Pàgina 187

Completa en el teu quadern la taula següent, en la qual α és l'angle que formen les generatrius amb l'eix, *e*, de la cònica i β l'angle del pla π amb *e*.

	$\beta = 90°$	$\beta > \alpha$	$\beta = \alpha$	$\beta < \alpha$
≠ PASSA PEL VÈRTEX	• punt	• punt	recta	paràbola
≠ NO PASSA PEL VÈRTEX	circumferència	el·lipse	paràbola	paràbola

Pàgina 189

1. Troba les equacions dels llocs geomètrics següents:

a) Mediatriu del segment d'extrems $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprova que és una recta perpendicular al segment en el seu punt mitjà.

b) Circumferència de centre $C(-3, 4)$ i radi 5. Comprova que passa per l'origen de coordenades.

c) Bisectrius dels angles formats per les rectes:

r_1: $5x + y + 3 = 0$

r_2: $x - 2y + 16 = 0$

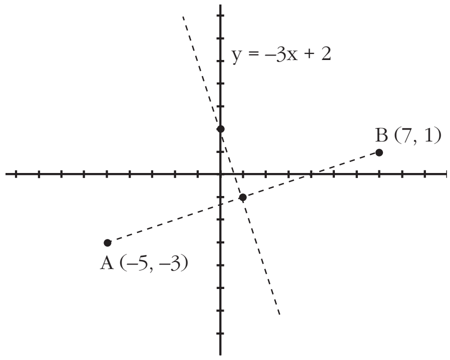
Comprova que les bisectrius són dues rectes perpendiculars que es tallen en el mateix punt que r_1 i r_2.

a) $\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$

$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 =$

$= x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$

$24x + 8y = 16 \rightarrow 3x + y = 2$



b) $dist(x, r_1) = \dfrac{|5x + y + 3|}{\sqrt{5^2 + 1^2}}$

b) $dist(x, r_2) = \dfrac{|x - 2y + 16|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$

$$\frac{|5x + y + 3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x - 2y + 16|}{\sqrt{5}}$$

$b_1 = (5\sqrt{5} - \sqrt{26})x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26})y =$

$= -3\sqrt{5} + 16\sqrt{26}$

$b_2 = (5\sqrt{5} + \sqrt{26})x + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26})y =$

$= -3\sqrt{5} - 16\sqrt{26}$

c) $\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 5$

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

Pàgina 191

2. Troba l'equació de la circumferència de centre $(-5, 12)$ i radi 13. Comprova que passa pel punt $(0, 0)$.

$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$

$x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$

3. Quin és el lloc geomètric dels punts del pla el quocient de distàncies del qual als punts $M(6, 0)$ i $N(-2, 0)$ és 3 (és a dir, $PM/PN = 3$)?

$$\frac{\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2}} = 3$$

$x^2 + y^2 + 6x = 0$

Una circumferència de centre –3, 0 i radi 3.

Pàgina 193

4. Resol el sistema d'equacions per trobar el punt de tangència de la recta s_1 i la circumferència *C* de l'exercici resolt anterior.

(6, –2)

5. Per a quin valor de b la recta $y = x + b$ és tangent a $x^2 + y^2 = 9$?

$b = \pm 3\sqrt{2}$

6. Troba la posició relativa de la circumferència C: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecte a les rectes s_1: $x + y = 10$, s_2: $4x + 3y + 20 = 0$ i s_3: $3x - 4y = 0$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Centre circumferència } (3, -4) \\ \text{radi} = 5\end{array}\right\}$

Per tant:

$dist(0_C, s_1) \approx 7{,}8$ exterior a la circumferència

$dist(0_C, s_2) \approx 4$ secant amb la circumferència

$dist(0_C, s_3) \approx$ tangent a la circumferència

Pàgina 195

7. Troba els punts d'intersecció de les circumferències següents:

C_1: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 = 5$

(1, 2) i (–1, –2); (1, –2) i (–1, 2) queden descartats en no complir la primera equació.

8. Troba els punts d'intersecció de cada parella de circumferències i digues quina és la seva posició relativa.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$

a) Tangents interiors, al punt (–2, 0)

b) Tangents exteriors, al punt (3, 0)

Pàgina 197

9. Troba l'equació de l'el·lipse de focus $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$ la constant de la qual és 10.
Després de posar l'equació inicial, passa una arrel al segon membre, eleva-la al quadrat (atenció, amb el doble producte!), simplifica, aïlla'n l'arrel, torna a elevar-la al quadrat i simplifica-la fins a arribar a l'equació $9x^2 + 25y^2 = 225$.

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$

10. Troba l'equació de la hipèrbola de focus $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ la constant de la qual és 6. Simplifica-la com en l'exercici anterior fins a arribar a l'expressió $16x^2 - 9y^2 = 144$.

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 6$

11. Troba l'equació de la paràbola de focus $F(-1, 0)$ i directriu r: $x = 1$. Simplifica-la fins a arribar a l'expressió $y^2 = -4x$.

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = x - 1$

Simplifiquem:

$\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2 = (x-1)^2$

$(x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2$

$x^2 + 1 + 2x + y^2 = x^2 + 1^2 - 2x$

$\cancel{x^2} + \cancel{1} + 2x + y^2 - \cancel{x^2} - \cancel{1^2} + 2x = 0$

$4x + y^2 = 0$

$y^2 = -4x$

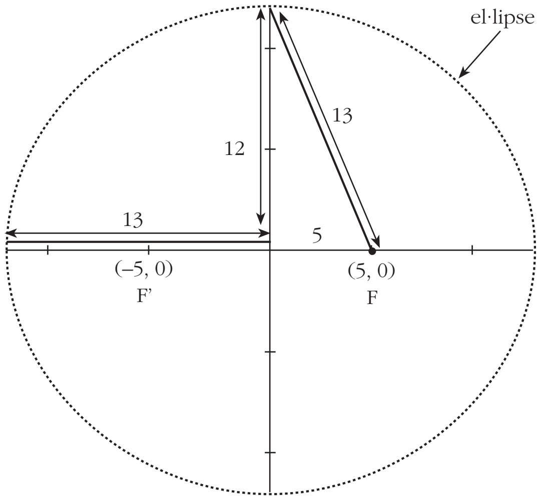
Pàgina 199

12. Una el·lipse té els focus en els punts $F(5, 0)$ i $F'(-5, 0)$ i la constant és $k = 26$. Troba'n els elements característics i l'equació reduïda. Representa-la.

$a = 13,\ b = 12,\ c = 5$

exc $= 0{,}38$

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

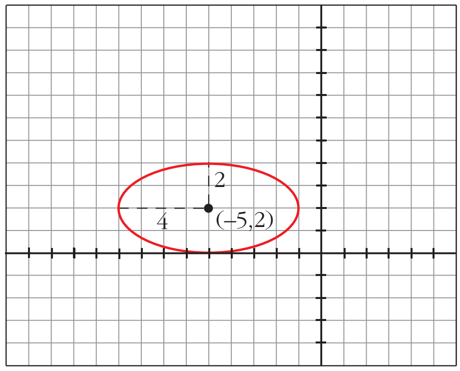


Pàgina 200

13. Representa i digues-ne l'excentricitat:

$$\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

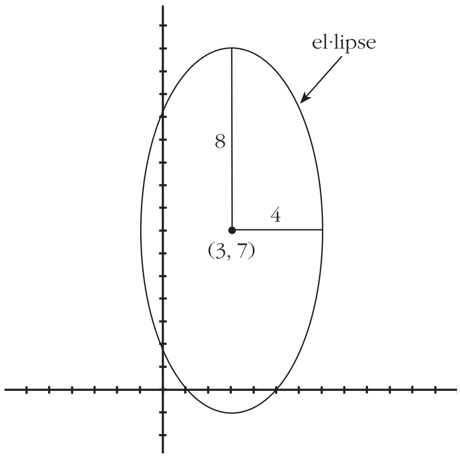
$$\text{excentricitat} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \sqrt{3}$$



14. Represent i digues-ne l'excentricitat:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

$$\text{excentricitat} = \frac{\sqrt{48}}{8} = 0{,}87$$



Pàgina 202

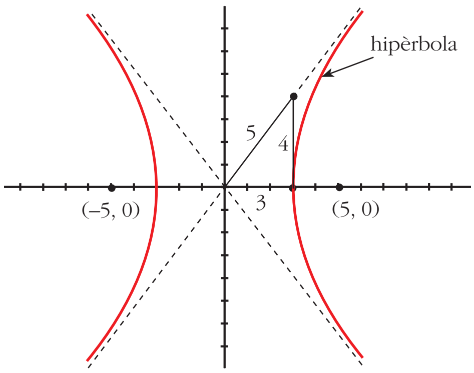
15. Una hipèrbola té els focus en els punts $F_1(5, 0)$ i $F_2(-5, 0)$ i la seva constant és $k = 6$.
Troba'n els elements característics i l'equació reduïda. Representa-la.

