UNITAT DIDÀCTICA 9
FUNCIONS ELEMENTALS

Pàgina 222

A través de la lupa

Mirant un objecte petit (el tap d'un bolígraf, per exemple) a través d'una lupa situada a 10 cm, aquest es veu notablement ampliat. En variar la distància se'n modifica la mida. La relació entre ambdues variables és (per a una certa lupa):

$$A = \frac{2}{2 - d}$$

d = distància de la lupa a l'objecte (en dm)
A = augment (número pel qual es multiplica la mida)
Calcula A per a $d = 1$, $d = 0{,}5$ i $d = 3$. Què significa que $A = -1$?

$d = 1 \rightarrow A = 2$
$d = 0{,}5 \rightarrow A = 4$
$d = 3 \rightarrow A = -2$
Si A és -1, la mida no augmenta, sinó que disminueix. Es veu més petit.

Refredar l'aigua

Retirem un cassó amb aigua bullent i el deixem refredar. La temperatura ambient és de 20º. La temperatura del cassó T (ºC) varia amb el temps, t (min). Suposem que la relació és: $T = 20 + 80 \cdot 0{,}95^t$
Esbrina la temperatura per a $t = 0$, $t = 30$, $t = 60$ i $t = 90$.

$t = 0 \rightarrow T = 100$ ºC
$t = 30 \rightarrow T = 37$ ºC
$t = 60 \rightarrow T = 23{,}7$ ºC
$t = 90 \rightarrow T = 20{,}8$ ºC

Pàgina 223

Quin soroll!

La intensitat del so que ens arriba d'un focus sonor depèn de la distància a la qual ens trobem. Suposem que:

$$I = \frac{100}{d^2}$$

I = intesitat (en decibels)
d = distància (en m)
Esbrina a quina distància hem d'estar perquè la intensitat sigui de 16 db.

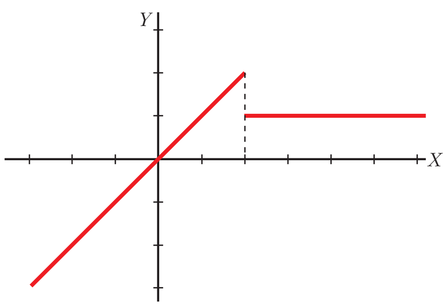
$$16 = \frac{100}{d^2}$$

$d = 2{,}5$ metres

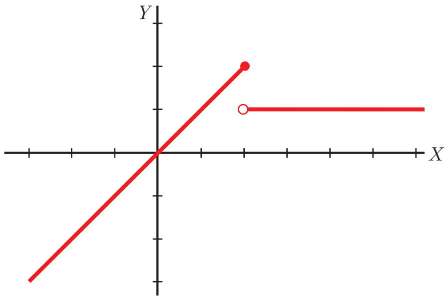
Representació de funcions

Per representar la funció $y = \begin{cases} x \text{ si } x \le 2 \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ ***procedim així:***

a) Representem la funció $y = x$ fins a l'abscissa $x = 2$.
Representem la funció $y = 1$ des de $x = 2$ cap endavant.



b) En $x = 2$ solament és vàlid el punt corresponent a la primera branca (el signe = de l'expressió $x \le 2$ serveix per incloure-hi aquest valor). Tenim això en compte excloent, per mitjà d'un petit cercle, el punt de l'altra branca.

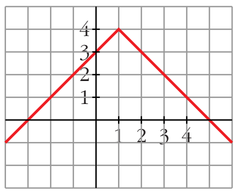


Representa gràficament les funcions següents:

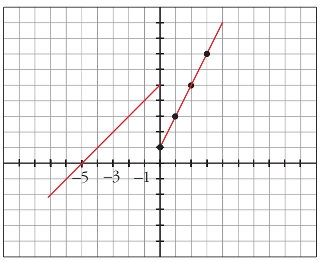
a) $y = \begin{cases} x + 3 \text{ si } x < 1 \\ 5 - x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x + 5 \text{ si } x \leq 0 \\ 2x \text{ si } x > 0 \end{cases}$

a)



b)



Pàgina 225

1. Troba el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$;

c) $y = \sqrt{1 - x}$ **d)** $y = \sqrt{4 - x^2}$;

e) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$;

g) $y = 1/\sqrt{x - 1}$ **h)** $y = 1/\sqrt{1 - x}$;

i) $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$ **j)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 4}$;

k) $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$;

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

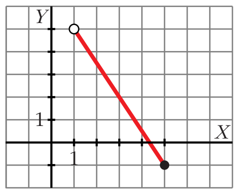
o) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ **p)** $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

q) L'àrea d'un quadrat de costat variable, *l*, és $A = l^2$.

a) $\mathbb{R}$; b) $[1, \infty)$; c) $(-\infty; 1]$; d) $[-2, 2]$; e) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; f) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; g) $(1, \infty)$; h) $(-\infty, 1)$; i) $(-2, 2)$; j) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; k) $\mathbb{R}$; l) $\mathbb{R} - \{0\}$; m) $\mathbb{R} - \{0\}$; n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$; o) $\mathbb{R}$; p) $\mathbb{R} - \{-1\}$; q) $l > 0$

Pàgina 226

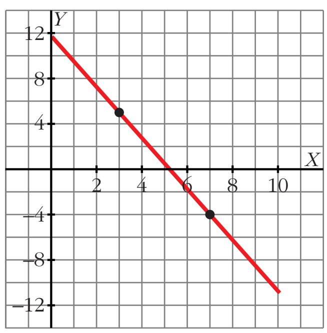
2. Representa la funció següent:
$y = -2x + 7$, $x \in (1, 4]$.



3. Una funció lineal *f* compleix: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $D(f) = [0, 10]$. Quina n'és l'expressió analítica? Representa-la.

$$m = \frac{-4 - 5}{7 - 3} = -\frac{9}{4}$$

$$y = 5 - \frac{9}{4}(x - 3) = -\frac{9}{4}x + \frac{47}{4},\ x \in [0, 10]$$



Pàgina 227

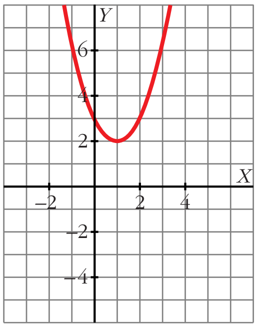
4. Representa les paràboles:

a) $y = x^2 - 2x + 3$; **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$;

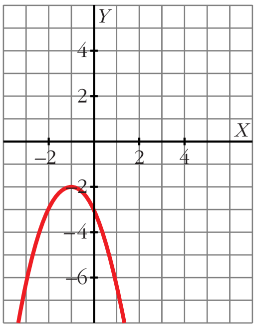
c) $y = x^2 - 6x + 5$; **d)** $y = 2x^2 - 10x + 8$;

e) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$; **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

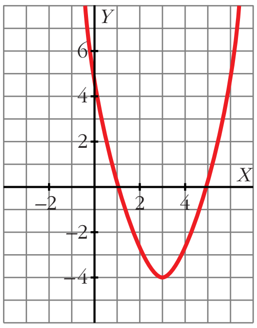
a)



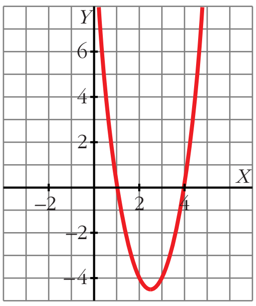
b)



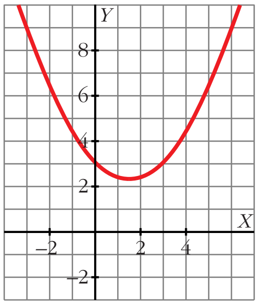
c)



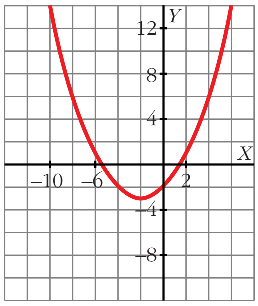
d)



e)



f)



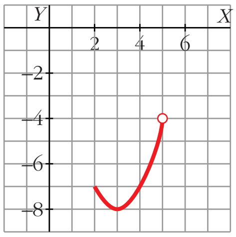
5. Representa les funcions:

a) $y = x^2 - 6x + 1,\ x \in [2, 5)$

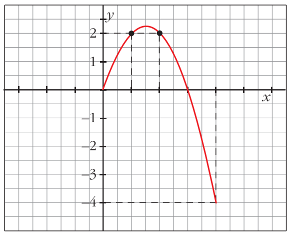
b) $y = -x^2 + 3x,\ x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4,\ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

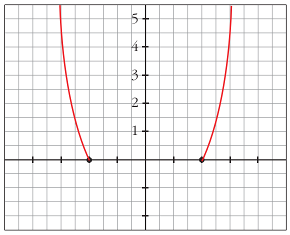
a)



b)



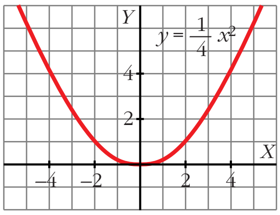
c)



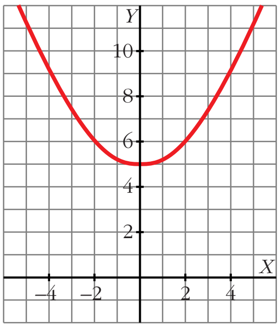
Pàgina 228

6. Representa $y = \frac{1}{4}x^2$ i a partir d'aquesta, aquestes altres:

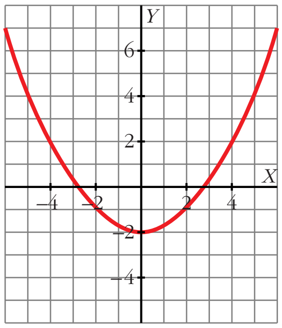
a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 5$; b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$;



a)



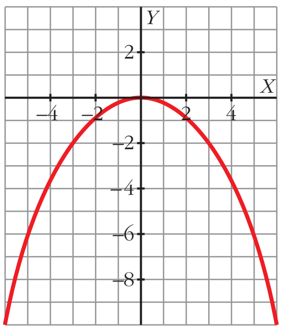
b)



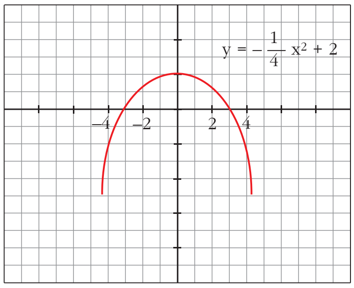
7. Tenint en compte l'exercici anterior representa:

a) $y = -\frac{1}{4}x^2$ i b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

a)



b)



Pàgina 229

8. Representa la funció següent:

$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ per a $x \geq 1$.

