - cos^2\ \alpha) \cdot sin^2\ \beta =$
$= cos^2\ \alpha - cos^2\ \alpha\ sin^2\ \beta - sin^2\ \beta + cos^2\ \alpha\ sin^2\ \beta =$
$= cos^2\ \alpha - sin^2\ \beta$

b) El primer membre de la igualtat és una diferència de quadrats, després podem factoritzar-lo com una suma per una diferència:

$$\left[sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=}$$

$$= \left[2\ sin\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ sin\ \frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ \beta}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos\ \beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - cos\ \alpha)\ (1 + cos\ \beta)\ (1 + cos\ \alpha)\ (1 - cos\ \beta)} =$$

$$= \sqrt{(1 - cos^2\ \alpha)\ (1 - cos^2\ \beta)} =$$

$$= \sqrt{sin^2\ \alpha \cdot sin^2\ \beta)} = sin\ \alpha\ sin\ \beta$$

(*) Transformem la suma i la diferència en productes, tenint en compte que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha \text{ i } \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta$$

c) Procedim de manera anàloga a l'apartat anterior, però ara:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \text{ i } \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = -\beta$$

$$cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$

$$= \left[cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{-\beta}{2}\right] \cdot \left[-2\ sin\ \frac{\alpha}{2}\ sin\ \frac{-\beta}{2}\right] =$$

$$= \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\ sin\ \frac{\alpha}{2}\ sin\ \frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ \beta}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos\ \beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - cos^2\ \alpha)\ (1 - cos^2\ \beta)} =$$

$$= \sqrt{sin^2\ \alpha \cdot sin^2\ \beta)} = sin\ \alpha\ sin\ \beta$$

NOTA: També podríem haver-ho resolt aplicant l'apartat anterior com segueix:

$$cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$

$$= 1 - sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - 1 + sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$

$$= sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)] \overset{(*)}{=} sin\ \alpha\ sin\ \beta$$

(*) Per l'apartat b).

63. Expressa $\boldsymbol{sin\ 4\alpha}$ **i** $\boldsymbol{cos\ 4\alpha}$ **en funció de** $\boldsymbol{sin\ \alpha}$ **i** $\boldsymbol{cos\ \alpha}$**.**

- $sin\ 4\alpha = sin\ (2 \cdot 2\alpha) = 2\ sin\ \alpha\ cos\ 2\alpha =$
$= 2 \cdot 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha \cdot (cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha) =$
$= 4\ (sin\ \alpha\ cos^3\ \alpha - sin^3\ \alpha\ cos\ \alpha)$
- $cos\ 4\alpha = cos\ (2 \cdot 2\alpha) = cos^2\ 2\alpha - sin^2\ 2\alpha =$
$= (cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha)^2 - (2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha)^2 =$
$= cos^4\ \alpha + sin^4\ \alpha - 2\ cos^2\ \alpha\ sin^2\ \alpha -$

$- 4\ sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha =$

$= cos^4\ \alpha + sin^4\ \alpha - 6\ sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha$

64. Resol els sistemes següents i dóna les solucions corresponents al primer quadrant:

a) $\begin{cases} x + y = 120° \\ sin\ x - sin\ y = 1/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} sin^2\ x + cos^2\ y = 1 \\ cos^2\ x - sin^2\ y = 1 \end{cases}$

Fes $cos^2\ y = 1 - sin^2\ y$ ***i*** $cos^2\ x = 1 - sin^2\ x$.

c) $\begin{cases} sin\ x + cos\ y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$

a) De la segona equació:

$$2\ cos\ \frac{x+y}{2}\ sin\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

Com que:

$$x + y = 120° \rightarrow 2\ cos\ 60°\ sin\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}\ sin\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow sin\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x-y}{2} = 30° \rightarrow x - y = 60°$$

Així: $x + y = 120°$

$x - y = 60°$

$2x = 180° \rightarrow x = 90° \rightarrow y = 30°$

Aleshores la solució és: (90°, 30°)

b) Com que $\left.\begin{matrix} cos^2\ y = 1 - sin^2\ y \\ cos^2\ x = 1 - sin^2\ x \end{matrix}\right\}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{matrix} sin^2\ x + 1 - sin^2\ y = 1 \\ 1 - sin^2\ x - sin^2\ y = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} sin^2\ x - sin^2\ y = 0 \\ -sin^2\ x - sin^2\ y = 1 \end{matrix}\right\}$$

