RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Pàgina 222

MOVENT NOMBRES

El primer dígit d'un nombre de sis xifres és 1. Si es mou a l'altre extrem, a la dreta, i mantenim l'ordre de la resta de xifres, el nou nombre (també de sis xifres) és tres vegades el primer.

Quin és el nombre original?

- Havíem arribat a:

  A: 1 __ __ __ 5 7 i *B*: __ __ __ 5 7 1

- Si la 4a xifra de *B* és un 5, la 4a xifra de *A* ha de ser un 8 (en portàvem 1):

  A: 1 __ __ 8 5 7 i *B*: __ __ 8 5 7 1

- Si la 3a xifra de *B* és un 8, la 3a xifra de *A* ha de ser un 2:

  A: 1 __ 2 8 5 7 i *B*: __ 2 8 5 7 1

- Si la 2a xifra de *B* es un 2, la 2a xifra de *A* ha de ser un 4. Per tant:

  A: 1 4 2 8 5 7 i *B*: 4 2 8 5 7 1

- Comprovem que $3 \cdot 142\,857 = 428\,571$.
- Així doncs, el nombre que busquem és 142 857.

1. **UN PROBLEMA MOLT ANTIC**

Els preus d'un brau, un xai i un pollastre són els que apareixen en la taula:

BRAU	XAI	POLLASTRE
25 €	5 €	0,25 €

Es compren 500 animals per 500 €. Quants se n'han comprat de cada espècie?

☛ ***Planteja un sistema de dues equacions ("nombre d'animals comprats" i "cost dels animals comprats") amb tres incògnites (nombre de pollastres, x; de xais, y; de braus, z).***

Si el simplifiques, arribaràs a l'expressió:

$$19y + 99z = 1500 \rightarrow 19y = 1500 - 99z$$

Dóna a z els valors 0, 1, 2, 3…, calcula $1500 - 99z$ i comprova si el resultat és múltiple de 19.

- Anomenem x el nre. de pollastres; y, el nre. de xais, i z, el nre. de braus. Tenim que:

— Es compren 500 animals → $x + y + z = 500$ → $x = 500 - y - z$

— Costen 500 € → $0{,}25x + 5y + 25z = 500$ → $x + 20y + 100z = 2000$

Substituïm x en la 2a equació:

$$500 - y - z + 20y + 100z = 2000 \rightarrow 19y + 99z = 1500 \rightarrow 19y = 1500 - 99z$$

- Com que x, y, z són nombres enters, $1500 - 99z$ ha de ser múltiple de 19. Fem una taula amb totes les possibilitats:

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	**14**	15
$1500 - 99z$	1500	1401	1302	1203	1104	1005	906	807	708	609	510	411	312	213	**114**	15
$\dot{19}$	no	no	no	no	no	no	no	no	no	no	no	no	no	no	**sí**	no

L'únic múltiple de 19 és $114 = 19 \cdot 6$, que correspon a

$$z = 14 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 500 - 6 - 14 = 480$$

Per tant, s'han comprat 480 pollastres, 6 xais i 14 braus.

2. UN NOMBRE MOLT INTERESSANT

El matemàtic Hardy va visitar a l'hospital el matemàtic indi Ramanujan. Li va comentar: «He vingut en el taxi 1729, un nombre molt vulgar.» «De cap manera –li va respondre Ramanujan–. És un nombre molt interessant: és el més petit que es pot expressar com a suma de dos cubs de dues maneres diferents.» Demostra-ho.

- Anotem els cubs dels primers nombres.

$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$ $6^3 = 216$ $7^3 = 343$ $8^3 = 512$ $9^3 = 729$

$10^3 = 1000$ $11^3 = 1331$ $12^3 = 1728$ més gran no pot ser.

Comencem: $12^3 + 1^3 = 1729$; ja no trobarem cap més suma amb $12^3 + \dots$

Si fem $11^3 + \dots$ cap d'ells no suma 1729

Si fem $10^3 + \dots$ trobem $10^3 + 9^3 = 1729$

La resta de sumes és impossible que arribin a 1729, ja que la major seria $9^3 + 8^3 = 1241 < 1729$.

3. DIES DE L'ANY

El número 365 és l'únic que és suma dels quadrats de tres nombres consecutius i, també, suma dels quadrats dels dos següents.

- x = nombre

$x + 1$ = nombre consecutiu

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 365$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 365$$
$$3x^2 + 6x - 360 = 0$$
$$x = -12 \text{ no pot ser}$$
$$x = 10$$

Els nombres són 10, 11 i 12, i també 13 i 14

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$.

Pàgina 223

LA SALA DE BALL

En una sala de ball hi ha un cert nombre de persones (nois i noies). Ballen per parelles: en un cert moment els 6/11 dels nois ballen amb els 4/5 de les noies.

Quina proporció de persones hi ha sense ballar en aquest moment?

Quina proporció hi ha de nois i de noies?

Havíem arribat a la conclusió que hi ha sense ballar $\frac{13}{37}$ del total.

Del mateix esquema es pot deduir la resta del problema:

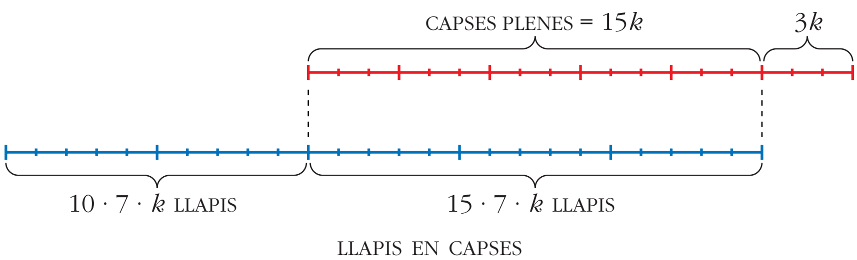
Hi ha $\frac{22}{37}$ de nois i $\frac{15}{37}$ de noies.

4. EMPAQUETEM LLAPIS

Disposem d'un nombre de llapis comprès entre 300 i 400, i un cert nombre de capses. A cada capsa hi caben 7 llapis. En un cert moment hem omplert les 5/6 parts de les capses amb les 3/5 parts dels llapis.

Quantes capses més necessitem perquè es puguin guardar tots els llapis?

☛ ***Recorda que a cada capsa plena hi ha 7 llapis.***



El nombre de llapis és $15 \cdot 7 \cdot k + 10 \cdot 7 \cdot k = 175k$ en total; com que sabem que està comprès entre 300 i 400, hi haurà $175 \cdot 2 = 350$ llapis.

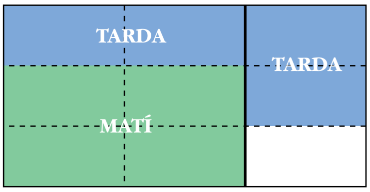
Així, $k = 2$ i faltaran, per tant, $7 \cdot 2 = 14$ capses.

5. COLLA DE SEGADORS

Una colla de segadors ha de segar dos prats. Un té doble superfície que l'altre.

Durant mig dia treballen tots en el gran. La resta del dia treballa la meitat en el gran i l'altra meitat en el petit. L'endemà, el que quedava del prat petit el va segar un únic treballador en jornada completa.

Quants segadors té la colla?



Observant l'esquema, deduïm que 1 treballador sega la meitat d'$\frac{1}{9}$ del total en mitja jornada, és a dir, $\frac{1}{18}$ del total.

Així, doncs, deduïm que, en total, són 8 segadors (ja que el 1r matí van segar entre tots $\frac{4}{9}$; és a dir, $\frac{8}{18}$ del total).

Pàgina 224

6. GOLEJADA

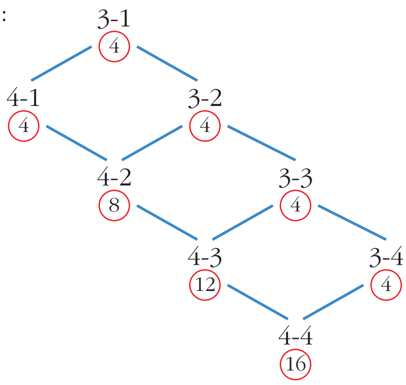
De quantes formes es pot arribar al resultat de 5-0? De quantes al de 4-1? Per tant, de quantes al de 5-1?

Al resultat 5-0 s'hi podrà arribar d'una forma. Al 4-1, de 5 formes. Per tant, al 5-1 de 1 + 5 = 6 formes.

7. CAMÍ DE L'EMPAT

Si, a més de saber que el partit va acabar 4-4, sabem que va passar per 3-1, de quantes formes va poder evolucionar el resultat?