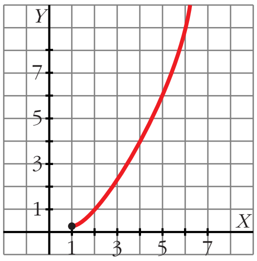
A partir d'aquesta, fes el mateix amb:

a) $y = f(x - 5)$

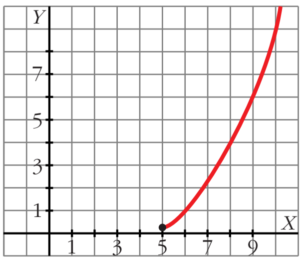
b) $y = f(x + 1)$

c) $y = f(-x)$

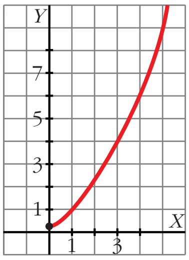
d) $y = f(-x + 2)$



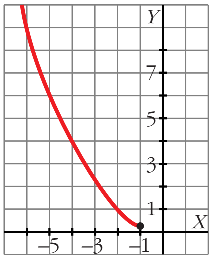
a)



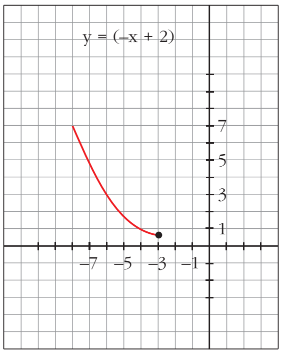
b)



c)



d)



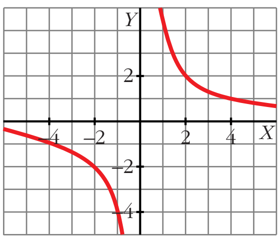
Pàgina 230

9. Representa:

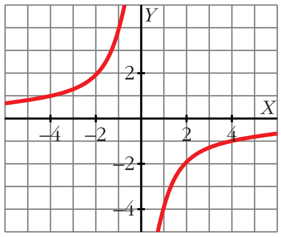
a) $y = \frac{4}{x}$; **b)** $y = -\frac{4}{x}$; **c)** $y = \frac{4}{x-3}$;

d) $y = \frac{4}{x-3} + 2$

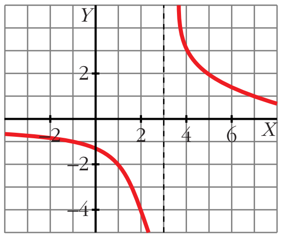
a)



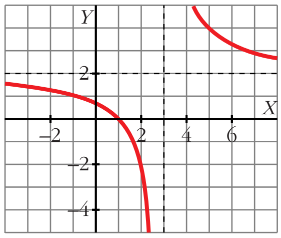
b)



c)



d)

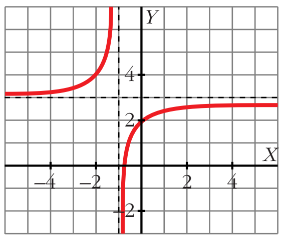


10. Representa aquestes funcions:

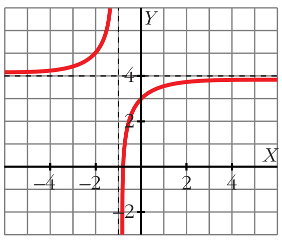
a) $y = \frac{3x + 2}{x + 1}$ **b)** $y = \frac{4x + 3}{x + 1}$

c) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ **d)** $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

a)

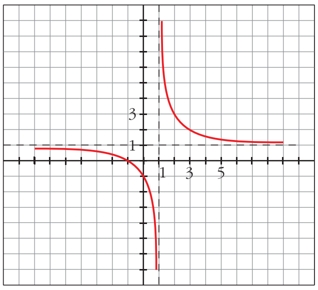


b)



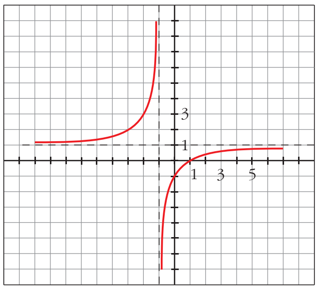
c) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

és com la de $y = \dfrac{2}{x}$ desplaçada 1 cap a la dreta i 1 amunt.



d) $y = \dfrac{x-1}{x+1} = 1 + \dfrac{-2}{x+1}$

és com la de $y = \dfrac{-2}{x}$ desplaçada 1 cap a l'esquerra i 1 cap amunt.



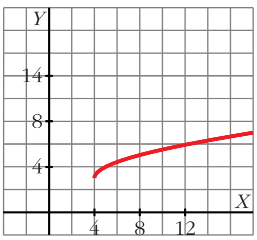
Pàgina 231

11. Representa les funcions següents:

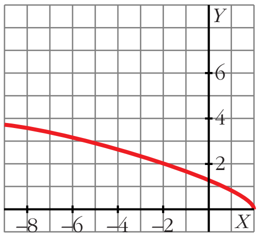
a) $y = 3 + \sqrt{x-4}$ **b)** $y = \sqrt{2-x}$

c) $y = \sqrt[3]{-x}$ **d)** $y = \sqrt[3]{-x} + 2$

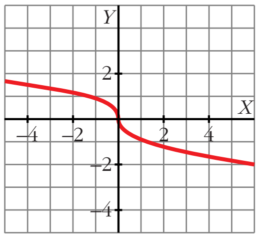
a)



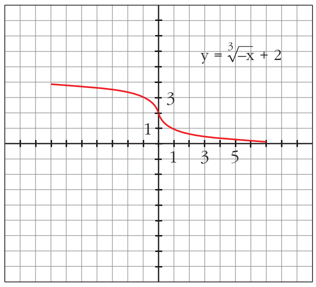
b)



c)



d)

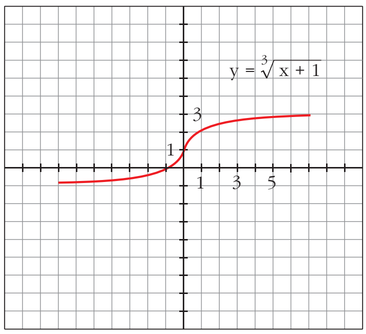


12. Representa:

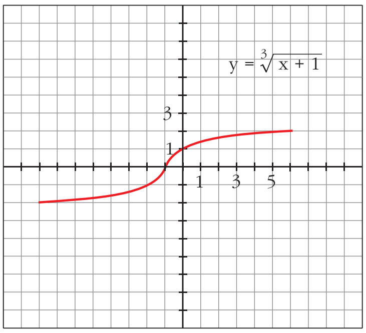
a) $y = \sqrt[3]{x} + 1$; **b)** $y = \sqrt[3]{x+1}$

c) $y = \sqrt[3]{-x+1}$; **d)** $y = -\sqrt{4-x}$

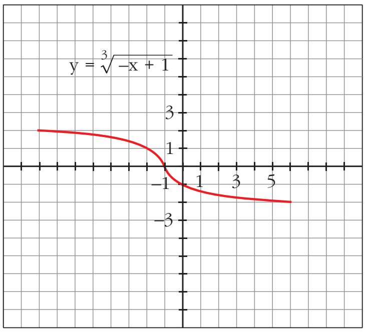
a)



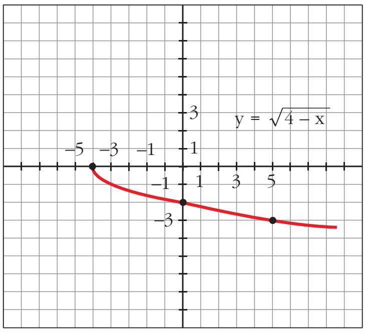
b)



c)



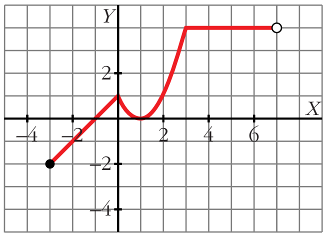
d)



Pàgina 232

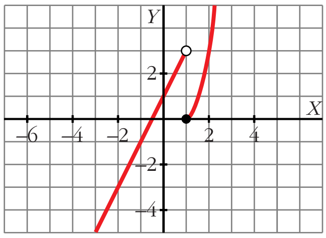
13. Representa aquesta funció:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1, & x \in [0, 3] \\ 4, & x \in (3, 7) \end{cases}$$



14. Fes la representació gràfica de la funció següent:

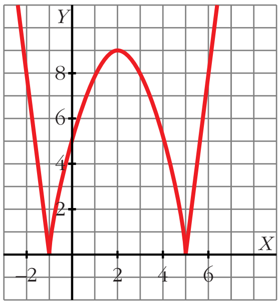
$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Pàgina 233

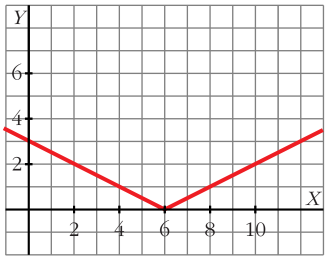
15. Representa:

$$y = |-x^2 + 4x + 5|$$



16. Representa gràficament:

$$y = \left|\frac{x}{2} - 3\right|$$



Pàgina 234

17. Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ i $g(x) = x^2$, obtén les expressions de $f[g(x)]$ i $g[f(x)]$. Troba $f[g(4)]$ i $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179$; $g[f(4)] = 1$

18. Si $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2 + 5$, troba $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$. Troba el valor d'aquestes funcions en $x = 0$ i $x = 2$.

