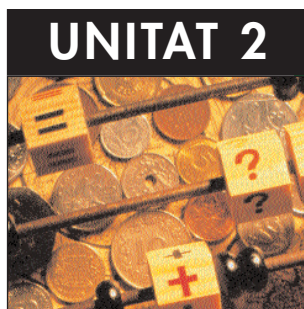




ÀLGEBRA DE MATRIUS

Pàgina 30

Elecció de president

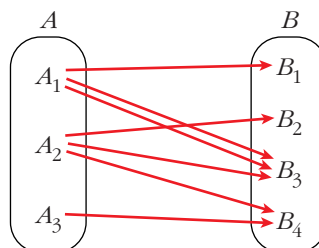
1. Els sis consellers d'una empresa (A, B, C, D, E, F) han d'escollir un president d'entre ells mateixos. Cadascun opina, sobre els altres i sobre si mateix, si és idoni (1), no és idoni (-1) o s'absté (0).

El candidat C és qui té més suport. Hauria de ser president el conseller C, que és qui acumula més vots favorables i només un negatiu.

Vols internacionals

2. En un país A hi ha tres aeroports internacionals, A_1, A_2, A_3 , mentre que en el país B n'hi ha quatre, B_1, B_2, B_3, B_4 .

Una persona que dilluns vulgui anar de A a B disposa dels vols següents:

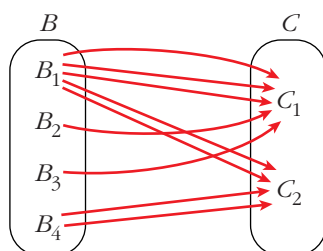


La informació anterior pot ser representada mitjançant la taula següent:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	2	0
A_2	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1

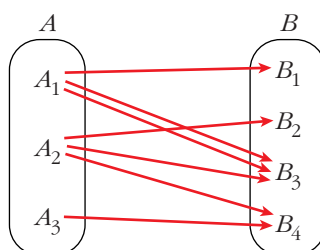
Pàgina 31

- Aquí tens representats, mitjançant fletxes, els vols que hi ha dimarts des del país B fins al país C . Representa, mitjançant una taula com l'anterior, la informació recollida en el diagrama.



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

■ Una persona vol sortir dilluns de A , passar la nit a B i arribar dimarts a C .



En total tenim 5 possibles formes d'anar de A_1 a C_1 .

Continua tu, omplint raonadament la resta de la taula i explica, en cada cas, com arribes a la resposta.

	C_1	C_2
A_1	5	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Pàgina 33

EXERCICIS PROPOSATS

1. Escribe les matrius transposades de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F = (5 \ 4 \ 6 \ 1)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

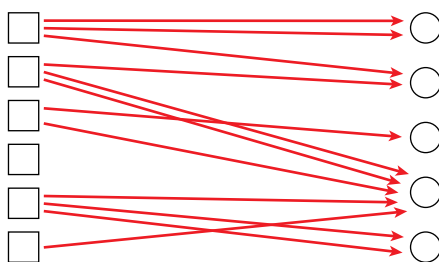
$$E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escriu una matriu X de tal manera que $X^t = X$.

Per exemple, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escriu una matriu que descriuï el següent:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pàgina 34

4. Siguin les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Pàgina 37

5. Efectua tots els possibles productes entre les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

6. Intenta aconseguir una matriu I_3 de dimensió 3×3 que, multiplicada per qualsevol altra matriu A (3×3), la deixi igual.

És a dir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriu I_3 s'anomena matriu unitat d'ordre 3. Quan la tinguis, sabràs obtenir una matriu unitat de qualsevol ordre.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pàgina 38

7. Comprova les propietats 2 i 3 anteriors, referents al producte de nombres per matrius, prenent: $a = 3$, $b = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 2) \quad 9A &= \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ 3A + 6A &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad 3(A + B) &= 3 \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ 3A + 3B &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$
$$3(A + B) = 3A + 3B$$

Pàgina 39

8. Comprova les propietats distributives per a les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C &= \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left. \begin{aligned} (B + C) \cdot D &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Pàgina 41

9. Calcula, utilitzant el mètode de Gauss, la inversa de cada una de les matrius següents o esbrina que no la té:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a - 2a \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{La inversa és } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$
 $\rightarrow \begin{array}{c} 1a + 2a \\ 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a : (-2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{La inversa és } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{No té inversa}$

