UNITAT 1

SISTEMES D'EQUACIONS. MÈTODE DE GAUSS

Pàgina 11

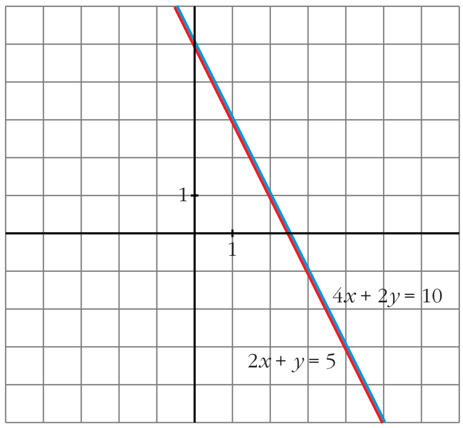
Equacions i sistemes d'equacions amb dues incògnites

1. Podem dir que les dues equacions següents són dues "dades diferents"? No és cert que la segona diu el mateix que la primera?

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- **Representa-les gràficament i observa que es tracta de la mateixa recta.**

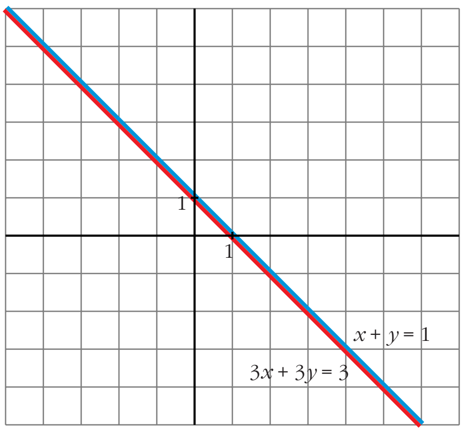
Es tracta de la mateixa recta.



- **Posa un altre sistema de dues equacions amb dues incògnites en què la segona equació sigui, en essència, igual que la primera. Interpreta'l gràficament.**

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$

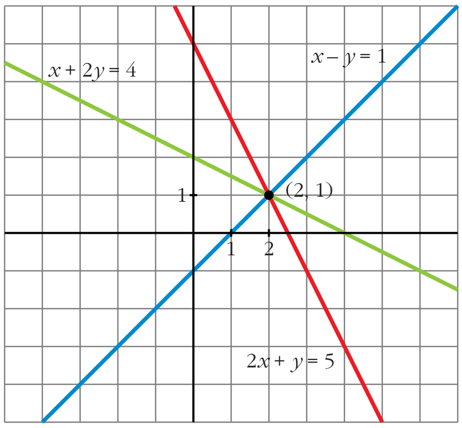
Gràficament són la mateixa recta:



2. Observa les equacions següents:

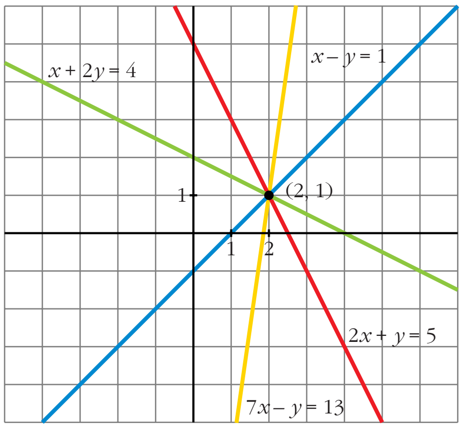
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- **Representa-les i observa que les dues primeres rectes determinen un punt (amb aquestes dues dades es responen les dues preguntes: $x = 2, y = 1$) i que la tercera recta també passa per aquest punt.**



- **Pensa una altra equació que també sigui "conseqüència" de les dues primeres (per exemple: 2 · (1a) + 3 · (2a)), representa-la i observa que també passa per $x = 2, y = 1$.**

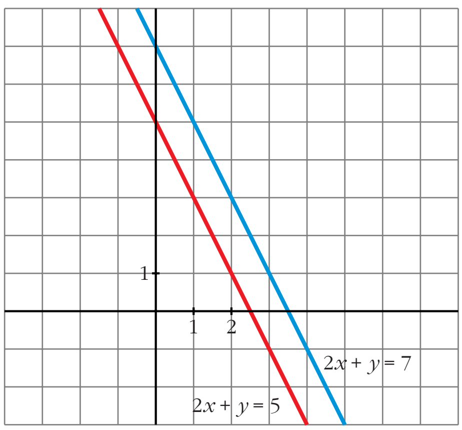
$2 \cdot 1\text{a} + 3 \cdot 2\text{a} \;\rightarrow\; 7x - y = 13$



3. Observa que ***el que diu la segona equació és contradictori amb el que diu la primera:***

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

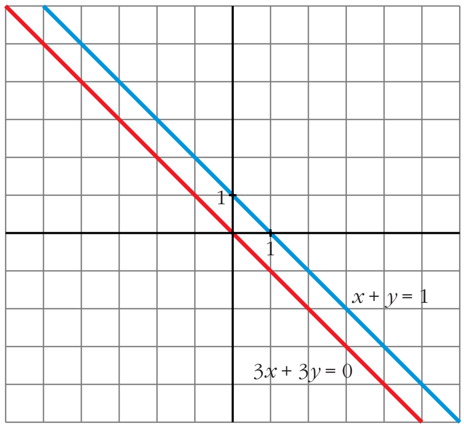
- **Representa-les i observa que es tracta de dues rectes paral·leles, és a dir, no tenen solució comuna, perquè les rectes no es tallen en cap punt.**



- **Modifica el terme independent de la segona equació del sistema que has inventat en l'exercici 1 i representa de nou les dues rectes.**

Observa que el que diuen ambdues equacions és ara contradictori i que es representen mitjançant rectes paral·leles.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Rectes paral·leles:}$$



Pàgina 13

EXERCICIS PROPOSATS

1. **Sense resoldre'ls, explica per què són equivalents aquests sistemes:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{array}\right.$

a) Hem substituït la segona equació pel resultat de sumar les dues que teníem.

b) Hem substituït la primera equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.

c) En el primer sistema, la tercera equació s'obté sumant les dues primeres. La resta és igual que a b).

d) Hem substituït la segona equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.

Pàgina 15

2. **Resol i interpreta geomètricament els sistemes següents:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \; y = 1 - 2x \\ \\ \to \; y = 3 - x \end{array} \Bigg\} \; 1 - 2x = 3 - x \;\to\; x = -2, \quad y = 3 - (-2) = 5$

Comprovem si compleix la 2a equació: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$.

Solució: $x = -2$, $y = 5$. Són tres rectes que es tallen en el punt $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right\}$ La 3a equació s'obté sumant les dues primeres; podem prescindir-ne.

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$

Solució: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Són tres plans que es tallen en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$ Les dues primeres equacions són contradictòries. El sistema és incompatible. Els dos primers plans són paral·lels i el tercer els talla.

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solució: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Són tres plans que es tallen en el punt $(3, 2, 1)$.