$f \circ g\,(x) = \sin\,(x^2 + 5)$; $f \circ g(0) = -0{,}96$;

$f \circ g(2) = 0{,}41$

$g \circ f(x) = \sin^2 x + 5$; $g \circ f(0) = 5$;

$g \circ f(2) = 5{,}83$

$f \circ f(x) = \sin\,(\sin x)$; $f \circ f(0) = 0$;

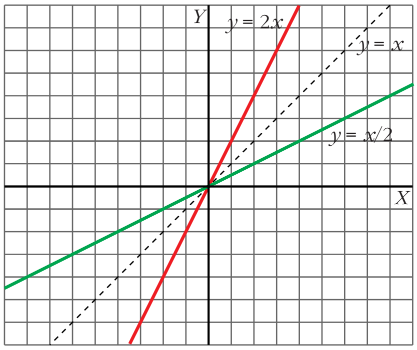
$f \circ f(2) = 0{,}79$

$g \circ g(x) = (x^2 + 5)^2 + 5$; $g \circ g(0) = 30$;

$g \circ g(2) = 86$

Pàgina 235

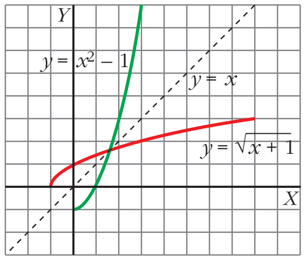
19. Representa $y = 2x$, $y = x/2$ i comprova que són inverses.



20. Comprova que cal descompondre $y = x^2 - 1$ en dues branques per trobar-ne les inverses respecte de la recta $y = x$. Esbrina quines són.

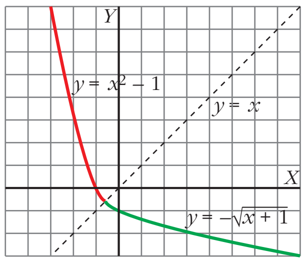
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$;

$y^{-1} = \sqrt{x + 1}$



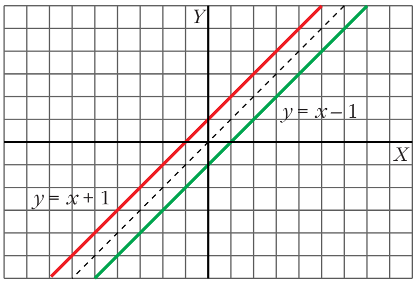
b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x + 1}$



21. Si $f(x) = x + 1$ i $g(x) = x - 1$, comprova que $f[g(x)] = x$. ¿Són $f(x)$ i $g(x)$ funcions inverses? Comprova que el punt $(a, a + 1)$ es troba a la gràfica de f i que el punt $(a + 1, a)$ és a la gràfica de g. Representa les dues funcions i observa'n la simetria respecte de la recta $y = x$.

$f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$
Són funcions inverses.



Pàgina 244

Per practicar

Domini de definició

22. Indica si els valors de x: 0; –2; 3,5; $\sqrt{2}$; –0,25 pertanyen al domini d'aquestes funcions:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; c) $y = x - \sqrt{2}$;

d) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; e) $y = \sqrt{x - 3}$;

f) $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) 3,5; $\sqrt{2}$; b) Tots excepte –2; c) Tots; d) Tots; e) 3,5; f) Tots.

23. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$; b) $y = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$;

c) $y = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$; d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$;

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$; f) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$; b) $\mathbb{R} - \{2\}$; c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$; f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

24. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{3 - x}$; b) $y = \sqrt{2x - 1}$;

c) $y = \sqrt{-x - 2}$; d) $y = \sqrt{-3x}$

a) $(-\infty, 3]$; b) $[1/2, +\infty)$; c) $(-\infty, -2]$; d) $(-\infty, 0]$

25. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$; b) $= \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$; d) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$; f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

g) $y = \dfrac{-1}{x^3 - x^2}$; h) $y = \dfrac{2x}{x^4 - 1}$

a) $x^2 - 9 \ge 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) \ge 0 \Rightarrow$ *Domini* $= (+\infty, -3] \cap [3, +\infty)$

b) $x^2 + 3x + 4 \ge 0 \Rightarrow$ *Domini* $= \mathbb{R}$

c) $12x - 2x^2 \ge 0 \Rightarrow 2x(6 - x) \ge 0 \Rightarrow$ *Domini* $= [0, 6]$

d) $x^2 - 4x - 5 \ge 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 5) \ge 0 \Rightarrow$ *Domini* $= (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

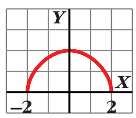
e) $4 - x > 0 \Rightarrow 4 > x \Rightarrow$ *Domini* $= (-\infty, 4)$

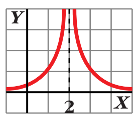
f) $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow$ *Domini* $= (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

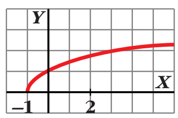
g) $x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow$ *Domini* $= \mathbb{R} - \{0, 1\}$

h) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \Rightarrow$ *Domini* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

26. A la vista de la gràfica d'aquestes funcions, indica'n quin és el domini de definició i el recorregut.







Els dominis són, per ordre: $[-2, 2]$;

$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ i $[-1, +\infty)$.

Els recorreguts $[0, 2]$; $[0, +\infty)$ o $[0, +\infty)$.

27. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$; **b)** $y = \sqrt{x^2 + 3}$;

c) $y = \sqrt{5 - x^2}$; **d)** $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

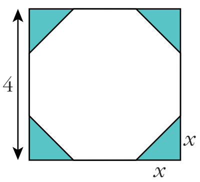
a) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$; b) $\mathbb{R}$; c) $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$;

d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

28. D'un quadrat de 4 cm de costat, es tallen en els cantons triangles rectangles isòsceles els costats dels quals mesuren x.

a) Escriu l'àrea de l'octàgon que resulta en funció de x.

b) Quin és el domini d'aquesta funció? I el seu recorregut?



a) $A(x) = 16 - 2x^2$

b) Domini: $(0, 2)$

Recorregut: $(8,16)$

29. Una empresa fabrica envasos en forma de prisma de dimensions x, $x/2$ i $2x$ cm.

a) Escriu la funció que dóna el volum de l'envàs en funció de x.

b) Troba'n el domini sabent que l'envàs més gran té 1 l de volum. Quin és el seu recorregut?

a) $V(x) = x^3$

b) $(0, 10)$

Recorregut $(0, 1000)$

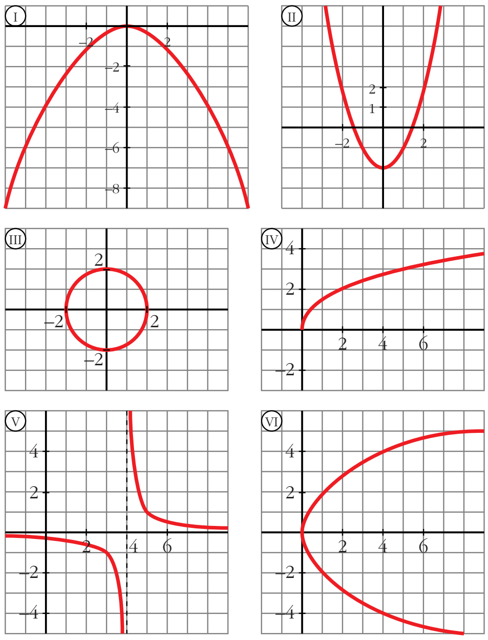
Gràfica i expressió analítica

30. Associa a cada una d'aquestes gràfiques la seva expressió analítica.

a) $x^2 + y^2 = 2$ **b)** $y = \sqrt{2x}$

c) $y = x^2 - 2$ **d)** $y^2 = 4x$

e) $y = -0{,}25x^2$ **f)** $y = \dfrac{1}{x - 4}$



N'hi ha dues que no són funcions. Digues quines.

a) III; b) IV; c) II; d) VI; e) I; f) V

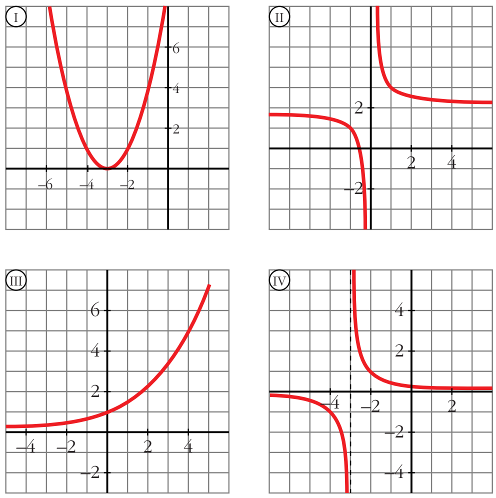
III i VI no són funcions.

Pàgina 245

31. Associa amb cada una de les gràfiques una de les expressions analítiques següents:

a) $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **b)** $y = \dfrac{1}{x + 3}$

c) $y = (x + 3)^2$ **d)** $y = 1{,}5^x$

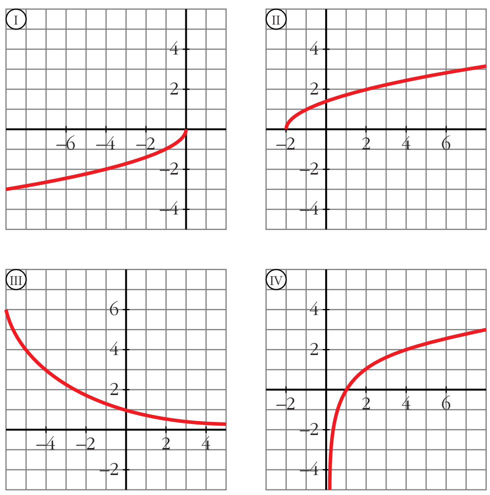


a) II; b) IV; c) I; d) III.

32. Asssocia amb cada gràfica l'expressió analítica que li correspongui entre les següents:

a) $y = \sqrt{x+2}$ **b)** $y = 0{,}75^x$

c) $y = log_2\ x$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$



a) II; b) III; c) IV; d) I.