$a = 3;\ b = 4;\ c = 5$

$$\text{exc} = \frac{5}{3} = 1{,}\widehat{6}$$

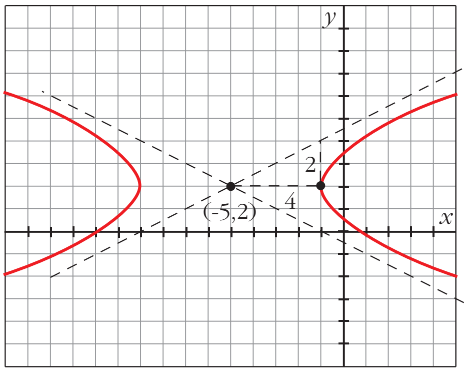
asímp: $y = \frac{4}{3}x$; $y = -\frac{4}{3}x$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

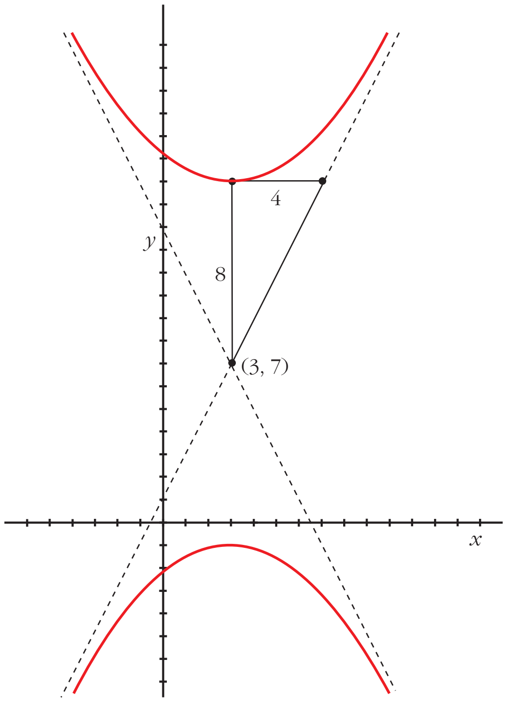


Pàgina 203

16. Representa: $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$



17. Representa: $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$



Pàgina 204

18. Troba l'equació reduïda de la paràbola de focus $F(1,5;\ 0)$ i directriu $x = -1,5$.

$y^2 = 6x$

19. Troba l'equació reduïda de la paràbola de focus $F(0,\ 2)$ i directriu $y = -2$.

$x^2 = 8y$

Pàgina 206

1. Les equacions d'una circumferència de centre (–5, 4) i radi 7 són:

$$\begin{cases} x = -5 + 7\cos\alpha \\ y = 4 + 7\sin\alpha \end{cases}$$

que es poden transformar així:

$$\begin{cases} x + 5 = 7\cos\alpha \\ y - 4 = 7\sin\alpha \end{cases}$$

Eleva al quadrat, suma i tingues en compte que $cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha = 1$. Obtindràs l'equació $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 7^2$

$$(x + 5)^2 = 49cos^2x$$
$$(y - 4)^2 = 49sin^2x$$
$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 49\ (cos^2\alpha + sin^2\alpha)$$
$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 7^2$$

2. Procedeix com en l'exercici anterior per passar de les equacions paramètriques d'una el·lipse de centre (2, –1) i semieixos 4 i 3:

$$\begin{cases} x = 2 + 4cos\ \alpha \\ y = -1 + 3sin\ \alpha \end{cases}$$

a la seva equació implícita

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 = 4cos\ \alpha \\ y + 1 = 3\ sin\ \alpha \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{4} = cos\ \alpha \\ \dfrac{y+1}{3} = sin\ \alpha \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(x-2)^2}{4^2} = cos^2\ \alpha \\ \dfrac{(y+1)^2}{3^2} = sin^2\ \alpha \end{array}\right\}$$

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = cos^2\alpha + sin^2\ \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

3. Representa:

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 5 \\ y = t \end{cases}$

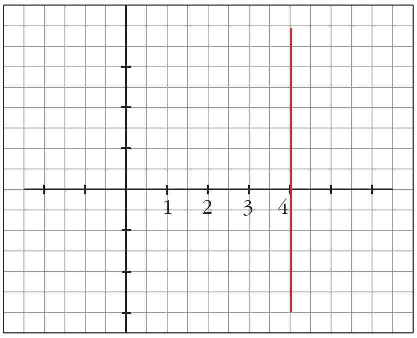
e) $\begin{cases} x = 5cos\ \alpha \\ y = 5sin\ \alpha \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3 + 5cos\ \alpha \\ y = 7 + 5sin\ \alpha \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = 3cos\ \alpha \\ y = 7sin\ \alpha \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = cos\ \alpha \\ y = 2sin\ \alpha \end{cases}$

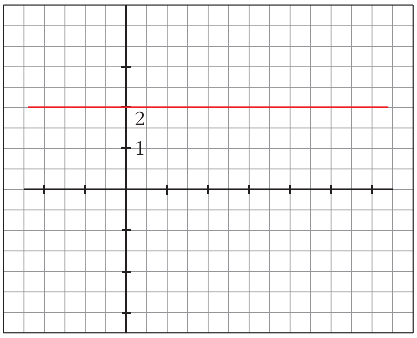
i) $\begin{cases} x = 7 + cos\ \alpha \\ y = 7 + 2sin\ \alpha \end{cases}$ j) $\begin{cases} x = 7cos\ \alpha \\ y = 3sin\ \alpha \end{cases}$

k) $\begin{cases} x = 2 + 3cos\ \alpha \\ y = -4 + 3sin\ \alpha \end{cases}$ l) $\begin{cases} x = 1 + cos\ \alpha \\ y = 2 + 2sin\ \alpha \end{cases}$

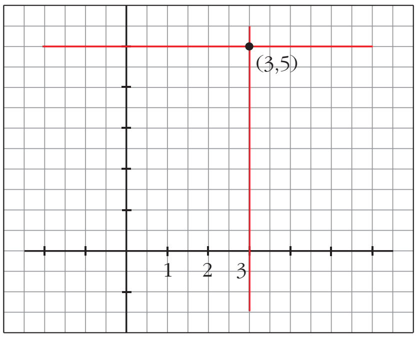
a)



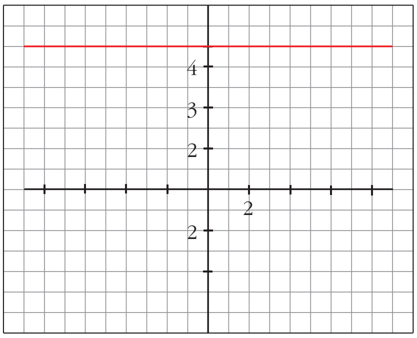
b)



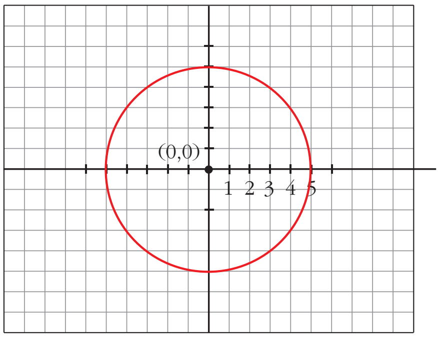
c)



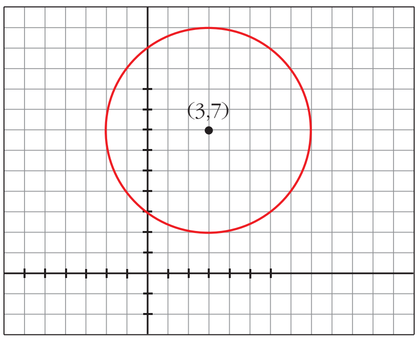
d)



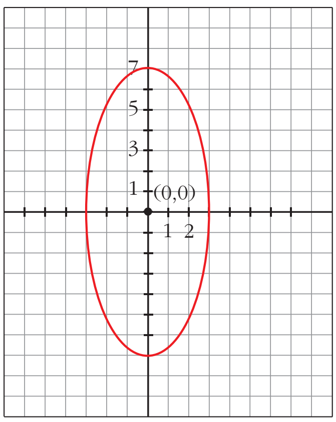
e)



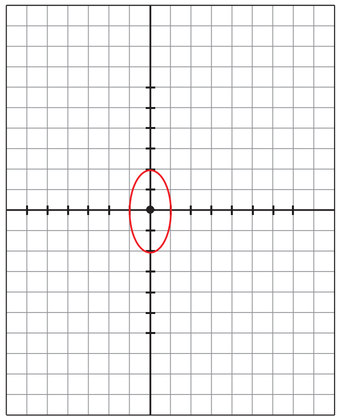
f)



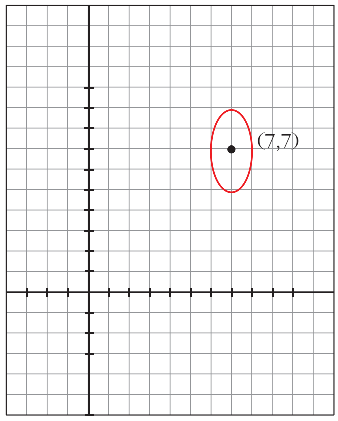
g)



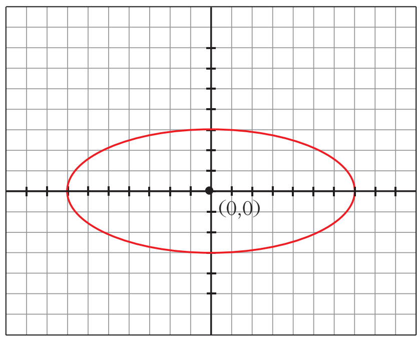
h)



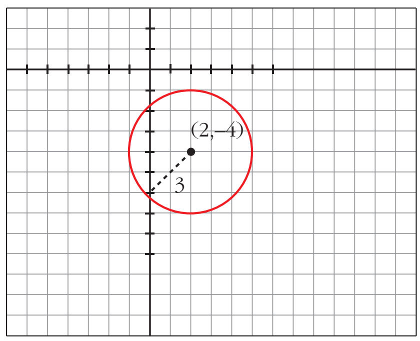
i)



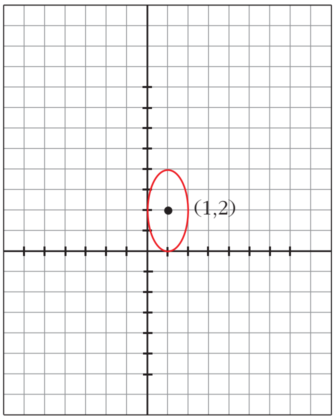
j)



k)



l)



Pàgina 211

Per practicar

Circumferència

20. Escriu les equacions de les següents circumferències:

a) Centre (0, 0). Radi $\sqrt{5}$.

b) Centre (2, 0). Radi $\frac{5}{2}$.

c) Centre $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$. Radi $\frac{1}{2}$.

a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{5})^2$

$x^2 + y^2 = 5$

b) $(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{25}{4}$

$x^2 + y^2 - 4x + \frac{-9}{4} = 0$

c) $(x + 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$

$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 6 = 0$

21. Descobreix quines de les expressions següents corresponen a circumferències i, d'aquestes, troba'n el centre i el radi:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$

a) centre (4, –1)

radi = $\sqrt{7}$

b) No és cap circumferència.

c) No és cap circumferència.