3. a) Resol el sistema: $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = 3} \\ \mathbf{x - y = 4} \end{cases}$

b) Afegeix-hi una tercera equació de manera que continuï essent compatible.

c) Afegeix-hi una tercera equació de manera que sigui incompatible.

d) Interpreta geomètricament el que has fet en cada cas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + y \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \;\rightarrow\; -1 = 3y \;\rightarrow\; y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$

Solució: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Per exemple: $2x + y = 7$ (suma de les dues anteriors).

c) Per exemple: $2x + y = 9$.

d) En a) $\rightarrow$ Són dues rectes que es tallen en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) $\rightarrow$ La nova recta també passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) $\rightarrow$ La nova recta no passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No existeix cap punt comú en les tres rectes. Es tallen dues a dues.

Pàgina 16

4. Reconeix com a escalonats els sistemes següents i resol-los:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}\right\}$ *Solució:* $x = \dfrac{7}{3}$, $y = \dfrac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solució: $x = 3$, $y = -29$, $z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Solucions: $x = 3 + \lambda$, $y = -29 - 19\lambda$, $z = 11 + 6\lambda$, $t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$

Solució: $x = 1$, $y = \dfrac{16}{9}$, $z = \dfrac{-2}{3}$

5. Són escalonats aquests sistemes? Resol-los:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right.$

Tots els sistemes són escalonats. Els resolem.

a) $\left.\begin{array}{r} 2y + z = 1 \\ 2y \quad = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2y \quad = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solució: $x = 0, \ y = \dfrac{1}{2}, \ z = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ 2x \quad - z = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2x \quad = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda, \ y = 5 - 3\lambda, \ z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 3 \\ x - y \quad = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x \quad = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda, \ y = \lambda, \ z = 1 - 2\lambda - \mu, \ t = \mu$

d) $\left.\begin{array}{r} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z \quad = 2 \\ x \quad - z + 2t = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2z \quad = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x \quad - z + 2t = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$

Solució: $x = 2, \ y = 5, \ z = 1, \ t = 2$

Pàgina 17

6. Transforma en escalonats i resol:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - 3y = 21} \\ \mathbf{3x + y = 4} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{5x - 4y = 23} \\ \mathbf{3x + 2y = 27} \end{array}\right.$

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{1a} \\ 3 \cdot \text{(2a)} \end{array}} \left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 9x + 3y = 12 \end{array}\right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{1a + 2a} \end{array}} \left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 11x \quad = 33 \end{array}\right.$

Solució: $x = 3, \ y = -5$

b) $\left\{\begin{array}{l} 5x - 4y = 23 \\ 3x + 2y = 27 \end{array}\right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{1a} + 2 \cdot \text{(2a)} \end{array}} \left\{\begin{array}{l} 5x - 4y = 23 \\ 11x \quad = 77 \end{array}\right.$

Solució: $x = 7, \ y = 3$

7. **Transforma en escalonats i resol:**

$$\text{a)}\ \left\{\begin{aligned} x - y + 3z &= -4\\ x + y + z &= 2\\ x + 2y - z &= 6 \end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ x - y - z &= -4\\ 3x + y + z &= 8 \end{aligned}\right.$$

a) $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= -4\\ x + y + z &= 2\\ x + 2y - z &= 6 \end{aligned}\right\}$ $\begin{array}{l} 1a\\ 2a - 1a\\ 3a - 1a \end{array}$ $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= -4\\ 2y - 2z &= 6\\ 3y - 4z &= 10 \end{aligned}\right\}$ $\begin{array}{l} 1a\\ 2a : 2\\ 3a \end{array}$ $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= -4\\ y - z &= 3\\ 3y - 4z &= 10 \end{aligned}\right\}$

$\begin{array}{l} 1a\\ 2a\\ 3a - 3 \cdot 2a \end{array}$ $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= -4\\ y - z &= 3\\ -z &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} &z = -1\\ &y = 3 + z = 2\\ &x = -4 + y - 3z = 1 \end{aligned}\right\}$

Solució: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ x - y - z &= -4\\ 3x + y + z &= 8 \end{aligned}\right\}$ $\begin{array}{l} 1a\\ 2a - 1a\\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array}$ $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ -2y - 2z &= -10\\ -2y - 2z &= -10 \end{aligned}\right\}$ $\begin{array}{l} 1a\\ 2a : (-2) \end{array}$ $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$

(Podem prescindir de la 3a, ja que és igual que la 2a)

$\left.\begin{aligned} x + y &= 6 - z\\ y &= 5 - z \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1\\ &y = 5 - z \end{aligned}$

Solucions: $x = 1,\ y = 5 - \lambda,\ z = \lambda$

Pàgina 20

8. **Resol aquests sistemes d'equacions mitjançant el mètode de Gauss:**

$$\text{a)}\ \left\{\begin{aligned} x + y + z &= 2\\ 3x - 2y - z &= 4\\ -2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right. \quad \text{b)}\ \left\{\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 1\\ -2x - 3y + z &= 2\\ 5x - y + z &= 5 \end{aligned}\right. \quad \text{c)}\ \left\{\begin{aligned} x - 2y &= -3\\ -2x + 3y + z &= 4\\ 2x + y - 5z &= 4 \end{aligned}\right.$$

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2\\ 3x - 2y - z &= 4\\ -2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & -1 & 4\\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} 1a\\ 2a - 3 \cdot 1a\\ 3a + 2 \cdot 1a \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$

$\to$ $\begin{array}{l} 1a\\ 2a \cdot (-1)\\ 3a \cdot 5 + 2a \cdot 3 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right) \to$ $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2\\ 5y + 4z &= 2\\ 2z &= 24 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} &z = 3\\ &y = \frac{2 - 4z}{5} = -2\\ &x = 2 - y - z = 1 \end{aligned}\right\}$

Solució: $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 1\\ -2x - 3y + z &= 2\\ 5x - y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} 1a - 2 \cdot 3a\\ 2a - 3a\\ 3a \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9\\ -7 & -2 & 0 & -3\\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Les dues primeres equacions són contradictòries. El sistema és *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a \\ 3a + 5 \cdot 2a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{array}$

Solucions: $x = -3 + 2\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = -2 + \lambda$

9. Resol mitjançant el mètode de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - y + 2z = 2} \\ \mathbf{-x + 3y + z = 3} \\ \mathbf{x + y + 5z = 7} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - y + w = 0} \\ \mathbf{x - 2y + z = 0} \\ \mathbf{5x - y + z + w = 0} \\ \mathbf{5x - 2y - z + 2w = 0} \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - y + w = 9} \\ \mathbf{x - 2y + z = 11} \\ \mathbf{5x - y + z + w = 24} \\ \mathbf{5x - 2y - z + 2w = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a + 1a \\ 3a - 1a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - 2z + y \\ y = \dfrac{5 - 3z}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

$x = 2 - 2z + \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{7z}{2}$

Solucions: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda, \quad y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda, \quad z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a \\ 3a - 1a \\ 4a - 2 \cdot 1a}}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a \\ 3a + 4a \\ 4a}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$

Solució: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \\ 4a - 2 \cdot 1a \end{array}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 4a \\ 4a \end{array}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{array}\right\}$

$x = \dfrac{-3}{4}$ $\quad z = x + 18 = \dfrac{69}{4}$ $\quad y = \dfrac{x + z - 11}{2} = \dfrac{11}{4}$ $\quad w = 9 - 2x + y = \dfrac{53}{4}$

Solució: $x = \dfrac{-3}{4}$, $y = \dfrac{11}{4}$, $z = \dfrac{69}{4}$, $w = \dfrac{53}{4}$