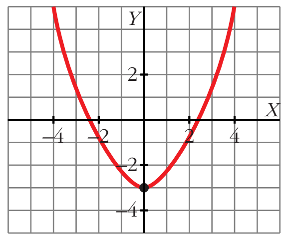
Representació de funcions elementals

33. Representa les paràboles següents i troba'n el vèrtex, els punts de tall amb els eixos de coordenades i algun punt pròxim al vèrtex:

a) $y = 0{,}5x^2 - 3$ **b)** $y = -x^2 + 3$

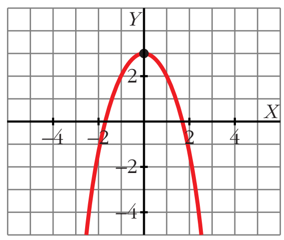
c) $y = 2x^2 - 4$ **d)** $y = -\dfrac{3x^2}{2}$

a)



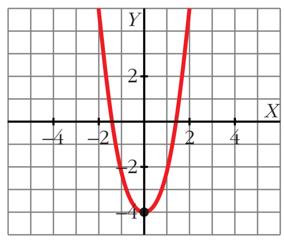
Vèrtex: (0, –3). Tall amb els eixos: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, (0, –3)

b)



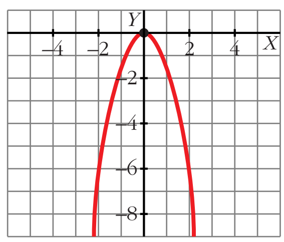
Vèrtex: (0, 3). Tall amb els eixos: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, (0, 3)

c)



Vèrtex: (0, –4). Tall amb els eixos: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, –4)

d)



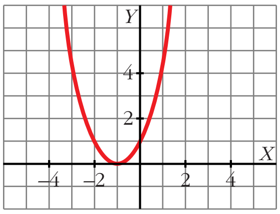
Vèrtex: (0, 0). Tall amb els eixos: (0, 0)

34. Representa les funcions següents:

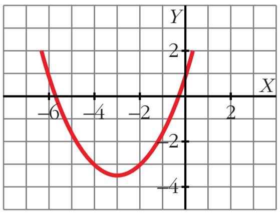
a) $y = x^2 + 2x + 1$; **b)** $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

c) $y = -x^2 + 3x - 5$; **d)** $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

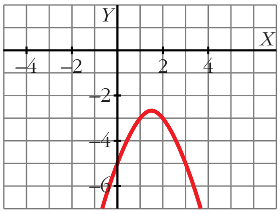
a)



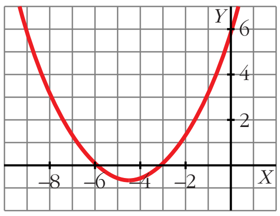
b)



c)



d)



35. Troba el vèrtex de les paràboles següents i comprova que no n'hi ha cap que talli l'eix d'abscisses. Obtén algun punt a la dreta i a l'esquerra del vèrtex i representa-les gràficament.

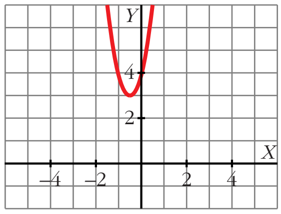
a) $y = 4\,(x^2 + x + 1)$

b) $y = 5\,(x + 2)^2 + 1$

c) $y = -x^2 - 2$

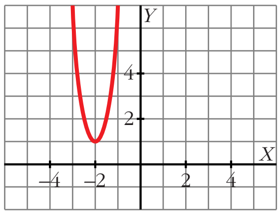
d) $y = -\dfrac{3}{4}(x^2 + 2)$

a)



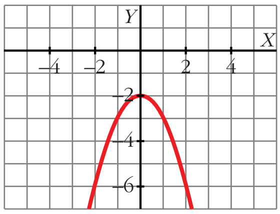
Vèrtex: $\left(-\dfrac{1}{2},\ 3\right)$

b)



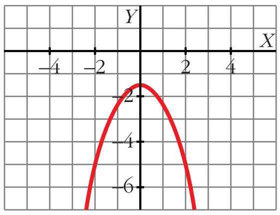
Vèrtex: $(-2,\ 1)$

c)



Vèrtex: $(0,\ -2)$

d)



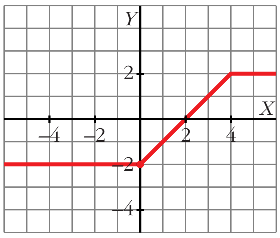
Vèrtex: $\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$

36. Representa gràficament les funcions següents:

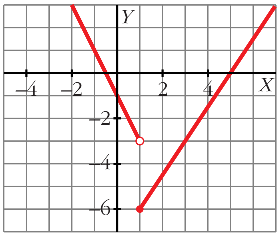
a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a)



b)

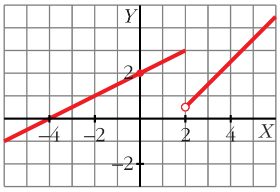


37. Representa:

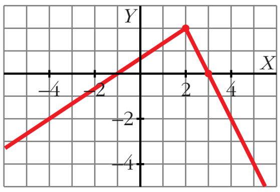
a) $y = \begin{cases} x/2 + 2 \text{ si } x \le 2 \\ x - 3/2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} (2x + 2)/3 \text{ si } x < 2 \\ -2x + 6 \text{ si } x \ge 2 \end{cases}$

a)



b)

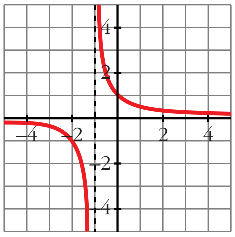


38. Representa les funcions següents:

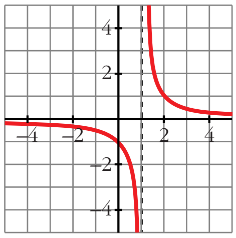
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$

c) $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$

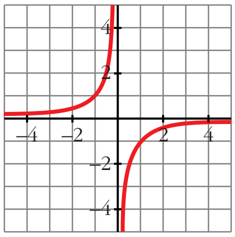
a)



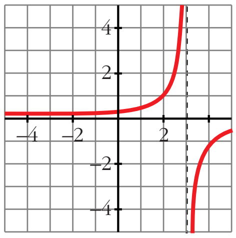
b)



c)



d)

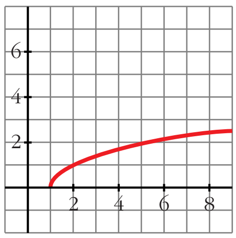


39. Representa les funcions següents:

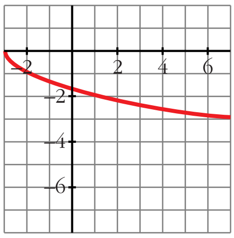
a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = -\sqrt{x+3}$;

c) $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

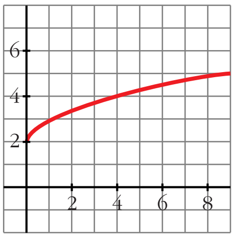
a)



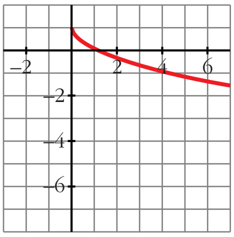
b)



c)



d)



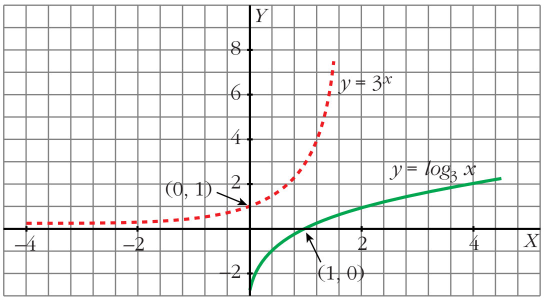
Pàgina 246

40. Fes una taula de valors de la funció $y = 3^x$. A partir d'aquesta, representa la funció $y = \log_3 x$.

Si el punt (2, 9) pertany a $y = 3^x$, el punt (9, 2) pertanyerà a $y = \log_3 x$.

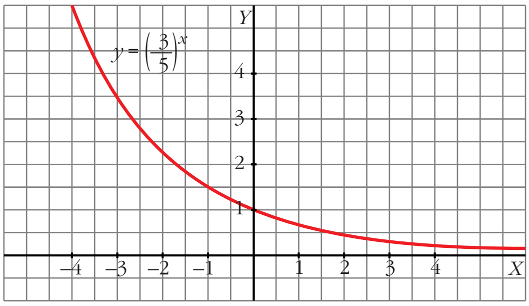
x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$\log_3 x$	–2	–1	0	1	2

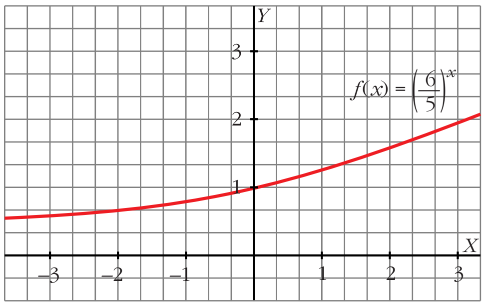


41. Amb ajuda de la calculadora, fes una taula de valors de la funció $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ i representa-la gràficament.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22



42. Representa la funció $y = \left(\frac{6}{5}\right)^x$. És creixent o decreixent?



És una funció creixent en tot $\mathbb{R}$.