d) centre (4, 0)

radi = 2

e) centre (–3, –5)

radi = 2

22. Escriu les equacions de les circumferències següents:

a) Centre $C(-2, 1)$ i passa pel punt $P(0, -4)$.

b) Un dels seus diàmetres és el segment $\overline{AB}$ on $A(1, 2)$ i $B(3, 6)$.

c) Centre en $C(-1, -5)$ i és tangent a la recta $x - 4 = 0$.

d) Centre en $C(3, 5)$ i és tangent a la recta $4x + 3y - 2 = 0$.

a) radi = $\sqrt{29}$, per tant:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$

b) Centre = $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$

(2, 4)

Distància (1, 2) → (2, 4)

per tant, $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

c) $C(-1, -5)$ tangent *a* $x - 4 = 0$

$r = \frac{|-1 - 4|}{\sqrt{1^2}} = 5$

per tant, $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 5^2$

d) $C(3, 5)$ tangent a $4x + 3y - 2 = 0$

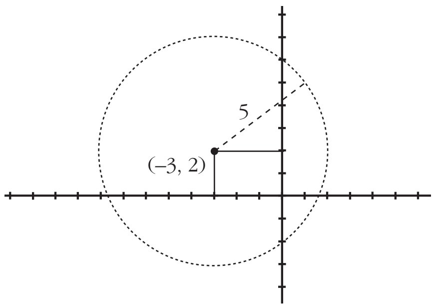
$$r = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

per tant, $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

23. Quin és el lloc geomètric dels punts que disten 5 unitats del punt $P(-3, 2)$? Representa'l gràficament i troba'n l'equació.

Una circumferència de centre $P(-3, 2)$ i radi 5.

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$



Posicions relatives de rectes i circumferències

24. Estudia la posició de la recta $x + y = 0$ amb relació a la circumferència:
$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

Radi de la circumferència = 2, centre $(-3, -1)$

No es tallen en cap punt. Recta externa a la circumferència.

25. Estudia la posició relativa de la circumferència $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecte de cada una de les rectes següents:
r_1: $2x - y - 2 = 0$
r_2: $x + y - 1 = 0$
r_3: $3x - 4y + 9 = 0$

Centre $\rightarrow \left(-\frac{-6}{2}, -\frac{-4}{2}\right) = (3, 2)$

radi $\sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 9} = \sqrt{9 + 4 - 9} = 2$

a) distància r_1 *a* $(3, 2) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}} < 2^{(\text{radi})}$

Són secants.

b) distància r_2 *a* $(3, 2) = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$\frac{4}{\sqrt{2}} < 2^{(\text{radi})}$

Són exteriors.

c) distància r_3 *a* $(3, 2) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} =$

$= \frac{10}{5} = 2$

$2 = 2^{(\text{radi})}$

Són tangents.

26. Per quin valor de b la recta $y = x + b$ és tangent a la circumferència $x^2 + y^2 = 1$?

$b = \pm\sqrt{2}$

27. Calcula la distància del centre de la circumferència $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta r: $2x - y + 3 = 0$. Quina és la posició de r respecte a la circumferència?

Distància $= \frac{2}{\sqrt{5}}$. Com que és menor que el radi ($\sqrt{2}$), la recta és secant a la circumferència.

28. Aplica dos mètodes diferents que permetin decidir si la recta:
$4x + 3y - 8 = 0$
és exterior, tangent o secant a la circumferència:

$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$

Raona la teva resposta.

El centre de la circumferència és (6, 3) i té radi 5.

a) Si la distància de la recta al centre és:

$$d = \frac{|4 \cdot 6 + 3 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

com que radi = distància, són tangents.

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y - 8 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{array}\right\} x = \dfrac{-3y+8}{4}$

$$\left(\frac{-3y+8}{4} - 6\right)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$\left(\frac{-3y}{4} - \frac{16}{4}\right)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$\frac{9y^2}{16} - \frac{24y}{4} + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$\frac{25y^2}{16} = 0$$

$$y = 0 \rightarrow x = 2$$

Un únic punt de tall (2, 0): és tangent.

El·lipse

29. Troba els vèrtexs, els focus, les excentricitats, i representa les el·lipses donades per les equacions:

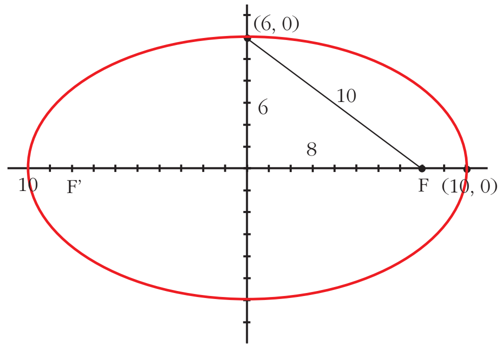
a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$;

c) $9x^2 + 25y^2 = 25$; d) $9x^2 + 4y^2 = 1$

a) Focus = (8, 0) i (–8, 0)

exc = 0,8

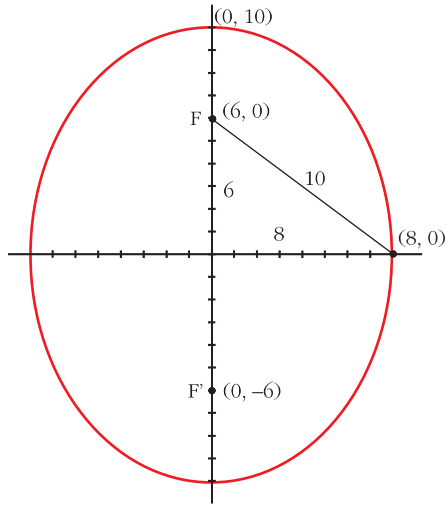
$a = 10$; $b = 6$; $c = 8$



b) Focus = (0, 6) i (0, –6)

exc $= \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

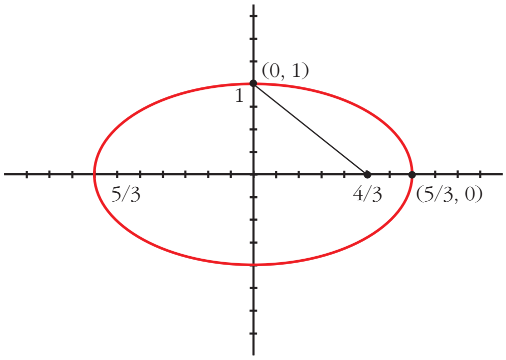
$a = 10$; $b = 8$; $c = 6$



c) Focus $= \left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ i $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

exc $= \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

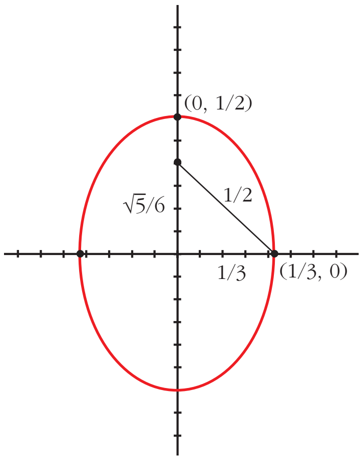
$a = \dfrac{5}{8}$; $b = 1$; $c = \dfrac{4}{3}$



d) Focus $= \left(0, \dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$ i $\left(0, -\dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$

exc $= \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$a = \dfrac{1}{2}$; $b = \dfrac{1}{3}$; $c = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$



30. Troba les equacions de les el·lipses determinades de les maneres següents:
a) Focus (–2, 0), (2, 0). Longitud de l'eix major, 10.
b) $F(-3, 0)$ i $F'(3, 0)$ i excentricitat igual a 0,5.
c) Eix major sobre l'eix X igual a 10. Passa pel punt (3, 3).
d) Eix major sobre l'eix Y igual a 2. Excentricitat, 1/2.

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{16y^2}{225} = 1$

d) $\dfrac{4x^2}{3} + y^2 = 1$

Pàgina 212

31. Troba l'equació del lloc geomètric dels punts la suma de distàncies dels quals a $P(-4, 0)$ i $Q(4, 0)$ és 10.

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10$; per tant...

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

32. Escriu l'equació de l'el·lipse de focus $F(0, 1)$ i $F'(0, -1)$, la constant de la qual és igual a 4.

$k = 4 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$

$\overline{FF'} = 2 \rightarrow 2c = 2 \rightarrow c = 1$

$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow b = \sqrt{3}$

$\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$; $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

33. Troba l'equació de l'el·lipse que passa pel punt (3, 1) i té els focus en (4, 0) i (–4, 0).

$\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

Hipèrbola

34. Troba els vèrtexs, els focus, les excentricitats i les asímptotes, i dibuixa les hipèrboles donades per les equacions:

a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$; **b)** $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$;

c) $x^2 - 4y^2 = 1$; **d)** $x^2 - 4y^2 = 4$;

e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$; **f)** $y^2 - 16x^2 = 16$;

g) $9x^2 - 4y^2 = 36$; **h)** $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

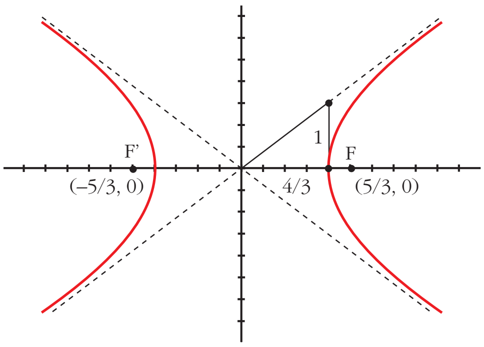
a) És una el·lipse.

b) Vèrtexs: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ i $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Focus: $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$ i $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$

Exc. $= \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Asímptotes: $y = \dfrac{3}{4}x$ i $y = -\dfrac{3}{4}x$

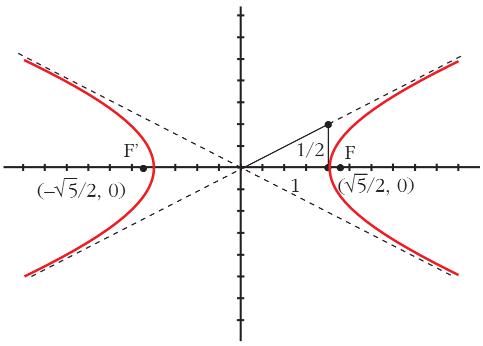


c) Vèrtexs: (1, 0) i (–1, 0)