Pàgina 21

10. Discuteix, en funció del paràmetre k, aquests sistemes d'equacions:

a) $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$

- *Si* $k = 3$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x = 3 - 2y \end{array}\right\} \longrightarrow$

$\longrightarrow x = \dfrac{3 - 2y}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{y}{2}$

$z = x - 2 + y = \dfrac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \dfrac{-5 + 2y}{4} = \dfrac{-5}{4} + \dfrac{y}{2}$

Sistema *compatible indeterminat.*

Solucions: $x = \dfrac{3}{4} - \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = \dfrac{-5}{4} + \lambda$

- *Si* $k \neq 3$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 4x + 2y \quad &= k \\ (k-3)x \quad &= (3-k) \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{3-k}{k-3} = -1$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solució: $x = -1$, $y = 2 + \dfrac{k}{2}$, $z = -1 + \dfrac{k}{2}$

b) $$\left.\begin{aligned} 4x + 2y \quad &= k \\ x + y - z &= 2 \\ kx + y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a + 2a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - \text{1a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ El sistema és *incompatible.*

- Si $k \neq 3$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 4x + 2y \quad &= k \\ (k-3)x \quad &= (2-k) \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solució: $x = \dfrac{2-k}{k-3}$, $y = \dfrac{k^2+k-8}{2k-6}$, $z = \dfrac{k^2-5k+8}{2k-6}$

11. **Discuteix aquests sistemes d'equacions en funció del paràmetre k:**

a) $\left\{\begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad\; + z = k \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \quad\;\; y + kz = 1 \\ x + 2y \quad\; = k \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad\; + z = k \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} - \text{2a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} \text{1a} + 2 \cdot \text{3a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$

- *Si* $k = -3$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible.*

- Si $k \neq -3$, és *compatible determinat.* El resolem:

$\left.\begin{array}{l} (k+3)x \quad\quad = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad\; + z = k \end{array}\right\}$

$x = \dfrac{8+2k}{k+3}$

$z = k - 2x = \dfrac{k^2 - k - 16}{k+3}$

$y = -x - z = \dfrac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$

Solució: $x = \dfrac{8+2k}{k+3}$, $y = \dfrac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$, $z = \dfrac{k^2 - k - 16}{k+3}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \quad\;\; y + kz = 1 \\ x + 2y \quad\; = k \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - \text{1a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - \text{2a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$

- *Si* $k = -1$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible.*

• Si $k \neq -1$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y \quad + \quad z = & 1 \\ y \quad + \; kz = & 1 \\ (-1-k)z = & k-2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k\left(\frac{2-k}{1+k}\right) = 1 \;\;\rightarrow\;\; y = 1 - \frac{2k-k^2}{1+k} = \frac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} =$$

$$= \frac{-2+3k-k^2}{1+k}$$

Solució: $x = \dfrac{-2+3k-k^2}{1+k}$, $y = \dfrac{1-k+k^2}{1+k}$, $z = \dfrac{2-k}{1+k}$

Pàgina 26

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Resolució i interpretació geomètrica dels sistemes d'equacions

12. **Troba, si existeix, la solució dels sistemes següents i interpreta'ls gràficament:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{array}\right.$

Els resolem pel mètode de Gauss:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a - 3 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a - 5 \cdot 2a \\ 4a - 2 \cdot 2a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podem prescindir de les dues últimes files, ja que coincideixen amb la primera. Quedaria:

$$4y = -1 \;\;\rightarrow\;\; y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \;\;\rightarrow\;\; x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solució: $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{-1}{4}\right)$

El sistema representa quatre rectes que es tallen en el punt $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$

De la 2a equació, obtenim $y = \frac{-1}{5}$; de la 3a equació, obtenim $y = \frac{-1}{3}$.

Per tant, el sistema és *incompatible*.

El sistema representa tres rectes que es tallen dues a dues, però no hi ha cap punt comú a les tres.

13. Comprova que aquest sistema és incompatible i raona quina és la posició relativa de les tres rectes que representa:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Si dividim la 3a equació entre 2, obtenim: $x + 2y = 0$. La 1a equació és $x + 2y = 5$. Són contradictòries, així doncs el sistema és *incompatible*.

La 1a i la 3a equacions representen dues rectes paral·leles; la 2a les talla a ambdues.

14. Resol i interpreta geomètricament el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \\ (2/3) \cdot 3a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2y = \frac{-2}{5} \\ y = \frac{-1}{5} \end{array}$$

Solució: $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

Geomètricament, són tres rectes que es tallen en el punt $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$.

15. Raona si aquests sistemes tenen solució i interpreta'ls geomètricament:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ 2/3x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividim la 2a equació entre 2, obtenim:

$x + 2y - z = \frac{1}{2}$, que contradiu la 1a.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3x) - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multipliquem per $-\dfrac{2}{3}$ la 1a equació, obtenim:

$\dfrac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradiu la 2a equació.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

Sistemes escalonats

16. Resol els sistemes següents però reconeix prèviament que són escalonats:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-69}{11} \\ x = \dfrac{7 + y}{2} = \dfrac{4}{11} \end{array}$

Solució: $\left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\}$ $z = \dfrac{2}{9}$ $\quad y = z - 1 = \dfrac{-7}{9}$ $\quad x = \dfrac{3 + y - z}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solució: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Solucions: $(-5 + 3\lambda,\ 4 - \lambda,\ \lambda,\ -3 + 2\lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right\}$ $y = \dfrac{1}{2}$ $\quad x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6}$ $\quad z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solució: $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$

17. **Transforma en escalonats i resol els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & -17 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 3 \cdot 1a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 11 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 11x = 4 \end{array}\right\}$

$x = \dfrac{4}{11}$ $y = 2x - 7 = \dfrac{-69}{11}$

Solució: $\left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{l} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2a \\ 1a \\ 3a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 5 \cdot 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 9z = 2 \end{array}\right\}$ $z = \dfrac{2}{9}$ $y = z - 1 = \dfrac{-7}{9}$ $x = 2 + 2y + z = \dfrac{2}{3}$

Solució: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

Mètode de Gauss

18. **Resol aquests sistemes d'equacions lineals:**

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 3a \\ 3a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a : 3 \\ 3a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a - 5 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{array}$

Solució: $(-2, 4, 6)$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 5 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ -2 \cdot 3a + 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{array}\right\} \quad z = \dfrac{1}{2} \quad y = \dfrac{3 + 2z}{-2} = -2 \quad x = -y - z = \dfrac{3}{2}$

Solució: $\left(\dfrac{3}{2}, -2, \dfrac{1}{2}\right)$

19. **Resol:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{array}\right\}$

$y = 4z + 2$
$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$
$z = \lambda$

Solucions: $(-1 - 3\lambda,\ 2 + 4\lambda,\ \lambda)$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a : 2 \\ 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a : (-5) \\ 3a : 7 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$

Solució: $(-1, 1, -2)$

20. **Resol, si és possible, els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ x - y - z &= -10 \\ 2x - y + z &= 5 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ -2a + 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a \\ 2a + 2 \cdot 3a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ 3y + 2z &= 19 \\ -7y &= -7 \end{aligned}\right\}$

$y = 1$ $\quad z = \dfrac{19 - 3y}{2} = 8$ $\quad x = 9 - 2y - z = -1$

Solució: $(-1, 1, 8)$

b) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ -2a + 2 \cdot 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 - z \\ 5y &= 7 - z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & y = \frac{7}{5} - \frac{z}{5} \\ & x = 3 - z - 2y = 3 - z - \frac{14}{5} + \frac{2z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3z}{5} \end{aligned}$

Si fem $z = 5\lambda$, les solucions són: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda,\ \dfrac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 4y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 3a \\ 3a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

La segona equació és impossible: $0x + 0y + 0z = 5$.