(Sumant ambdues igualtats) $\rightarrow$

$\rightarrow -2\ sin^2\ y = 0 \rightarrow sin\ y = 0 \rightarrow y = 0°$

Substituint en la segona equació (per exemple) del sistema inicial, s'obté:

$cos^2\ x - 0 = 1 \rightarrow cos^2\ x = 1 =$

$$= \begin{cases} cos\ x = 1 \rightarrow x = 0° \\ cos\ x = -1 \rightarrow x = 180° \in 2n \text{ quadrant} \end{cases}$$

Aleshores la solució és: (0°, 0°)

c) $x + y = 90° \rightarrow$ complementaris $\rightarrow sin\ x = cos\ y$

Substituint en la primera equació del sistema:

$cos\ y + cos\ y = 1 \rightarrow 2\ cos\ y = 1 \rightarrow cos\ y =$

$= \frac{1}{2} \rightarrow y = 60° \rightarrow x = 90° - y = 90° - 60° =$

$= 30°$

Aleshores la solució és: (30°, 60°)

65. Demostra que per a qualsevol angle α es verifica:

$$\sqrt{2}\ \boldsymbol{cos} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \boldsymbol{sin}\ \alpha + \boldsymbol{cos}\ \alpha$$

Desenvolupem la primera part de la igualtat:

$$\sqrt{2} \cdot cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(cos\ \frac{\pi}{4}\ cos\ \alpha + sin\ \frac{\pi}{4}\ sin\ \alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sin\ \alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ (cos\ \alpha + sin\ \alpha) =$$

$$= \frac{2}{2}\ (cos\ \alpha + sin\ \alpha) = cos\ \alpha + sin\ \alpha$$

Pàgina 139

66. Demostra que:

$$\boldsymbol{\frac{cos\ x + sin\ x}{cos\ x - sin\ x} - \frac{cos\ x - sin\ x}{cos\ x + sin\ x} = 2\ tg\ 2x}$$

$$\frac{cos\ x + sin\ x}{cos\ x - sin\ x} - \frac{cos\ x - sin\ x}{cos\ x + sin\ x} =$$

$$= \frac{(cos\ x + sin\ x)^2 - (cos\ x - sin\ x)^2}{(cos\ x - sin\ x)^2 - (cos\ x + sin\ x)^2} =$$

$$= \frac{cos^2 x + sin^2 x + 2\, sin\, x\, cos\, x - cos^2 x - sin^2 x + 2\, sin\, x\, cos\, x}{cos^2 x - sin^2 x} =$$

$$= \frac{4\, sin\, x\, cos\, x}{cos^2 x - sin^2 x} \overset{(*)}{=} \frac{4 \cdot (sin\, x\, cos\, x / cos^2 x)}{cos^2 x - sin^2 x / cos^2 x} =$$

$$= \frac{4 \cdot (sin\, x / cos\, x)}{1 - (sin^2 x / cos^2 x)} = \frac{4 \cdot tg\, x}{1 - tg^2 x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x} = 2 \cdot tg\, 2x$$

(*) Dividim numerador i denominador entre $cos^2\, x$.

67. Simplifica l'expressió:

$$\mathbf{2\, tg\, x\, cos^2 \frac{x}{2} - sin\, x}$$

$$2\, tg\, x\, cos^2 \frac{x}{2} - sin\, x =$$

$$= 2 \cdot \frac{sin\, x}{cos\, x} \left(\frac{1 + cos\, x}{2} \right) - sin\, x =$$

$$= \frac{sin\, x\, (1 + cos\, x)}{cos\, x} - sin\, x =$$

$$= sin\, x \left(\frac{1 + cos\, x}{cos\, x} - 1 \right) =$$

$$= sin\, x \left(\frac{1 + cos\, x - cos\, x}{cos\, x} \right) = sin\, x \cdot \left(\frac{1}{cos\, x} \right) = tg\, x$$

Qüestions teòriques

68. Quina relació existeix entre les raons trigonomètriques dels angles que mesuren $\frac{\pi}{5}$ i $\frac{4\pi}{5}$ radians?