L'esquema ara seria així:

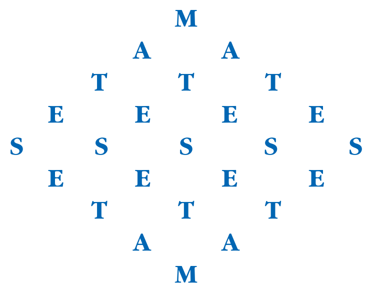


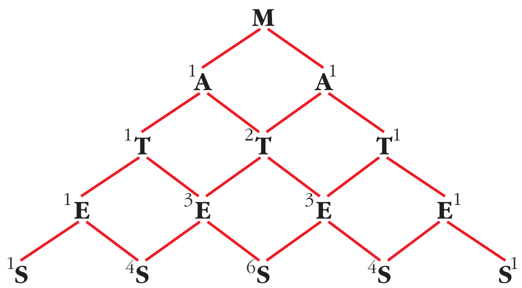
El resultat va poder evolucionar de 16 formes diferents.

Pàgina 225

8. MOLTES MATES

De quantes maneres es pot formar la paraula MATES unint lletres contigües en la figura de sota?





Considerem la meitat de la figura.

Vegem de quantes maneres es pot arribar a la **S**, formant la paraula MATES. Els números situats al costat de cada lletra indiquen les maneres d'arribar-hi.

Sumem les possibilitats:

1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 maneres

Multipliquem per 2 per considerar l'altra meitat de la figura.

Per tant, hi ha 32 maneres de formar la paraula MATES en la figura donada.

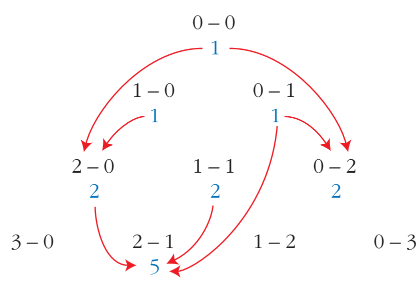
9. ARRIBAR A UN **8** A **0**

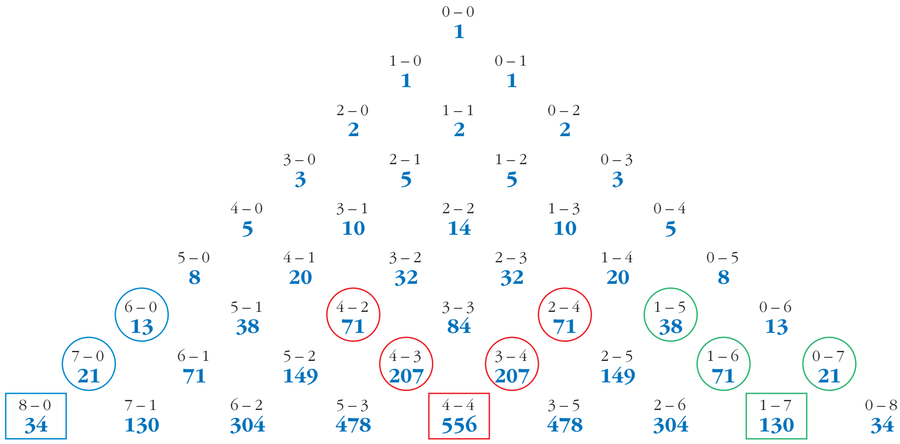
En un partit de bàsquet es va pel resultat de 8-0. Si sabem que no s'ha marcat cap triple, de quantes formes s'ha pogut arribar en aquest resultat?

(Comprova que en són 34.)

☛ ***Basquetbol: només cistelles d'1 i 2.***

Dibuixem un diagrama en el qual apareguin les diverses possibilitats d'arribar a cada resultat:





Observa que obtenim cada resultat del diagrama sumant els dos que té a sobre a la dreta amb els dos que té a sobre a l'esquerra.

Veiem que al resultat de 8-0, sense triples, s'hi pot arribar de 34 formes.

10. NOMÉS AMB CISTELLES D'1 I 2

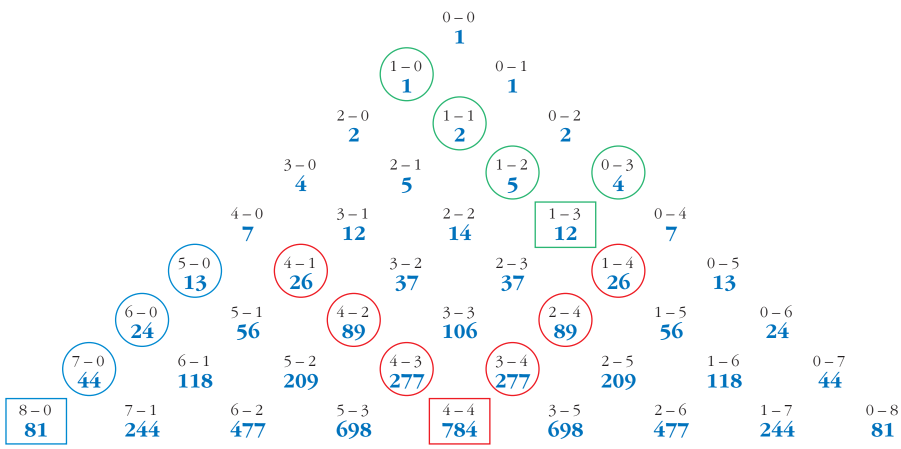
Descobreix de quantes formes es pot arribar al resultat de 4-4 en un partit de bàsquet sense triples. (Per sorprenent que sembli hi ha 556 formes. Comprova-ho.)

Observant el diagrama de l'exercici anterior, veiem que s'hi pot arribar de 556 formes.

11. AMB CISTELLES D'1, 2 O 3

Comprova que, si en un partit de bàsquet s'ha arribat en un cert moment al resultat de 4-4, això ha pogut ser de 784 formes diferents (tenint en compte que s'han pogut marcar cistelles d'1, de 2 i de 3 punts).

Fem un diagrama en el qual apareguin les diverses possibilitats d'arribar a cada resultat:



Observa que obtenim cada resultat del diagrama sumant els tres que té a sobre a la dreta amb els tres que té a sobre a l'esquerra.

Així, doncs, veiem que al resultat de 4-4 s'hi ha pogut arribar de 784 formes.

Pàgina 226

12. ESCALA MECÀNICA 2

En una determinada escala mecànica, la velocitat de pujada de l'Andrea és 10 vegades la de la seva germana petita, la Marta. L'Andrea arriba a dalt pujant 40 esglaons. La Marta hi arriba pujant 10 esglaons. Quants esglaons visibles té aquest tram d'escala?

Velocitat de pujada de l'Andrea: 10 m

Velocitat de pujada de la Marta: m

L'escala puja

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{40}{10m} = \dfrac{n-40}{b} \rightarrow \dfrac{b}{m} = \dfrac{10 \cdot (n-40)}{40} \\[2ex] \dfrac{10}{m} = \dfrac{n-10}{b} \rightarrow \dfrac{b}{m} = \dfrac{n-10}{10} \end{array}\right\} \quad \dfrac{10 \cdot (n-40)}{40} = \dfrac{n-10}{10} \qquad n = 60$$

L'escala té 60 escales visibles.

Pàgina 227

13. ESCALA MECÀNICA 4

La Letícia tarda 10 s a baixar 50 esglaons i completar, així, un tram d'escala mecànica. L'Eva va més a poc a poc, tarda 20 s i baixa 30 esglaons en el mateix tram. Quants esglaons té aquest tram d'escala? Quant tardaria cada una a baixar-la si estigués espatllat el mecanisme?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Letícia 50 esglaons a 10 s} & \rightarrow \text{esglaons} = 50 + 10v \\ \text{Eva 30 esglaons a 20 s.} & \rightarrow \text{esglaons} = 30 + 20v \end{array}\right\} \begin{array}{l} v = 2 \text{ esgl./s} \\ \text{esglaons } 70 \end{array}$$

v = velocitat de l'escala en esglaons/s

Si estigués espatllat:

Letícia 70 esgl. $\cdot \dfrac{10 \text{ s}}{50 \text{ esgl.}} = 14$ s

Eva 70 esgl. $\cdot \dfrac{20 \text{ s}}{30 \text{ esgl.}} = 46{,}7$ s

14. ESCALA DE PUJADA I DE BAIXADA

En Màrius puja per l'escala mecànica de pujada i recorre un total de 60 esglaons. Però si puja per la de baixada (!) recorre 120 esglaons. Quants esglaons visibles tenen aquests trams? (Se suposa que ambdós trams tenen la mateixa longitud i que les seves velocitats també són iguals.)

t: temps que tarda en recórrer el tram d'escala

v: velocitat de les escales

e: esglaons que té el tram d'escala

Tram de pujada: $e = 60 + t \cdot v$

Tram de baixada: $e = 120 - tv$

Sumant les dues equacions obtenim: $2e = 180 \rightarrow e = 90$ esglaons visibles en cada tram d'escala.