El sistema és *incompatible.*

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0\\ 3x-\;\;y\;\;\;\;\;\;=0\\ 4x+\;\;y-z=0\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\4&1&-1&0\end{array}\right)\to \begin{array}{l}1a\\2a\\3a+1a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\6&-2&0&0\end{array}\right)\to$$

$$\to \begin{array}{l}1a\\2a\\3a-2\cdot 2a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to \left.\begin{array}{l}2x-3y+z=0\\3x-\;\;y\;\;\;\;\;\;=0\end{array}\right\}$$

$y = 3x$

$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$

$x = \lambda$

Solucions: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

21. Classifica els sistemes següents en compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=3}\\ \boldsymbol{x+y-z=3}\\ \boldsymbol{z=0}\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=3}\\ \boldsymbol{2x-y+z=2}\\ \boldsymbol{x-y+z=1}\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3\\ x+y-z=3\\ z=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r} x+y=3\\ x+y=3\\ z=0\end{array}\right\}$ *Compatible indeterminat.*

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3\\ 2x-y+z=2\\ x-y+z=1\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&1&2\\1&-1&1&1\end{array}\right)\to \begin{array}{l}1a\\2a-2\cdot 1a\\3a-1a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-4\\0&-2&0&-2\end{array}\right)\to$$

$\to$ *Compatible determinat.*

22. Estudia els sistemes següents i resol-los pel mètode de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=1}\\ \boldsymbol{2x+3y+5z=11}\\ \boldsymbol{x-5y+6z=29}\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{2x-3y+z=0}\\ \boldsymbol{x+2y-z=0}\\ \boldsymbol{4x+y-z=0}\end{array}\right.$

a) $$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1\\ 2x+3y+5z=11\\ x-5y+6z=29\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&3&5&11\\1&-5&6&29\end{array}\right)\to \begin{array}{l}1a\\(1a)\cdot 2-2a\\1a-3a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&-3&-7\\0&6&-5&-27\end{array}\right)\to$$

$$\to \begin{array}{l}1a\\2a\\(2a)\cdot 6+3a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&-3&-7\\0&0&-23&-69\end{array}\right)\to\left\{\begin{array}{r}x+y+z=2\\-y-3z=-7\\-23z=-69\end{array}\right.$$

Sistema *compatible determinat.*

Solució: $z = 3$, $y = -2$, $x = 1$.

$$\text{b) } \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a + 1a} \\ \text{3a + 1a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - 2 \cdot \text{2a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$ Sistema *compatible indeterminat.*

El resolem: $$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \quad\;\; = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda,\ 3\lambda,\ 7\lambda)$

23. Estudia i resol aquests sistemes pel mètode de Gauss:

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{l} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right.$$

$$\textbf{c)} \left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right. \qquad \textbf{d)} \left\{\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{a) } \left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} + 4 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} + 2 \cdot \text{1a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a – 2a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to$$ Sistema *compatible determinat.*

El resolem: $$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad y = -\frac{1}{2} \qquad x = y + 3z + 2 = \frac{3}{2}$$

Solució: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

$$\text{b) } \left.\begin{array}{r} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{3a} \\ \text{2a} \\ \text{1a} \\ \text{4a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a – 1a} \\ \text{3a – 1a} \\ \text{4a} - 3 \cdot \text{1a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a : 2} \\ \text{3a + 2a} \\ \text{4a – 2a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

→ Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda, \ \lambda, 1 - 2\lambda)$.

c) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 5 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 6 & -3 & | & 9 \\ 0 & 12 & -7 & | & 19 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a : 3 \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

Solució: $(1, 1, -1)$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ -4 \cdot 2a + 3 \cdot 3a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 0 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

Pàgina 27

Discussió de sistemes lineals

24. **Discuteix els sistemes següents i resol-los quan sigui possible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -x + y/2 &= -2 \\ x + ky &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2\cdot 2a + 1a \\ 2\cdot 3a - 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k = -\dfrac{1}{2}$ $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$2x - y = 4 \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases}$ *Solucions:* $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2}$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ (2k+1)y &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$

Solució: $(2, 0)$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 2a \\ 1a \\ 3a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a - 2\cdot 1a \\ 3a - 5\cdot 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10$ $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 5y - 3z &= -5 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &y = \dfrac{-5 + 3z}{5} = -1 + \dfrac{3z}{5} \\ &x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \dfrac{6z}{5} - z = 1 + \dfrac{z}{5} \end{aligned}$

Fent $z = 5\lambda$.

Solucions: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10$ $\rightarrow$ *Incompatible*

25. Discuteix els següents sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x - y - z &= k \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y + kz &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2\cdot 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinat* per a tot k.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} - \text{1a} \\ \text{3a} - 3 \cdot \text{1a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} : 2 \\ \text{3a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} - 7 \cdot \text{2a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $a = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminat*
- Si $a \neq 10 \to$ Sistema *compatible determinat*

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{3a} \\ \text{2a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} + 2 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} + \text{1a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Compatible determinat per a tot m.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{3a} \\ \text{2a} \\ \text{1a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} - 5 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} - 3 \cdot \text{1a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ -2 \cdot \text{3a} + \text{2a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$

$2 - 2a = 0 \to a = 1$

- Si $a = 1 \to$ Sistema *incompatible*
- Si $a \neq 1 \to$ Sistema *compatible determinat*

26. Resol cada un dels sistemes següents per als valors de m que el fan compatible:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} - 2 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} - 4 \cdot \text{1a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} : (-5) \\ \text{3a} - \text{2a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$

- Si $m = 7 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinat*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \; x = 3 - 2y = 1$$

Solució: $(1, 1)$

- Si $m \neq 7 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

b) $$\left.\begin{array}{rl} x - \;\; y - 2z = & 2 \\ 2x + \;\; y + 3z = & 1 \\ 3x \quad\;\; + \;\; z = & 3 \\ x + 2y + 5z = & m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \\ 4a - 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \\ 4a - 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminat*

$$\left.\begin{array}{r} x - \;\; y - 2z = \;\; 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3 - 7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Fent $z = 3\lambda$:

Solucions: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

27. **Discuteix i resol en funció del paràmetre:**

a) $$\left\{\begin{array}{rl} -x + my + \;\; z = & 2 \\ 2x - \;\; y + 2z = & 0 \\ -x \qquad\quad - 3z = & -2 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rl} x + \;\; y + \;\; z = & 0 \\ 3x + 2y + az = & 5 \\ 2x + \;\; y + \;\; z = & 3 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{rl} -x + my + \;\; z = & 2 \\ 2x - \;\; y + 2z = & 0 \\ -x \qquad\quad - 3z = & -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} -3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ -2a \\ 3a + 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m = 1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminat*

$$\left.\begin{array}{r} x \quad + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Solucions: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

