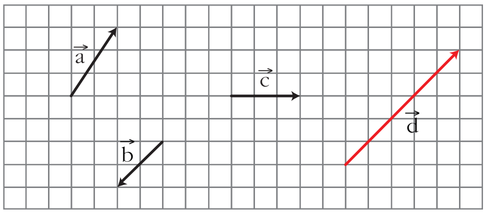
Pàgina 146

Multiplica vectors per nombres

Copia en paper quadriculat els vectors següents:



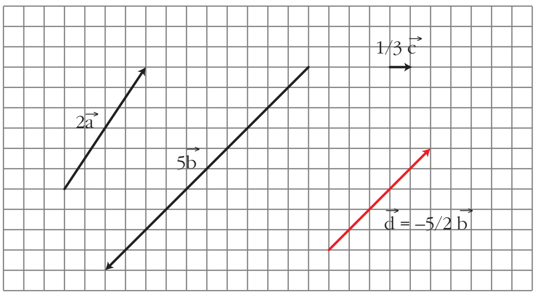
Representa:

a) $2\vec{a}$; b) $5\vec{b}$; c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

Expressa el vector $\vec{d}$ com a producte d'un dels vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ o $\vec{c}$ per un nombre.

Designa els vectors anteriors mitjançant parells de nombres. Per exemple: $\vec{a} = (2, 3)$.

Repeteix amb parells de nombres les operacions que has efectuat anteriorment.



- $\vec{d} = -2{,}5\,\vec{b} = \frac{-5}{2}\vec{b}$
- $\vec{a}(2, 3)$

$\vec{b}\,(-2, -2)$

$\vec{c}\,(3, 0)$

$\vec{d}\,(5, 5)$

- $2\vec{a} = 2(2, 3) = (4, 6)$

$5\vec{b} = 5(-2, -2) = (-10, -10)$

$\frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(3, 0) = (1, 0)$

Pàgina 147

Suma vectors

Efectua gràficament:

a) $\vec{a} + \vec{c}$; b) $\vec{b} + \vec{c}$; c) $\vec{b} + \vec{a}$; d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

sent $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ els de l'exercici anterior.

Realitza les mateixes sumes amb parells de nombres. Per exemple:

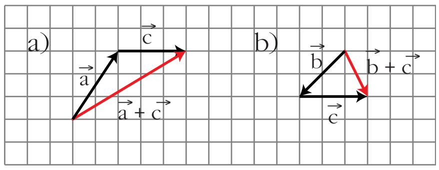
$\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$

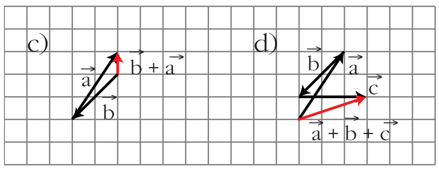
a) $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$

b) $\vec{b} + \vec{c} = (-2, -2) + (3, 0) = (1, -2)$

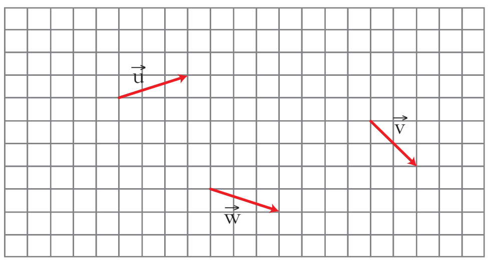
c) $\vec{b} + \vec{a} = (-2, -2) + (2, 3) = (0, 1)$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, 3) + (-2, -2) + (3, 0) =$
$= (3, 1)$





Combina operacions



Amb els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ efectua les operacions següents gràficament i mitjançant parells de nombres:

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$; b) $-\vec{v} + 5\vec{w}$; c) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w}$

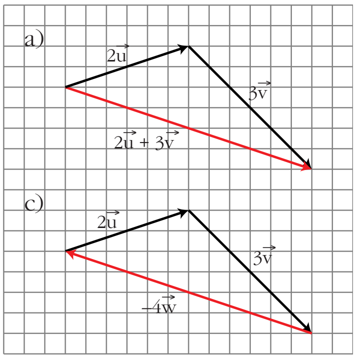
Com designaries el vector resultant d'aquesta darrera operació?

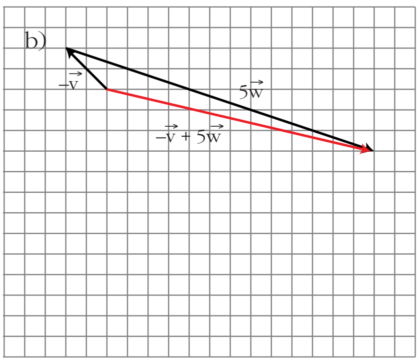
a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(3, 1) + 3(2, -2) = (6, 2) +$
$+ (6, -6) = (12, -4)$

b) $-\vec{v} + 5\vec{w} = -(2, -2) + 5(3, -1) =$
$= (-2, 2) + (15, -5) = (13, -3)$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w} = 2(3, 1) + 3(2, -2) -$
$- 4(3, -1) = (6, 2) + (6, -6) + (-12, 4) =$
$= (0, 0)$

Vector nul: $\vec{0}$





Pàgina 151

1. Si $\vec{u}(-2, 5)$ i $\vec{v}(1, -4)$ són les coordenades de dos vectors respecte d'una base, troba les coordenades respecte de la mateixa base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$; b) $\vec{u} - \vec{v}$; c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$;
d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) =$
$= (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) =$
$= (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3\ (-2, 5) + (1, -4) =$

$= (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2\ (1, -4) =$

$= \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

Pàgina 153

2. Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ compleixen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{2}{3}$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 30°$. Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$ c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$
d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ e) $\vec{u} \cdot \vec{u}$ f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$
g) *proj*$_{\vec{u}}$ $(\vec{v})$ h) *proj*$_{\vec{v}}$ $(\vec{u})$ i) *proj*$_{\vec{v}}$ $(\vec{u} + \vec{v})$

a) $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 4 \cdot \frac{3}{2}\ cos\ 30° =$

$= 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\widehat{(\vec{v}, \vec{v})} = 3\sqrt{3}$

c) $|-\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(180° - 30°) =$

$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\ 150° = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - cos\ 30° =$

$= 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\ 3\sqrt{3}$

d) $|3\vec{u}| \cdot |-5\vec{v}| \cdot cos(180° - 30°) =$

$3|\vec{u}| \cdot 5|\vec{v}| \cdot -cos\ 30°) = 3 \cdot 4 \cdot 5\ \frac{3}{2} \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= -90\frac{\sqrt{3}}{2} = -45\sqrt{3}$

e) $|\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = 4 \cdot 4 \cdot cos\ 0° =$
$= 16 \cdot 1 = 16$

f) $|\vec{v}| \cdot |-\vec{v}| \cdot cos(180° - 0°) =$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot - \cos 0^\circ = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot -1 = -\frac{9}{4}$

g) $\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

h) $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3\sqrt{3}}{3/2} = 2\sqrt{3}$

i) $\frac{(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}}{3/2} = \frac{3\sqrt{3} + 9/4}{3/2} =$

$= \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{v}) =$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 0^\circ = \frac{9}{4} = \frac{7,45}{3/2} = 4,96$

3. Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ i $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, esbrina l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. (Utilitza la calculadora). Troba $proj_{\vec{u}}(\vec{v})$ i $proj_{\vec{v}}(\vec{u})$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$-2 = 3 \cdot 5 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$-2 = 15 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$\frac{-2}{15} = \cos(\vec{u} \cdot \vec{v})$

$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 97^\circ\ 39'\ 44'\ 12'' \simeq 97^\circ$

$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{-2}{3}$

$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-2}{5}$

4. Troba $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ i $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ sabent que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 120^\circ$.