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi \rightarrow$$

$\rightarrow$ són complementaris; per tant:

$$sin\, \frac{\pi}{5} = sin \left(\pi - \frac{4\pi}{5} \right) = sin\, \frac{4\pi}{5}$$

$$cos\, \frac{\pi}{5} = -cos\, \frac{4\pi}{5};\; tg\, \frac{\pi}{5} = -tg\, \frac{4\pi}{5}$$

69. Relaciona aquestes expressions amb les raons trigonomètriques de l'angle α:

a) $sin\, (\pi - \alpha)$; $cos\, (\pi - \alpha)$; $tg\, (\pi - \alpha)$

b) $sin\, (\pi + \alpha)$; $cos\, (\pi + \alpha)$; $tg\, (\pi + \alpha)$

c) $sin\, (2\pi - \alpha)$; $cos\, (2\pi - \alpha)$; $tg\, (2\pi - \alpha)$

a) $\left\{ \begin{array}{l} sin\, (\pi - \alpha) = sin\, \alpha \\ cos\, (\pi - \alpha) = -cos\, \alpha \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow tg\, (\pi - \alpha) = -tg\, \alpha$

b) $\left\{ \begin{array}{l} sin\, (\pi + \alpha) = -sin\, \alpha \\ cos\, (\pi + \alpha) = -cos\, \alpha \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow tg\, (\pi + \alpha) = tg\, \alpha$

c) $\left\{ \begin{array}{l} sin\, (2\pi - \alpha) = -sin\, \alpha \\ cos\, (2\pi - \alpha) = cos\, \alpha \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow tg\, (2\pi - \alpha) = -tg\, \alpha$

70. Expressa $A(x)$ en funció de $sin\, x$ i $cos\, x$:

a) $A(x) = sin\, (-x) - sin\, (\pi - x)$

b) $A(x) = cos\, (-x) + cos\, (\pi + x)$

c) $A(x) = sin\, (\pi + x) + cos\, (2\pi - x)$

a) $A\, (x) = sin\, (-x) - sin\, (\pi - x) =$
$= -sin\, x - sin\, x = -2\, sin\, x$

b) $A\, (x) = cos\, (-x) + cos\, (\pi + x) =$
$= cos\, x + (-cos\, x) = 0$

c) $A\, (x) = sin\, (\pi + x) + cos\, (2\pi - x) =$
$= -sin\, x + cos\, x$

71. Demostra que si α, β i γ són els tres angles d'un triangle, es verifica:

a) $sin\, (\alpha + \beta) - sin\, \gamma = 0$

b) $cos\, (\alpha + \beta) + cos\, \gamma = 0$

c) $tg\, (\alpha + \beta) + tg\, \gamma = 0$

Tingues en compte que $\alpha + \beta = 180° - \gamma$, i les relacions que existeixen entre les raons trigonomètriques dels angles suplementaris.

Com que en un triangle $\alpha + \beta + \gamma =$
$= 180° \rightarrow \alpha + \beta = 180° - \gamma$, aleshores:

a) $sin\, (\alpha + \beta) = sin\, (180° - \gamma) =$
$= sin\, \gamma \rightarrow sin\, (\alpha + \beta) - sin\, \gamma = 0$

b) $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ (180° - \gamma) =$
$= -cos\ \gamma \rightarrow cos\ (\alpha + \beta) + cos\ \gamma = 0$

c) $tg\ (\alpha + \beta) = tg\ (180° - \gamma) =$
$= -tg\ \gamma \rightarrow tg\ (\alpha + \beta) + tg\ \gamma = 0$

72. Demostra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, es verifica:

$tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ \gamma$

Fes $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ i desenvolupa:

$tg\ (\alpha + \beta) = tg\ (180° - \gamma)$.