Composició i funció inversa

43. Considera les funcions f i g definides per les expressions $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$

c) $(g \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$

a) $\dfrac{5}{4}$ b) $\dfrac{1}{10}$

c) $g\,(g(x)) = x$ d) $f(g(x)) = \dfrac{1 + x^2}{x^2}$

44. Donades les funcions $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \sqrt{x}$, troba:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$

a) $f\,[g(x)] = \cos\sqrt{x}$

b) $g[\,f(x)] = \sqrt{\cos x}$

c) $g[g(x)] = \sqrt[4]{x}$

45. Troba la funció inversa d'aquestes funcions:

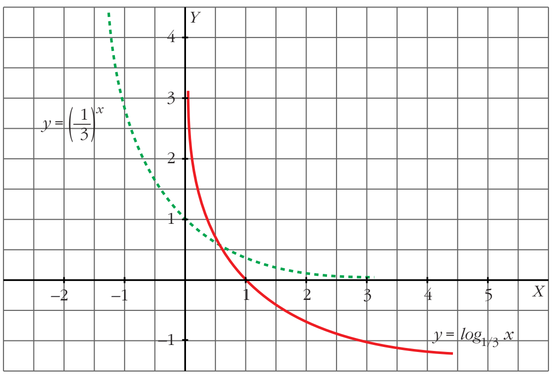
a) $y = 3x$; b) $y = x + 7$; c) $y = 3x - 2$

a) $x = 3y \Rightarrow y = \dfrac{x}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$

b) $x = y + 7 \Rightarrow y = x - 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

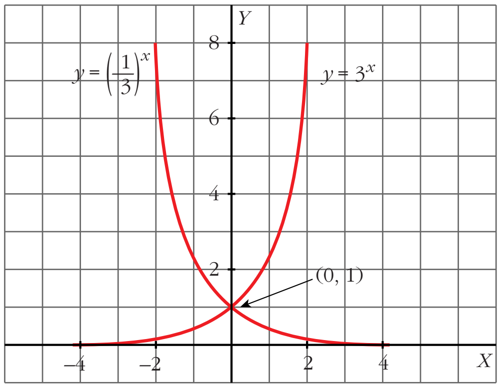
c) $x = 3y - 2 \Rightarrow y = \dfrac{x + 2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$

46. Representa la gràfica de $y = \log_{1/3} x$ a partir de la gràfica de $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$



47. Comprova que les gràfiques de $y = 3^x$ i $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ són simètriques respecte a l'eix *OY*.

Representa-les en els mateixos eixos.

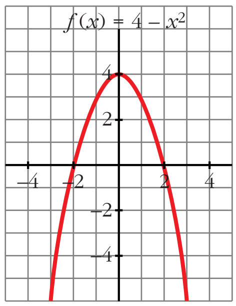


Transformacions en una funció

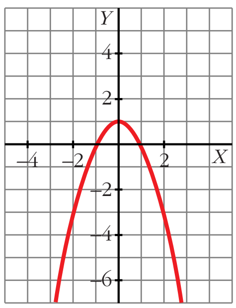
48. Representa $f(x) = 4 - x^2$ i, a partir d'aquesta, representa:

a) $g(x) = f(x) - 3$

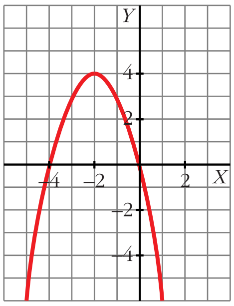
b) $h(x) = f(x + 2)$



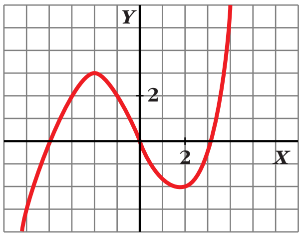
a)



b)



49. Aquesta és la gràfica de la funció $y = f(x)$:

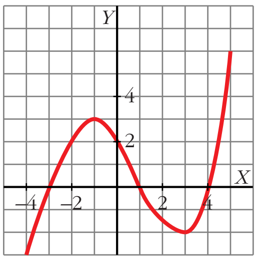


Representa, a partir d'aquesta, les funcions:

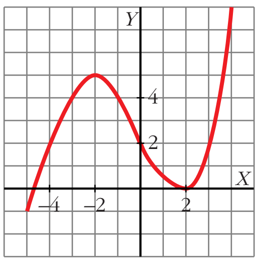
a) $y = f(x - 1)$

b) $y = f(x) + 2$

a)



b)



50. A partir de la gràfica de $f(x) = 1/x$, representa:

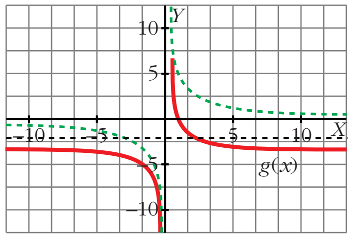
a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = f(x - 3)$

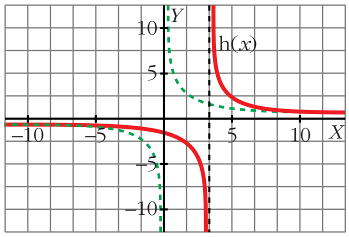
c) $i(x) = -f(x)$

d) $j(x) = |f(x)|$

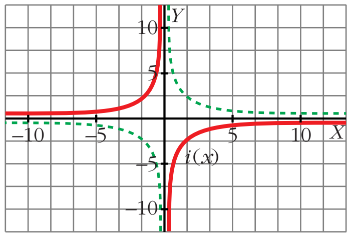
a)



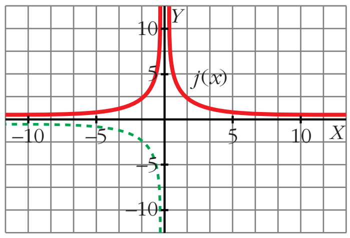
b)



c)



d)

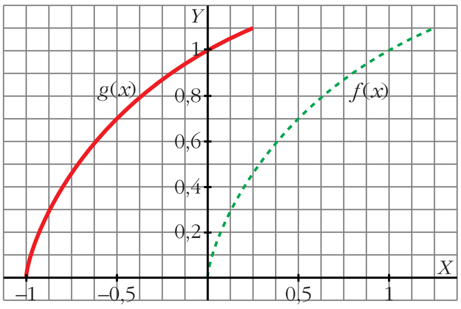


51. Representa la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i, a partir d'aquesta, dibuixa:

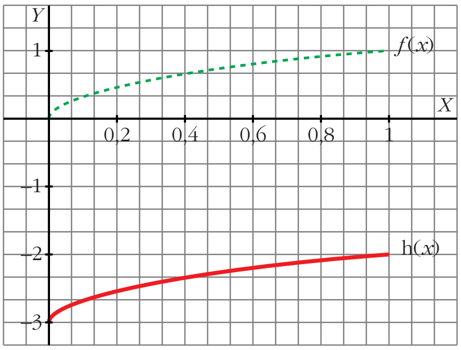
a) $g(x) = f(x + 1)$

b) $h(x) = f(x - 3)$

a)

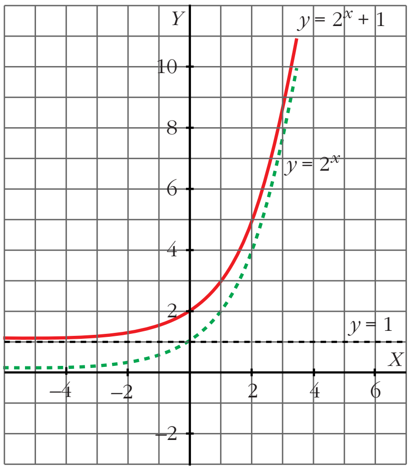


b)

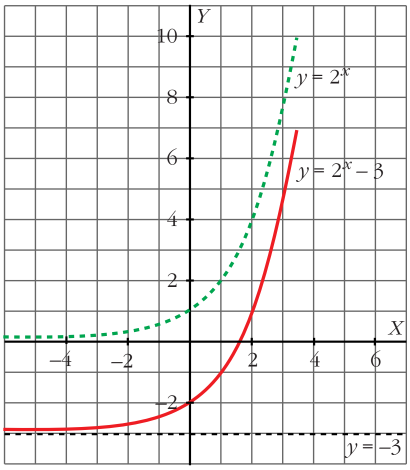


52. Representa les funcions:
a) $y = 2^x + 1$; **b)** $y = 2^x - 3$
Utilitza la gràfica de $y = 2^x$.

a)

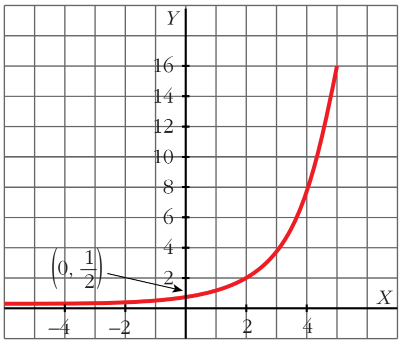


b)

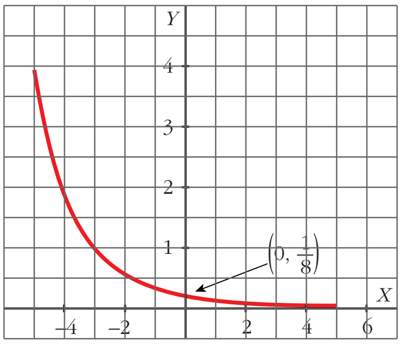


53. Representa les funcions següents:
a) $y = 2^{x-1}$; **b)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$; **c)** $y = 1 - 2^x$;
d) $y = 2^{-x}$

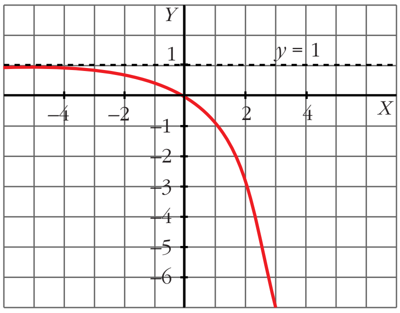
a)



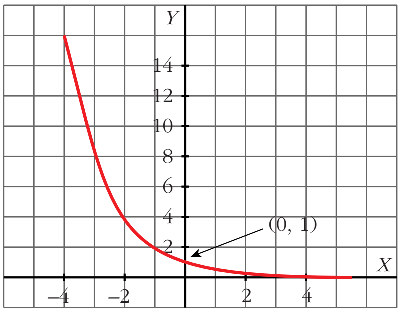
b)



c)



d)