Focus: $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ i $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Exc. $= \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}12$

Asímptotes: $y = \dfrac{1}{2}x$ i $y = -\dfrac{1}{2}x$

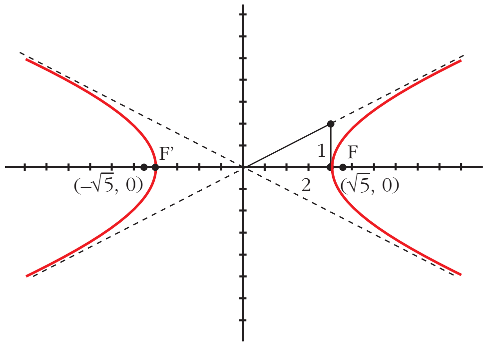


d) Vèrtexs: (2, 0) i (–2, 0)

Focus: $(\sqrt{5}, 0)$ i $(-\sqrt{5}, 0)$

Exc. $= \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}12$

Asímptotes: $y = \dfrac{1}{2}x$ i $y = -\dfrac{1}{2}x$

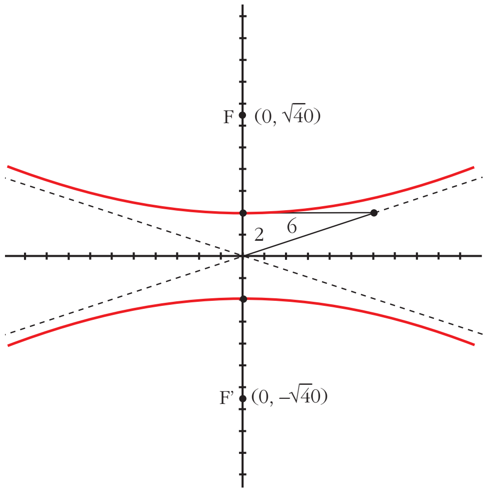


e) Vèrtexs: (0, 2) i (0, –2)

Focus: $(0, \sqrt{40})$ i $(0, -\sqrt{40})$

Exc. $= \dfrac{\sqrt{40}}{2} = 3{,}16$

Asímptotes: $y = \dfrac{1}{3}x$ i $y = -\dfrac{1}{3}x$

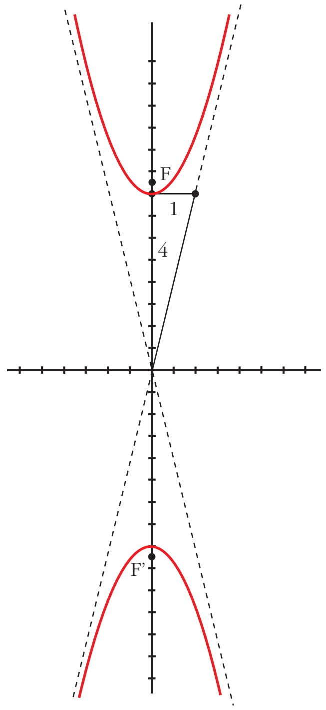


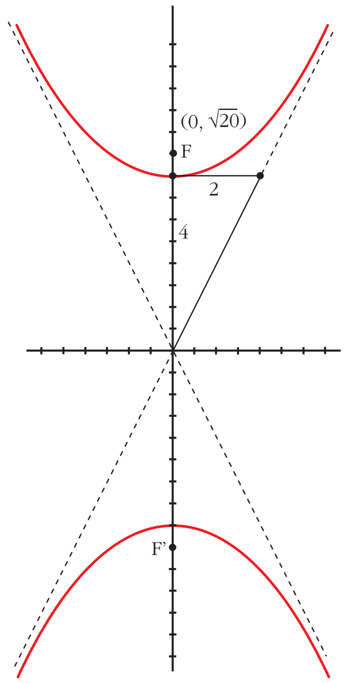
f) Vèrtexs: (0, 4) i (0, –4)

Focus: $(0, \sqrt{17})$ i $(0, -\sqrt{17})$

Exc. $= \dfrac{\sqrt{17}}{4} = 1{,}03$

Asímptotes: $y = 4x$ i $y = -4x$

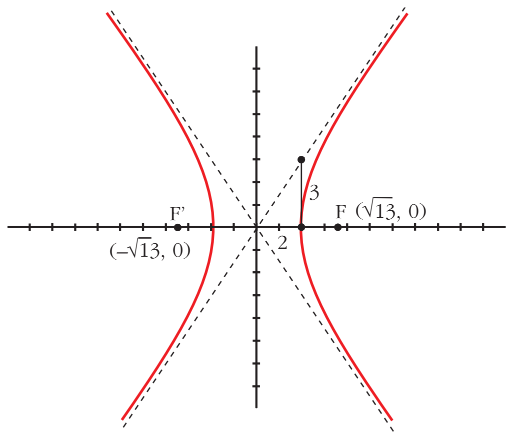




g) Vèrtexs: (2, 0) i (–2, 0)
Focus: $(\sqrt{13}, 0)$ i $(-\sqrt{13}, 0)$

Exc. $= \dfrac{\sqrt{13}}{2} = 1{,}80$

Asímptotes: $y = \dfrac{3}{2}x$ i $y = -\dfrac{3}{2}x$



h) Vèrtexs: (0, 4) i (0, –4)
Focus: $(0, \sqrt{20})$ i $(0, -\sqrt{20})$

Exc. $= \dfrac{\sqrt{20}}{4} = 1{,}12$

Asímptotes: $y = 2x$ i $y = -2x$

35. Troba les equacions de les hipèrboles determinades de les maneres següents:
a) Focus (–4, 0), (4, 0). Distància entre els vèrtexs, 4.
b) Asímptotes, $y = \pm\dfrac{1}{5}x$. Vèrtex, (2, 0).
c) Asímptotes, $y = \pm 3x$. Passa pel punt (2, 1).
d) Focus (–3, 0), (3, 0). Excentricitat, 3.

a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{25y^2}{4} = 1$

c) $\dfrac{9x^2}{35} - \dfrac{y^2}{35} = 1$

d) $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$

36. Troba l'equació del lloc geomètric dels punts la diferència de distàncies de les quals a $F'(-4, 0)$ i $F(4, 0)$ és 6.

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 6$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

37. Troba l'equació de la hipèrbola que té per focus els punts $F(-3, 0)$ i $F'(3, 0)$ i que passa pel punt $P(8, 5\sqrt{3})$.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{11y^2}{135} = 1$$

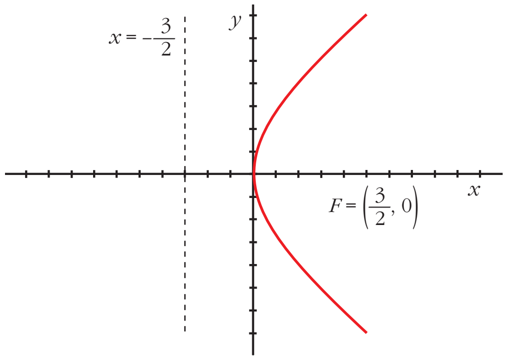
Paràbola

38. Troba els vèrtexs, els focus i les directrius de les paràboles següents, i representa-les:
a) $y^2 = 6x$; b) $y^2 = -6x$; c) $y = x^2$;
d) $y = \frac{x^2}{4}$; e) $y^2 = 4(x - 1)$;
f) $(y - 2)^2 = 8x$; g) $x^2 = 4(y + 1)$;
h) $(x - 2)^2 = -6y$

a) Vèrtex: (0, 0)

Focus: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

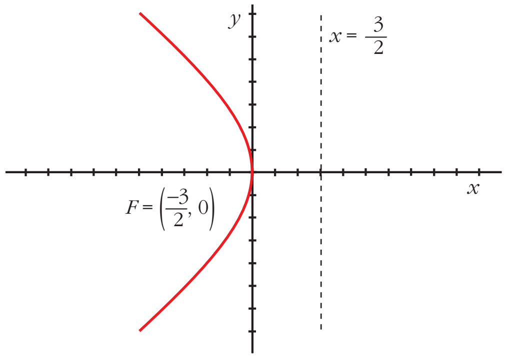
Directriu: $x = -\frac{3}{2}$



b) Vèrtex: (0, 0)

Focus: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

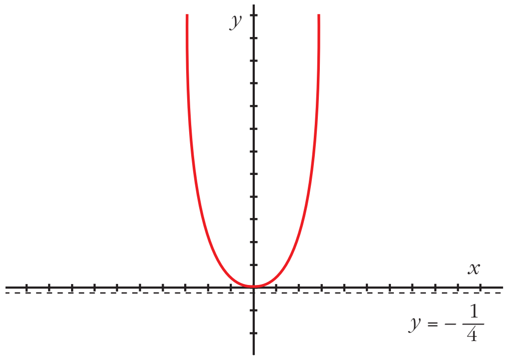
Directriu: $x = \frac{3}{2}$



c) Vèrtex: (0, 0)

Focus: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

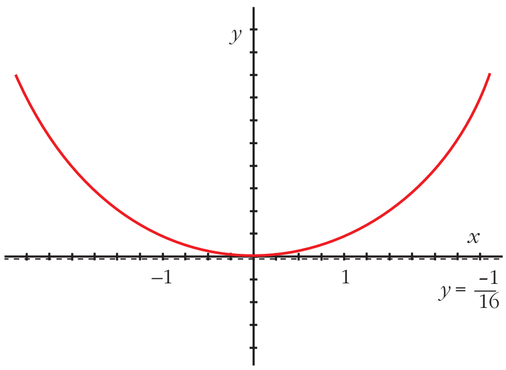
Directriu: $y = -\frac{1}{4}$



d) Vèrtex: (0, 0)