• Si $m \neq 1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinat*

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad\quad + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ (m-1)y \qquad = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} y \\ z \\ x \end{array}}\right\} \quad \textit{Solució: } (-1, 0, 1)$$

b) $\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + \;\; z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + \;\; y + \;\; z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 3a \\ 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ -2a \\ 3a - 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

• Si $a = 2 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

• Si $a \neq 2 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \qquad z = \;\;\, 0 \\ y + \qquad z = -3 \\ (a-2)z = \;\;\, 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2} = 3$$

Solució: $\left(3, \dfrac{4-3a}{a-2}, \dfrac{2}{a-2}\right)$

PER RESOLDRE

28. Discuteix i resol en els casos en qué sigui possible.

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + \;\; z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - \;\; z = 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ x - \qquad\quad z = 1 \\ 2x + 2y + (m+1)z = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x \qquad + 2z = 11 \\ x + y \qquad\;\; = \;\;\, 3 \\ ax + y + 2z = \;\;\, 0 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} 2x + \;\; y - 3z = 0 \\ 2x \qquad\; + az = 0 \\ 6x + ay - 9z = 0 \end{array}\right.$

a) Tots els termes independents són zero. Per tant, el sistema segur que és compatible. Sempre existeix la solució $x = y = z = 0$. Ara cal veure en quins casos és compatible determinat i ens quins és compatible indeterminat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \text{2a} \\ \text{1a} \\ \text{3a} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \text{1a} \\ 2\cdot(\text{1a}) - \text{2a} \\ 5(\text{1a}) - \text{3a} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -3 & 0 \\ 0 & 3-2k & -7 & 0 \\ 0 & -2-5k & -14 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{matrix} \text{1a} \\ 2\cdot(\text{2a}) - \text{3a} \\ \text{3a} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & -3 & 0 \\ 0 & k+8 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5k & -14 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema ja és *escalonat.*

- Si $k + 8 = 0$ tenim una fila de zeros $\to$ sistema *compatible indeterminat.*

$$k = -8 \to \begin{cases} x + 8y - 3z = 0 \\ -2 + 40y - 14z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + 8y + 3z = 0 \\ 38y - 14z = 0 \end{cases}$$

Solució: $z = \lambda,\ y = \dfrac{+7}{19}\lambda,\ x = \dfrac{1}{19}\lambda$

- Si $k + 8 \neq 0$ llavors el sistema és *compatible determinat* i la solució serà:

Solució: $x = y = z = 0$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & m+1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \text{2a} \\ \text{1a} \\ \text{3a} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & m+1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \text{1a} \\ 3(\text{1a}) - \text{2a} \\ 2(\text{1a}) - \text{3a} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -m-1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{2a} - \text{3a} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & m+1 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m + 1 = 0$ tenim una fila de zeros $\to$ sistema *compatible indeterminat.*

$$m = -1 \to \begin{cases} x - z = 1 \\ -2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Solució: $z = \lambda,\ x = 1 + \lambda,\ y = -1 - \lambda$

- Si $m + 1 \neq 0$ llavors el sistema és *compatible determinat.*

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ -2y - 2z = 2 \\ (m + 1)z = 0 \end{cases}$$

Solució: $z = 0,\ x = 1,\ y = -1$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ a & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{canvieu la} \\ \text{1a columna} \\ \text{per la 3a}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{1a} - \text{3a}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1-a & 11 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow{\substack{\text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{2a} + \text{3a}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2-a & 14 \end{array}\right)$

- Si $a = 2$ sistema *incompatible*.
- Si $a \neq 2$ sistema *compatible determinat*, i degut al canvi de columnes queda:

$$\begin{cases} 2z - x = 11 \\ y + x = 3 \\ (2 - a)x = 14 \end{cases}$$

Solució: $x = \dfrac{14}{2 - a}$, $y = \dfrac{-3a - 8}{2 - a}$, $z = \dfrac{8 - 11a}{4 - 2a}$

d) El sistema ha de ser compatible ja que tots els termes independents són zero. Sempre existeix la solució $x = y = z = 0$. Ara cal veure quan és compatible determinat i quan és indeterminat.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & & a & 0 \\ 6 & a & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1a} \\ \text{1a} - \text{2a} \\ 3(\text{1a}) - \text{3a}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3-a & 0 \\ 0 & 3-a & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $3 - a = 0$ sistema *compatible indeterminat*.

$$a = 3 \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ y - 6z = 0 \end{cases}$$

Solució: $z = \lambda$, $x = \dfrac{-3}{2}\lambda$, $y = 6\lambda$

- Si $3 - a \neq 0$ el sistema és *compatible determinat* i la solució és $x = y = z = 0$.

29. Discuteix els sistemes següents segons els valors de α i interpreta'ls geomètricament:

a) $\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\substack{\text{1a} \\ \text{2a} \cdot \alpha - \text{1a}}} \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{pmatrix}$

- Si $\alpha = 1$, queda:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sistema *compatible indeterminat*. Són dues rectes coincidents.

- Si $\alpha = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ Sistema *incompatible*. Són dues rectes paral·leles.

- Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són dues rectes secants.

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a \\ 5 \cdot 3a - 2a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$$

- Si $\alpha \neq 0$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són tres plans que es tallen en un punt.
- Si $\alpha = 0$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*. Els plans es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú als tres.

30. **Es considera el sistema d'equacions lineals:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right.$$

a) Troba un valor de a per al qual el sistema sigui incompatible.

b) Discuteix si hi ha algun valor del paràmetre a per al qual el sistema sigui compatible determinat.

c) Resol el sistema per a $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2 + a) & 6 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) $a = 2$

b) No existeix cap valor de a per al qual el sistema sigui compatible determinat.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \\ z = \lambda \end{array} \rightarrow x = 2 - 3z$$

Solucions: $\left(2 - 3\lambda, -\dfrac{1}{2}, \lambda\right)$

31. **Considera el sistema d'equacions:**

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \phantom{{}+2y} - z = 1 \end{array}\right.$$

a) Hi ha una solució en què y sigui igual a 0?

b) Resol el sistema.

c) Interpreta'l geomètricament.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \phantom{{}+2y} - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} x \phantom{{}-2y} - z = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

a) $y = 0 \;\to\; \left.\begin{array}{l} x - z = 1 \\ - z = -2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 2 \\ x = 1 + z = 3 \end{array}\right\}$

Solució: $(3, 0, 2)$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ z = 2y + 2 \\ y = \lambda \end{array}\right\}$

Solucions: $(3 + 2\lambda, \lambda, 2\lambda + 2)$

c) Són tres plans que es tallen en una recta.

32. **Troba un nombre de tres xifres sabent que aquestes sumen 9; que, si del nombre donat se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, la diferència és 198, i que la xifra de les desenes és mitjana aritmètica de les altres dues.**

☛ ***Si x és la xifra de les unitats, y la de les desenes i z la de les centenes, el nombre serà $x + 10y + 100z$.***

z = n. centenes, y = n. desenes, x = n. unitat, $\to$ nombre zyx

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ (z + 10y + 100x) - (x + 10y + 100z) = 198 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ +99x - 99z = 198 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right. \to$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ +x \phantom{{}+y} - z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right. \to \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ +1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1a \\ 1a - 2a \\ 1a - 3a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right) \to$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ \phantom{x+{}} y + 2z = 7 \\ \phantom{x+{}} y + = 3 \end{array}\right.$$

Solució: $y = 3$, $z = 2$, $x = 4$. El nombre és 432.