15. UN SISTEMA

Resol el sistema: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{5}{y+1} = 1 \\[2ex] \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{2}{y+1} = 12 \end{array}\right.$

Anomenem: $a = \dfrac{1}{x-2}$; $b = \dfrac{1}{y+1}$.

El sistema quedarà:

$$\left.\begin{array}{r} 3a - 5b = 1 \\ 5a + 2b = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6a - 10b = 2 \\ 25a + 10b = 60 \end{array}\right\}$$

Sumant: $31a = 62 \rightarrow a = 2$; $b = \dfrac{12-5a}{2} = 1 \rightarrow b = 1$

D'aquí obtenim x i y:

$$\frac{1}{x-2} = 2 \rightarrow 1 = 2x - 4 \rightarrow 5 = 2x \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{y+1} = 1 \rightarrow 1 = y + 1 \rightarrow y = 0$$

Solució: $x = \dfrac{5}{2}$, $y = 0$

16. UNA EQUACIÓ

Resol l'equació següent, fent un canvi de variable adequat:

$$(x^2 - 2x + 1)^2 - 2(x-1)^2 - 15 = 0$$

L'equació l'expressem així:

$$\left[(x-1)^2\right]^2 - 2(x-1)^2 - 15 = 0$$

Fem el canvi de variable: $z = (x - 1)^2$.

Ens queda:

$$z^2 - 2z - 15 = 0$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} z = 5 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$z = 5 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 = 5 \;\rightarrow\; x - 1 = \pm\sqrt{5} \begin{cases} x - 1 = \sqrt{5} \;\rightarrow\; x = 1 + \sqrt{5} \\ x - 1 = -\sqrt{5} \;\rightarrow\; x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$z = -3 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 = -3 \;\rightarrow\;$ no vàlida

Així doncs, les solucions de l'equació són: $x_1 = 1 - \sqrt{5}$; $x_2 = 1 + \sqrt{5}$.

Pàgina 230

17. Dedueix, pas a pas, justificadament, una fórmula per aïllar x en les equacions del tipus $x^2 - mx + n = 0$.

$x^2 - mx + n = 0$	multipliqueu per 4
$4x^2 - 4mx + 4n = 0$	sumeu m^2
$4x^2 - 2 \cdot 2\,x \cdot m + m^2 + 4n = m^2$	aconseguiu el quadrat d'una resta
$(2x - m)^2 = m^2 - 4n$	feu l'arrel quadrada
$2x - m = \pm\sqrt{m^2 - 4n}$	aïlleu x

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

18. Demostra que si x_1 i x_2 són les dues arrels de l'equació

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ llavors } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Si són les 2 arrels vol dir que

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sumant $x_1 + x_2 = \dfrac{(-b)}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \dfrac{(-b)}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b}{a}$

Multiplicant $x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{(-b)}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\dfrac{(-b)}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$

$\boxed{(a + b)\,(a + b) = a^2 - b^2}$

$$= \left(\frac{(-b)}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

19. Demostra que $n^3 - n$ és múltiple de 6.

$n^3 - n = n\,(n^2 - 1) = n\,(n - 1)\,(n + 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ això és el producte de tres nombres consecutius.

- Demostreu que és múltiple de 2.

  Tres nombres consecutius poden ser:

  (parell · senar) · parell = (senar) · parell = parell

  o bé

  (senar · parell) · senar = (senar) · senar = parell

  per tant, 3 nombres consecutius multiplicats sempre donen un nombre parell

- Demostreu que és múltiple de 3.

  En tres nombres consecutius sempre hi ha un nombre múltiple de 3; per tant, el producte també serà múltiple de 3.

Si hem demostrat que és múltiple de 2 i múltiple de 3, serà múltiple de 6.

20. Si $\bar{x}$ és la mitjana de n nombres, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, demostra que:

$$\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

$$\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{\Sigma 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\Sigma \bar{x}^2}{n}$$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{2\bar{x}\Sigma x_i}{n} + \frac{n \cdot \bar{x}^2}{n}$$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2$$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

21. Demostra que les tres medianes d'un triangle es tallen en un punt.

Donat un triangle qualsevol, el dibuixem amb els punts mitjans del costat.

El segment DE és paral·lel a AB.

DE = AM

$DE = \frac{1}{2} AB$

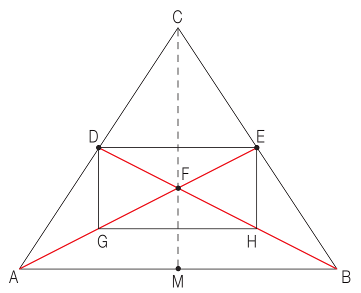
Trobem el punt mitjà entre A i F i l'anomenem G.

Trobem el punt mitjà entre B i F i l'anomenem H.

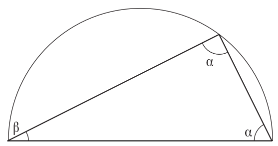
DEGH formen un paral·lelogram.

Les diagonals del paral·lelogram (*medianes*) es tallen en els punts mitjans dels vèrtexs oposats.

L'altra *mediana* és paral·lela a DG i passa pel punt mitjà de D i E; per tant, també passa pel punt.

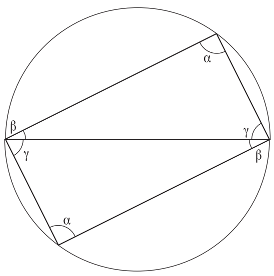


22. **Demostra que un angle inserit en una semicircumferència és, necessàriament, recte.**



Cal demostrar que $\alpha = 90°$

Acabem de dibuixar la circumferència sencera i dibuixem el mateix triangle a sota:

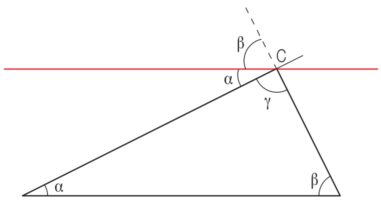


quedarà un paral·lelogram en què la suma d'angles és 360°.

Aquest paral·lelogram és un rectangle; per tant, $\beta + \gamma = 90°$ i $\alpha = 90°$

23. Demostra que la suma dels angles d'un triangle és 180°.

Dibuixem un triangle qualsevol:



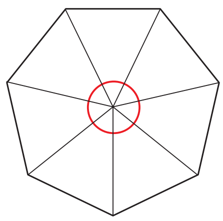
Tracem una paral·lela a AB que passi per C.

Ens adonem de α i β.

L'angle β + α + γ suma 180°.

24. Demostra que la suma dels angles d'un polígon de *n* costats és 180° (*n* – 2).

Dibuixem un polígon de *n* costats i el triangulem des d'un punt central.



$n = 7$

Sortiran *n* triangles.

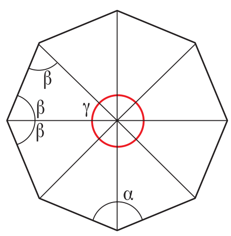
La suma dels angles de *n* triangles és $180° \cdot n$.

Cal restar l'angle central que és de $360° = 180° \cdot 2$.

Suma d'angles $= 180° \cdot n - 180° \cdot 2 = 180° \ (n - 2)$.

25. Demostra que cada angle d'un *n*-àgon regular és $180° - \dfrac{360°}{n}$

Si dibuixem un *n*-àgon regular i el triangulem des del centre, obtenim *n* triangles isòsceles.



$n = 8$

$\alpha = 2\beta$

Per a un triangle isòsceles

$2\beta + \gamma = 180°$

Per a un triangle isòsceles

$n\,(2\beta + \gamma) = n \cdot 180°$

$n \cdot 2\beta + 360° = n \cdot 180°$

$n \cdot 2\beta = n \cdot 180° - 360°$

$n \cdot \alpha = n \cdot 180° - 360°$

$$\alpha = 180° - \frac{360°}{n}$$

Pàgina 231

26. **Demostra les desigualtats següents:**

a) $\boldsymbol{m^2/(1+m^4) \le 1/2}$; **b)** $\boldsymbol{(m^2+3)/\sqrt{m^2+2} > 2}$

a) $\dfrac{m^2}{1+m^4} \le \dfrac{1}{2} \iff 2m^2 \le 1 + m^4 \iff m^4 - 2m^2 + 1 \ge 0 \iff (m^2-1)^2 \ge 0,$

la qual cosa és certa (el quadrat d'un nombre sempre és major o igual que zero).

b) $\dfrac{m^2+3}{\sqrt{m^2+2}} > 2 \underset{\sqrt{m^2+2}\,>\,0}{\iff} m^3 + 3 > 2\sqrt{m^2+2} \underset{\text{Són nombres positius}}{\iff} (m^2+3)^2 > \left(2\sqrt{m^2+2}\right)^2 \iff$

$\iff m^4 + 6m^2 + 9 > 4(m^2+2) \iff m^4 + 6m^2 + 9 > 4m^2 + 8 \iff$

$\iff m^4 + 2m^2 + 1 > 0 \iff (m^2+1)^2 > 0,$ la qual cosa és certa.