10. Calcula la inversa de cada una de les matrius següents o esbrina que no la té:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 4 \cdot 1a \\ 3a - 7 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{No té inversa}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a - 3 \cdot 3a \\ 2a - 2 \cdot 3a \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a - 2 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$

La inversa és $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a : 2 \\ 2a \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1/2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 2 \cdot 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & -1/2 \end{array} \right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \cdot 5 - 3a \\ 3a : 5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 10 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a : 10 \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right) \rightarrow \text{La inversa és } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

Pàgina 41

11. Calcula x, y, z, t perquè es compleixi: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - z = 5 \\ 2y - t = 1 \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}$$

Solució: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Per a les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **comprova:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

13. Siguin $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Troba X que compleixi: $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

14. Troba dues matrius, A i B , de dimensió 2×2 que compleixin:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumant: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. Troba dues matrius X i Y que verifiquin:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{Sumant: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Solució: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

16. Busca com ha de ser una matriu X que compleixi:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{han de ser iguals}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = t \\ z = 0 \end{array} \quad \text{Solució: } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{ en què } x \text{ i } y \text{ són nombres reals qualssevol.}$$

17. Efectua les operacions següents amb les matrius donades:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

18. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comprova que $(A - I)^2 = 0$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Troba la inversa de les matrius:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{cases} \begin{cases} y = -3 \\ t = 7 \end{cases}$$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -5 \\ z = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{cases} \begin{cases} y = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ 2d = 0 \rightarrow d = 0 \\ 2e = 1 \rightarrow e = 1/2 \\ 2f = 0 \rightarrow f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Per tant, la inversa és } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2d + 3g = 1 \\ d + 2g = 0 \\ d + g = 0 \end{cases} \text{ si } 2a - 3a \rightarrow g = 0 \rightarrow d = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\begin{cases} b + 2e + 3h = 0 \\ e + 2h = 1 \\ e + h = 0 \end{cases} \text{ si } 2a - 3a \rightarrow h = 1 \rightarrow e = -1 \rightarrow b = -1$$

$$\begin{cases} c + 2f + 3i = 0 \\ f + 2i = 0 \\ f + i = 1 \end{cases} \text{ si } 2a - 3a \rightarrow i = -1 \rightarrow f = 2 \rightarrow c = -1$$

$$\text{Per tant, la inversa és } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pàgina 46

20. Calcula el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 5 \cdot 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \\ 4a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ -2 \cdot 3a + 2a \\ 4a - 4 \cdot 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 3$$

Pàgina 47

21. Expressa en forma matricial els següents sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} x + z = 10 \\ 2x + 3y = 17 \\ 3x + 4y + z = 32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y - 3z - 2t = -19 \\ y + 2z + t = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y + t = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + z = 10 \\ 2x + 3y = 17 \\ 3x + 4y + z = 32 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}}_C$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_C$

c) $\begin{cases} x - 2y - 3z - 2t = -19 \\ y + 2z + t = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y + t = 5 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}}_C$

22. Comprova que les inverses de les matrius associades als sistemes de l'exercici anterior són les que donem a continuació:

a) $\begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resol·hi, matricialment, els sistemes de l'exercici 21.

a) Comprovem que és la inversa:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolem el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = 1$, $y = 5$, $z = 9$

b) Comprovem que és la inversa:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolem el sistema:

$$X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = 1$, $y = -5$

c) Comprovem que és la inversa:

$$C \cdot C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolem el sistema:

$$X = C^{-1} \cdot D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = 0$, $y = -1$, $z = 5$, $t = 3$

Pàgina 52

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Operacions amb matrius

23. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $-2A + 3B$ b) $\frac{1}{2}A \cdot B$ c) $B \cdot (-A)$ d) $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

24. Efectua el producte $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$

25. a) Són iguals les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $B = (2 \ 3)$?

b) Troba, si és possible, les matrius AB ; BA ; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A té dimensió 2×1 i B té dimensió 1×2 . Perquè dues matrius siguin iguals, han de tenir la mateixa dimensió i coincidir terme a terme.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \ 3)$; $A + B$ no es pot fer, ja que no tenen la mateixa dimensió.

$$A^t - B = (2 \ 3) - (2 \ 3) = (0 \ 0)$$

26. Donades les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, comprova que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } (A + B)^t &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t + B^t &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } (3A)^t &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ 3A^t &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (3A)^t = 3A^t$$

27. Calcula $3AA^t - 2I$, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} 3AA^t - 2I &= 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

28. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprova que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t \cdot A^t &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

29. Calcula, en cada cas, la matriu B que verifica la igualtat:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

30. Donades les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

b) Comprova que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $(A + B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

31. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, comprova que $(A + I)^2 = 0$ i expressa A^2

com a combinació lineal de A i I .

$$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = -2A - I$$

Equacions amb matrius

32. Troba les matrius X i Y que verifiquen el sistema

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ Sumant les dues equacions, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aillem Y en la segona equació:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

33. Calcula X de tal manera que $X - B^2 = A \cdot B$, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

34. Determina els valors de m per als quals

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ verifiqui } X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0.$$

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{5}{2}X + I &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ha de complir-se que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hi ha dues solucions: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

35. Resol: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

Sumant: $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solució: $x = \frac{-5}{4}; y = \frac{-7}{4}$

36. Troba dos matrius A i B en les quals:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \quad -A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Per a cada element cal plantejar $\begin{cases} 2a_{11} + 3b_{11} = 8 \\ -a_{11} + 5b_{11} = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ b_{11} = 2 \end{cases}$
i així per a tots els elements.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & +2 & -1 \\ 3 & +4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

37. Troba X i Y sabent que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ i $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

Per a cada element cal plantejar $\begin{cases} 5x_{11} + 3y_{11} = 2 \\ 3x_{11} + 2y_{11} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{11} = 1 \\ y_{11} = -1 \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu inversa

38. Comprova que la matriu inversa de A és A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

39. Quina és la matriu inversa de la matriu unitat?

La matriu unitat, I .

- 40.** Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ prova quina de les matrius següents és la seva inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa és N ja que $A \cdot N = N \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 41.** Troba la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0 \quad y = -1$$

$$\begin{cases} z - t = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \rightarrow z = 1/2 \quad t = 1/2$$

Per tant, la matriu inversa és $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 4y = 1 \end{cases} \rightarrow y = 1/4 \quad x = -1$$

$$\begin{cases} -z + 2t = 0 \\ 4t = 1 \end{cases} \rightarrow t = 1/4 \quad z = 1/2$$

Per tant, la matriu inversa és $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Pàgina 53

Rang d'una matriu

- 42.** Estudia el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } A = 1 \quad 2 \cdot 1a \text{ fila} + 2a \text{ fila} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } B = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } C = 1 \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 1a \text{ fila} + 2a \text{ fila} \\ 12 \cdot 1a \text{ fila} - 3a \text{ fila} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } D = 2 \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 1a \text{ fila} - 2a \text{ fila} \\ 3 \cdot 1a \text{ fila} - 3a \text{ fila} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 2a \text{ fila} - 3a \text{ fila} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

43. Estudia el rang d'aquestes matrius i digues, en cada cas, el nombre de columnes que són L.I.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Hi ha tres columnes linealment independents en A .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(B) = 2$$

Hi ha dues columnes linealment independents en B .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \\ 4a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ 4a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \\ 4a - 2a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Hi ha dues columnes linealment independents en C .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ 4a - 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(D) = 4$$

Les quatre columnes de D són linealment independents.

Pàgina 51

PER RESOLDRE

44. Comprova que $A^2 = 2A - I$, si: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ i I la matriu unitat d'ordre 3.

Utilitza aquesta igualtat per calcular A^4 .

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I &= \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A^2 = 2A - I$$

Calculem A^4 :

$$\begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = \\ &= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I = \\ &= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

45. Determina a i b de forma que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \text{ verifiqui } A^2 = A.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4 - a = 2 & \rightarrow a = 2 \\ -2 - b = -1 & \rightarrow b = -1 \\ 2a + ab = a & \rightarrow 4 - 2 = 2 \\ -a + b^2 = b & \rightarrow -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

Per tant, $a = 2$ i $b = -1$.

46. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, troba una matriu B de tal manera que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -4x - 2z = -6 \end{cases} \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = 2 \rightarrow z = -1$$

$$\begin{cases} y + 2t = 3 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + 2t = 3 \\ -4y - 2t = 0 \end{cases} \rightarrow -3y = 3 \rightarrow y = -1 \rightarrow t = 2$$

$$\text{Per tant, } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

47. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \dots, A^{128}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

48. Calcula A^n i B^n si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\bullet A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Així, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ho comprovem per inducció:}$$

Acabem de comprovar que per a $n = 2$ (primer cas rellevant) funciona.