Focus: $\left(0, \frac{1}{16}\right)$

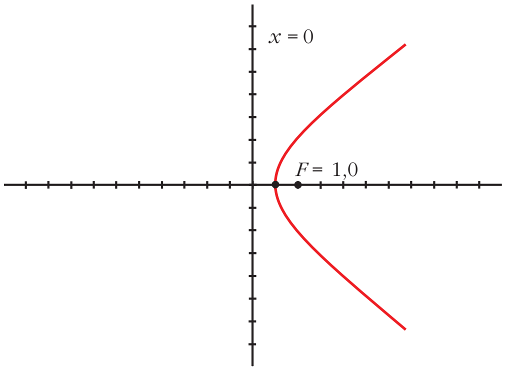
Directriu: $y = -\frac{1}{16}$



e) Vèrtex: (1, 0)

Focus $(2, 0)$

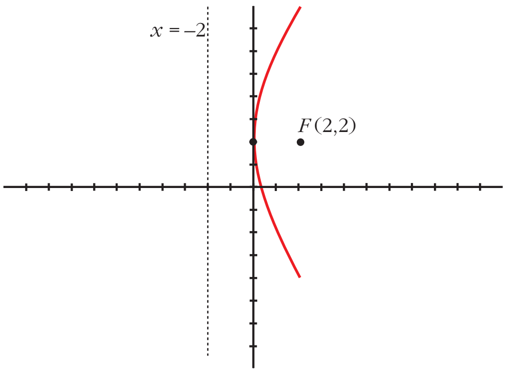
Directriu: $x = 0$



f) Vèrtex: $(0, 2)$

Focus $(2, 2)$

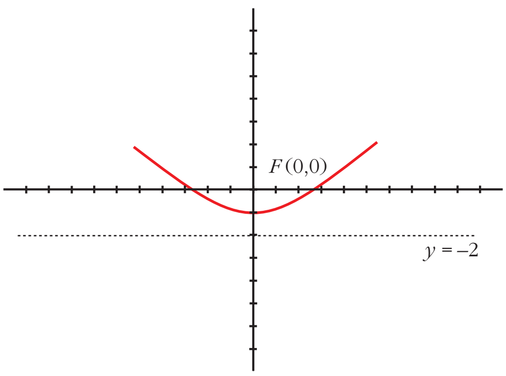
Directriu: $x = -2$



g) Vèrtex: $(0, -1)$

Focus $(0, 0)$

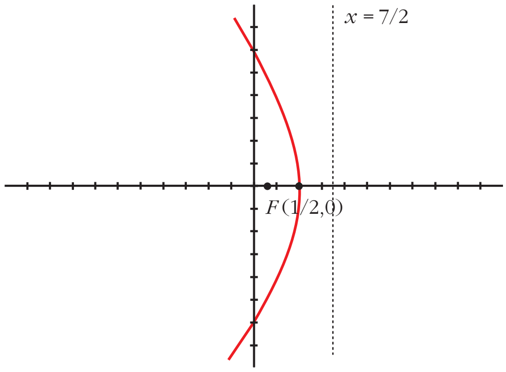
Directriu: $x = -2$



h) Vèrtex: $(2, 0)$

Focus $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Directriu: $x = \frac{7}{2}$



39. Troba les equacions de les paràboles determinades de les maneres següents:

a) Directriu, $x = -5$. Focus, $(5, 0)$

b) Directriu, $y = 3$. Vèrtex, $(0, 0)$.

c) Vèrtex $(0, 0)$ i passa per $(2, 3)$. (2 solucions.)

a) $y^2 = 20x$; b) $x^2 = -12y$; c) $y^2 = \frac{9}{2}x$; $x^2 = \frac{4}{3}y$

40. Troba el lloc geomètric dels punts que equidisten del punt $(3, 0)$ i de la recta $y = -3$.

$(x - 3)^2 = 6y$

41. Escriu l'equació de la paràbola de focus $F(2, 1)$ i directriu $y + 3 = 0$.

$(y - 1)^2 = 10\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Llocs geomètrics

42. Troba, en cada cas, el lloc geomètric dels punts que equidisten de A i B.

a) $A(5, -3)$ $B(2, 0)$ b) $A(3, 5)$ $B(-4, 5)$

c) $A(2, 7)$ $B(2, -1)$

a) $\sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 =$

$= x^2 - 4x + 4 + y^2$

$-6x + 6y + 30 = 0$

$-x + y + 5 = 0$

b) $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2}$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 =$

$= x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10y + 25$

$-14x - 7 = 0$

$2x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-1}{2}$

c) $\sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 =$

$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$

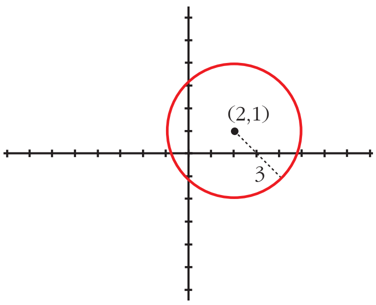
$-16y + 48 = 0$

$y = 3$

43. Troba l'equació del lloc geomètric dels punts P tals que $|\overrightarrow{AP}| = 3$, sent $A(2, 1)$.
Representa-la.

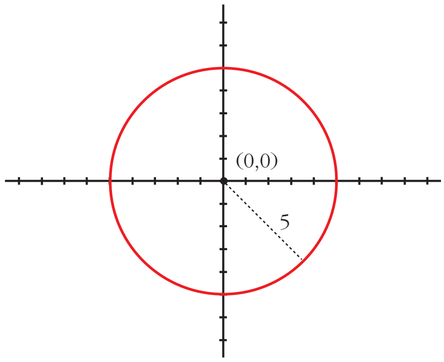
$\left|\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$



44. Troba l'equació que compleixen tots els punts la distància a l'origen de coordenades dels quals és 5.
Representa-la.

$\left|\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\right| = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$



45. Troba el lloc geomètric dels punts $P(x, y)$ la diferència de quadrats de distàncies als punts $A(0, 0)$ i $B(6, 3)$ dels quals és 15. Quina figura n'obtens?

$\left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\right)^2 -$

$- \left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = 15$

Una recta d'equació: $2x + y = 5$

Pàgina 213

46. Troba el lloc geomètric dels punts la distància a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ dels quals és 6.

El valor absolut donarà lloc a dues rectes.

$$\frac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 6 \rightarrow \begin{array}{l} 4x - 3y = 19 \\ -4x + 3y = 41 \end{array}$$

47. Troba el lloc geomètric dels punts que equidisten de les rectes:
r: $3x - 5y + 11 = 0$, s: $3x - 5y + 3 = 0$
Interpreta les línies obtingudes.

$$\frac{|3x - 5y + 11|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{|3x - 5y + 3|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}}$$

- Tenint en compte el valor absolut, $3x - 5y + 7 = 0$.
- És una recta paral·lela a les altres dues, que passa entremig seu, a igual distància de totes dues.

48. Troba les equacions de les bisectrius dels angles que formen les rectes *r* i *s*: *r*: $4x - 3y + 8 = 0$, *s*: $12x + 5y - 7 = 0$

$-8x - 64y = -139$

$112x - 14y = -69$

Per resoldre

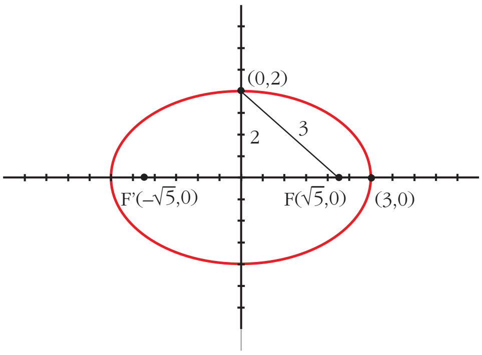
49. Identifica les còniques següents, calcula'n els elements característics i dibuixa-les:
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$; b) $16x^2 - 9y^2 = 144$; c) $9x^2 + 9y^2 = 25$; d) $x^2 - 4y^2 = 16$; e) $y^2 = 14x$; f) $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) És una el·lipse

Vèrtexs: (0, 2); (0, –2); (3, 0) i (–3, 0)

Focus: $(\sqrt{5}, 0)$ i $(-\sqrt{5}, 0)$

Exc: $\dfrac{\sqrt{5}}{3} = 0{,}75$



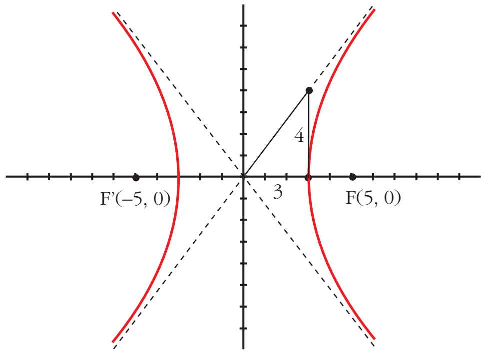
b) És una hipèrbola

Vèrtexs: (3, 0) i (–3, 0)

Focus: (5, 0) i (–5, 0)

Exc: $\dfrac{5}{3} = 1{,}\widehat{6}$

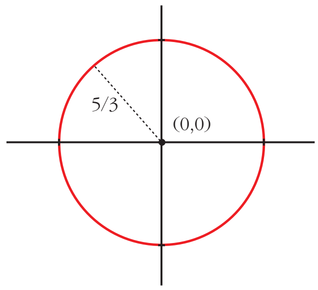
Asímptotes: $y = \dfrac{4}{3}x$ i $y = -\dfrac{4}{3}x$



c) És una circumferència

Centre: (0, 0)

Radi: $\dfrac{5}{3}$



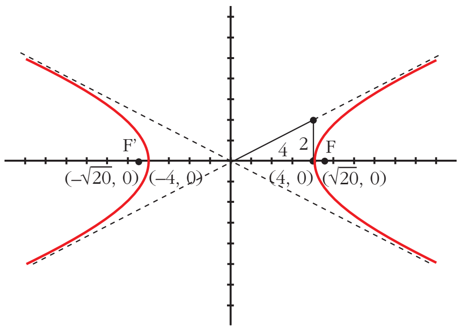
d) És una hipèrbola

Vèrtexs: (4, 0) i (–4, 0)