Pàgina 232

27. **MAJOR ENTER**

Troba el nombre enter $\boldsymbol{n}$ més gran tal que: $\boldsymbol{n^{200} < 5^{300}}$.

$$n^{200} < 5^{300} \iff (n^2)^{100} < (5^3)^{100} \iff n^2 < 5^3 \iff n^2 < 125$$

Com que $\sqrt{125} \simeq 11{,}18$, tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} 11^2 = 121 < 125 \\ 12^2 = 144 > 125 \end{array}\right\} \to n = 11$$

És el major nombre enter tal que $n^{200} < 5^{300}$.

28. **ENTERS CONSECUTIUS**

El producte de quatre enters consecutius és igual a 7 590 024. Quins són aquests nombres?

Com que $\sqrt[4]{7\,590\,024} \simeq 52,488$, provem amb nombres propers a 52.

Si temptegem, obtenim que:

$$51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 = 7\,590\,024$$

Per tant, els nombres són 51, 52, 53 i 54.

29. DÍGIT DISTINT DE ZERO

El nombre 1 · 2 · 3 · 4 · ... · 48 · 49 · 50 és un nombre enormement gran. Quin lloc ocupa el primer dígit distint de zero començant des de les unitats?

Comptem el nombre de vegades que apareix el factor 5 (el factor 2 apareixerà més vegades):

$$\underbrace{10}_{\substack{5 \cdot 1 = 5 \\ 5 \cdot 2 = 10 \\ 5 \cdot 3 = 15 \\ \vdots \\ 5 \cdot 10 = 50}} + \underbrace{2}_{\substack{5^2 \cdot 1 = 25 \\ 5^2 \cdot 2 = 50}} = 12 \text{ vegades}$$

Per tant, el nombre donat acaba en 12 zeros; i, així, el primer dígit diferent de zero començant des de les unitats és el que ocupa el lloc número 13.

30. QUINS NOMBRES SÓN?

El nombre $2^{48} - 1$ és divisible exactament per dos nombres compresos entre 60 i 70. Quins són aquests nombres?

☛ ***Fes ús de la propietat $a^{2n} - 1 = (a^n + 1)(a^n - 1)$.***

Si apliquem la propietat $a^{2n} - 1 = (a^n + 1)(a^n - 1)$, tenim que:

$$2^{48} - 1 = (2^{24} + 1)(2^{24} - 1) = (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(2^{12} - 1) =$$
$$= (2^{24} + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot 4\,095 = (2^{24} + 1)(2^{12} + 1) \cdot 63 \cdot 65$$

Per tant, els nombres buscats són 63 i 65.

31. NO TENIEN CALCULADORA, ÉS CLAR

El 1856 es va publicar un llibre (molt gruixut) que contenia *els quadrats dels nombres des de l'1 fins al mil milions*. Per què? Per multiplicar. Et toca a tu esbrinar i explicar com. Per fer-ho, relaciona el producte de dos nombres $m \cdot n$ amb la diferència dels quadrats $m + n$ i $m - n$. Explica com s'usaria el «llibre dels quadrats» per fer el producte de dos nombres molt grans (per exemple 57 839 × 8756) per mitjà d'operacions més senzilles.

Es basaven en:

$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$
$$(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$$

Restant $(m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn$

i aïllant $\dfrac{(m + n)^2 - (m - n)^2}{4} = m \cdot n$

Procés:

– Sumareu els 2 nombres que volieu multiplicar: 57.839 + 8.756 = 66.595 = $m + n$

– Restareu els 2 nombres que volieu multiplicar: 57.839 – 8.756 = 49.083 = $m - n$

– Buscareu en el llibre els quadrats: $(m+n)^2 = 66.595^2 = 4.434.894.025$

llibre

$(m-n)^2 = 49.083^2 = 2.409.140.889$

– Restareu 2.025.753.136

i dividireu per 4 506.438.284

el mateix que avui en dia feu a la calculadora $57.839 \cdot 8.756 = 506.438.284$

32. **CAP AMUNT, CAP AVALL**

Un corredor puja al capdamunt d'un turó a una velocitat de 4 km/h.

A quina velocitat haurà de baixar si pretén que la velocitat mitjana final sigui de 7 km/h?

e = espai reconegut de pujada = espai reconegut de baixada

tp = temps trigat a pujar

tb = temps trigat a baixar

Vp = velocitat de pujada = 4 km/h

Vb = velocitat de baixada

$$7 = Vm = \frac{e_{\text{total}}}{t_{\text{total}}} = \frac{2e}{tp + tb}$$

$$Vp = \frac{e}{tp} \quad \rightarrow \quad 4 = \frac{e}{tp}$$

$$Vp = \frac{e}{tp}$$

$$2e = 7tp + 7tb$$

$$2e = 7 \cdot \frac{e}{4} + 7 \cdot \frac{e}{Vp} \qquad \text{Dividim per } e$$

$$2 = \frac{7}{4} + \frac{7}{Vb}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{7}{Vb}$$

$Vb = 28$ km/h

Atenció: tarda menys temps a baixar que a pujar, per això no podeu fer

$$Vm = \frac{Vp + Vb}{2}$$

33. **Resol l'equació:**

$$\boldsymbol{x^6 - 2x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x = 0}$$

Per fer-ho has de descompondre en factors el polinomi

$$\boldsymbol{P(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x}$$

$x^6 - 2x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x = 0$

$x\,(x-2)^2\,(x+1)\cdot(x^2+x+1) = 0$

Són solucions els valors de x que anul·len qualsevol factor, ja que $0 \cdot x = 0$

$x = 0 \quad x = 2 \quad x = -1$ El factor $x^2 + x + 1$ no s'anul·la per valors reals.

34. Resol les equacions següents:

a) $\boldsymbol{x^5 + x^4 - 8x^3 - 12x^2 = 0}$

b) $\boldsymbol{x^5 + x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 48x - 72 = 0}$

a) $x^5 + x^4 - 8x^3 - 12x^2 = 0$

$x^2\,(x-3)\,(x+2)^2 = 0$ Són solucions $x = 0 \quad x = 3 \quad x = -2$

b) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 48x - 72 = 0$

$(x-3)\,(x+2)^2\,(x^2+6) = 0$ Són solucions $x = 3 \quad x = -2$ i no té solució real $x^2 + 6 = 0$

35. Resol les equacions següents:

a) $\boldsymbol{x^6 + 4x^5 - 18x^4 - 103x^3 - 148x^2 + 60x = 0}$

b) $\boldsymbol{x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 7x - 12 = 0}$

c) $\boldsymbol{x^7 + 8x^6 + 25x^5 + 36x^4 + 20x^3 = 0}$

a) $x \cdot (x-3)\,(x+3)^2\,(x-5)^2 = 0$

$x = 0 \quad x = 3 \quad x = -3 \quad x = 5$

b) $(x-1)\,(x+1)\,(x+4)\,(x^2+x+3) = 0$

$x = 1 \quad x = -1 \quad x = -4$

c) $x^3\,(x+2)^2\,(x^2+4x+5) = 0$

$x = 0 \quad x = -2$

36. Resol:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ 2y + x = 8 \end{cases}$$

$2\sqrt{x} + x = 8$

$2\sqrt{x} = 8 - x$

$4x = 64 - 16x + x^2$

$x^2 - 20x + 64 = 0$

$x = 4 \quad y = 2$

$x = 16$ Solució no vàlida que apareix a causa d'elevar al quadrat per solucionar.