Suposem que és cert per a $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Per tant, } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}. \text{ Ho comprovem per inducció:}$$

Igual que en el cas anterior, per a $n = 2$ es compleix.

Suposem que és cert per a $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

49. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prova que A^3 és la matriu nul·la.

Demostra després que la matriu $I + A + A^2$ és la matriu inversa de $I - A$.

☛ **Multipliqua $I + A + A^2$ per $I - A$.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veiem que $I + A + A^2$ és la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Com que $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, aleshores $I + A + A^2$ és la inversa de $I - A$.

50. a) Comprova que la inversa de A és A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriu X que verifica $XA = B$, essent A la matriu anterior i $B = (1 \ -2 \ 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$

Per tant:

$$X = (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

51. Calcula la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - 2d + g = 1 \\ d = 0 \\ -a + 3d = 0 \end{cases} \rightarrow d = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow g = 1$$

$$\begin{cases} b - 2e + h = 0 \\ e = 1 \\ -b + 3e = 0 \end{cases} \rightarrow e = 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow h = -1$$

$$\begin{cases} c - 2f + i = 0 \\ f = 0 \\ -c + 3f = 1 \end{cases} \rightarrow f = 0 \rightarrow c = -1 \rightarrow i = 1$$

Per tant, la inversa és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

52. Troba la matriu X en cada una de les equacions següents:

a) $A^2X - B = AX$ essent $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $ABX = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ essent $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^2X - B = AX \rightarrow A^2X - AX = B \rightarrow (A^2 - A)X = B \rightarrow X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - d + g = 1 \\ 2a - 2g = 0 \\ 3a - d + 3g = 0 \end{cases} \rightarrow a = -1/4 \rightarrow d = -3/2 \rightarrow g = -1/4$$

$$\begin{cases} b - e + h = 0 \\ 2b - 2h = 1 \\ 3b - e + 3h = 0 \end{cases} \rightarrow b = 1/4 \rightarrow e = 0 \rightarrow h = -1/4$$

$$\begin{cases} c - f + i = 0 \\ 2c - 2i = 0 \\ 3c - f + 3i = 1 \end{cases} \rightarrow c = 1/4 \rightarrow f = 1/2 \rightarrow i = 1/4$$

Per tant, $(A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$(A^2 - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/4 & -1/2 \\ -3 & 2 & -1/2 \\ -3/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AB \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = (AB)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$(AB) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x + 3z = 1 \\ -3x + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2/3 \rightarrow z = -1$$

$$\begin{cases} -6y + 3t = 0 \\ -3y + 2t = 1 \end{cases} \rightarrow y = 1 \rightarrow t = 2$$

Per tant, la inversa és: $\begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = X$$

53. Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre k :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow \text{ran}(M) = 3$ per a qualsevol valor de k .

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 1a \\ 2 \cdot 3a - 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1+2k=0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

• Si $k = -\frac{1}{2}$, $\text{ran}(N) = 2$.

• Si $k \neq -\frac{1}{2}$, $\text{ran}(N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 3a : 4 \\ 2a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 1$

• Si $k \neq -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a + 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 2$

• Si $k \neq 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 3$

54. Troba el valor de k perquè el rang de la matriu A sigui 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a & & \\ 2a + 1a & & \\ 3a & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a & & \\ 2a & & \\ 3a + 2a & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perquè $\text{ran}(A) = 2$, ha de ser $k-2 = 0$; és a dir, $k = 2$.

55. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, troba dos nombres reals m i n tals que $A + mA + nI = 0$.

$$A + mA + nI = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2m + n & 1 + m \\ 2 + 2m & 3 + 3m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 + 2m + n = 0 \rightarrow n = 0 \\ 1 + m = 0 \rightarrow m = -1 \\ 2 + 2m = 0 \rightarrow m = -1 \\ 3 + 3m + n = 0 \rightarrow n = 0 \end{cases}$$

Solució: $m = -1$; $n = 0$

56. Determina, si és possible, un valor de k perquè la matriu $(A - kI)^2$ sigui la matriu nul·la, si:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A - kI)^2 &= \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 2k - 2 & 4k - 4 \\ 2k - 2 & k^2 - 1 & 4k - 4 \\ 2 - 2k & 2 - 2k & k^2 - 6k + 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