Focus: $(\sqrt{20}, 0)$ i $(-\sqrt{20}, 0)$

Exc: $\dfrac{\sqrt{20}}{4} = 1{,}12$

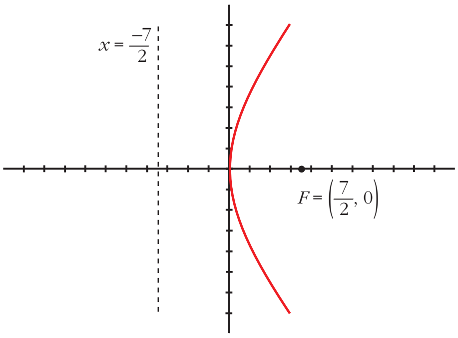
Asímptotes: $y = \dfrac{1}{2}x$ i $y = -\dfrac{1}{2}x$



e) És una paràbola

Directriu: $x = -\dfrac{7}{2}$

Focus: $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$



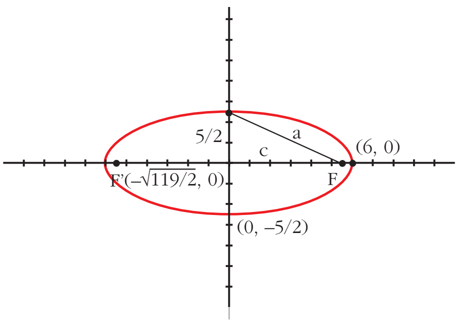
f) És una el·lipse

$a = 6$; $b = \frac{5}{2}$; $c = \frac{\sqrt{119}}{2}$

Vèrtexs: $\left(0, \frac{5}{2}\right)$; $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$; $(6, 0)$ i $(-6, 0)$

Focus: $\left(\frac{\sqrt{119}}{2}, 0\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{119}}{2}, 0\right)$

Exc: $\frac{\sqrt{119/2}}{6} = 0{,}91$



50. Troba les equacions de les circumferències següents:

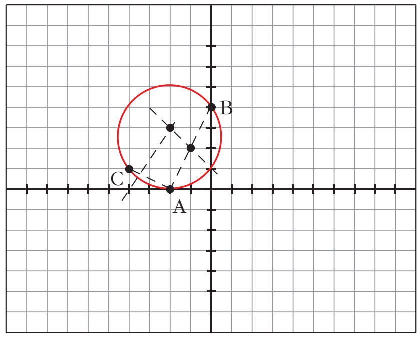
a) Passa pels punts *A*(–2, 0), *B*(0, 4) i *C*(–4, 1).

Mira el problema resolt 1 (pàgina 207).

b) Passa per l'origen de coordenades i pels punts *A*(4, 0) i *B*(0, 3).

c) Té el centre en la recta $x - 3y = 0$ i passa pels punts (–1, 4) i (3, 6).

a)



mediatriu entre A i B

$PM = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1, 2)$

pendent AB és $\frac{4-0}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2$

per tant, la mediatriu 1

$y = 2 - \frac{1}{2}(x+1)$

$y = 2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

mediatriu entre AC

$PM = \left(\frac{-2+(-4)}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$

pendent AC és $\frac{1-0}{-4-(-2)} = \frac{1}{-2}$

per tant, la mediatriu 2

$y = \frac{1}{2} + 2(x+3) \rightarrow$

$\rightarrow y = \frac{1}{2} + 2x + 6 \rightarrow y = 2x + \frac{13}{2}$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \\ y = 2x + \frac{13}{2} \end{cases}$$

$\frac{-x}{2} + \frac{3}{2} = 2x + \frac{13}{2}$

$-x + 3 = 4x + 13$

$-5x = 10$

$x = -2 \rightarrow y = \frac{5}{2}$

centre circumferència $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$

radi = $dc\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ a $A(-2, 0)$ =

$= \sqrt{(-2-(-2))^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} =$

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

per tant, $(x + 2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

b) Calculem les mediatrius de (0, 0)-(4, 0) i (0, 0)-(0, 3)

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2}$

i mirem la seva intersecció, que serà el centre de la circumferència $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

$x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

c) Mediatriu de (–1, 4)-(3, 6)

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$

i mirem la intersecció amb $x - 3y = 0$, donant centre (3, 1)

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

51. Escriu l'equació d'una el·lipse amb centre en l'origen de coordenades i els focus en l'eix d'abscisses, sabent que passa pel punt *P*(8, –3) i que el seu eix major és igual al doble del menor.

$\frac{4x^2}{265} + \frac{y^2}{265} = 1$

52. Troba l'equació de la hipèrbola que té el centre en l'origen de coordenades i els focus en l'eix d'abscisses, sabent que passa pel punt $P(\sqrt{5}/2, 1)$ i que una de les seves asímptotes és la recta $y = 2x$.

No existeix cap hipèrbola que compleixi aquestes característiques.

53. S'anomena hipèrbola equilàtera aquella en la qual $a = b$. Troba l'equació de la hipèrbola equilàtera els focus de la qual són (5, 0) i (–5, 0).

$\frac{2x^2}{25} - \frac{2y^2}{25} = 1$

54. Troba l'equació de la hipèrbola les asímptotes de la qual són les rectes $y = \pm\frac{3}{5}x$ i els focus (2, 0) i (–2, 0).

$4 = a^2 + b^2$ i sabem que $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$

$a^2 = \frac{50}{17}$, $b^2 = \frac{18}{17}$, per tant

$\frac{17x^2}{50} - \frac{17y^2}{18} = 1$

55. Una circumferència passa pels punts (1, 3) i (3, 5) i té el centre damunt la recta $x + 2y = 3$. Troba'n l'equació.

Mirem la mediatriu de (1, 3)-(3, 5)

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} \rightarrow$

$\rightarrow x + y = 6$

i fem la intersecció amb $x + 2y = 3$

Centre: (9, –3)

Radi: 10

$(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 100$

56. Troba les equacions de les paràboles següents:

a) Focus (0, 0); directriu $y = -2$.

b) Focus (2, 0); directriu $x = -1$.

c) Focus (1, 1); vèrtex $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

a) $x^2 = 4(y + 1)^2$

b) $y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c) $(x - 1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$

57. a) Troba l'equació de la circumferència el centre de la qual és $C(-1, 1)$ i és tangent a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.
b) De totes les rectes paral·leles a la bisectriu del primer quadrant, troba les que siguin tangents a la circumferència trobada en l'apartat anterior.

a) La distància de $(-1, 1)$ a la recta tangent serà el radi.

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Totes les paral·leles a la bisectriu del primer quadrant són $y = x + h$, on h és qualsevol nombre. Es compleix que la distància del centre a aquesta recta serà igual al radi de la circumferència (2): $\dfrac{|+1 + 1 - h|}{\sqrt{2}} = 2$

$y = x + 2(1 - \sqrt{2})$

$y = x + 2(\sqrt{2} - 1)$

58. Troba l'equació de la circumferència el centre de la qual és el punt $C(3, 2)$ i una de les rectes tangents de la qual té com a equació $4x - 3y - 5 = 0$.
Determina si el punt $X(3, 3)$ és interior, és exterior o és en la circumferència.

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + \dfrac{324}{25} = 0$

El punt $(3, 3)$ és exterior, ja que la distància al centre és 1, superior a la del radi de la circumferència, $\dfrac{1}{5}$.

59. a) Determina l'equació que defineix el lloc geomètric dels punts del pla que són centre de les circumferències que passen pels punts $P(4, 0)$ i $Q(0, 2)$.
b) Una circumferència de longitud 6π, que conté l'origen de coordenades, és centrada en un dels punts del lloc definit en a). Troba'n el centre.

a) És la seva mediatriu.

$PM = \left(\dfrac{4 + 0}{2}, \dfrac{0 + 2}{2}\right) = (2, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = 4 - 0, 0 - 2 = 4, -2 \rightarrow$

$\rightarrow$ perpendicular $(2, 4)$

per tant, $4x - 2y - 6 = 0$

b) El centre compleix $4x - 2y - 6 = 0$

per tant $4a - 2b - 6 = 0$

i com que passa per $(0, 0)$ i $p = 6\pi = 2\pi r$

$r = 3$

$a^2 + b^2 = r^2 \rightarrow a^2 + b^2 = 9$

$\left\{\begin{array}{l} 4a - 2b - 6 = 0 \\ a^2 + b^2 = 9 \end{array}\right. \rightarrow a = \sqrt{9 - b^2}$

$16(9 - b^2) = 4b^2 + 24b + 36$

$-5b^2 - 6b + 27 = 0$

$b = -3 \rightarrow a = 0$

$b = \dfrac{9}{5} \rightarrow a = \dfrac{12}{5}$

2 solucions $(0, -3)$ i $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

60. Troba els punts d'intersecció de cada parella de circumferències i digues quina és la seva posició relativa.

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0} \\ \mathbf{x^2 + y^2 = 4} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0} \\ \mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0} \end{array}\right.$

a) Tangents interiors, al punt $(-2, 0)$

b) Tangents exteriors, al punt $(3, 0)$

Pàgina 214

61. Calcula l'equació de l'el·lipse els focus de la qual són els punts $F(-1, 2)$ i $F'(3, 2)$ i l'excentricitat de la qual és igual a 1/3.

$$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{32} = 1$$

62. La paràbola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ té com a focus el punt (0, 2). Troba'n la directriu.

Com que en l'equació hi ha y^2, vol dir que el vèrtex estarà desplaçat a l'horitzontal respecte al focus. (Mirem el vèrtex fent $y = 2$)

Vèrtex $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

$(y-2)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$

i la directriu $x = -3$

63. Troba l'equació del lloc geomètric dels punts del pla tals que la seva distància al punt (4, 0) sigui el doble de la seva distància a la recta $x = 1$.
Comprova que aquest lloc geomètric és una cònica i troba'n els focus.

a) $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{|x-1|}{1}$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

b) És una hipèrbola de focus a (4, 0) i (−4, 0)

64. Troba l'equació del lloc geomètric dels punts la distància dels quals al punt (4, 0) sigui igual a la meitat de la distància a la recta:
$x - 16 = 0$
Representa la corba que n'obtens.

distància (4, 0) a $x - 16 = 0$

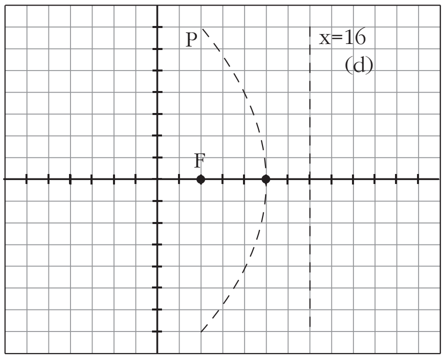
dist $(P, F) = 2 \cdot$ *dist* (P, d)

$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = 2 \cdot (16 - x)$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = (32 - 2x)^2$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 1\,024 - 128x + 4x^2$

$-3x^2 + y^2 + 120x - 1\,008 = 0$



65. Troba el punt geomètric dels punts $P(x, y)$ tals que el producte dels pendents de les rectes traçades des de P als punts:
$A(-2, 1)$ i $B(2, -1)$
sigui igual a 1.
Quina figura n'obtens? Representa-la.