33. **A, B i C són tres amics. A li diu a B: si et dono la tercera part dels meus diners, els tres tindrem la mateixa quantitat. Calcula el que té cadascú si entre els tres tenen 60 €.**

a = diners que té A $\quad b$ = diners que té B $\quad c$ = diners que té C

$$\begin{cases} a - \dfrac{a}{3} = b + \dfrac{a}{3} = c \\ a + b + c = 60 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,a - b = 0 \\ \dfrac{2}{3}\,a - c = 0 \\ a + b + c = 60 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,a = b \\ \dfrac{2}{3}\,a = c \\ a + b + c = 60 \end{cases}$$

$$a + \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a = 60 \to 3a + a + 2a = 180 \to 6a = 180 \to a = 30,\ b = 10,\ c = 20$$

34. **Un magatzemista disposa de tres tipus de cafè: el tipus A de 9,8 €/kg; el B de 8,75 €/kg i el C de 9,5 €/kg. Vol fer una mescla amb els tres tipus de 10,5 kg a 9,40 €/kg. Quants quilos de cada tipus ha de mesclar si ha de posar el doble del tipus C que dels tipus A i B?**

a = quilos de A usats per fer la mescla
b = quilos de B usats per fer la mescla
c = quilos de C usats per fer la mescla

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 10{,}5 \\ a + b = 2c \\ 9{,}8a + 8{,}75b + 9{,}5c = 9{,}40 \cdot 10{,}5 \end{array}\right\}$$

Solució: Amb les 2 primeres eq.: $c = 3{,}5$ kg, $b = 3$ kg, $a = 4$ kg.

Pàgina 28

35. **Una botiga ha venut 600 exemplars d'un videojoc per un total de 6384 €. El preu original era de 12 €, però també ha venut còpies defectuoses amb descomptes del 30% i del 40%. Si sabem que el nombre de còpies defectuoses venudes va ser la meitat del de les còpies en bon estat, calcula a quantes còpies se'ls va aplicar el 30% de descompte.**

Anomenem x el nombre de còpies venudes al preu original, 12 €; y el nombre de còpies venudes amb un 30% de descompte, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; i z el nombre de còpies venudes amb un 40% de descompte, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Així:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}1a\\ -2a + 12 \cdot 1a\\ -3a + 1a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}1a\\ 2a\\ 3a : 3\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}1a\\ 3a\\ 2a - 3{,}6 \cdot 3a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \quad z = 600 \\ y + \quad z = 200 \\ 1{,}2z = \ \ 96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \ \ 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solució: El 30% de descompte es va aplicar a 120 còpies.

36. **Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 € i un total de 2000 €. Si el nombre de bitllets de 10 € és el doble que el nombre de bitllets de 20 €, descobreix quants bitllets hi ha de cada tipus.**

Anomenem x el nombre de bitllets de 10 €; y el nombre de bitllets de 20 €, i z el nombre de bitllets de 50 €. Veiem que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + z = 95 \\ 4y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

$z = 95 - 3y$

$4y + 5(95 - 3y) = 200 \rightarrow 4y + 475 - 15y = 200 \rightarrow 275 = 11y$

$y = 25 \rightarrow z = 20 \rightarrow x = 50$

Solució: Hi ha 50 bitllets de 10 €, 25 bitllets de 20 € i 20 bitllets de 50 €.

37. **En un taller de joieria es fabriquen collarets amb 50, 75 i 85 perles. Per fer-ho s'utilitzen en total 17 500 perles i 240 tanques.**

a) Quants collarets de cada mida s'han de fabricar si es volen tants collarets de mida mitjana com la mitjana aritmètica del nombre de collarets grans i petits)

b) Sense tenir en compte la condició anterior, és possible fabricar el mateix nombre de collarets de cada mida?

p = nombre de collarets petits
m = nombre de collarets mitjans
g = nombre de collarets grans

Cada collaret té una tanca $\rightarrow p + m + g = 240$

Totes les perles utilitzades han d'estar en algun collaret $\rightarrow 50p + 75m + 85p =$ 17 500.

a) $\left\{\begin{array}{l} p + m + g = 240 \\ 50p + 75m + 85g = 17\,500 \\ m = \dfrac{p+g}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} p + m + g = 240 \\ 50p + 75m + 85g = 17\,500 \\ p - 2m + g = 0 \end{array}\right.$

Restem la 1a – 3a i obtenim $3m = 240 \quad \to \quad m = 80$

$$\begin{cases} p + g = 160 \\ 50p + 85g = 11\,500 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 160 \\ 50 & 85 & 11\,500 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 160 \\ 0 & 35 & 3\,500 \end{array}\right) \to \begin{cases} p + g = 160 \\ 35g = 3\,500 \end{cases}$$

$g = 100,\ p = 60,\ m = 80$

b) $\begin{cases} p + m + g = 240 \\ 50p + 75m + 85g = 17\,500 \\ p = m = g \end{cases} \to \begin{cases} p + p + p = 240 \\ 50p + 75p + 85gp = 17\,500 \end{cases} \to$

$\left.\begin{cases} 3p = 240 & \to \quad p = 80 \\ 210p = 17\,500 & \to \quad p = 83{,}3 \end{cases}\right\}$ És impossible el que demana l'enunciat, és a dir, el sistema és *incompatible*.

38. **En una botiga, per comprar 2 jaquetes i una brusa ens cobre 200 €. Si tornem a la botiga i comprem una jaqueta, uns pantalons i tornem la brusa, ens cobren 100 €. Si fem una tercera visita a la botiga i compren 5 jaquetes, uns pantalons i una brusa, quant ens cobraran?**

☛ ***Expressa el preu dels pantalons i de les bruses en funció del de les jaquetes.***

j = preu de la jaqueta, p = preu dels pantalons, b = preu de la brusa

$\begin{cases} 2j + b = 200 \\ j + p - b = 100 \\ 5j + p + b = x \end{cases}$ Podem observar que si multipliquem per 2 la 1a equació i la sumem la 2a obtenim la 3a.
Això vol dir que:

$$\begin{array}{rl} 4j + 2b &= 400 \\ +\quad j + p - b &= 100 \\ \hline 5j + p + b &= 500 \end{array}$$ que ens cobraran 500 €

També es pot resoldre tal com diu l'enunciat:

$$\begin{cases} 2j + b = 200 \\ j + p - b = 100 \\ 5j + p + b = x \end{cases} \to \begin{cases} b = 200 - 2j \\ p = 100 + b - j = 100 + (200 - 2j) - j = 300 - 3j \end{cases}$$

i substituim a la 3a equació:

$5j + (300 - 3j) + (200 - 2j) = x$

$500 = x$

39. **Tres entitats financeres A, B i C ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2 %, 3 % i K %. La Joana, en Manel i en Daniel decideixen invertir els seus estalvis en aquestes entitats durant un any. Si tots ho fessin a A obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Daniel per B, obtindrien 192 €; i si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Daniel per C, obtindrien 218 €.**

a) Escriu un sistema d'equacions que descrigui la situació.

b) Calcula, sense resoldre el sistema, la quantitat de diners invertits entre les tres persones.

c) Troba, si existeix, un valor de K per al qual hi hagin infinites solucions. Resol el sistema per a l'esmentat valor de K i dóna tres solucions diferents.