37. **Resol:**

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 7y + 5 = 0} \\ \mathbf{y = \sqrt{x + 1}} \end{cases}$$

$2x + 5 = 7\sqrt{x + 1}$

$4x + 20x + 25 = 49x + 49$

$4x^2 - 29x - 24 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \quad y = 3 \\ x = \dfrac{-3}{4} \quad y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Vàlides ambdues}$$

38. **Resol:**

$$\begin{cases} \mathbf{\sqrt{x} - y = y - 1} \\ \mathbf{x - 3y = 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 2y - 1 \\ x = 3y + 1 \end{cases}$$

$\sqrt{3y + 1} = 2y - 1$

$3y + 1 = 4y^2 - 4y + 1$

$4y^2 - 7y = 0$

$y = 0$ No vàlida

$y = \dfrac{7}{4} \quad x = \dfrac{25}{4}$

39. **Resol:**

a) $\begin{cases} \mathbf{\sqrt{x + y} - y + 1 = 0} \\ \mathbf{\sqrt{x + y} + x = 8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{\sqrt{2x + y} - x + 3 = 0} \\ \mathbf{y + 2\sqrt{2x + y} = 10} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{\sqrt{x + y} = x - y} \\ \mathbf{x\sqrt{y + x} = 9} \end{cases}$

a) Resteu la 2a de la 1a

$x + y - 1 = 8$

$y = 9 - x$

Substituïm en la 2a

$\sqrt{x + (9 - x)} + x = 8$

$3 + x = 8$

$x = 5 \quad y = 4$

b) Resteu la 2a – la 1a · 2

$y + 2x - 6 = 10$

$y = 16 - 2x$

Substituïm en la 1a

$\sqrt{2x + (16 - 2x)} - x + 3 = 0$

$4 - x + 3 = 0$

$x = 7 \quad y = 2$

c) Resteu la 2a de la 1a

$x = 9 - x + y$

$y = 2x - 9$

Substituïm en la 2a

$x + \sqrt{(2x - 9) + x} = 9$

$\sqrt{3x - 9} = 9 - x$

$3x - 9 = 81 - 18x + x^8$

$x^2 - 21x + 90 = 0 \begin{cases} x = 6 & y = 3 \\ x = 15 & \text{No vàlida} \end{cases}$

Pàgina 233

40. Resol:

a) $\begin{cases} \dfrac{10}{x} - \dfrac{9}{y} = -1 \\ xy = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 1 \\ xy + 3 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{10}{x} - \dfrac{9}{y} = -1 \\ y = \dfrac{15}{x} \end{cases}$

$$\frac{10}{x} - \frac{9}{(15/x)} = -1$$

$$\frac{10}{x} - \frac{9x}{15} = -1$$

$150 - 9x^2 = -15x$

$9x^2 - 15x - 150 = 0 \begin{cases} x = 5 & y = 3 \\ x = -10/3 & y = -9/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 1 \\ xy = -3 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{-3}{x} \end{cases}$

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{(-3/x)} = 1$$

$$\frac{4}{x} - 3x = 1$$

$4 - 3x^2 = x$

$3x^2 + x - 4 = 0 \begin{cases} x = 1 & y = -3 \\ x = -4/3 & y = 9/4 \end{cases}$

41. **Resol:**

a) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-3} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ xy = 15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{y} = 2x \\ x^2y = 18 \end{cases}$

a) $\dfrac{4}{x-3} - \dfrac{3}{(15/x)} = 1$

$$\frac{4}{x-3} - \frac{x}{5} = 1$$

$20 - x\,(x - 3) = 5\,(x - 3)$

$20 - x^2 + 3x = 5x - 15$

$x^2 + 2x - 35 = 0 \begin{cases} x = -7 & y = -15/7 \\ x = 5 & y = 3 \end{cases}$

b) $\dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{(18/x^2)} = 2x$

$$\frac{6}{x} + \frac{4x^2}{9} = 2x$$

$54x + 4x^3 = 18x^2$

$4x^3 - 18x^2 + 54 = 0 \begin{cases} x = 3 & y = 2 \\ x = 3/2 & y = 8 \end{cases}$

42. Troba les solucions del sistema següent:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{y^2+1} = -0{,}3 \\ \dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{y^2+1} = -0{,}3 \\ \dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} = 0{,}9 \end{array}\right\}$$

Fem un canvi de variables:

$$a = \frac{1}{x^2+1} \ ; \quad b = \frac{1}{y^2+1}$$

Així, el sistema queda com segueix:

$$\left.\begin{array}{l} a - b = -0{,}3 \\ 2a + b = 0{,}9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = b - 0{,}3 \\ 2(b - 0{,}3) + b = 0{,}9 \\ 2b - 0{,}6 + b = 0{,}9 \\ 3b = 1{,}5 \ \rightarrow \ b = 0{,}5 \\ a = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2 \end{array}$$

Ara és fàcil obtenir els valors de x i y:

$$a = \frac{1}{x^2+1} = 0{,}2 \ \rightarrow \ 1 = 0{,}2(x^2+1) \ \rightarrow \ \frac{1}{0{,}2} = x^2 + 1 \ \rightarrow$$
$$\rightarrow \ 5 = x^2 + 1 \ \rightarrow \ 4 = x^2 \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$b = \frac{1}{y^2+1} = 0{,}5 \ \rightarrow \ 1 = 0{,}5(y^2+1) \ \rightarrow \ \frac{1}{0{,}5} = y^2 + 1 \ \rightarrow$$
$$\rightarrow \ 2 = y^2 + 1 \ \rightarrow \ 1 = y^2 \ \rightarrow \ y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Per tant, hi ha quatre solucions per al sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

43. Resol:

a) $\begin{cases} x^2 y = 100 \\ x^2 + y = 29 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 y = 49 \\ x^2 + 2y = 51 \end{cases}$

a) $x^2 + \dfrac{100}{x^2} = 29$

$x^4 + 100 = 29x^2$

$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

$t = x^2 \quad t^2 - 29t + 100 = 0$

$t = 4$: $x = 2$, $y = 25$; $x = -2$, $y = 25$

$t = 25$: $x = 5$, $y = 4$; $x = -5$, $y = 4$

b) $x^2 + 2 \cdot \frac{49}{x^2} = 51$

$x^4 + 98 = 51x^2$

$x^4 - 51x^2 + 98 = 0$

$t = x^2 \quad t^2 - 51t + 98 = 0 \begin{cases} t = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} & y = 49/2 \\ x = -\sqrt{2} & y = 49/2 \end{cases} \\ t = 49 \begin{cases} x = 7 & y = 1 \\ x = -7 & y = 1 \end{cases} \end{cases}$

44. Resol:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

c) $x^4 - 64 = 0$

d) $36x^4 - 25x^2 + 4$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$t = x^2 \quad t^2 - 3t + 2 = 0 \begin{cases} t = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ t = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

b) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

$t = x^2 \quad t^2 + t - 2 = 0 \begin{cases} t = -2 \rightarrow \text{No valor real d'}x \\ t = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$

c) $x^4 - 64 = 0$

$x = \pm \sqrt[4]{64} = \pm 2\sqrt{2}$

d) $36x^4 - 25x^2 + 4 = 0$

$t = x^2 \quad 36t^2 - 25t + 4 = 0 \begin{cases} t = 4/9 \rightarrow x = \pm 2/3 \\ t = 1/4 \rightarrow x = \pm 1/2 \end{cases}$

45. Resol:

a) $\begin{cases} 4 \log x + \log y = 2 \\ \log \frac{x}{y} = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 \log_2 x - 3 \log_2 y = 3 \\ \log_2 (xy^3) = 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4 \log x + \log y = 2 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$

$5 \log x = 5$

$\log x = 1$

$x = 10 \rightarrow y = 0{,}01$

b) $\begin{cases} 5 \log_2 x - 3 \log_2 y = 3 \\ \log_2 x + 3 \log_2 y = 15 \end{cases}$

$6 \log_2 x = 18$

$\log_2 x = 3$

$x = 2^3 = 8 \rightarrow y = 16$

46. **Resol:**

a) $5^{1-x^2} = \dfrac{1}{125}$ **b)** $7^x + 7^{x+2} = 350$ **c)** $\begin{cases} \log (x^2 + y) - \log (x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

a) $5^{1-x^2} = 5^{-3} \rightarrow 1 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 4 \quad x = \pm 2$

b) $7^x + 7^x \cdot 49 = 350$

$7^x (1 + 49) = 350$

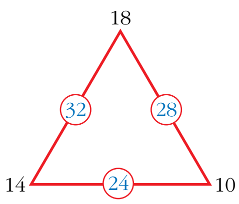
$7^x = 7$

$x = 1$

c) $\begin{cases} \log \dfrac{(x^2 + y)}{(x - 2y)} = 1 \longrightarrow \dfrac{[(2y+1)^2 + y]}{(2y+1) - 2y} = 10 \rightarrow 4y^2 + 5y - 9 = 0 \rightarrow \\ x + 1 = 2y + 2 \rightarrow x = 2y + 1 \end{cases}$

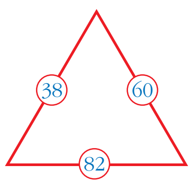
$\rightarrow \begin{cases} y = -2 & x = -3 \\ y = 1 & x = 3 \end{cases}$

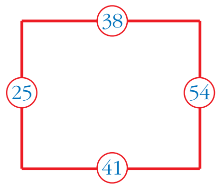
47. **QUANT VALEN ELS VÈRTEXS?**

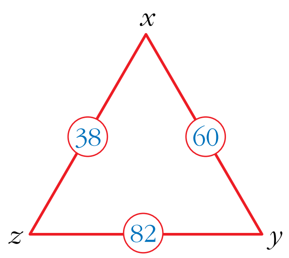


En aquest triangle, el nombre tancat en un cercle és la suma dels vèrtexs corresponents:

a) Si seguim aquesta mateixa llei, quin és el valor dels vèrtexs en aquest altre triangle i en aquest quadrat?