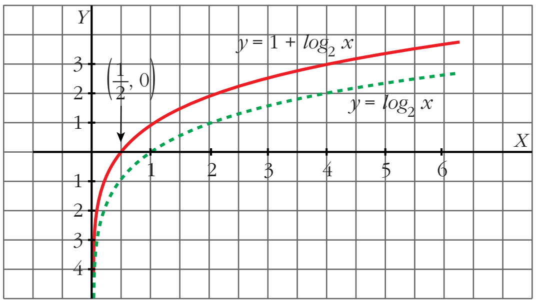


54. Representa aquestes funcions a partir de la gràfica de $y = log_2\ x$:

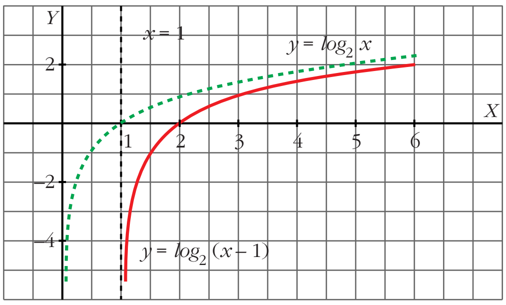
a) $y = 1 + log_2\ x$; b) $y = log_2\ (x - 1)$

En b), el domini és (1, +∞).

a) $y = 1 + log_2\ x$



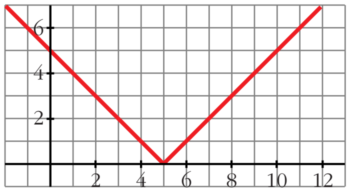
b) $y = log_2\ (x - 1)$



Valor absolut d'una funció

55. Representa la funció $y = |x - 5|$ i comprova que la seva expressió analítica en intervals és:

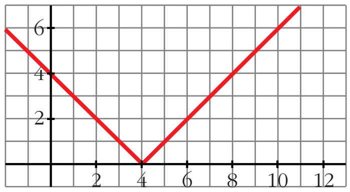
$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



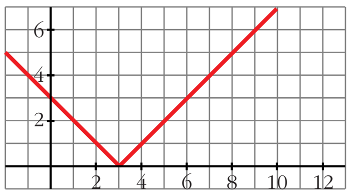
56. Representa les funcions següents i defineix-les per intervals:

a) $y = |4 - x|$ b) $y = |x - 3|$

a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



b) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



Pàgina 247

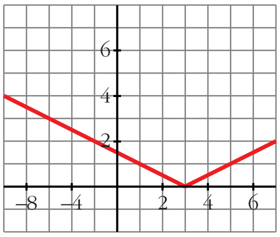
57. Representa i defineix com a funcions «a trossos»:

a) $y = \left|\dfrac{x - 3}{2}\right|$ b) $y = |3x + 6|$

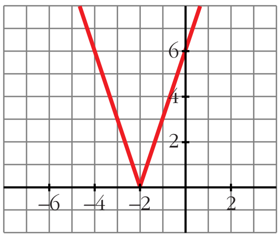
c) $y = \left|\dfrac{2x-1}{3}\right|$ **d)** $y = |-x-1|$

Mira l'exercici resolt número 7.

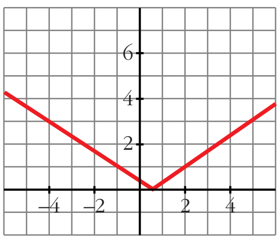
a) $y = \begin{cases} -\dfrac{x+3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x+3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a)


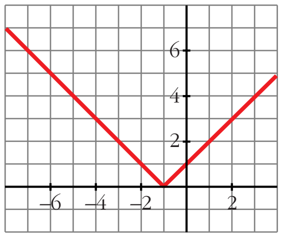
b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b)


c) $y = \begin{cases} \dfrac{-2x+3}{3} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+1}{3} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c)


d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d)


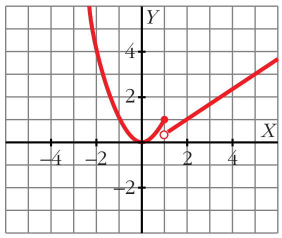
58. Dibuixa la gràfica de les funcions següents:

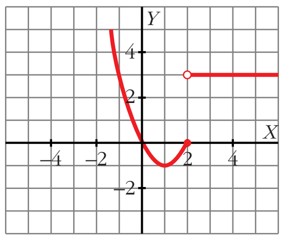
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (2x-1)/3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

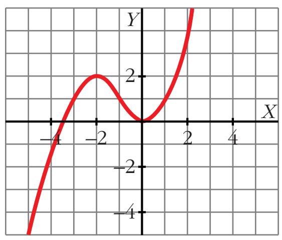
b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

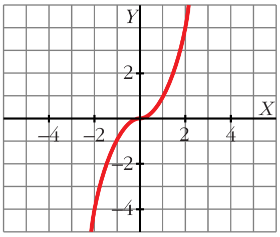
d) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a)


b)


c)


d)

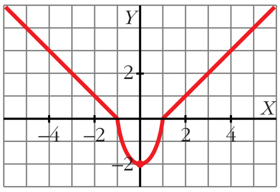


59. Representa:

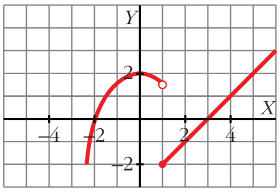
a) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x^2/2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a)



b)

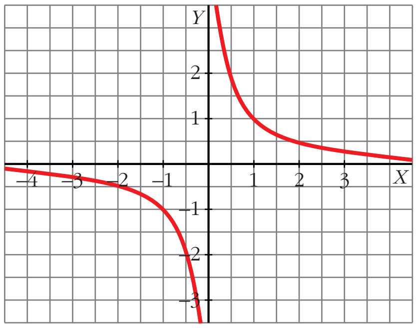


60. Fent servir la relació $\dfrac{\text{dividend}}{\text{divisor}}$ = quocient + $\dfrac{\text{residu}}{\text{divisor}}$ podem escriure la funció $y = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$; d'aquesta manera:

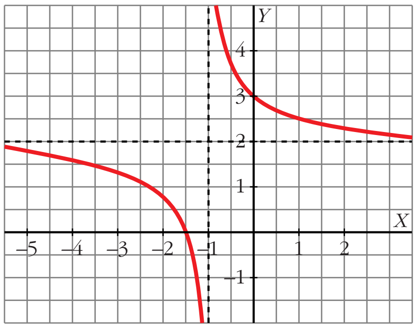
$$y = 2 + \frac{1}{x + 1}$$

Comprova que la seva gràfica coincideix amb la de $y = 1/x$ traslladada 1 unitat cap a l'esquerra i 2 cap a dalt.

$$y = \frac{1}{x}$$

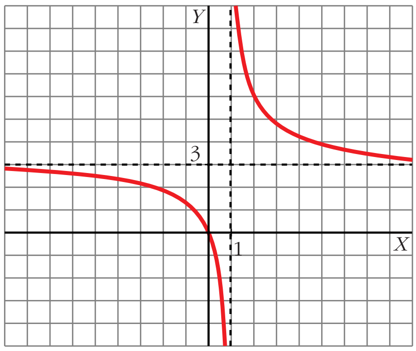


$$y = 2 + \frac{1}{x + 1}$$

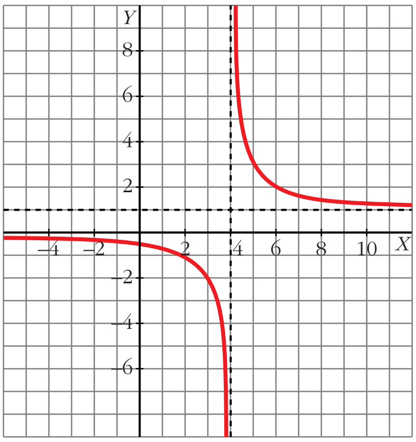


61. Representa les funcions $y = \dfrac{3x}{x - 1}$, $y = \dfrac{x - 2}{x - 4}$ fent servir el procediment del problema anterior.

$$y = \frac{3x}{x - 1} = 3 + \frac{3}{x - 1}$$



$$y = \frac{x - 2}{x - 4} = 1 + \frac{2}{x - 4}$$



62. Amb les funcions $f(x) = x - 5$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$, hem obtingut, per composició, aquestes altres:
$p(x) = \sqrt{x-5}$; $q(x) = \sqrt{x} - 5$;
$r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$
Explica com, a partir de f, g i h, es poden obtenir p, q i r.

$p = g \circ f$; $q = f \circ g$; $r = h \circ g$

63. De la funció exponencial $f(x) = ka^x$ coneixem $f(0) = 5$ i $f(3) = 40$. Quant valen k i a?

$f(0) = 5 \Rightarrow 5 = k$

$f(3) = 40 \Rightarrow 40 = 5 \cdot a^3 \Rightarrow a = 2$

La funció és $f(x) = 5 \cdot 2^x$

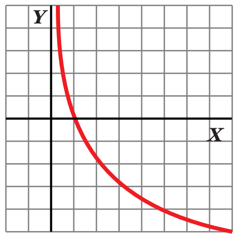
64. Troba la funció inversa de les funcions següents:
a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$; b) $y = 1 + 3^x$

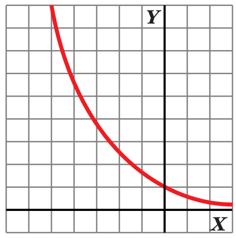
a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}$; $\dfrac{x}{3} = 2^{y-1}$; $log_2 \dfrac{x}{3} = y - 1$

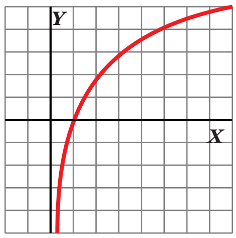
$y = 1 + log_2 \dfrac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$

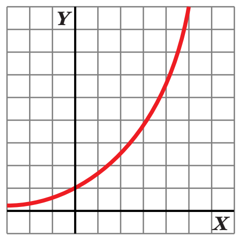
b) $x = 1 + 3^y$; $x - 1 = 3^y$; $log_3 (x - 1) =$
$= y \rightarrow f^{-1}(x) = log_3 (x - 1)$

65. Aquestes gràfiques corresponen a funcions del tipus $y = a^x$, $y = log_a x$. Identifica-les i indica, en cada cas, si és $a > 1$ o $0 < a < 1$.