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$

$= 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot 5 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{15}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) =$

$= 3 \cdot 3 \cdot \cos 0^\circ = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

$\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = 25 - \left(-\frac{15}{2}\right) =$

$= \frac{65}{2}$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{v}}) = 5 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ =$

$= 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$

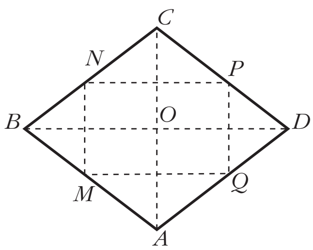
$\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{-15}{2}$

Pàgina 158

Per practicar

Els vectors i les seves operacions

5. La figura *ABCD* és un rombe.



Compara el mòdul, la direcció i el sentit dels parells de vectors següents:
a) $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$; b) $\vec{AQ}$ i $\vec{BC}$; c) $\vec{BM}$ i $\vec{PD}$; d) $\vec{OC}$ i $\vec{OD}$

a) $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$

Tenen distinta direcció.

b) $|\vec{AQ}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}|$

$\left.\begin{array}{l} \text{Direcció de } \vec{AQ} = \text{direcció de } \vec{BC} \\ \text{Sentit de } \vec{AQ} = \text{sentit de } \vec{BC} \end{array}\right\}$

$\rightarrow \vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

c) Els dos vectors tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit, així: $\vec{BM}$ i $\vec{PD}$

d) $|\vec{OC}| < |\vec{OD}|$

Les seves direccions són perpendiculars $\Rightarrow$ $\vec{OC} \perp \vec{OD}$

6. Busca en la figura de l'exercici 5 tres vectors iguals a $\vec{NC}$ i uns altres tres iguals a $\vec{MQ}$.

$\vec{NC} = \vec{BN} = \vec{AQ} = \vec{QD}$

$\vec{MQ} = \vec{NP} = \vec{BO} = \vec{OD}$

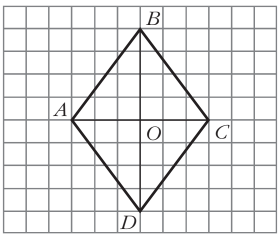
7. Substitueix els punts suspensius per un nombre, de manera que aquestes igualtats siguin vertaderes per al rombe de l'exercici 5:
a) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CP}$; b) $\overrightarrow{MN} = \dots\ \overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{OC} = \dots\ \overrightarrow{OA}$; d) $\overrightarrow{NB} = \dots\ \overrightarrow{BC}$

a) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CP}$; b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

c) $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$; d) $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

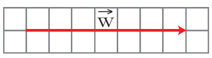
8. Completa les igualtats següents amb les lletres que falten perquè, en el rombe de l'exercici 5, siguin vertaderes:
a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$; b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{\dots C} = \overrightarrow{MC}$;
c) $\overrightarrow{M\dots} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{MQ}$; d) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\dots} = \overrightarrow{AO}$
a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$; b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MC}$;
c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{MQ}$; d) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO}$

9. Observa el rombe de la figura i calcula:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$;
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$



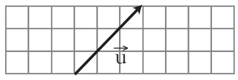
Expressa els resultats utilitzant els vèrtexs del rombe.
a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$; e) $\overrightarrow{AC}$; f) $2\overrightarrow{DC}$

10. Considera el vector $\vec{w}$:

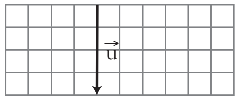


Dibuixa en cada un d'aquests casos un vector $\vec{v}$ que sumat amb $\vec{u}$ doni com a resultat $\vec{w}$:

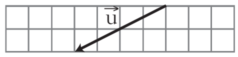
a)



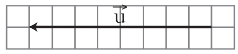
b)

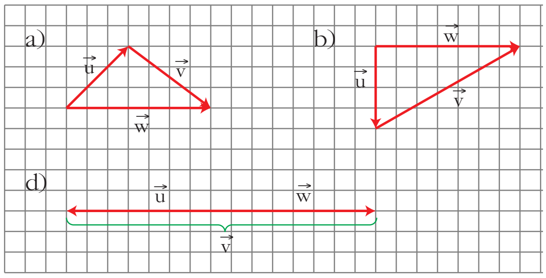


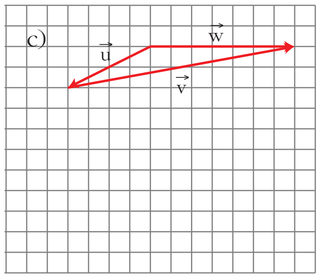
c)



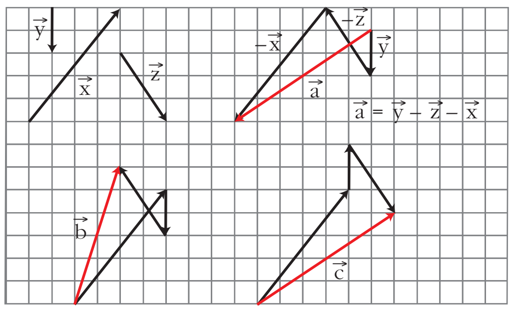
d)







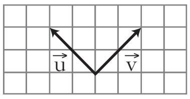
11. Hem obtingut els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ operant amb els vectors $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.
Quines operacions hem fet en cada cas?