j = diners invertits per la Joana
m = diners invertits per en Manel
d = diners invertits per en David

a)
$$\left.\begin{aligned} &(j+m+d)\cdot\frac{2}{100}=164\\ &j\cdot\frac{2}{100}+m\,\frac{k}{100}+d\cdot\frac{3}{100}=192\\ &(j+m)\cdot\frac{3}{100}+d\cdot\frac{k}{100}=218 \end{aligned}\right\}\;\rightarrow\;\begin{aligned} j+m+d&=8.200\\ 2j+km+3d&=19.200\\ 3j+3m+kd&=21.800 \end{aligned}$$

b) No és possible, ja que ens calen més dades, tot i que si tots han d'haver invertit > 2000 € → $1{,}6 < k < 2{,}\widehat{3}$

c) Avaluem el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8.200\\ 2 & k & 3 & 19.200\\ 3 & 3 & k & 21.800 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3a)-3\,(1a)]{(2a)-2\cdot(1a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8.200\\ 0 & k-2 & 1 & 2.800\\ 0 & 0 & k-3 & 2.800 \end{pmatrix}$$

De l'última equació: Si (k – 3) = 0 el sistema serà incompatible,
k = 3 sistema incompatible → no solució.

De la segona equació: Si (k – 2) = 0 → k = 2 quedarà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8.200\\ 0 & 0 & 1 & 2.800\\ 0 & 0 & -1 & -2.800 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8.200\\ 0 & 0 & 1 & 2.800\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible indeterminat → ∞ solucions

Per k = 2:

$j+m+d=8.200$
$d=2.800$

En Daniel ha invertit 2.800 € i entre la Joana i en Manel n'han invertit 5.400 €.
Podria ser:

	JOANA	MANEL	DANIEL
SOLUCIÓ 1	3.000	2.400	2.800
SOLUCIÓ 2	3.200	2.200	2.800
SOLUCIÓ 3	2.100	3.300	2.800
...			2.800

40. **Una persona ha obtingut 6000 € de benefici per invertir un total de 60 000 € en tres empreses: A, B i C. La suma dels diners invertits en A i B va ser m vegades els invertits en C i els beneficis van ser el 5 % en l'empresa A, el 10 % en la B i el 20 % en la C.**

a) Planteja un sistema d'equacions per esbrinar la quantitat invertida en cada empresa.

b) Prova que si m > 0 el sistema és compatible determinat.

c) Troba la solució per a m = 5.

a) a = diners invertits en l'empresa A
b = diners invertits en l'empresa B
c = diners invertits en l'empresa C

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=60.000 \\ a+b=mc \\ a\cdot\dfrac{5}{100}+b\cdot\dfrac{10}{100}+c\cdot\dfrac{20}{100}=6.000 \end{array}\right.$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a+b+c=60.000 \\ a+b-mc=0 \\ 5a+10b+20c=600.000 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60.000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \\ 5 & 10 & 20 & 600.000 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60.000 \\ 0 & 5 & 15 & 300.000 \\ 0 & 0 & m+1 & 60.000 \end{array}\right)$$

Si $m > 0 \rightarrow m+1 > 0$ i l'equació $(m+1)z = 60.000$ sempre tindrà solució i, per tant, també les altres dues equacions. El sistema serà, per tant, compatible determinat.

c) *Solució:* Si $m = 5 \rightarrow 6c = 60.000$

$c = 10.000$, $b = 30.000$, $a = 20.000$

41. **Les edats d'un noi, el seu pare i el seu avi compleixen les condicions següents: la suma de les edats del pare, del fill i el doble de la de l'avi fa 182 anys. El doble de l'edat del fill més la de l'avi fa 100 anys i l'edat del pare és α vegades la del seu fill.**

a) Troba les edats dels tres suposant que α = 2.

b) És possible que α = 3?

c) Si α = 3 i en la primera condició la suma és 200, què passa amb el problema?

a) f = edat del noi o fill
p = pare
a = avi

$$\left.\begin{array}{l} p+f+2a=182 \\ 2f+\ \ a=100 \\ p=\alpha f \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2a+p+f=182 \\ a+\ \ 2f=100 \\ p-\alpha f=0 \end{array}$$

Solució: Si $\alpha = 2 \rightarrow f = 18$ anys, $p = 36$ anys, $a = 64$ anys

b) $\left.\begin{array}{r} 2a + p + f = 182 \\ a + \quad 2f = 100 \\ p - \alpha f = \quad 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 1 & 0 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1a) - 2\,(2a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{2a - 3a} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & -18 \end{array}\right)$

Solució: Si $\alpha = 3$ Sistema incompatible $\rightarrow$ No solució

c) Sistema incompatible ja que la 3a equació no es pot solucionar.

42. **Una marca comercial utilitza tres ingredients A, B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P_1, P_2 i P_3. La pizza P_1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C; la P_2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C; i la P_3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. El preu de venda al públic és de 4,80 € per a la P_1, 4,10 € per a la P_2 i 4,90 € per a la P_3. Si sabem que el benefici és de 1,60 € en cada una, troba quant li costa a la marca comercial cada unitat de A, B i C.**

El preu unitari (per unitat) és igual al cost unitari més el benefici unitari.

Per tant, cost = preu – benefici.

Calculem el cost per als tres tipus de pizzes:

cost P_1 = 4,80 – 1,60 = 3,20

cost P_2 = 4,10 – 1,60 = 2,50

cost P_3 = 4,90 – 1,60 = 3,30

Calculem el cost de cada ingredient:

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = 3{,}20 \\ 2a + b + c = 2{,}50 \\ 2a + b + 2c = 3{,}30 \end{cases}$$

Observem que si fem 3a – 2a obtenim $c = 0{,}80$ €, i llavors ens queda:

$$\begin{cases} a + 2b = 1{,}60 \\ 2a + b = 1{,}70 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1{,}60 \\ 2 & 1 & 1{,}70 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow[2(1a) - 2a]{1a} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1{,}60 \\ 0 & 3 & 1{,}50 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1{,}60 \\ 3b = 1{,}50 \end{cases} \rightarrow b = 0{,}50 \text{ €},\ a = 0{,}60 \text{ €}$$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

43. **Si tenim un sistema compatible indeterminat de 2 equacions amb 2 incògnites, es pot aconseguir un sistema incompatible afegint-hi una tercera equació?**

Sí, si li afegim una equació contradictòria amb el que diuen les anteriors.

44. **Si a un sistema de 2 equacions amb 2 incògnites incompatible li afegim una altra equació, podríem aconseguir que fos compatible indeterminat? I determinat? Justifica les respostes.**

No. Si el sistema és incompatible, les dues equacions inicials són contradictòries. Afegint una altra equació, no podem canviar aquest fet; el sistema seguirà sent incompatible.

45. **Quantes solucions té el següent sistema si a és diferent de 1. I si a és igual a 1? Pot ser incompatible?**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a-1)\,x = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Si a $\neq$ 1 té única solució, $x = y = z = 0$

Si a = 1 sistema compatible indeterminat $\rightarrow$ Té infinites solucions

No pot ser mai incompatible, això passa sempre amb tots els sistemes homogenis.

Pàgina 29

46. **És possible convertir aquest sistema en compatible indeterminat si hi canviem un signe?**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Sí, canviant un dels signes negatius per positiu tindríem $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Restant $2a - 3a$ obtenim $2z = 0 \rightarrow z = 0$

El sistema quedaria $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. És un sistema compatible indeterminat.