1)


2)


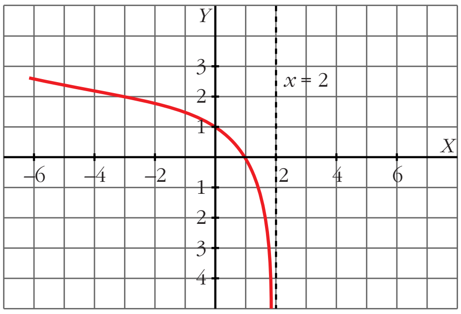
3)


4)


1) $y = log_a x$, $0 < a < 1$
2) $y = a^x$, $0 < a < 1$
3) $y = log_a x$, $a > 1$
4) $y = a^x$, $a > 1$

66. Quin és el domini d'aquesta funció? $y = log_2 (2 - x)$. Representa-la.

Domini: $(-\infty, 2)$



67. La gràfica d'una funció exponencial del tipus $y = ka^x$ passa pels punts (0; 0,5) i (1; 1,7).

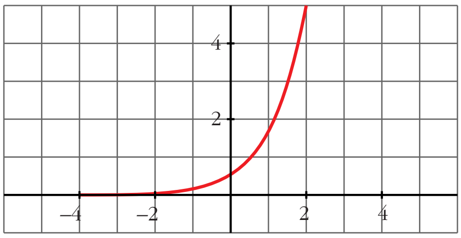
a) Calcula k i a.

b) Representa la funció.

a) $\left.\begin{array}{l} 0{,}5 = k \cdot a^0 \\ 1{,}7 = k \cdot a^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}5 = k \\ 1{,}7 = k \cdot a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} k = 0{,}5 \\ a = 3{,}4 \end{array}$

La funció és $y = 0{,}5 \cdot (3{,}4)^x$

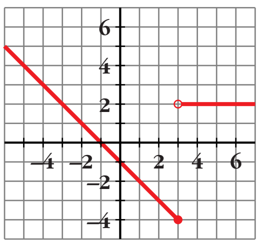
b)

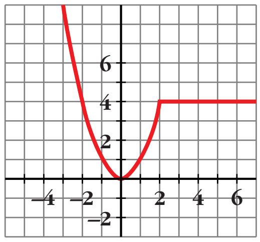


Pàgina 248

68. Busca l'expressió analítica d'aquestes funcions:

a)





a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

69. Utilitza la calculadora en radians per obtenir el valor de y en cada una d'aquestes expressions:

a) $y = \textit{arc sin}\ 0{,}8$; b) $y = \textit{arc sin}\ (-0{,}9)$; c) $y = \textit{arc cos}\ 0{,}36$; d) $y = \textit{arc cos}\ (-0{,}75)$; e) $y = \textit{arc tg}\ 3{,}5$; f) $y = \textit{arc tg}\ (-7)$

a) 0,93 *rad* → 53° 7′ 48″

b) –1,12 *rad* → 64° 9′ 29″

c) 1,20 *rad* → 68° 53′ 59″

d) 2,42 *rad* → 138° 35′ 25″

e) 1,29 *rad* → 74° 3′ 17″

f) –1,43 *rad* → –81° 52′ 11″

70. Obtén el valor d'aquestes expressions en graus, sense usar la calculadora:

a) $y = \textit{arc sin}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $y = \textit{arc cos}\dfrac{1}{2}$; c) $y = \textit{arc tg}\ 1$; d) $y = \textit{arc sin}\ (-1)$; e) $y = \textit{arc cos}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; f) $y = \textit{arc tg}\ \sqrt{3}$

a) 60°; b) 60°; c) 45°; d) –90°; e) 120°; f) 60°

71. Calcula x en les expressions següents:

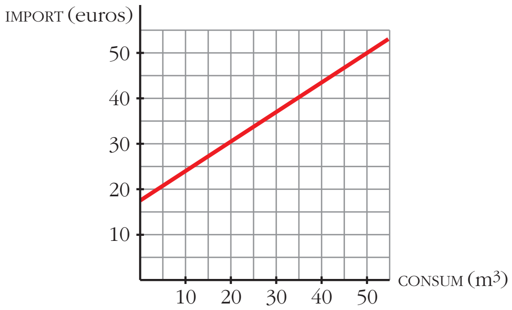
a) $\textit{arc sin}\ x = 45°$; b) $\textit{arc cos}\ x = 30°$; c) $\textit{arc tg}\ x = -72°$; d) $\textit{arc sin}\ x = 75°$; e) $\textit{arc cos}\ x = \dfrac{\pi}{3}$ rad; f) $\textit{arc tg}\ x = 1{,}5$ rad

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) –3,078; d) 0,966; e) $\frac{1}{2}$;
f) 14,101

Funcions amb enunciat

72. La factura del gas d'una família, el mes de setembre, ha estat de 24,82 euros per 12 m^3, i, el mes d'octubre, de 43,81 per 42 m^3.
a) Escriu la funció que dóna l'import de la factura segons els m^3 consumits i representa-la.
b) Quant pagaran si consumeixen 28 m^3?

a) $y = 24{,}82 + 0{,}633\,(x - 12) =$
$= 0{,}633x + 17{,}22$



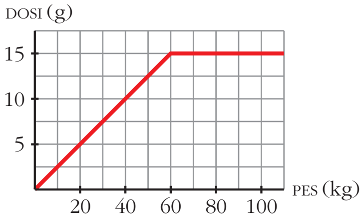
b) $y = 24{,}82 + 0{,}633\,(x - 12)$
$y(28) = 34{,}94$ euros

73. El preu del bitllet d'una línia de rodalia depèn dels quilòmetres recorreguts. Per 57 km he pagat 2,85 euros i per 168 km, 13,4 euros. Calcula el preu d'un bitllet per a una distància de 100 km. Quina és la funció que ens indica el preu segons els quilòmetres recorreguts?

La funció és: $y = 2{,}85 + 0{,}095\,(x - 57) =$
$= 0{,}095x - 2{,}565$

74. La dosi d'un medicament és de 0,25 g per cada quilogram de pes del pacient, fins a un màxim de 15 g. Representa la funció *pes del pacient-quantitat de medicament* i troba'n l'expressió analítica.

$y = 0{,}25x$ fins a un màxim de 15 g:
$0{,}25x = 15 \Rightarrow x = 60$ kg



$$y = \begin{cases} 0{,}25x & 0 < x < 60 \\ 15 & x \geq 60 \end{cases}$$

75. Les despeses fixes mensuals d'una empresa per a la fabricació de *x* televisors són $G = 3\,000 + 25x$, en milers d'euros, i els ingressos mensuals són $I = 50x - 0{,}02x^2$, també en milers d'euros. Quants televisors han de fabricar-se perquè el benefici (ingressos menys despeses) sigui màxim?

La funció *benefici* ve donada per l'expressió:
$B = I - G = 50x - 0{,}02x^2 - 3\,000 - 25x =$
$= -0{,}02x^2 + 25x - 3\,000$

Es tracta d'una paràbola amb les branques cap a baix.

El màxim de la funció es troba en el vèrtex:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-25}{-0{,}04} = 625$$

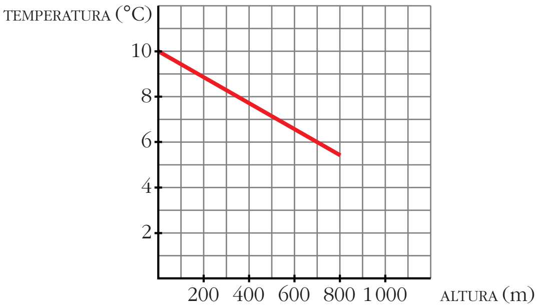
El benefici màxim s'obtindrà per a 625 televisors.

76. En mesurar la temperatura a diferents altures, s'ha observat que per cada 180 m d'ascens el termòmetre baixa 1 °C. Si a la base d'una muntanya de

800 m ens trobem a 10 °C, quina serà la temperatura en el cim? Representa gràficament la funció *altura-temperatura* i busca'n l'expressió analítica.

Fes una taula de valors i representa-la.

$T(800) = 5{,}56$ °C



$T(h) = 10 - \dfrac{h}{180}$

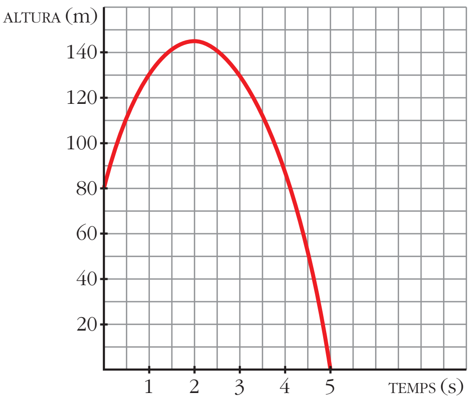
77. Una pilota és llançada verticalment cap amunt des de la part de dalt d'un edifici. L'altura que assoleix la pilota ve donada per aquesta fórmula: $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segons i h en metres).

a) Dibuixa la gràfica en l'interval [0, 5].

b) Troba l'altura de l'edifici.

c) En quin instant assoleix la màxima altura?

a)



b) 80 metres.

c) 2 segons.

78. El preu de venda d'un article ve donat per l'expressió $p = 12 - 0{,}01x$ (x = nombre d'articles fabricats; p = preu, en cents d'euros).

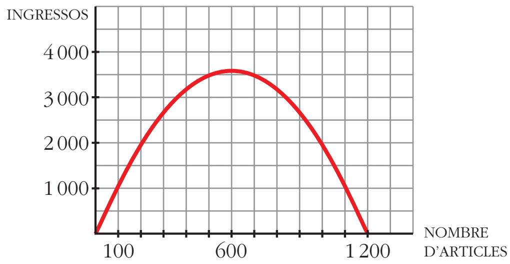
a) Si es fabriquen i es venen 500 articles, quins seran els ingressos obtinguts?

b) Representa la funció *Nre. d'articles-ingressos*.

c) Quants articles s'han de fabricar perquè els ingressos siguin màxims?

a) Si es venen 500 articles, el seu preu serà: $12 - 0{,}01 = 7$ cents d'euros $\longrightarrow$ Ingressos = 350 000 €

b)



$I(x) = 12x - 0{,}01x^2$

c) Han de fabricar-se 600 articles per obtenir els ingressos màxims (360 000 euros).