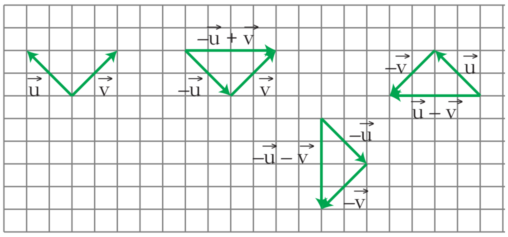
$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$
$\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$

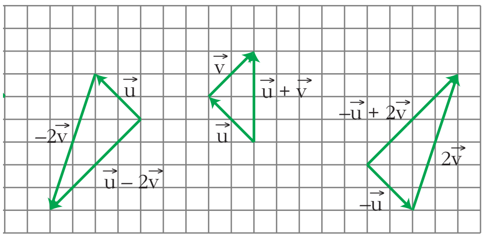
Bases i coordenades

12. A la vista de la figura, dibuixa els vectors:
$-\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $-\vec{u} - \vec{v}$
$-\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$



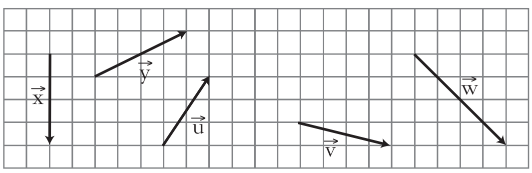
Si prenem com a base $(\vec{u}, \vec{v})$, quines són les coordenades dels vectors que has dibuixat?





$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$
$\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$
$\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$
$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$
$-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$
$\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$

13. Escriu els vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ com a combinació lineal de $\vec{x}$ i $\vec{y}$.



Quines seran les coordenades d'aquests vectors respecte a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$?

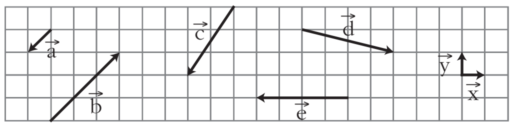
$\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, aleshores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ respecte de $B(\vec{x}, \vec{y})$

$\vec{v} = -\frac{3}{4}\vec{x} + \vec{y}$, aleshores $\vec{v} = \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ respecte de $B(\vec{x}, \vec{y})$

$\vec{w} = \frac{3}{4}\vec{x} + \vec{y}$, aleshores $\vec{w} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ respecte de $B(\vec{x}, \vec{y})$

Pàgina 159

14. Escriu les coordenades dels vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ respecte a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.



$\vec{a}(-1, -1)$
$\vec{b}(3, 3)$
$\vec{c}\ (-2, -3)$
$\vec{d}(4, -1)$
$\vec{e}(-4, 0)$

15. Si les coordenades dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són $(3, -5)$ i $(-2, 1)$, obtén les coordenades de:

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ b) $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$

c) $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2(3, -5) + \frac{1}{2}\left(-2, 1\right) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{11}{2}\right)$

b) $-(3, -5) - \frac{3}{5}(-2, 1) = (-3, 15) + \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \left(\frac{-9}{5}, \frac{72}{5}\right)$

c) $\frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) -$

$- (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) =$

$= \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

16. Troba el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, essent $\vec{a}(-1, 3)$ i $\vec{c}(7, -2)$.

$(7, -2) = 3\,(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 7 = -3 - 1/2b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - 1/2b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$\vec{b}(-20, 22)$

17. Troba les coordenades d'un vector $\vec{v}$ tal que: $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, essent $\vec{a}(1, -7)$ i $\vec{u}\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

$(1, -7) = 3\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right) - 2(v_1, v_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 1 = 5/2 - 2v_1 \rightarrow v_1 = 3/4 \\ -7 = 2 - 2v_2 \rightarrow v_2 = 9/2 \end{cases}$$

$\vec{v}\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$

18. Donats els vectors $\vec{a}$ (3, –2), $\vec{b}(-1, 2)$ i $\vec{c}(0, -5)$, calcula m i n de manera que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$(0, -5) = m(3, -2) + n\,(-1, 2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolem el sistema:

Aïllem en la primera equació $n = 3m$ i substituïm en la segona:

$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow$

$m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$

19. Expressa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ com a combinació lineal de $\vec{b}(3, -2)$ i $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$. Calcula m i n tals que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolc el sistema per reducció (per exemple). Per això, multiplico la segona equació per 8 (en ambdós membres) i sumo membre a membre les dues equacions.

$$\begin{array}{l} -1 = \quad 3m + 4n \\ \underline{-64 = -16m - 4n} \\ -65 = -13m \end{array} \rightarrow m = \frac{-65}{-13} = \frac{65}{13} = 5$$

Substitueixo en una de les equacions i aïllo n:

$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot 5 + 4n \rightarrow$
$-1 = 15 + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = \frac{-16}{4}$
$= -4$

Així, podem dir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

20. Quins dels parells de vectors següents formen una base?

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-3, 1)$

b) $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

c) $\vec{u}(5, -4)$, $\vec{v}(5, 4)$

a) No, ja que tenen la mateixa direcció ($\vec{u} = -\vec{v}$).

b) No, per la mateixa raó ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

c) Sí, tenen distinta direcció ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ per a qualsevol k). Basta representar-los gràficament per comprovar-ho.

Producte escalar. Mòdul i angle

21. Donats els vectors $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$ calcula:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$ b) $\vec{x} \cdot \vec{z}$ c) $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 = 0 - 6 = -6$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 0 + 12 = 12$

22. Troba el mòdul de cada un dels vectors següents:

$\vec{u}(3, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$ $\vec{w}(-8, -6)$

$\vec{z}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $\vec{t}(5, 0)$ $\vec{r}(1, 1)$

$\vec{u}(3, 2) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$\vec{v}(-2, 3) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\vec{w}(-8, -6) \rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} =$

$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

$\vec{z}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow |\vec{z}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$

$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

$\vec{t}(5, 0) \rightarrow |\vec{t}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{r}(1, 1) \rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

23. Calcula *k* per tal que el producte $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sigui igual a 0 en els casos següents:

a) $\vec{u}(6, k)$ $\vec{v}(-1, 3)$

b) $\vec{u}(\frac{1}{5}, -2)$ $\vec{v}(k, 3)$

c) $\vec{u}(-3, -2)$ $\vec{v}(5, k)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, k) \cdot (-1, 3) = 0$

$6 \cdot (-1) + k \cdot 3 = 0$

$-6 + 3k = 0$

$3k = 6$

$k = \frac{6}{3}$

$k = 2$

b) $\vec{u}(\frac{1}{5}, -2)$ $\vec{v}(k, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = 0$

$\frac{1}{5}k + (-2) \cdot 3 = 0$

$\frac{1}{5}k + -6 = 0$

$\frac{1}{5}\ k = 6$

$k = \frac{6}{1/5}$

$k = 30$

c) $\vec{u}(-3, -2)$ $\vec{v}(5, k)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = 0$

$(-3) \cdot 5 + (-2) \cdot k = 0$

$-15 - 2k = 0$

$-2k = 15$

$k = \frac{15}{-2}$

24. Troba el valor de *m* per tal que el mòdul del vector $\vec{u}(\frac{3}{5}, m)$ sigui igual a 1.

$\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$

$|\vec{u}| = 1$

$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2} = 1$

$\left(\sqrt{\frac{9}{25} + m^2}\right)^2 = 1$

$\frac{9}{25} + m^2 = 1$

$m^2 = 1 - \frac{9}{25}$

$m^2 = \frac{16}{25}$

$m = \sqrt{\frac{16}{25}}$

$m = \frac{4}{5}$

Producte escalar

25. Donats $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ i $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$; b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$; d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) Troba primer les coordenades de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.

c) Efectua $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultat (un nombre) pel vector $\vec{w}$. N'obtindràs un vector.