$\vec{V_1}\ (-2 - x,\ 1 - y)\ \vec{V_2}\ (2 - x,\ -1 - y)$

pendents$_1 = \frac{-(1-y)}{-2-x}$ i pendent$_2 = \frac{-(-1-y)}{2-x}$

$\frac{-1+y}{-2-x} \cdot \frac{1+y}{2-x} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = -3$

És una el·lipse.

66. Descriu les còniques següents. Obtén els seus elements i dibuixa-les.

a) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

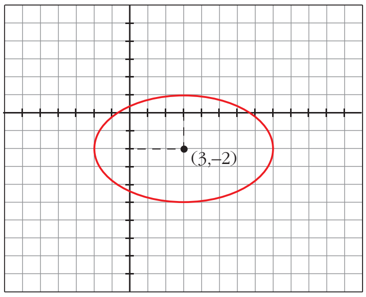
b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

c) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

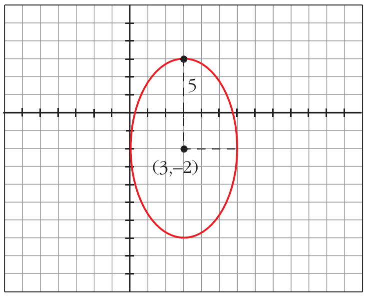
d) $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

a) Centre (3, −2)

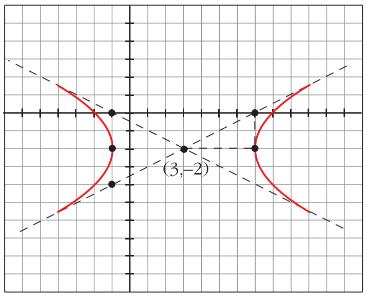
$a = 5$ i $b = 3$



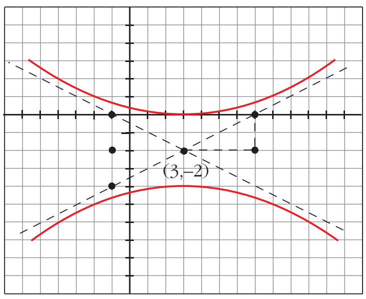
b) Centre (3, –2)
$a = 3$ i $b = 5$



c) Centre (3, –2)
$a = 4$ i $b = 2$



d) Centre (3, –2)
$a = 2$ i $b = 4$



67. Associa cadascuna de les equacions següents a una de les gràfiques que es donen a continuació:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ **b)** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

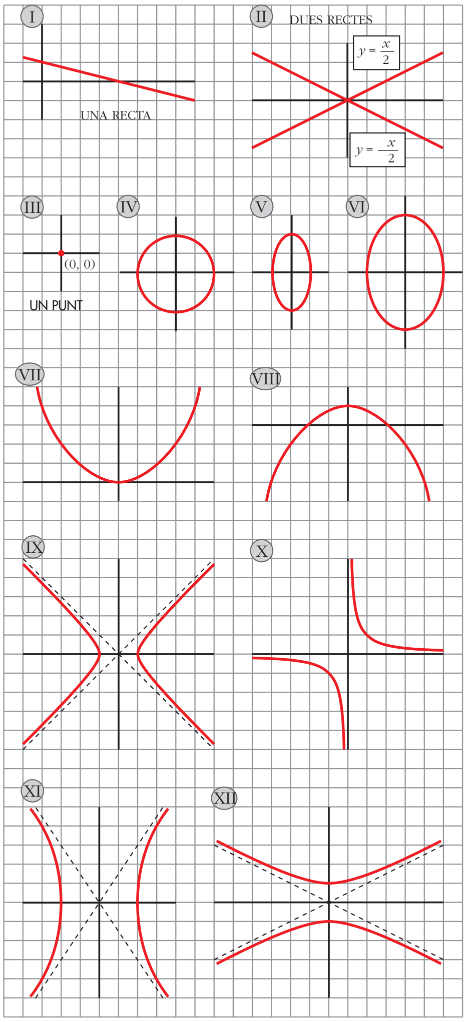
c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ **d)** $\frac{x}{4} + y = 1$

e) $\frac{x^2}{4} + y = 1$ **f)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

g) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ **h)** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 0$

i) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$ **j)** $\frac{x^2}{4} - y = 0$

k) $x^2 - y^2 = 1$ **l)** $xy = 1$



a) IV b)V c) VI d) I e) VIII
f) XI g) XII h) III i) II j) VII
k) IX l) X

Pàgina 215

68. a) Troba el lloc geomètric de tots els punts $P(x, y)$ del pla la suma de quadrats de distàncies dels quals als punts $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$ és 68. Pots comprovar que es tracta d'una circumferència de centre $O(0, 0)$. Quin és el seu radi?
b) Generalitza: troba el lloc geomètric dels punts del pla la suma de quadrats de distàncies dels quals a $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$ és k (constant), i comprova que es tracta d'una circumferència de centre $O(0, 0)$. Digues el valor del seu radi en funció de a i de k. Quina relació han de complir a i k perquè realment sigui una circumferència?

a) $\left(\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2 = 68$

$x^2 + y^2 - 25 = 0$

radi $= 5$

b) $x^2 + y^2 + \dfrac{a^2-k}{2} = 0$

on radi $= \sqrt{-\dfrac{a^2-k}{2}}$

per tant, cal que $k > a^2$ perquè sigui realment una circumferència.

Per aprofundir

69. Troba l'equació de la circumferència inscrita en el triangle de costats: $y = 0$, $3x - 4y = 0$, $4x + 3y - 50 = 0$

Distància del centre (a, b) és igual a totes 3 rectes

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{1} = \dfrac{3a-4b}{5} \\[2ex] \dfrac{b}{1} = \dfrac{4a+3b-50}{5} \end{array}\right\}$$

Centre: $(15, 5)$

Radi: 5

$x^2 + y^2 - 30x - 10y + 225 = 0$

70. Troba l'equació de la circumferència que passa per $(-3, 2)$ i $(4, 1)$ i és tangent a l'eix OX.

Distància del centre als dos punts i a la recta tangent és igual:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{1} = \sqrt{(a+3)^2+(b-2)^2} \\[2ex] \dfrac{b}{1} = \sqrt{(a-4)^2+(b-1)^2} \end{array}\right\} a = 1,\ b = 5$$

Centre: $(1, 5)$

Radi: (5)

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$

71. Determina l'equació de la circumferència de radi 10 que, en el punt $(7, 2)$, és tangent a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.

Centre $(1, 10)$ o $(13, -6)$; per tant,

$x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$; o

$x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$

72. Troba l'equació de la paràbola de vèrtex en el punt $(2, 3)$ i que passa pel punt $(4, 5)$.

$(y - 3)^2 = 2(x - 2)$, o

$(x - 2)^2 = 2(y - 3)$

73. Troba els vèrtexs, els focus i l'excentricitat de les còniques següents:

a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9y^2 + 36y + 27 = 0$

a) Realment: $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

El·lipse de centre $(2, -3)$

Vèrtexs: $(2, 0)$; $(2, -6)$; $(6, -3)$ i $(-2, -3)$

Focus: $(2 + \sqrt{7}, -3)$ i $(2 - \sqrt{7}, -3)$

Exc: $\frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}66$

b) Realment: $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$

Hipèrbola de centre $(1, 0)$

Vèrtexs: $(3, 0)$ i $(-1, 0)$

Focus: $(1 + \sqrt{5}, 0)$ i $(1 - \sqrt{5}, 0)$

Exc: $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}12$

c) Realment: $\frac{x^2}{9} + (y + 2)^2 = 1$

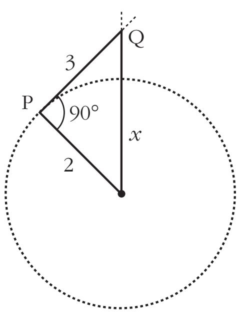
El·lipse de centre $(0, -2)$

Vèrtexs: $(0, -1)$; $(0, -3)$; $(3, -2)$ i $(-3, -2)$

Focus: $(\sqrt{8}, -2)$ i $(-\sqrt{8}, -2)$

Exc: $\frac{\sqrt{8}}{3} = 0{,}94$

74. Un segment *PQ* de 3 cm de longitud es mou recolzant tangencialment sobre la circumferència $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$. Si l'extrem *P* és el punt de tangència, quin és el lloc geomètric que descriu l'altre extrem *Q*?