Si $\alpha + \beta + \gamma = 180° \rightarrow \alpha + \beta = 180° - \gamma \rightarrow$
$\rightarrow tg\ (\alpha + \beta) = tg\ (180° - \gamma) = -tg\ \gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\ \gamma = -tg\ (\alpha + \beta)$

Així, substituint:

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma \overset{(*)}{=} tg\,\alpha + tg\,\beta - tg\,(\alpha + \beta) =$$

$$= tg\,\alpha + tg\,\beta - \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta} =$$

$$= \frac{(tg\,\alpha - tg^2\,\alpha\ tg\,\beta) + (tg\,\beta - tg\,\alpha\ tg^2\,\beta) - (tg\,\alpha + tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta} =$$

$$= \frac{-tg^2\,\alpha\ tg\,\beta - tg\,\alpha\ tg^2\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta} =$$

= (traient factor comú) =

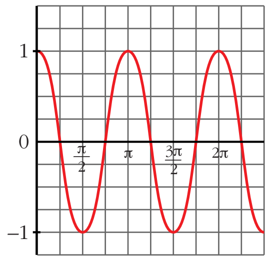
$$= \frac{-tg\,\alpha\ tg\,\beta\ (tg\,\alpha\ tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta} =$$

$= -tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,(\alpha + \beta) =$
$= tg\,\alpha \cdot tg\,\beta\ [-tg\,(\alpha + \beta)] \overset{(*)}{=} tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma$

(*) $tg\ \gamma = -tg\ (\alpha + \beta)$

73. Fes, amb la calculadora, una taula de valors de la funció $y = cos\ 2x$, donant a x valors compresos entre 0 i 2π radians i representa-la gràficament.

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	2π
$y = cos\ 2x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	0	0

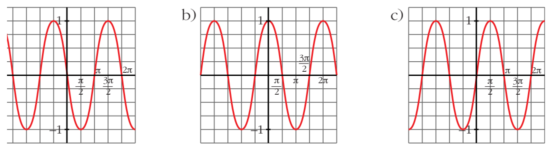


74. Representa les funcions:

a) $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



Per aprofundir

75. Resol els sistemes següents donant les solucions corresponents al primer quadrant.

a) $\begin{cases} sin\ x + sin\ y = \sqrt{3} \\ cos\ x + cos\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} sin^2\ x + cos^2\ y = 3/4 \\ cos^2\ x - sin^2\ y = 1/4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} cos\ (x + y) = 1/2 \\ sin\ (x - y) = 1/2 \end{cases}$

a) Aïllant en la segona equació:

$\left.\begin{array}{l} \cos x = 1 - \cos y \ ^{(*)} \\ \text{Com que } \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \end{array}\right\}$ llavors:

$\sin x = \sqrt{1 - (1 - \cos y)^2} =$

$= \sqrt{1 - 1 - \cos^2 y + 2\cos y} =$

$= \sqrt{2\cos y - \cos^2 y}$

I, substituint en la primera equació, es té:

$\sin x + \sin y = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{2\cos y - \cos^2 y} +$

$+ \sin y = \sqrt{3} \rightarrow \sin y =$

$= \sqrt{3} - \sqrt{2\cos y - \cos^2 y}$

Elevant al quadrat:

$\sin^2 y =$

$= 3 + (2\cos y - \cos^2 y) - 2\sqrt{3\,(2\cos y - \cos^2 y)}$

$\sin^2 y + \cos^2 y - 2\cos y - 3 =$

$= -2\sqrt{3\,(2\cos y - \cos^2 y)}$

$1 - 2\cos y - 3 = -2\sqrt{3\,(2\cos y - \cos^2 y)}$

$-2\,(1 + \cos y) = -2\sqrt{3\,(2\cos y - \cos^2 y)}$

Simplifiquem i tornem a elevar al quadrat:

$(1 + \cos y)^2 = 3\,(2\cos y - \cos^2 y) \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos^2 y + 2\cos y = 6\cos y - 3\cos^2 y \rightarrow$

$\rightarrow 4\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0 \rightarrow \cos y =$

$= \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \dfrac{1}{2} \rightarrow y = 60°$

Substituïm en $^{(*)}$, es té:

$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = 60°$

b) $\left.\begin{array}{r} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$ Sumant:

$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y - \sin^2 y = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos^2 y - \sin^2 y = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2\cos^2 y = 1 \rightarrow \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \rightarrow \cos y =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = 45°$

(Només considerem les solucions del primer quadrant).