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) =$
$= (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$
$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) =$
$= 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l}\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16\\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13\end{array}\right\}$
$\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) =$
$= 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$
$(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$
$\vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

26. Calcula x, de manera que el producte escalar de $\vec{a}(3, -5)$ i $\vec{b}(x, 2)$ sigui igual a 7. Quin angle formen els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$?

$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{17}{3}$

$\vec{a}(3, -5)$

$\vec{b}\left(\dfrac{17}{3}, 2\right)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

$|\vec{b}| = \sqrt{\left(\dfrac{17}{3}\right) + 2^2} = \sqrt{\dfrac{289}{9} + 4} = \sqrt{\dfrac{325}{9}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 7$

$\sqrt{34} \cdot \sqrt{\dfrac{325}{9}}\, cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 7$

$cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{7}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{\dfrac{325}{9}}} = \dfrac{7}{\sqrt{\dfrac{11\,050}{9}}} =$
$= 0{,}20$

$cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 78^\circ\ 28'\ 34{,}6'' \simeq 78^\circ$

27. Donat el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de manera que:

a) $\vec{u}$ sigui ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El mòdul de $\vec{u}$ sigui igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -20 - 2k = 0 \Rightarrow k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \Rightarrow$
$\Rightarrow 25 + k^2 = 34 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$

Hi ha, doncs, dues solucions.

28. Troba l'angle que formen els parells de vectors següents:

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$; b) $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$;

c) $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\dfrac{1}{2}, -3\right)$

a) Utilitzem les dues expressions per calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 2\,(-5) = -7$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$
$= \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Igualant les dues expressions, es té:

$-7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot cos\,(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow$

$\rightarrow cos\,(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0{,}38$

Així: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112^\circ\ 22'\ 48''$

b) Aïllant directament en la definició:

$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \rightarrow$

$\rightarrow cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} =$

$$= \frac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = 0$$

d'on: $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$

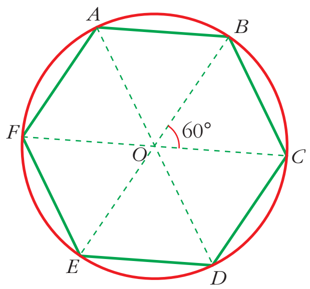
(basta veure que $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$)

c) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1/2 - 18}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{37/2}} =$

$$= \frac{-37/2}{(37\sqrt{2})/2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Així: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$

29. En una circumferència de centre *O* i de radi 2 cm, s'inscriu un hexàgon de vèrtexs *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.
Calcula els productes:
a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$; b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$; c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$; d) $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$;



a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})$

$= 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° =$

$= 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(*) *OAB* és un triangle equilàter, així:

$|\vec{AB}| = |\vec{OA}| = 2$

Raonem igual per $|\vec{ED}|$.

d) $\vec{BC} = -\vec{EF}$ (mateix mòdul, mateixa direcció i sentit oposat)

Així: $\vec{BC} \cdot \vec{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180° =$

$= 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

30. Donat el vector $\vec{u}(6, -8)$, determina:
a) Els vectors unitaris (mòdul 1) de la mateixa direcció que $\vec{u}$.
b) Els vectors ortogonals a $\vec{u}$ que tinguin el mateix mòdul que $\vec{u}$.
c) Els vectors unitaris i ortogonals a $\vec{u}$.
Mira el problema resolt núm. 4.

a) Si $\vec{v}$ té la mateixa direcció que $\vec{u}$, aleshores:

O bé $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}_1}) = 0°$

O bé $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}_2}) = 180°$

• En el primer cas, si l'angle que formen és 0°, aleshores:

$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 6x - 8y = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 0° \rightarrow$

$\rightarrow 6x - 8y = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \text{ . } 6x - 8y = 10$

• Per altre costat, com que $|\vec{v}_1| = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Resolem el sistema:

$$x = \frac{10 + 8y}{6} = \frac{5 + 4y}{3}$$

Que, substituint en la segona equació, queda:

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{25 + 16y^2 + 40y}{9} + y^2 = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow 25 + 16y^2 + 40y + 9y^2 = 9 \rightarrow$

$25y^2 + 40y + 16 = 0$

$$y = \frac{-40 \pm \sqrt{1\,600 - 1\,600}}{50} = \frac{-4}{5}$$

Calculem ara x:

$$x = \frac{5 + 4y}{3} = \frac{5 + 4 \cdot (-4/5)}{3} = \frac{3}{5}$$

Així: $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

• En el segon cas, és a dir, si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}_2}) = 180°$, aleshores ha de passar que $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_1$ formen 180°, és a dir, que siguin oposats.

Així: $\vec{v}_2\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow (x, y) \cdot (6, -8) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \frac{8y}{6} = \frac{4}{3}y$

$|\vec{v}| = |\vec{u}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$

$\left(\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = \pm 6$

- Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{4}{3}6 = 8 \rightarrow \vec{v}_1(8, 6)$
- Si $y^2 = -6 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow \vec{v}_2(-8, -6)$

c) $\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \frac{8y}{6} = \frac{4y}{6} \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left(\frac{4y}{6}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \frac{25}{9} \rightarrow y = \pm\frac{3}{5}$

- Si $y_1 = \frac{3}{5} \rightarrow x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
- Si $y_2 = \frac{-3}{5} \rightarrow x_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-4}{5}$

Així, $\vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \vec{v}_2\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

Pàgina 160

Per resoldre

31. Troba les coordenades d'un vector $\vec{v}(x, y)$, ortogonal a $\vec{u}(3, 4)$ i que mesuri el doble que $\vec{u}$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| = 2|\vec{u}| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{9 + 16} = \\ = 2\sqrt{25} = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\}$

Resolem el sistema:

Aïllem x en la primera equació i substituïm en la segona:

$x = \frac{-4}{3}y \rightarrow \left(\frac{-4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 +$

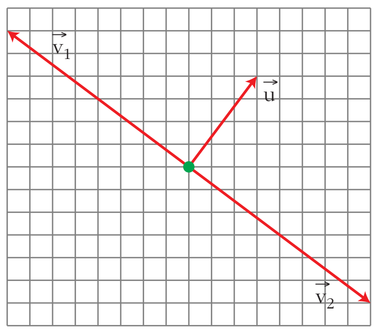
$+ y^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y = \pm 6$

Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{-4}{3} \cdot 6 = -8 \rightarrow \vec{v}_1(-8, 6)$

Si $y_2 = -6 \rightarrow x_2 = \frac{-4}{3} \cdot (-6) = 8 \rightarrow \vec{v}_2(8, -6)$

El problema té dues possibles solucions, així que:

$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$



32. Donats $\vec{a}(2, 1)$ i $\vec{b}(6, 2)$, troba un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ i $\vec{v} \perp \vec{b}$.