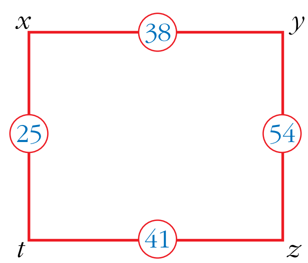


$\left.\begin{aligned} x + y &= 60 \\ y + z &= 82 \\ x + z &= 38 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= 60 - x \\ 60 - x + z &= 82 \rightarrow -x + z = 22 \\ x + z &= 38 \end{aligned}$

Sumant aquestes dues últimes:

$\left.\begin{aligned} 2z &= 60 \rightarrow z = 30 \\ x &= 38 - z = 38 - 30 = 8 \\ y &= 60 - x = 60 - 8 = 52 \end{aligned}\right\} \quad x = 8, \quad y = 52, \quad z = 30$

$\left.\begin{aligned} x + y &= 38 \\ y + z &= 54 \\ z + t &= 41 \\ t + x &= 25 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y &= 38 - x \\ z &= 54 - y = 54 - 38 + x = 16 + x \\ z &= 41 - t \\ x &= 25 - t \end{aligned}\right\}$



$y = 38 - (25 - t) = 13 + t$

$z = 16 + x = 16 + 25 - t = 41 - t$

Hi ha infinites solucions. Totes les de la forma:

$$x = 25 - \lambda \;; \quad y = 13 + \lambda \;; \quad z = 41 - \lambda \;; \quad t = \lambda$$

sent λ qualsevol nombre real.

48. EL REMER

Un remer va des d'un punt *A* fins a un altre *B* i torna una altra vegada a A en 10 hores. La distància entre *A* i *B* és de 20 km.

Troba la velocitat del corrent d'aigua, sabent que rema 2 km aigües amunt en el mateix temps que rema 3 km aigües avall (se suposa que l'efectivitat del remer en cada remada sempre és la mateixa).

- Anomenem x la velocitat de pujada; així, la velocitat de baixada és $\frac{3}{2}x$.
- La velocitat mitjana de tot el viatge és:

$$v = \frac{40 \text{ km}}{10 \text{ hores}} = 4 \text{ km/h}$$

$$v = \frac{40 \text{ km}}{\left(\frac{20}{x} + \frac{20}{(3/2)x}\right) \text{hores}} = \frac{40}{\frac{20}{x} + \frac{40}{3x}} = \frac{40}{\frac{100}{3x}} = \frac{120x}{100} = \frac{6x}{5}$$

$$4 = \frac{6x}{5} \;\to\; x = \frac{10}{3} \simeq 3{,}33 \text{ km/h és la velocitat de pujada.}$$

$$\to\; \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} = 5 \text{ km/h és la velocitat de baixada.}$$

- Per tant, la velocitat del corrent d'aigua és:

$$\frac{1}{2}\left(5 - \frac{10}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \simeq 0{,}83 \text{ km/h}$$

Pàgina 234

FIGURES

49. CAMP TRIANGULAR

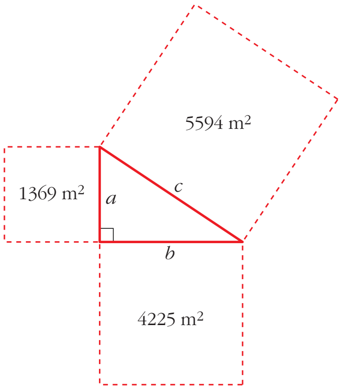
Un granger té un camp triangular rodejat de tres camps quadrats, i cada un d'aquests té un costat comú amb el triangle. Les superfícies dels camps quadrats són 4225 m², 1369 m² i 5594 m².

Quina superfície té el camp triangular?

Fem un dibuix:

Observem que:

$5594 = 1369 + 4225$; és a dir, que:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Per tant, el triangle és rectangle.

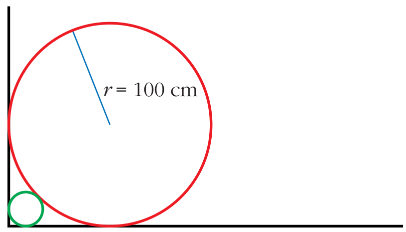
La seva àrea serà:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{4525} \cdot \sqrt{1369}}{2} = \frac{65 \cdot 37}{2} =$$

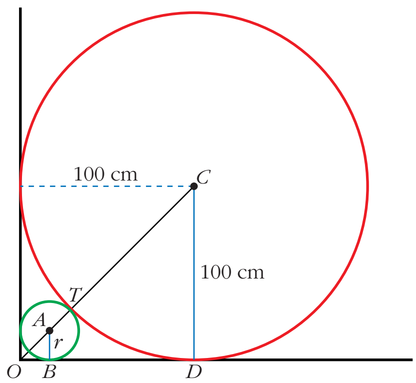
$$= 1202{,}5 \text{ m}^2$$

50. PILOTA DE PLATJA

Una gran pilota de platja està recolzada sobre una paret que forma un angle recte amb el terra. Quin és el radi de la pilota més gran que pot situar-se entre la paret, el terra i la pilota de platja?



Fem un dibuix:



$\overline{TC} = 100$ cm; $\overline{CD} = 100$ cm

$\overline{AB} = r$; $\overline{AT} = r$; $\overline{OB} = r$

$\overline{OC} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$ cm

$\overline{OA} = r \cdot \sqrt{2}$

Per tant, com que:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AT} + \overline{TC}$$

tenim que:

$$100\sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2} + r + 100$$

Aïllem r:

$$r = \frac{100(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)} = \frac{100(\sqrt{2} - 1)^2}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 100(3 - 2\sqrt{2}) \simeq 17{,}16 \text{ cm}$$

51. FIGURES QUE CREIXEN

Enuncia en els dos casos una regla per passar d'una figura a la següent.

Després de 20 passos, quants quadradrets contindrà la figura resultant en el cas *a*? I quants trianglets contindrà la figura resultant en el cas *b*? Sabries generalitzar el problema?

a) Successió amb quadrats:

$$\begin{aligned}
\cancel{a_1} &= 1 \\
\cancel{a_2} &= \cancel{a_1} + 4 \\
\cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + 8 \\
\cancel{a_4} &= \cancel{a_3} + 12 \\
\cancel{\ldots} &= \cancel{\ldots} \\
a_n &= \cancel{a_{n-1}} + 4(n-1)
\end{aligned}$$

Sumant: $a_n = 1 + 4 + 8 + 12 + \ldots + 4(n-1)$

$$a_n = 1 + 4\big(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\big) = 1 + 4 \cdot \frac{[1 + (n-1)](n-1)}{2} =$$

$$= 1 + 2(n-1)n$$

Per tant: $a_n = 1 + 2n(n-1)$.

Al cap dels 20 passos hi hauria 761 quadradets.

b) Successió amb triangles:

$$\begin{aligned}
\cancel{a_1} &= 1 \\
\cancel{a_2} &= \cancel{a_1} + 3 \\
\cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + 6 \\
\cancel{a_4} &= \cancel{a_3} + 9 \\
\cancel{\ldots} &= \cancel{\ldots} \\
a_n &= \cancel{a_{n-1}} + 3(n-1)
\end{aligned}$$

Sumant: $a_n = 1 + 3 + 6 + 9 + \ldots + 3(n-1)$

$$a_n = 1 + 3\big(1 + 2 + \ldots + (n-1)\big) = 1 + 3 \cdot \frac{[1 + (n-1)](n-1)}{2} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}n(n-1)$$

Per tant: $a_n = 1 + \frac{3}{2}n(n-1)$.

Al cap dels 20 passos hi hauria 571 trianglets.

c) Amb *k* costats: $a_n = 1 + \frac{k}{2}n(n-1)$

LÒGICA

52. VACANCES PLUJOSES

En David va estar uns dies de vacances al tròpic.