Substituint en la primera equació:

$\sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \rightarrow \sin^2 x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \sin^2 x = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} \rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \sin x = \pm\dfrac{1}{2}$

Ens quedem amb la solució positiva, per tractar-se del primer quadrant. Així:

$\sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = 30°$

Aleshores la solució és: (30°, 45°)

c) $\left.\begin{array}{r} \text{Com que } x, y \in \text{1r quadrant} \\ \text{i a més } \cos(x + y) > 0 \\ \sin(x - y) > 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x + y \in \text{1r quadrant} \\ x - y \in \text{1r quadrant} \end{cases}$

Tenint això en compte:

$\cos(x + y) = \dfrac{1}{2} \rightarrow x + y = 60°$

$\sin(x - y) = \dfrac{1}{2} \rightarrow x - y = 30°$

(Sumem ambdues equacions)

$2x = 90° \rightarrow x = 45°$

Substituint en la primera equació i aïllant:

$y = 60° - x = 60° - 45° = 15°$

La solució és, per tant: (45°, 15°)

76. Resol:

a) $\sin 3x - \sin x \cos 2x = 0$

b) $\cos 3x - 2\cos(\pi - x) = 0$

c) $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$

Expressa cos 3x en funció de sin x i cos x fent cos 3x = cos (2x + x).

a) Per a l'exercici 35, a): $\sin 3x =$

$= 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$.

Ja que:

$3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - \sin x\,(\cos^2 x - \sin^2 x) =$

$= 0 \rightarrow 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - \sin x\cos^2 x -$

$$- \sin^3 x = 0 \rightarrow 2 \sin^3 x - 2 \sin x \cos^2 x = 0 \rightarrow \sin x (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 90° \rightarrow x_3 = 45° \\ 2x = 270° \rightarrow x_4 = 135° \\ 2x = 450° \rightarrow x_5 = 225° \\ 2x = 630° \rightarrow x_6 = 315° \end{cases}$$

Les solucions (totes vàlides) es poden expressar com:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

En què x_1 engloba les dues primeres solucions obtingudes i x_2 les quatre restants.

b) $\cos (\pi - x) = -\cos x$

$\cos 3x = \cos (2x + x) =$

$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x =$

$= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin^2 x) =$

$= \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$

Així, substituint en l'equació:

$\cos x (1 - 4 \sin^2 x) - 2 (-\cos x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x (1 - 4 \sin^2 x) + 2 \cos x =$

$= 0 \rightarrow \cos x (1 - 4 \sin^2 x + 2) =$

$= 0 \rightarrow \cos x (3 - 4 \cos x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ \sin^2 x = \dfrac{3}{4} \rightarrow \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 60°, \\ \qquad x_4 = 120°,\ x_5 = 240°,\ x_6 = 300° \end{cases}$$

Totes les solucions són vàlides i les podem agrupar tot expressant-les com:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 60° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{3} + k\,\pi \\ x_3 = 120° + k \cdot 180° = \dfrac{2\pi}{3} + k\,\pi \end{array}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

c) Utilitzant els resultats obtinguts en l'exercici 36 b), per a $\cos 3x$ i substituint en l'equació, s'obté:

$\cos x (1 - 4 \sin^2 x) + 2 \sin x \cos x - \cos x =$

$= 0 \rightarrow \cos x (1 - 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1) =$

$= 0 \rightarrow \cos x (-4 \sin^2 x + 2 \sin x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ 2 \sin^2 x - \sin x = \sin x (2 \sin x - 1) = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0° \\ x_4 = 180° \end{cases} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_5 = 30° \\ x_6 = 150° \end{cases} \end{cases}$$

Les solucions queden, doncs, així:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot \dfrac{\pi}{2} = k \cdot 90° \\ x_2 = \dfrac{\pi}{6} + 2k \cdot \pi = 30° + k \cdot 360° \\ x_3 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k \cdot \pi = 150° + k \cdot 360° \end{array}\right\}$$

} amb $k \in \mathbb{Z}$

En què x_1 engloba les quatre primeres solucions.