$\left.\begin{array}{l} (x, y) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2x + 2y = 1 \\ (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0 \end{array}\right\}$

Resolem el sistema:

Multipliquem els dos membres de la primera equació per (–1) i sumem membre a membre:

$$\begin{array}{rl} -2x - 2y & = -1 \\ 6x + 2y & = 0 \\ \hline 4x \qquad & = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{4} \end{array}$$

Substituïm en una equació; per exemple en la segona i aïllem l'altra incògnita:

$6x + 2y = 0 \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}$

D'aquesta manera, el nostre vector serà:

$\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

33. Sent $\vec{u}(5, -b)$ i $\vec{v}(a, 2)$, troba a i b sabent que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals i que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, aleshores $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (5, -b) \cdot (a, 2) = 0 \rightarrow 5a - 2b = 0$

Si $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, aleshores $\sqrt{a^2 + 2^2} = \sqrt{13} \rightarrow$

$\rightarrow a^2 + 4 = 13$

Resolem el sistema:

$a^2 + 4 = 13 \rightarrow a = \pm 3$

Aleshores: Si $a = 3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{15}{2}$

Si $a = -3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{-15}{2}$

Per tant hi ha dues possibles solucions:

$\vec{u}\left(5, \frac{-15}{2}\right), \vec{v}(3, 2)$

O bé: $\vec{u}\left(5, \frac{15}{2}\right), \vec{v}(-3, 2)$

34. Donats els vectors $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ i $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, essent $\vec{u} = (2, 3)$ i $\vec{v} = (-3, 0)$, troba k de manera que $(\vec{a} + \vec{b})$ sigui ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

Escriu les coordenades de $(\vec{a} + \vec{b})$ i $(\vec{a} - \vec{b})$.

Si $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, llavors $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Obtindràs una equació la incògnita de la qual és k.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = 2\,(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6)\\ \vec{b} = -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3)\\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15)\end{cases}$$

Ara, com que el producte escalar d'ambdós vectors ha de ser 0, per ser ortogonals:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (1 - 3k)\,(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0$

$13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0$

$$k = \frac{-36 \pm \sqrt{1\,296 - 1\,552}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} =$$

$$= \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases}-24/18 = -4/3 = k_1\\ -48/18 = -8/3 = k_2\end{cases}$$

35. Troba el valor que ha de tenir k perquè els vectors $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ siguin perpendiculars, essent $\vec{a}(1, -3)$ i $\vec{b}(2, 5)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x} = k(1, -3) + (2, 5) = (k + 2, -3k + 5)\\ \vec{y} = k\,(1, -3) - (2, 5) = (k - 2, -3k - 5)\\ \text{Com que volem } \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0\end{array}\right\}$$

Aleshores:

$(k + 2, -3k + 5) \cdot (k - 2, -3k - 5) = 0$

$(k + 2)\,(k - 2) + (-3k + 5)\,(-3k - 5) = 0$

$k^2 - 4 + 9k^2 - 25 = 0 \rightarrow 10k^2 = 29 \rightarrow$

$\rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{29}{10}}$ (dues solucions)

36. Donats els vectors $\vec{u}(k, -6)$ i $\vec{v}(3, h)$, calcula k i h de manera que $|\vec{u}| = 10$ i $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$$\begin{cases}\vec{u}(k, -6)\ |\vec{u}| = 10\\ \vec{v}(3, h)\\ \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\end{cases}$$

$|\vec{u}| = \sqrt{k^2 + (-6)^2} = 10$

$k^2 + 36 = 100$

$k^2 = 100 - 36$

$k^2 = 64$

$k = \sqrt{64}$

$k = 8$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (8, -6) \cdot (3, h) = 0$

$8 \cdot 3 + (-6) \cdot h = 0$

$24 - 6h = 0$

$-6h = -24$

$h = \frac{-24}{-6}$

$h = 4$

37. Calcula les coordenades d'un vector $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}| = 1$ i $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ sent $\vec{v}(2, 1)$.

$$\begin{cases} |\vec{u}| = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \\ \vec{v}(2,1) \end{cases}$$

Faig servir dues expressions:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x, y) \cdot (2, 1) = 1$

$x \cdot 2 + y \cdot 1 = 1$

$2x + y = 1$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 = 1$

Obtinc 2 equacions amb 2 incògnites. Resolc el sistema pel mètode de substitució (per exemple):

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Substitueixo y en la segona equació:

$x^2 + (1 - 2x)^2 = 1$

$x^2 + (1^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2x) = 1$

$x^2 + 1 + 4x^2 - 4x = 1$

$x^2 + 1 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

$5x^2 - 4x = 0$

$x(5x - 4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x - 4 = 0 \end{cases}$

$5x = 4$

$x_2 = \dfrac{4}{5}$

Si $x_1 = 0$

$2 \cdot 0 + y = 1 \Rightarrow y_1 = 1$

Si $x_2 = \dfrac{4}{5}$

$2 \cdot \dfrac{4}{5} + y = 1 \Rightarrow \dfrac{8}{5} + y = 1 \Rightarrow$

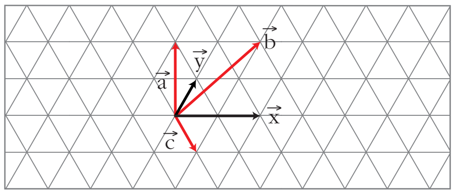
$y = 1 - \dfrac{8}{5} \Rightarrow y_2 = -\dfrac{3}{5}$

$\vec{u}_1(0, 1)$

$\vec{u}_2(\dfrac{4}{5}, \dfrac{-3}{5})$

El problema té dues solucions possibles.

38. Expressa els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ com a combinació lineal de $\vec{x}$ i $\vec{y}$.



$\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$

$\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$

$\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$

39. Dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sabem que $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 5$ i que formen un angle de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Mira el problema resolt núm 7.

Com que: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\,|\vec{v}| \cos 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

Aleshores podem dir que:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$

$\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$

$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° + 5^2 =$

$= 9 - 30 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 25 = 49$

Així: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

40. Si $|\vec{u}| = 3$ i $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, troba $|\vec{v}|$.

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = -11$. Com que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 9$, calcula $|\vec{v}|$.

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$

Com que $|\vec{u}| = 3$, tenim que:

$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$

41. Sabent que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ i $\vec{u} \perp \vec{v}$, troba $|\vec{u} + \vec{v}|$ i $|\vec{u} - \vec{v}|$.