Una circumferència d'igual centre i radi superior

$3^2 + 2^2 = \text{hipo}^2$

$x = \sqrt{13}$

Per tant, centre $(2, -3)$ i radi $\sqrt{13}$

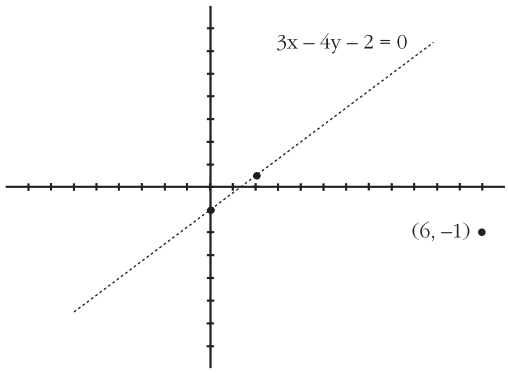
$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$

75. Posa l'equació del lloc geomètric dels punts *P*(*x*, *y*) que equidisten del punt *F*(6, –1) i de la recta *r*: $3x - 4y - 2 = 0$. (Trobaràs una equació complicada. No et molestis a simplificar-la.) De quina figura es tracta? Per respondre aquesta pregunta, fixa't en com s'ha definit i no quina n'és l'equació.
Representa *r* i *F*. Com s'hauran de situar uns nous eixos coordenats perquè l'equació d'aquesta corba sigui $y^2 = kx$? Quant val *k*?

a) $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 16$

és una paràbola

b)



S'haurien de definir l'eix de les y paral·lel a la recta, a mitja distància amb el punt, i un eix x perpendicular a la recta i que passés per $(6, -1)$.

c) $k = 2 \cdot$ distància entre $(6, -1)$ i la recta; $k = 8$

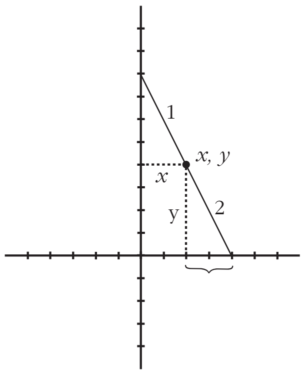
76. Un segment de longitud 3 recolza els seus extrems sobre els eixos de coordenades prenent totes les posicions possibles.

a) Determina l'equació del lloc geomètric del punt del segment que està situat a distància 1 de l'extrem que recolza sobre l'eix O*Y*.

b) Identifica la cònica resultant.

En dibuixar les coordenades del punt P(x, y), obtens dos triangles rectangles semblants, les hipotenuses dels quals són 1 i 2, respectivament.

a)



Catet: $c^2 + y^2 = 2^2$

$c = \sqrt{4 - y^2}$

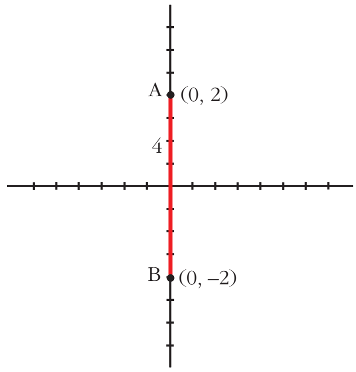
$\frac{2}{1} = \frac{\sqrt{4 - y^2}}{x}$

$2x = \sqrt{4 - y^2}$

b) És una el·lipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

77. Donat un segment *AB* de longitud 4, troba l'equació del lloc geomètric dels punts *P* del pla que verifiquen: $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$

Pren com a eix X la recta que conté el segment i com a eix Y la mediatriu d'AB.



$2\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y-2)^2}\right)^2 +$

$+ \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2}\right)^2 = 18$

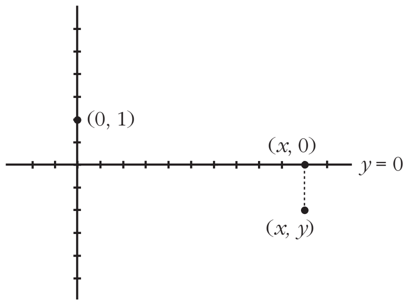
$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y = 2$

78. Sigui *r* una recta i *F* un punt la distància del qual a *r* és 1. Anomenem *H* la projecció d'un punt qualsevol, *P*, sobre *r*. Troba el lloc geomètric dels punts que verifiquen: $\overline{PH} + \overline{PF} = 3$.

Pren els eixos de manera que les coordenades de F siguin (0, 1).

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-x)^2 + y^2} = 3$

$x^2 = -4(y - 2)$



Per pensar una mica més

79. Siguin les rectes:

r: $y = \frac{1}{2}x$, s: $y = -\frac{1}{2}x$

Prenem un segment de longitud 4, un dels extrems del qual sigui *r* i l'altre *s*.

Volem trobar el lloc geomètric dels punts mitjans d'aquests segments. Per fer-ho:
a) Expressa *r* i *s* en coordenades paramètriques. Fes servir un paràmetre diferent per a cadascuna.
b) Expressa un punt *R* de *r* i un altre *S* de *s*.
c) Obtén, mitjançant dos paràmetres, l'expressió del punt mitjà del segment *RS*.
d) Expressa analíticament *dist*(*R*, *S*) = 4.
e) Relacionant les expressions obtingudes en c) i en d), obtindràs l'equació implícita del lloc geomètric buscat: $x^2 + 16y^2 = 16$
f) Identifica el tipus de corba de què es tracta.

a) $\left.\begin{aligned} x &= 2 + 2\lambda \\ y &= 1 + \lambda \end{aligned}\right\} r$

$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 2\alpha \\ y &= -1 - \alpha \end{aligned}\right\} s$

b) $r \rightarrow (2 + 2\lambda,\ 1 + \lambda)$

$s \rightarrow (2 + 2\alpha,\ -1 - \alpha)$

c) $\left(\dfrac{(2 + 2\lambda) + (2 + 2\alpha)}{2},\ \dfrac{(1 + \lambda) + (-1 - \alpha)}{2}\right)$

d) $\sqrt{(2 + 2\lambda - 2 - 2\alpha)^2 + (1 + \lambda + 1 + \alpha)^2} = 4$

e) $(2\lambda - 2\alpha)^2 + (2 + \lambda + \alpha)^2 = 16 \rightarrow$
$\rightarrow (4y)^2 + x^2 = 16$

f) És una el·lipse.

Per acabar

Resol

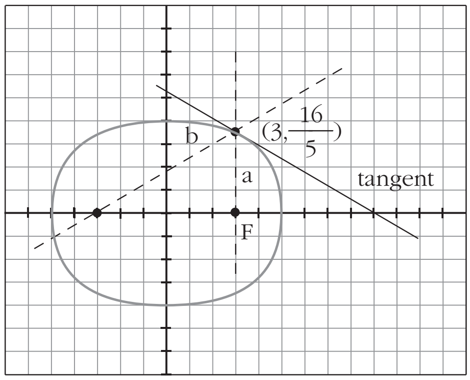
1. De vegades, a l'andana del metro es produeix el fenomen següent: una persona sent parlar una altra amb una nitidesa absoluta, però no la troba a prop. Mirant al seu voltant, arriba a descobrir que la veu prové d'algú que és a l'andana del davant i que no està parlant més fort que els altres. Explica a què es deu aquest fenomen, partint del fet que la volta de l'andana és semiel·líptica.

La persona que parla es troba en el focus de l'el·lipse que forma la volta de l'andana. Les ones sonores reboten a la volta, dirigint-se cap al focus contrari, on la persona que és allà pot sentir perfectament la persona de l'andana contrària.

2. Lewis Carroll, matemàtic i autor d'*Alícia al país de les meravelles*, es va construir una taula de billar de forma el·líptica. En aquesta taula, si una bola passa per un focus, sense efecte, passarà necessàriament per l'altre focus després de rebotar. I així successivament, fins que s'aturi. Explica per què.

Fent servir l'esquema de la pàgina 217, s'observa que una trajectòria, passant pel focus F, genera un rebot en direcció al focus F!

3. Troba l'equació de la tangent a l'el·lipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ en els punts d'abscissa 3.
Utilitza el fet que la recta tangent és la bisectriu de l'angle que formen els radis vectors. De les dues bisectrius, hauràs d'escollir-ne l'escaient.



recta $\Rightarrow x = 3$

recta $\Rightarrow 16x - 30y + 48 = 0$

bisectriu:

$$|x - 3| = \frac{|16x - 30y + 48|}{34}$$

1) $34(x - 3) = 16x - 30y + 48 \rightarrow$

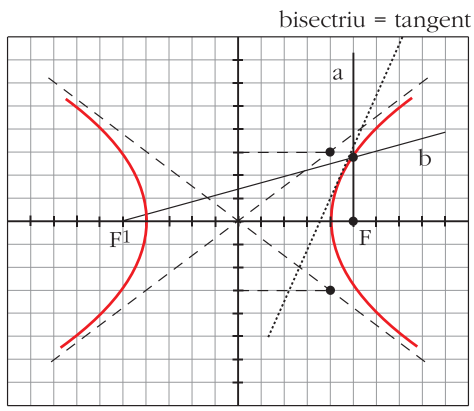
$\rightarrow 3x + 5y - 30 = 0 \rightarrow$ correcte.

2) $34(x - 3) = -16x + 30y - 48 \rightarrow$

$\rightarrow 50x - 30y - 54 = 0 \rightarrow$ l'altra bisectriu.

4. Troba la tangent a la hipèrbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punt d'abscissa 5.

Utilitza el fet que la tangent és la bisectriu dels radis vectors i escull l'escaient.



recta $a \Rightarrow x = 5$

recta $b \Rightarrow 9x - 40y + 45 = 0$

bisectriu entre a i b

$$|x - 5| = \frac{|9x - 40y + 45|}{41}$$

1) $41(x - 5) = 9x - 40y + 45 \rightarrow$

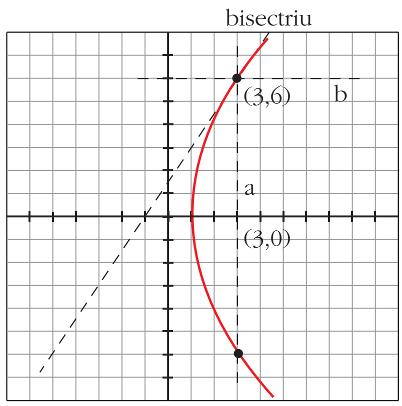
$\rightarrow 16x + 20y - 125 = 0 \rightarrow$ no correcte.

2) $41(x - 5) = -9x + 40y - 45 \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 4y - 16 = 0 \rightarrow$ correcte.

5. Troba la tangent a la paràbola $y^2 = 12x$ en el punt de $P(3, 6)$.

*** Utilitza el fet que la tangent és la bisectriu de l'angle format pel radi vector *PF* i la recta perpendicular per *P* a la directriu.**



recta $a \Rightarrow x = 3$

recta $b \Rightarrow y = 6$

bisectriu entre a i b

$|x - 3| = |y - 6|$

1) $x - 3 = y - 6 \rightarrow$

$\rightarrow x - y + 3 = 0 \rightarrow$ correcte.

2) $x - 3 = -y + 6 \rightarrow$

$\rightarrow x + y - 9 = 0 \rightarrow$ no correcte.