77. Demostra que:

a) $\boldsymbol{\sin x = \dfrac{2\,tg\,x/2}{1 + tg^2\,x/2}}$

b) $\boldsymbol{\cos x = \dfrac{1 - tg^2\,x/2}{1 + tg^2\,x/2}}$

c) $\boldsymbol{tg\,x = \dfrac{2\,tg\,x/2}{1 - tg^2\,x/2}}$

a) Desenvolupem i operem en el segon membre de la igualtat:

$$\frac{2\,tg\,(x/2)}{1 + tg^2\,(x/2)} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{2}{1 + \cos x}} =$$

$$= (1 + cos\ x) = \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}$$

$$= \sqrt{(1 + cos\ x)^2\ \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \sqrt{(1 + cos\ x)\ (1 - cos\ x)} =$$

$$= \sqrt{1 - cos^2\ x} = \sqrt{sin^2\ x} = sin\ x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)} = \frac{1 - \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}{1 + \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \frac{\frac{1 + cos\ x - 1 + cos\ x}{1 + cos\ x}}{\frac{1 + cos\ x + 1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{2\ cos\ x}{2} = cos\ x$$

c) $$\frac{2\ tg\ (x/2)}{1 - tg^2\ (x/2)} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{1 - \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{\frac{1 + cos\ x - 1 + cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{\frac{2\ cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{1 + cos\ x}{cos\ x}\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

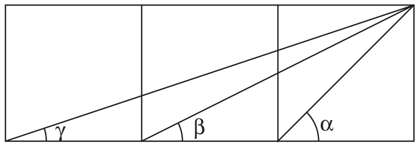
$$= \frac{1}{cos\ x} \cdot \sqrt{(1 + cos\ x)(1 - cos\ x)} =$$

$$= \frac{1}{cos\ x}\ \sqrt{1 - cos^2\ x} =$$

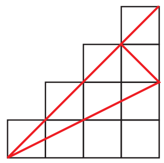
$$= \frac{1}{cos\ x} \cdot \sqrt{sin^2\ x} = \frac{1}{cos\ x} \cdot sin\ x = tg\ x$$

Per pensar una mica més

78. Demostra que, en la figura següent, $\alpha = \beta + \gamma$.



a) Pots realitzar la demostració recorrent a la fórmula de la tangent d'una suma.
b) Hi ha una possible demostració, més senzilla i elegant que l'anterior, reconeixent els angles α, β i γ en la figura següent:



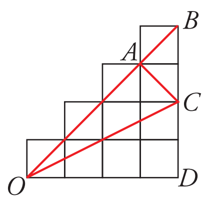
a) $$tg\ (\beta + \gamma) = \frac{tg\ \beta + tg\ \gamma}{1 - tg\ \beta\ tg\ \gamma} = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} =$$

$$= \frac{5/6}{1 - 1/6} = \frac{5/6}{5/6} = 1$$

$tg\ \alpha = 1$

Així veiem que $tg\ (\beta + \gamma) = tg\ \alpha$
Com que $\alpha, \beta, \gamma \in$ 1r quadrant $\Big\}\ \beta + \gamma = \alpha$

b) $\alpha = \widehat{BOD}$. N'hi ha prou d'observar que es tracta d'un dels angles aguts del triangle rectangle que es forma amb la diagonal d'un quadrat.



$\beta = \widehat{COD}$, per ser l'angle agut menor d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren quatre i dues unitats; igual (per semblança) al format per catets de dues i una unitat.
$\gamma = \widehat{AOC}$, per tant, prenent les diagonals dels quadrats petits per unitats, es tracta

de l'angle menor del triangle rectangle de catets tres i una unitats (*OA* i *AC* respectivament).

Així, podem observar fàcilment en el dibuix que $\alpha = \beta + \gamma$, ja que:

$\widehat{BOD} = \widehat{AOD} = \widehat{AOC} + \widehat{COD}$

Per acabar

Resol tu

A més de la Lluna i del Sol, els objectes celestes que se'ns presenten amb més lluentor són planetes: Venus, Mart i Júpiter. Després d'aquests, l'astre més brillant és l'estel Sírius. Observant-lo amb sis mesos de diferència, presenta una paral·laxi de 0,72". A quina distància es troba?

Com hem vist:

$$d = \frac{150\,000\,000}{\sin(\alpha/2)}$$

Si $\alpha = 0{,}72$, quedaria:

$$d = \frac{150\,000\,000}{\sin(0{,}72/2)} = 8{,}6 \text{ a } 10^{13} \text{ km}$$

$\simeq$ 9 anys llum.