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) =$

$\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{34}$

(*) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) =$

$= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow$

$\rightarrow |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{34}$

42. Si $|\vec{u}| = 7$, $|\vec{v}| = 5$ i $|\vec{u}+\vec{v}| = 10$, quin angle formen $\vec{u}$ i $\vec{v}$?

Raonant com en el problema resolt número 7, arribem a:

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + |\vec{v}|^2$

Substituint els valors coneguts:

$10^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + 5^2$

$100 = 49 + 70 \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + 25$

$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{100-49-25}{70} = 0{,}37143 \rightarrow$

$\rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 68°\ 11'\ 46{,}5''$

43. Calcula x perquè els vectors $\vec{a}(7, 1)$ i $\vec{b}(1, x)$ formin un angle de 45°.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos 45° \rightarrow$

$7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$

$14 + 2x = \sqrt{100(1+x^2)} \rightarrow \dfrac{14+2x}{10} =$

$= \sqrt{1+x^2} \rightarrow \dfrac{7+x}{5} = \sqrt{1+x^2} \rightarrow$

$= \dfrac{49+x^2+14x}{25} = 1 + x^2 \rightarrow$

$49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \rightarrow 24x^2 - 14x -$
$- 24 = 0 \rightarrow 12x^2 - 7x - 12 = 0 \rightarrow$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$

44. Calcula x perquè $\vec{a}(3, x)$ i $\vec{b}(5, 2)$ formin un angle de 60°.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos 60°$

$15 + 2x = \sqrt{9+x^2} \cdot \sqrt{29} \cdot \dfrac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 30 + 4x = \sqrt{29(9+x^2)} \rightarrow$

$\rightarrow 900 + 16x^2 + 240x = 29(9 + x^2) \rightarrow$

$\rightarrow 13x^2 + 240x - 639 = 0$

$x = \dfrac{-240 \pm \sqrt{57\,600 + 33\,228}}{26} =$

$= \dfrac{-240 \pm \sqrt{90\,828}}{26} = \dfrac{-240 \pm 301{,}4}{26}$

$\begin{cases} x_1 = -2{,}36 \\ x_2 = 20{,}82 \end{cases}$

45. Troba les coordenades d'un vector concret $\vec{x}$, sabent que forma un angle de 60° amb $\vec{a}(2, 4)$ i que els mòduls de tots dos són iguals.

$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sigui } \vec{x}(m, n) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}|\,|\vec{x}| \cos 60° \Rightarrow$

$\begin{cases} 2m + 4n = \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{20} \Rightarrow m^2 + n^2 = 20 \end{cases}$

Resolem el sistema:

$m = \dfrac{10-4n}{2} = 5 - 2n$

Substituint en la segona equació:

$(5 - 2n)^2 + n^2 = 20 \rightarrow 25 + 4n^2 - 20n +$
$+ n^2 = 20 \rightarrow n^2 - 4n + 1 = 0$

$n = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{cases} n_1 = 0{,}27 \\ n_2 = 3{,}73 \end{cases}$

- Si $n_1 = 0{,}27 \rightarrow m_1 = 5 - 2 \cdot 0{,}27 = 4{,}46$ $\rightarrow \vec{x}_1 = (4{,}46;\ 0{,}27)$
- Si $n_2 = 3{,}73 \rightarrow m_2 = 5 - 2 \cdot 3{,}73 = -2{,}46$ $\rightarrow \vec{x}_2 = (-2{,}46;\ 3{,}73)$

46. Determina un vector $\vec{a}$ que formi amb $\vec{b}(-1, -2)$ un angle de 30° i tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\ |\vec{b}|$.

Si $\vec{a}(x, y) \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ cos\ 30° \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = \dfrac{15}{2} \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$

Resolem el sistema:

$x = -2y - \dfrac{15}{2}$

Substituint en la segona equació:

$\left(4y^2 + \dfrac{225}{4} + 30y\right) + y^2 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y^2 + 30y + \dfrac{165}{4} = 0$

$20y^2 + 120y + 165 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y^2 + 24y + 33 = 0$

$y = \dfrac{-24 \pm \sqrt{576 - 528}}{8} = \dfrac{-24 \pm 4\sqrt{3}}{8} =$

$= -3 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Així: $\vec{a}\left(\dfrac{-3}{2} - \sqrt{3}, -3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ o

$\vec{a} = \left(\dfrac{-3}{2} + \sqrt{3}, -3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

47. Donats els vectors $\vec{u}(1, 3)$ i $\vec{v}(6, 4)$, troba la projecció de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Recorda que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot proj._{\vec{u}}\ (\vec{v})$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot$ (proj. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$)

(proj. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$) $= \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{6 + 12}{\sqrt{10}} =$

$= \dfrac{18}{\sqrt{10}} = \dfrac{18\sqrt{10}}{10} = \dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

48. Donats els vectors $\vec{a}(5, 2)$ i $\vec{b}(4, -3)$, calcula la projecció de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ i la de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot (\text{proj. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot (\text{proj. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{proj. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{29}} = \\ = \dfrac{14}{\sqrt{29}} = \dfrac{14\sqrt{29}}{29} \\ \text{proj. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{25}} = \dfrac{14}{5} \end{cases}$

49. Donats $\vec{a}(1, 2)$ i $\vec{b}(5, 5)$, expressa el vector $\vec{b}$ com a suma de dos vectors: un de la mateixa direcció que $\vec{a}$ i un altre ortogonal a $\vec{a}$.

Mira el problema resolt núm. 6.

$\vec{a}(1, 2)$

$\vec{b}(5, 5)$

Els vectors que busquem són $\vec{x}$ i $\vec{y}$ tals que:

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$ en què:

$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \text{ tingui la direcció de } \vec{a} \Rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = (k, 2k) \\ \vec{y} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{y} \cdot \vec{a} = (m, n) \cdot (1, 2) = 0 \\ m \cdot 1 + n \cdot 2 = 0 \\ m + 2n = 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{x} + \vec{y} \Rightarrow (5, 5) = (k, 2k) + (m, n)$

A més, ha de passar que: $m + 2n = 0$

$\begin{cases} 5 = k + m \Rightarrow m = 5 - k \\ 5 = 2k + n \Rightarrow n = 5 - 2k \\ m + 2n = 0 \end{cases}$

Substituïm m i n en l'última equació:

$(5 - k) + 2(5 - 2k) = 0$

$5 - k + 10 - 4k = 0$

$15 - 5k = 0$

$-5k = -15$

$k = \dfrac{-15}{-5}$

$k = 3$

Substituïm el valor de k en les equacions de m i n:

$m = 5 - 3 = 2$

$n = 5 - 2 \cdot 3 = -1$

Per tant, $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$ en què:

$\vec{x} = (3, 6)$
$\vec{y} = (2, -1)$

50. Se sap que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ són perpendiculars i que $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són unitaris. Quin és l'angle que formen $\vec{a}$ i $\vec{b}$?