Va observar que va ploure 14 vegades al matí o a la tarda, i que quan plovia al matí, a la tarda era clar, i a la inversa. Durant la seva estada, hi va haver 12 matins totalment clars i 10 tardes també ben clares.

Quants dies va estar de vacances en David?

Plou 14 migdies (matins i tardes).

És clar 12 matins i 10 tardes.

Sumem tots els matins i tardes = 14 + 12 + 10 = 36.

1 dia té 1 matí i 1 tarda; així doncs, dividim per 2 la suma de matins i tardes i tindrem els dies que va estar de vacances:

36 : 2 = 18 dies

53. **IDIOMES**

En una empresa, tots els treballadors parlen algun idioma dels següents:

a) El 5% parla tots tres idiomes.

b) El 9% parla francès i català.

c) El 25% parla francès i anglès.

d) El 23% parla anglès i català.

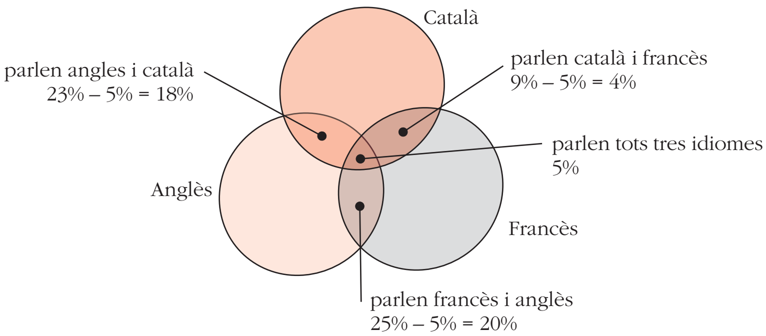
e) El 78% parla anglès.

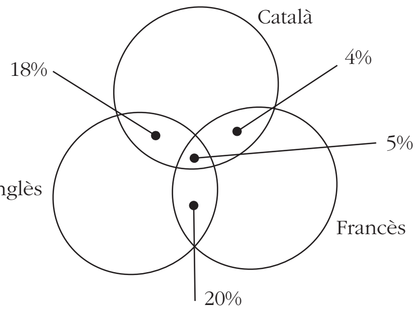
f) El 41% parla francès.

Quin tant per cent dels empleats parla un sol idioma?

Farem servir un gràfic:

Cada conjunt representarà els treballadors que parlen un idioma:





Si fem 100% - 18% - 20% - 4% - 5% = 53% són els empleats que parlen 1 idioma.

Veiem-ho més clar:

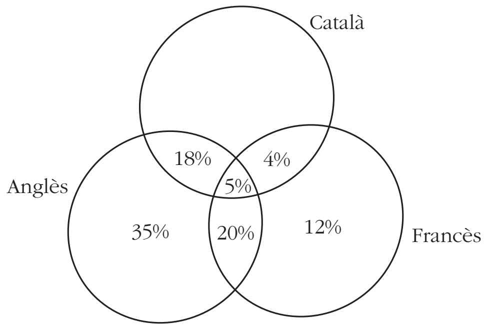
Dels que parlen anglès, 78%, cal descomptar els que ja hem comptat prèviament, que parlen anglès i un altre idioma.

78% - 18% - 20% - 5% = 35% parlen només anglès

Fem el mateix amb el francès:

41% - 4% - 20% - 5% = 12% parlen només francès

Així tenim:



El total ha de sumar el 100%.

C = 100% - 35% - 12% - 20% - 18% - 4% - 5%

C = 6%

El percentatge d'empleats que parlen només un idioma és:

35% (A) + 12% (F) + 6% (C) = 53%

54. NEDADORS

Dos nedadors experts es col·loquen als costats oposats d'una gran piscina de 60 metres de longitud i comencen a nedar al llarg d'aquesta. Un dels nedadors avança tres metres per segon, i l'altre, 2,5 metres per segon. Neden sense parar durant 15 minuts. Si suposem que no perden temps quan donen la volta, quantes vegades s'encreuaran?

El nedador que avança 3 m/s triga 20 s a fer 1 piscina.

El nedador que avança 2,5 m/s triga 24 s a fer 1 piscina.

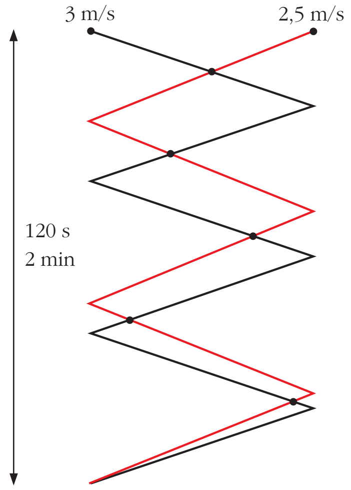
El mínim comú múltiple (m.c.m.) de 20 i 24 és 120.

Quan han passat 120 s = 2 min:

El nedador que avança 3 m/s haurà fet 6 piscines.

El nedador que avança 2,5 m/s haurà fet 5 piscines.

Fem un gràfic per representar-ho:



Ha fet 6 piscines

Ha fet 5 piscines

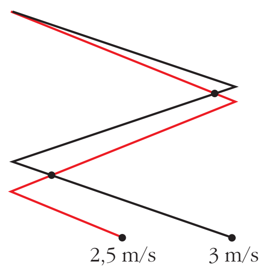
S'encreuen 6 vegades

Si neden 14 min, s'encreuaran 42 vegades i estaran junts. Per arribar a 15 min cal que nedin 1 min = 60 s més.

Ho representem. En 1 min hauran nedat:

El nedador que avança 3 m/s → 3 piscines

El nedador que avança 2,5 m/s → 2,5 piscines



Ha fet 3 piscines

Ha fet 2,5 piscines

S'encreuen 2 vegades

En total, en 15 min s'encreuaran 44 vegades.

55. BALES DE COLORS

L'Anna, en Pep i en Ramon es reparteixen sis bosses amb les quantitats de bales següents: 18, 19, 21, 23, 25, 34.

L'Anna n'agafa una bossa. En Pep i en Ramon es reparteixen les altres cinc. Després, tots tres treuen les bales de les bosses i les compten.

En Pep té el doble de bales que en Ramon.

Quantes bales té l'Anna?

En total hi ha 140 bales.

L'Anna se'n queda unes quantes.

Les restants, se les reparteixen en Pep i en Ramon.

Si en Pep té el doble de bales que en Ramon, vol dir que el total de bales que tenen en Pep i en Ramon ha de ser múltiple de 3. Mirem la possibilitat:

TOTAL BALES	BALES ANNA	BALES RESTANTS	MÚLTIPLE DE 3
140	18	122	NO
140	19	121	NO
140	21	119	NO
140	23	117	SÍ
140	25	115	NO
140	34	106	NO

L'única possibilitat és que l'Anna tingui 23 bales.

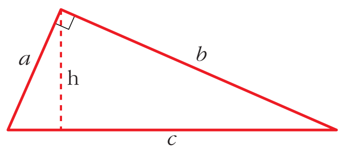
Pàgina 235

DEMOSTRAR

56. TRIANGLE RECTANGLE

En un triangle rectangle, a i b són els catets i c la hipotenusa. Anomenem h l'altura corresponent a la hipotenusa.

Demostra que el triangle amb costats h, c + h i $a + b$ és rectangle.



Sabem que $a^2 + b^2 = c^2$, atès que ens diuen que el triangle de costats a, b i c és rectangle.

Hem de demostrar que el triangle de costats h, c + h i $a + b$ és rectangle; és a dir, que:

$$(a + b)^2 + \mathrm{h}^2 = (c + \mathrm{h})^2$$

Però:

$$(a + b)^2 + \mathrm{h}^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} + 2ab + \mathrm{h}^2 \overset{(*)}{=} c^2 + 2c\mathrm{h} + \mathrm{h}^2 = (c + \mathrm{h})^2,$$

tal com volíem demostrar.

(*)Si considerem com a base el costat a, l'àrea del triangle és $\dfrac{a \cdot b}{2}$,

i si considerem com a base el costat c, l'àrea del triangle és $\dfrac{c \cdot \mathrm{h}}{2}$.

Per tant: $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{c\mathrm{h}}{2} \rightarrow ab = c\mathrm{h}$.

57. MÚLTIPLE DE 12

Demostra que si p és un nombre primer major que 3, llavors $p^2 - 1$ és un múltiple de 12.

Podem escriure $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Tingues en compte que un múltiple de 12 ha de ser múltiple de 3 i de 4.