47. **Donades les equacions:** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui incompatible.

b) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui compatible determinat.

Justifica en cada cas el procediment seguit.

a) Perquè sigui incompatible, l'equació que afegim ha de ser de la forma:

$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k$ amb $k \neq 5a - 4b$.

Si agafem, per exemple, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$3x - 2y + z = 1$

Afegint aquesta equació, el sistema seria incompatible.

b) Per exemple, afegint $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 3y + z &= -4 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 3x + z &= 5 \\ 2x + z &= -4 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= 9 \\ y &= 0 \\ z &= -22 \end{aligned}\right\} \text{ Compatible determinat}$$

48. **Defineix quan dos sistemes d'equacions lineals són equivalents. Justifica si són equivalents o no els sistemes següents:**

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Dos sistemes d'equacions lineals són equivalents quan totes les solucions del 1.r sistema ho són també del 2.n, i a la inversa.

Els dos sistemes donats no són equivalents, atès que el 1.r és compatible indeterminat (té infinites solucions) i el 2.n és determinat (només té una solució).

49. **Siguin S i S' dos sistemes equivalents amb solució única que tenen iguals els termes independents. Podem assegurar que tenen iguals els coeficients de les incògnites?**

No. Per exemple, els sistemes:

$$S: \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$$

són equivalents, amb solució única (2, 1), tenen iguals els termes independents, però no els coeficients de les incògnites.

PER APROFUNDIR

50. **Troba raonadament dos valors del paràmetre a per als quals aquest sistema sigui incompatible:**

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax+y+2z=1 \\ x+3z=2 \\ 2x+az=3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ ax+y+2z=1 \\ x+3z=2 \\ 2x+az=3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} - \text{1a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} - 2\cdot\text{3a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$$

Si $a=1$ o $a=6$, el sistema és incompatible.

51. **Discuteix els sistemes següents en funció del paràmetre a i resol-los en cas que siguin compatibles indeterminats:**

a) $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+y-z=0 \\ 2x+ay=2 \\ -x+z=1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = a - 1 \\ 2x + \ \ y + az = a \\ x + ay + \ \ z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$\to$ Sistema *compatible indeterminat*

El resolem en aquest cas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \quad\ y \qquad\ = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + \qquad z = 1 \quad \to \quad x = 1 - z \\ \qquad y \qquad = 0 \\ \qquad\qquad z = \lambda \end{array}\right\}$$

Solucions: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \ \to$ Sistema *compatible determinat*

b) $\left.\begin{array}{l} ax + \ \ y - z = 0 \\ 2x + ay \qquad = 2 \\ -x \qquad\ + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[a \neq 0]{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -a \cdot 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2 + a + 2 & 0 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \ \to \ a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{array}{l} a = -1 \\ a = \ \ 2 \end{array}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} -x \qquad + z = 1 \\ \ \ x + y \qquad = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{array}$$

$\to$ Sistema *compatible indeterminat*

Solucions: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 2 \ \to$ Sistema *compatible determinat*

52. **Discuteix el sistema següent segons els valors del paràmetre a. Interpreta'l geomètricament:**

$$\begin{cases} ax + \ \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + \ \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} ax + \ \ y + z = \ \ 4 \\ x + \ \ y + z = -1 \\ x - ay + z = \ \ 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c} \text{2a} \\ \text{1a} \\ \text{3a} \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c} \text{1a} \\ \text{2a} - \text{1a} \\ \text{3a} - \text{1a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{ Sistema } \textit{incompatible}$$

  Els dos primers plans són paral·lels, i el tercer els talla.

- Si $a = -1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{ Sistema } \textit{incompatible}$$

  Els dos últims plans són paral·lels, i el primer els talla.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ → Sistema *compatible determinat.* Són tres plans que es tallen en un punt.

53. **Resol el sistema següent:**

$$\begin{cases} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{cases}$$

☛ ***Si sumes les cinc igualtats, n'obtindràs una altra amb què se't poden simplificar molt els càlculs.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, és a dir:

$4(x + y + z + t + w) = 76$, o bé:

$x + y + z + t + w = 19$

Per tant:

$(x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 \rightarrow w = 2$

$(x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 \rightarrow t = 3$

$(x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 \rightarrow z = 4$

$(x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 \rightarrow y = 5$

$(y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 \rightarrow x = 5$

54. **Ens diuen que x, y, z, t, w són nombres enters i que k val 36 o 38. Decideix raonadament quin dels dos és el seu valor i resol el sistema següent:**

$$\begin{cases} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, és a dir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bé:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{k}{4}$$

Si x, y, z, t, w són nombres enters, llur suma també ho serà; així doncs, k ha de ser múltiple de 4. Com que ens diuen que val 36 o 38, tenim que ha de ser $k = 36$ (ja que 38 no és múltiple de 4).

Resolem el sistema, ara que sabem que $k = 36$:

La suma de les cinc igualtats donarà lloc a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Per tant:

$(x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \rightarrow w = 11$

$(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \rightarrow t = 10$

$(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \rightarrow z = 8$

$(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \rightarrow y = 7$

$(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \rightarrow x = 10$

55. **Una colla formada per 6 obrers es compromet a podar els arbres d'una plantació. Treballen de dilluns a dissabte. Cada dia, cinc d'ells poden i el sisè els atén (reposa eines, els dóna aigua, arreplega els troncs que cauen...). Cada obrer poda el mateix nombre d'arbres cada dia, és a dir, si l'Albert poda 8 arbres un dia, podarà 8 arbres cada dia que intervingui. Els resultats són:**

Dilluns: 34 arbres podats.

Dimarts: 36 arbres podats.

Dimecres: 37 arbres podats.

Dijous: 38 arbres podats.

Divendres: 40 arbres podats.

Dissabte: No sabem si són 33 o 35 arbres podats.

Calcula quants arbres diaris poda cada un dels sis obrers sabent que són nombres enters i que cap d'ells poda els sis dies.

Anomenem:

a = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dilluns.

b = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dimarts.

c = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dimecres.

d = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dijous.

e = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa divendres.

f = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dissabte.

Tenim el següent sistema d'equacions:

$b + c + d + e + f = 34$

$a + c + d + e + f = 36$

$a + b + d + e + f = 37$

$a + b + c + e + f = 38$

$a + b + c + d + f = 40$

$a + b + c + d + e = 33 \text{ o } 35$

Sumem totes les equacions:

$5a + 5b + 5c + 5d + 5e + 5f = 218 \text{ o } 220$

$5\,(a + b + c + d + e + f) = 218 \text{ o } 220$

218 no és múltiple de 5, per tant el total ha de ser 220 (el dissabte es poden 35 arbres)

$a + b + c + d + e + f = 44$

$a + b + c + d + e + f = 44 \;\rightarrow\; a + (b + c + d + e + f) = 44 \;\rightarrow\; a + 34 = 44 \;\rightarrow\; a = 10$

$b + 36 = 44 \;\rightarrow\; b = 8$

$c + 37 = 44 \;\rightarrow\; c = 7$

$d + 38 = 44 \;\rightarrow\; d = 6$

$e + 40 = 44 \;\rightarrow\; e = 4$

$f + 35 = 44 \;\rightarrow\; f = 9$