Si $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$.

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \Rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot$
$\cdot\ (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$
$5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$
Com que $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són unitaris $\Rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$
$5\,|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\,|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \Rightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

Qüestions teòriques

51. Indica si el resultat de les operacions següents és un nombre o un vector:
a) $2\,\vec{a} \cdot \vec{b}$; b) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$; c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$; d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

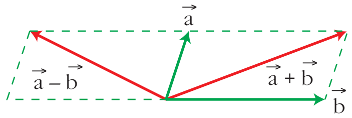
a) Nombre; b) Vector; c) Nombre;
d) Nombre.

52. Si $B(\vec{a}, \vec{b})$ és una base dels vectors del pla, assenyala quins dels parells de vectors següents poden ser una altra base:
a) $(3\vec{a}, -2\vec{b})$; b) $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$;
c) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$; d) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

a) Sí, perquè no té la mateixa direcció, ja que $3\vec{a}$ té la direcció de $\vec{a}$ i $-2\vec{b}$ té la direcció de $\vec{b}$ (que, per ser $B(\vec{a}, \vec{b})$ base, no és la mateixa).

b) No, ja que $-\vec{a} - \vec{b} = -1\ (\vec{a} + \vec{b})$, ja que els dos vectors tenen la mateixa direcció (i sentits oposats).

c) Sí, ja que tenen distinta direcció.



d) No, ja que tenen la mateixa direcció en ser $\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{b} - \vec{a})$.

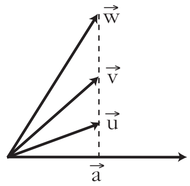
Pàgina 161

53. Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dos vectors no nuls. Indica quin angle formen en els casos següents:
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$; b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}|$; d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

a) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$
b) $(\vec{a} \perp \vec{b}) \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$
c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$
d) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0{,}5 \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

54. És cert que $\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{w}$? Justifica'n la resposta.

$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot proj._{\vec{a}}\,(\vec{u})$. Observa les projeccions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$.



$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot$ (proj. de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$)
$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| \cdot$ (proj. de $\vec{v}$ sobre $\vec{a}$)
$\vec{a} \cdot \vec{w} = |\vec{a}| \cdot$ (proj. de $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$)
Com que les projeccions de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ i de $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$ són iguals, aleshores es verifica que:
$\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{w}$

55. Busca alguns exemples amb els quals es vegi que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ no implica que $\vec{b} = \vec{c}$.

Fixant-nos en l'exercici anterior, podem trobar fàcilment un exemple en què $\vec{b} \neq \vec{c}$ essent:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot$ proj. de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

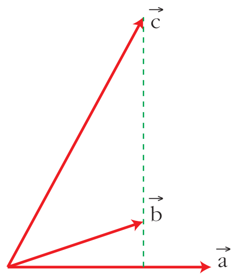
$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot$ proj. de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$

Com que ambdues projeccions coincideixen:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

I, això no obstant:

$\vec{b} \neq \vec{c}$



56. Prova, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp \vec{c}$, llavors: $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, $m, n \in \mathbb{R}$.

S'ha de provar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Vegem:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) \overset{(*)}{=} m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ ^{(*)} \text{ Propietats 6 i 7 del producte escalar.} \\ \text{Com que: } \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$

57. Prova, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$ $\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$.

Si $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Si $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$

$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

58. Justifica per què $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

Tingues en compte que $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left||\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right| =$

$= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| \overset{(*)}{\leq} |\vec{a}|\,|\vec{b}|$

(*) Com que per a qualsevol angle α es dóna que $-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Rightarrow |\cos\alpha| \leq 1$.

59. Comprova que el mòdul de la suma de dos vectors és menor o igual que la suma dels mòduls d'aquests vectors. Com han de ser els vectors perquè el mòdul de la seva suma sigui igual a la suma dels seus mòduls?

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$\overset{(*)}{\leq} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

(*) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Per tant, hem obtingut que:

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

Aleshores, ja que sempre $|\vec{v}| \geq 0$, podem dir que:

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

La igualtat $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ es donarà quan:

$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$

Per aprofundir

60. Donats els vectors $\vec{a}(2, 6)$ i $\vec{b}(5, 1)$, calcula:

a) Les coordenades d'un vector unitari (mòdul 1) de la mateixa direcció que $\vec{b}$.

b) Un vector de la mateixa direcció que $\vec{b}$ i el mòdul del qual sigui igual a la projecció de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$. (Vector projecció de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.)

a) Hi haurà dues solucions ($\vec{v}$ i $-\vec{v}$)

- Si $\vec{v}$ és vector unitari $\Rightarrow |\vec{v}| = 1$
- Si $\vec{v}$ és de la mateixa direcció que $\vec{b} \Rightarrow \vec{v} = k\vec{b} = (k5, k)$

$$\sqrt{25k^2 + k^2} = 1 \Rightarrow k = \pm\frac{1}{\sqrt{26}} = \pm\frac{\sqrt{26}}{26}$$

Aleshores les solucions són:

$$\vec{v} = \left(\frac{5\sqrt{26}}{26}, \frac{\sqrt{26}}{26}\right) \text{ i } -\vec{v} = \left(\frac{-5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$$

b) proj. de $\vec{a}$ sobre $\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{10+6}{\sqrt{26}} =$

$= \dfrac{16}{\sqrt{26}} = \dfrac{16\sqrt{26}}{26} = \dfrac{8\sqrt{26}}{13}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Aleshores, } |\vec{v}| = \dfrac{8\sqrt{26}}{13} \\ \text{i } \vec{v} = k\vec{b} = (5k,\ k)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \sqrt{26k^2} = \dfrac{8\sqrt{26}}{13} \Rightarrow k = \pm\dfrac{8}{13}$

Així: $\vec{v}\left(\dfrac{40}{13}, \dfrac{8}{13}\right)$, $-\vec{v}\left(\dfrac{-40}{13}, \dfrac{-8}{13}\right)$

61. Demostra que el vector $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ és perpendicular al vector $\vec{c}$. *Has de demostrar que* $[(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}]\cdot\vec{c} = 0$.

S'ha de provar que el producte escalar d'ambdós vectors és igual a 0.