Podem descompondre, tal com s'indica a l'ajuda, $p^2 - 1$ de la forma:

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

- Com que p és imparell (ja que p és un nombre primer major que 3), $p - 1$ i $p + 1$ són parells. En multiplicar dos nombres parells, necessàriament obtenim un múltiple de 4.

  És a dir, $p^2 - 1$ és múltiple de 4.

- A més, com que p no és múltiple de 3 (ja que p és primer major que 3), o bé $p - 1$, o bé $p + 1$ ha de ser múltiple de 3 (ja que $p - 1$, p, $p + 1$ són tres nombres consecutius; un d'ells ha de ser múltiple de 3). Per tant $p^2 - 1$ és múltiple de 3.

- Com que $p^2 - 1$ és múltiple de 4 i de 3, ho serà de 12, tal com volíen demostrar.

58. DESIGUALTATS

Si a i b són dos nombres diferents i ambdós positius, demostra les desigualtats següents:

a) $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$ **b)** $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ **c)** $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{2}}$

a) Suposem que la desigualtat és falsa, és a dir, que:

$\frac{a+b}{2} \leq \frac{2ab}{a+b}$; com que a i b són positius, $a + b$ també ho és,

aleshores: $(a + b)^2 \leq 4ab$.

Desenvolupem el quadrat i agrupem termes:

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \leq 0$$

$$(a - b)^2 \leq 0$$

Però, com que $a \neq b$, $(a - b)^2$ no és zero; i mai no pot ser negatiu. Hem arribat a un absurd; per tant:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$$

b) Suposem que és falsa la desigualtat, és a dir, que:

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{ab}$$

Si elevem al quadrat ($a + b$ és positiu, per ser-ho a i b) i si operem:

$$a + b \le 2\sqrt{ab}$$

$$(a + b)^2 \le 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \le 0$$

$$(a - b)^2 \le 0$$

Arribem a la mateixa conclusió que en l'apartat anterior; és un absurd; i, per tant:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

c) Si a i $b > 0$ es manté la desigualtat si elevem al quadrat:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2$$

restem $a^2 + b^2$ en els 2 termes

$$2ab \le a^2 + b^2$$

$$0 \le a^2 - 2ab + b^2$$

$0 \le (a - b)^2 \rightarrow$ sempre quelcom al quadrat és $\ge 0 \rightarrow$ Demostrat

PRINCIPI DEL COLOMAR

59. COLOMS I FORATS

Un conjunt de 40 coloms arriben volant i es fiquen al colomar pels 36 forats que hi ha. Explica per què tindrem la seguretat que per alguns dels forats han entrat, almenys, dos coloms. La idea que sustenta aquesta situació és la que permet resoldre els exercicis que tens a continuació.

Els primers 36 coloms entren en un forat diferent cadascun.

El colom 37 ha de repetir forat.

60. ANIVERSARI COINCIDENT

En un institut de 450 estudiants, demostra que hi ha, almenys, dues persones amb la mateixa data d'aniversari.

Apliquem el principi del colomer:

Hi ha 365 (o 366) dates possibles per a l'aniversari; si hi ha 450 persones, n'han de coincidir, com a mínim, dues.

61. PIN DE QUATRE XIFRES

Els "nombres secrets" de les targetes de crèdit consten de quatre dígits. Per exemple, 2704, 0012, 9461, són nombres possibles.

Demostra que, amb certesa, hi ha dues targetes que tenen el mateix nombre.

El nombre de targetes de crèdit existents supera el de 10 000, que és el nombre de possibles "nombres secrets".

Aplicant el principi del colomer, amb tota certesa, hi ha dues targetes que tenen el mateix "nombre secret".

62. ENCARA QUE NO HI HAGI CALBS

¿Podries assegurar que a Catalunya hi ha, almenys, dues persones amb el mateix nombre de cabells al cap?

El nombre de cabells en el cap d'una persona no supera els 200 000. El nombre d'habitants de Catalunya, sí. Pel principi del colomer, hi haurà, pel cap baix, dues persones amb el mateix nombre de cabells al cap.

63. NOMBRE D'AMICS

En una festa hi ha 50 persones. Demostra que almenys dues tenen el mateix nombre d'amics a la festa.

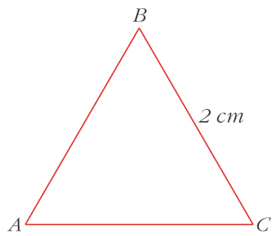
Aplicarem el principi del colomer.

En principi, tenim les següents possibilitats per al nombre d'amics de cada persona: 0, 1, 2, …, 49 (considerem que si una persona és amiga d'una altra, l'altra ho és de la primera, i que un mateix no es compta com a amic seu). Tindríem 50 possibilitats, però totes a la vegada no es poden donar. Si hi ha una persona amb 0 amics, no pot haver-n'hi una altra amb 49 amics, ja que la de 0 amics no seria amiga seva. Aquestes dues possibilitats no es poden donar alhora.

Per tant, com a màxim, tenim 49 possibilitats, i hi ha 50 persones. Si associem a cada persona una possibilitat, necessàriament hi haurà dues persones (com a mínim) amb la mateixa possibilitat, és a dir, amb el mateix nombre d'amics.

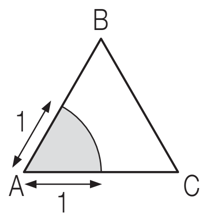
64. PUNTS EN UN TRIANGLE

Sigui *ABC* un triangle equilàter de 2 cm de costat. Demostra que si s'elegeixen cinc punts del seu interior hi ha, com a mínim, dos punts que disten menys d'1 cm.



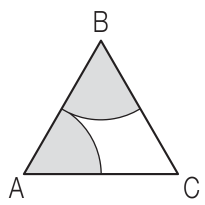
Escollim el primer punt A.

El següent punt haurà d'estar més lluny d'1 cm, és a dir, fora de la zona ombrejada:



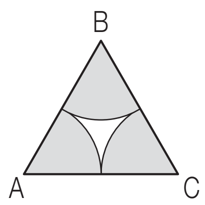
El següent punt escollit serà B. Ja tenim 2 punts.

El següent punt haurà d'estar fora de la zona ombrejada.



El següent punt escollit serà C. Ja tenim 3 punts.

El següent punt haurà d'estar fora de la zona ombrejada.

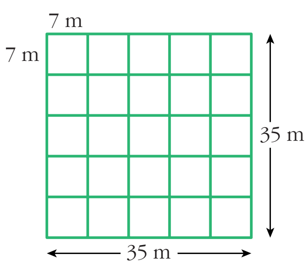


Qualsevol que sigui el punt 4 escollit en la zona no ombrejada farà que s'ombregi tot el triangle.

És impossible col·locar un cinquè punt que disti 1 cm de tots els altres.

65. OVELLES A TOCAR

En un camp quadrat de 35 m de costat introduïm 26 ovelles que pasturen. Demostra que sempre n'hi ha, almenys, dues que estan a menys de 10 m.



Dividim el quadrat de costat 35 m en 25 quadradets de costat 7 m cada un.

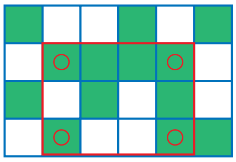
Com que hi ha 26 ovelles, necessàriament han d'estar, com a mínim dues, en un mateix quadradet. I la distància màxima dintre del quadradet és la diagonal, que mesura:

$$\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} < 10 \text{ m}$$

66. QUADRÍCULES

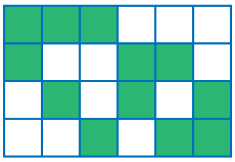
En la quadrícula 4 × 6 que tens a sota hem ombrejat alguns dels quadrets i d'altres els hem deixat en blanc.

Això es pot fer de moltes maneres. Intenta trobar una de les maneres en la qual no es pugui trobar un rectangle amb els quatre vèrtexs del mateix color (en la que hem dibuixat no passa, com es pot veure amb els quatre quadrets assenyalats en vermell).



No obstant això, si la quadrícula fos 4 × 7 no seria possible trobar una configuració en la qual no hi hagués un rectangle amb els quatre vèrtexs del mateix color.

- Vegem una forma en la qual no es pot trobar un rectangle amb els quatre vèrtexs del mateix color:



Quadrícula 4 × 6

- Hi ha 6 formes diferents d'ombrejar dos quadrats en una columna de 4. Si la quadrícula fos de 4 × 7, tindríem 7 columnes per a només 6 possibilitats; per tant, com a mínim, una haurà de repetir-se.
- Si ombregéssim només un quadrat, tindríem 4 formes diferents; i ombrejar 3 quadrats és equivalent a ombrejar-ne un de sol.
- Si ombregem un nombre diferent de quadrats en cada columna, augmentem les possibilitats de coincidència.