79. El cost de producció de x unitats d'un producte és igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros i el preu de venda de la unitat és de $50 - x/4$ euros.

a) Escriu la funció que ens dóna el benefici total si es venen les x unitats produïdes.

b) Troba el nombre d'unitats que s'han de vendre perquè el benefici sigui màxim.

Els ingressos per la venda de x unitats són x (50 – x/4) euros.

a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) =$

$= -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El màxim s'aconsegueix en el vèrtex de la paràbola: $x = \frac{-15}{-1} = 15$

S'han de vendre 15 unitats.

Pàgina 249

80. Un fabricant ven mensualment 100 electrodomèstics a 400 euros cada un i sap que per cada 10 euros de puja vendrà 2 electrodomèstics menys.
a) Quins seran els ingressos si apuja els preus 50 euros?
b) Escriu la funció que relaciona la puja de preu amb els ingressos mensuals.
c) Quina ha de ser la puja perquè els ingressos siguin màxims?

a) En aquest cas vendria 90 electrodomèstics a 450 euros cada un; aleshores els ingressos serien de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

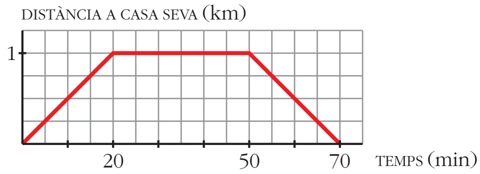
b) $I(x) = (400 + 10x)\ (100 - 2x) =$
$= -20x^2 + 200x + 40\,000$
(x = desenes d'euros)

c) El màxim s'aconsegueix en el vèrtex de la paràbola:

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \to 50$ euros

81. L'Helena va a visitar la seva amiga Anna i tarda 20 minuts a arribar a casa seva, que es troba a 1 km de distància. S'hi queda mitja hora i en el camí de tornada empra el mateix temps que en el d'anada.
a) Representa la funció *temps-distància*.
b) Busca'n l'expressió analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} (1/20)x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 1 & \text{si } 20 < x \le 50 \\ -1/20\ (x - 70) & \text{si } 50 < x \le 70 \end{cases}$

82. La pèrdua del valor dels diners s'anomena inflació; és a dir, si un article que ha costat 100 euros, al cap d'un any costa 106 euros, la inflació ha estat del 6%. Suposant que la inflació es manté constant en el 6% anual, quant costarà d'aquí a set anys un terreny que avui costa 5 000 euros?

Per a un capital C i una inflació del 6% durant x anys, el valor d'aquest capital serà:
$C' = C \cdot (1{,}06)^x$

Per a $x = 7$ anys i $C = 5\,000$ euros:
$C' = 5\,000 \cdot (1{,}06)^7 = 7\,518$ euros

83. En el contracte de treball d'un empleat figura que el sou pujarà un 6% anualment.
a) Si comença guanyant 10 000 euros anuals, quant guanyarà d'aquí a 10 anys?
b) Calcula quant de temps tardarà a duplicar-se el seu sou.

a) $10\,000 \cdot (1{,}06)^{10} \approx 17\,908{,}48$ euros

b) $1{,}06^x = 2 \Rightarrow x \approx 12$ anys tardarà a duplicar-se.

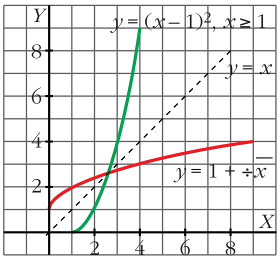
Qüestions teòriques

84. Si $f(x) = 2^x$ i $g(x) = log_2\, x$, quina és la funció $(f \circ g)(x)$? I $(g \circ f)(x)$?

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

85. Donada la funció $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, troba $f^{-1}(x)$. Representa les dues funcions i comprova'n la simetria respecte de la bisectriu del 1r quadrant.

$f^{-1}(x) = (x - 1)^2,\ x \geq 1$



86. Donada la funció $y = a^x$, contesta:
a) Pot ser negativa la y? I la x?
b) Per a quins valors de a és creixent?
c) Quin és el punt pel qual passen totes les funcions del tipus $y = a^x$?
d) Per a quins valors de x es verifica $0 < a^x < 1$ sent $a > 1$?

a) La y no pot ser negativa, la x sí.
b) $a > 1$
c) $(0,\ 1)$
d) Per a $x < 0$.

87. Una paràbola talla l'eix d'abscisses en $x = 1$ i en $x = 3$. L'ordenada del vèrtex és $y = -4$. Quina és l'equació d'aquesta paràbola?

$y = k\,(x - 1)(x - 3) = k\,(x^2 - 4x + 3)$

Vèrtex $\rightarrow x = \dfrac{4}{2} = 2 \rightarrow y(2) = -k = -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 4$

L'equació és: $y = 4(x^2 - 4x + 3) =$
$= 4x^2 - 16x + 12$

Per aprofundir

88. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a)

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 0 \begin{cases} \left.\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}\right\} x > 2 \\ \left.\begin{cases} x + 3 \leq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}\right\} x \leq -3 \end{cases}$$

Domini $= (-\infty,\ -3] \cup (2,\ +\infty)$

b)

$$\frac{x-9}{x} \geq 0 \begin{cases} \left.\begin{cases} x - 9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}\right\} x \geq 9 \\ \left.\begin{cases} x - 9 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}\right\} x < 0 \end{cases}$$

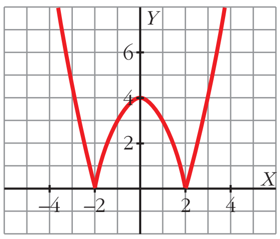
Domini $= (-\infty,\ 0) \cup [9,\ +\infty)$

89. Representa i defineix com a funcions «a trossos»:

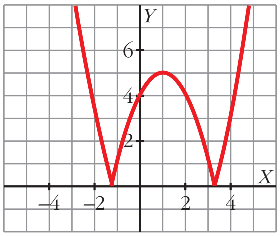
a) $y = |x^2 - 4|$ **b)** $y = |x^2 - 2x - 4|$

c) $y = \left|-\dfrac{x^2}{2} + 2\right|$ **d)** $y = |x^2 + 2x - 2|$

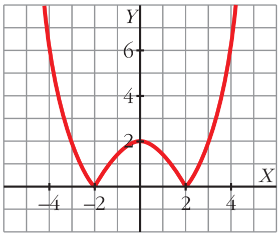
a) $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



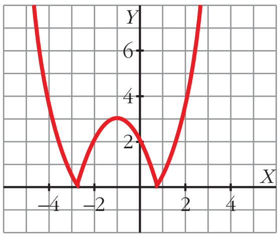
b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < -1{,}2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } -1{,}2 \leq x \leq 3{,}2 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x > 3{,}2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} (x^2/2) - 2 & \text{si } x < -2 \\ (-x^2/2) + 2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ (x^2/2) - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



d) $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < -2{,}7 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si } -2{,}7 \le x \le 0{,}7 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 0{,}7 \end{cases}$

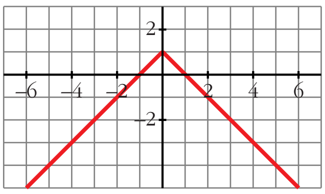


90. Representa aquestes funcions i expressa-les en intervals.

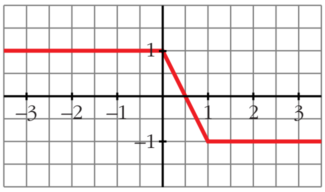
a) $y = 1 - |x|$

b) $y = |x - 1| - |x|$

a) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \ge 0 \\ 1 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



b) $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ 1 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$



91. Les tarifes d'una empresa de transports són:

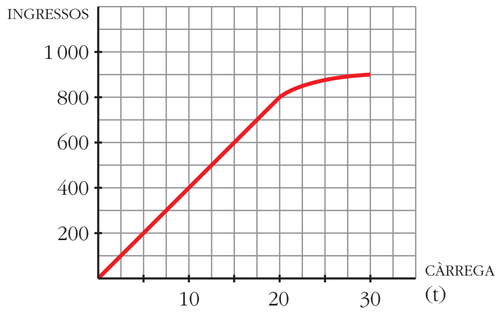
• 40 euros per tona de càrrega si aquesta és menor o igual a 20 t.

• Si la càrrega és major que 20 t, es restarà, dels 40 euros, tants euros com tones sobrepassin aquestes 20.

a) Dibuixa la funció *ingressos de l'empresa segons la càrrega que transporti* (càrrega màxima: 30 t).

b) Obtén l'expressió analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ [40 - (x - 20)]x & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$

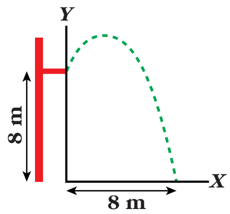
És a dir:

$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$

Per pensar una mica més

92. En una piscina hi ha un trampolí a 8 m de l'aigua. Un nedador s'hi llança prenent impuls i elevant-se 1 m abans

de començar a caure. El nedador arriba a l'aigua a 8 m de la vora del trampolí.



a) Si prenem com a origen de coordenades la projecció de l'extrem del trampolí sobre l'aigua i el vèrtex de la paràbola és (a, b), quant val b?
b) L'equació del moviment és
$y = k\,(x - \alpha)^2 + 9$.
Justifica-la i troba k i α.

a) $b = 8 + 1 = 9$

b) El vèrtex és $(\alpha, 9)$; per això l'equació és $y = k\,(x - \alpha)^2 + 9$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Com que } y(0) = 8 \Rightarrow 8 = k\alpha^2 + 9 \\ \text{Com que } y(8) = 0 \Rightarrow 0 = k(8 - \alpha)^2 + 9\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}k = -1/\alpha^2 \\ k = -9/(8 - \alpha)^2\end{array}\right\}$$

$$-\frac{1}{\alpha^2} = \frac{-9}{(8-\alpha)^2} \Rightarrow (8 - \alpha)^2 = 9\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\alpha^2 + 16\alpha - 64 = 0$$

L'equació serà, per tant:

$\alpha^2 + \alpha - 8 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \rightarrow k = -1/4$

-4 (veiem per la gràfica que no val)

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 9$$