• Vegem primer quines són les coordenades del primer vector:

$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} = (b_1c_1 + b_2c_2)\ (a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)\ (b_1, b_2) = ((b_1c_1 + b_2c_2)\ a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)\ a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2)\ b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)\ b_2) = (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) = (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) = (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)$

• Calculem ara:

$[(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}]\cdot\vec{c} =$

$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\cdot(c_1, c_2) =$

$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\ c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\ c_2 =$

$= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0$

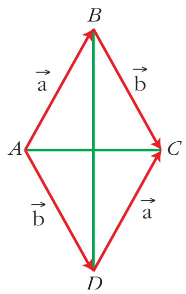
62. Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ els vectors que defineixen els costats d'un rombe, partint d'un dels seus vèrtexs (cada vector defineix un parell de costats paral·lels):

a) Expressa les diagonals del rombe en funció de $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

b) Demostra vectorialment que les diagonals del rombe són perpendiculars.

a) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$



b) S'ha de provar que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$. Vegem-ho:

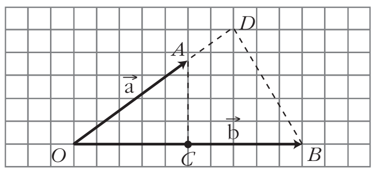
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) =$

$= \vec{b}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$

Com que $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ per ser la mesura dels costats, es compleix que:

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$

63. Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dos vectors i sigui $\overline{OC}$ la projecció de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ i $\overline{OD}$ la projecció de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.



Comprova, per semblança de triangles, que es verifica $|\vec{b}|\cdot\overline{OC} = |\vec{a}|\cdot\overline{OD}$.

Els triangles OCA i ODB són semblants (per ser triangles rectangles amb un angle en comú). Aleshores es verifica:

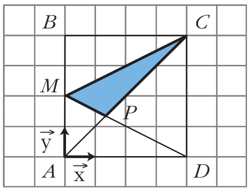
$\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

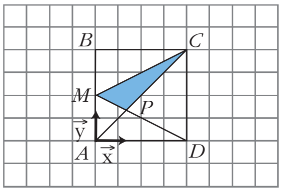
Com que $\overline{OA} = |\vec{a}|$ i $\overline{OB} = |\vec{b}|$:

$\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{b}|\cdot\overline{OC} = |\vec{a}|\cdot\overline{OD}$

És a dir:
$|\vec{b}| \cdot$ (proj. de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$) $= |\vec{a}| \cdot$ (proj. de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$)

64. Calcula la mida dels angles del triangle *MPC*.





Les coordenades de $\overrightarrow{MC}$ són (4, 2).
Escriu les coordenades de $\overrightarrow{MD}$ i troba CMD.
Troba l'angle MCA amb $\overrightarrow{CM}$ i $\overrightarrow{CA}$.

- $\widehat{CMP} = \widehat{CMD} = (\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}})$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MC}(4,\ 2) \\ \overrightarrow{MD}(4,\ -2) \end{array}\right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \cos \widehat{CMP} = \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{MD}|} =$$

$$= \frac{16 - 4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = 0{,}6$$

Aleshores: $\widehat{CMP} = 53°\ 7'\ 48{,}37''$

- $\widehat{MCP} = \widehat{MCA} = (\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}})$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CM}(-4,\ -2) \\ \overrightarrow{CA}(-4,\ -4) \end{array}\right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \cos \widehat{MCP} = \frac{\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CM}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} =$$

$$= \frac{16 + 8}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{32}} = 0{,}94868$$

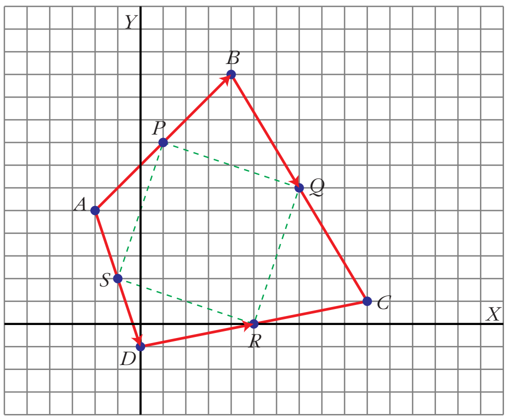
Aleshores: $\widehat{MCP} = 18°\ 26'\ 5{,}82''$

- Per últim, $\widehat{MCP} = 180° - (\widehat{CMP} + \widehat{MCP})$ $= 108°\ 26'\ 5{,}81''$

Per pensar una mica més

65. a) Comprova que els punts mitjans dels costats del quadrilàter de vèrtexs *A*(–2, 5), *B*(4, 11), *C*(10, 1), *D*(0, –1) són els vèrtexs d'un paral·lelogram. (Recorda! Una condició que caracteritza els paral·lelograms és que els seus costats oposats són iguals i paral·lels.)
b) Demostra que els punts mitjans dels costats d'un quadrilàter qualsevol són els vèrtexs d'un paral·lelogram.
Anomena A(a, a′), B (b, b′), C (c, c′), D (d, d′) els vèrtexs del quadrilàter inicial, troba els seus punts mitjans P, Q, R, S, i comprova, vectorialment, que es compleix el criteri donat en l'apartat a).

a)



Siguin *P*, *Q*, *R* i *S* els punts mitjans dels costats del quadrilàter, tal com s'indica a la figura.

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(6, -10) =$
$= (3, 3) + (3, -5) = (6, -2)$

$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(2, -6) + \frac{1}{2}(10, 2) =$
$= (1, -3) + (5, 1) = (6, -2)$

Per tant: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ (mateixa direcció, mateix mòdul)

Així, els costats $\overline{PQ}$ i $\overline{SR}$ són iguals i paral·lels.

• $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(-2, 6) + \frac{1}{2}(6, 6) =$
$= (-1, 3) + (3, 3) = (2, 6)$

$\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(10, 2) + \frac{1}{2}(-6, 10) =$
$= (5, 1) + (-3, 5) = (2, 6)$

Així, $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ} \Rightarrow$ els costats oposats $\overline{SP}$ i $\overline{RQ}$ són iguals i paral·lels.

• Podem concloure, per tant, que *PQRS* és un paral·lelogram.

b) Provarem que la propietat de l'apartat anterior es verifica per a qualsevol quadrilàter de vèrtexs $A(a, a')$, $B(b, b')$, $C(c, c')$, $D(d, d')$.

Suposem *P*, *Q*, *R* i *S* els punts mitjans dels costats (com abans). Aleshores:

• $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(b - a, b' - a') +$
$+ \frac{1}{2}(c - b, c' - b') = \left(\frac{b-a}{2} + \frac{c-b}{2},\right.$
$\left.\frac{b'-a'}{2} + \frac{c'-b'}{2}\right) = \left(\frac{c-a}{2}, \frac{c'-a'}{2}\right)$

$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(d - a, d' - a') +$
$+ \frac{1}{2}(c - d, c' - d') = \left(\frac{d-a}{2} + \frac{c-d}{2},\right.$
$\left.\frac{d'-a'}{2} + \frac{c'-d'}{2}\right) = \left(\frac{c-a}{2}, \frac{c'-a'}{2}\right)$

Així: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

• Anàlogament, es pot provar $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

Vegem, no obstant això, una altra forma de fer-ho sense necessitat d'usar les coordenades:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{SP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{RQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

• Podem concloure, per tant, que *PQRS* és un paral·lelogram.