Pàgina 54

57. En un edifici hi ha tres tipus d'habitatges: L3, L4 i L5. Els habitatges L3 tenen 4 finestres petites i 3 de grans; els L4 tenen 5 finestres petites i 4 de grans, i els L5, 6 de petites i 5 de grans. Cada finestra petita té 2 vidres i 4 frontisses, i les grans, 4 vidres i 6 frontisses.

a) Escriu una matriu que descrigui el nombre i grandària de finestres de cada habitatge i una altra que expressi el nombre de vidres i frontisses de cada tipus de finestra.

b) Calcula la matriu que expressa el nombre de vidres i de frontisses de cada tipus d'habitatge.

$$a) \begin{matrix} & P & G \\ L3 & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ L4 & \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ L5 & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}; \begin{matrix} & V & F \\ P & \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ G & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$b) \begin{matrix} & P & G \\ L3 & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ L4 & \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ L5 & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & V & F \\ P & \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ G & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & V & F \\ L3 & \begin{pmatrix} 20 & 34 \end{pmatrix} \\ L4 & \begin{pmatrix} 26 & 44 \end{pmatrix} \\ L5 & \begin{pmatrix} 32 & 54 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

58. Un industrial fabrica dos tipus de bombetes: transparents (T) i opaques (O). De cada tipus se'n fan quatre models: M_1 , M_2 , M_3 i M_4 .

$$\begin{matrix} & T & O \\ M_1 & \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ M_2 & \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ M_3 & \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ M_4 & \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{Aquesta taula mostra la producció setmanal de bombetes de cada tipus i model.}$$

El percentatge de bombetes defectuoses és el 2% en el model M_1 , el 5% en el M_2 , el 8% en el M_3 i el 10% en el M_4 .

Calcula la matriu que expressa el nombre de bombetes transparents i opaques, bones i defectuoses, que es produeixen.

$$\begin{matrix} & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ D & \begin{pmatrix} 0,02 & 0,05 & 0,08 & 0,1 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0,98 & 0,95 & 0,92 & 0,9 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & T & O \\ M_1 & \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ M_2 & \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ M_3 & \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ M_4 & \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & T & O \\ D & \begin{pmatrix} 96 & 60,9 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 1354 & 869,1 \end{pmatrix} \end{matrix} \approx \begin{matrix} & T & O \\ D & \begin{pmatrix} 96 & 61 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 1354 & 869 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

59. Troba totes les matrius X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tals que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} a^2 = 1 \\ a+b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b+c = 0 \\ c^2 = 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = 1 \rightarrow b = -1 \rightarrow c = 1 \\ a = -1 \rightarrow b = 1 \rightarrow c = -1 \end{matrix}$$

$$\text{Hi ha dues solucions: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 60.** Calcula una matriu X que commuti amb la matriu A , és a dir, $A \cdot X = X \cdot A$, quan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ han de ser iguals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=0 \\ d=a \\ c=0 \end{array} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ amb } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A^2 + 2A^{-1} \cdot X &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Observem que la matriu que hem obtingut també és de les que commuten amb A).

- 61.** Siguin A i B les matrius donades per:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Troba les condicions que han de complir a, b, c perquè es verifiqui $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perquè $A \cdot B = B \cdot A$, ha de complir-se que:

$$\left. \begin{array}{l} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=b \\ c=a \\ 7c=7c \\ 7c=7c \end{array} \quad a=b=c$$

- 62.** Donada la matriu: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ prova que es verifica $A^3 + I = 0$ i utilitza aquesta igualtat per obtenir A^{10} .

☛ Fes $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ i tingues en compte que $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim A^{10} (tenint en compte que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- 63. Una matriu quadrada s'anomena *ortogonal* quan la seva inversa coincideix amb la seva transposada.**

Calcula x i y perquè A sigui ortogonal: $A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☛ **Fes $A \cdot A^t = I$.**

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; aleshores:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{9}{25} + x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{16}{25} \quad x = \pm \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x = 0 \quad y = x \quad y = x$$

$$y^2 + \frac{9}{25} = 1 \quad y^2 = \frac{16}{25}$$

$$\text{Hi ha dues solucions: } x_1 = \frac{4}{5}; y_1 = \frac{4}{5} \quad x_2 = -\frac{4}{5}; y_2 = -\frac{4}{5}$$

- 64. Resol l'equació matricial:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solució: } X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

- 65. Justifica per què no és certa la igualtat: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$**

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A - B^2$, i com que $A \cdot B \neq B \cdot A$, no es compleix la igualtat $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 + B^2$.

66. Si A és una matriu de dimensió 2×3 :

a) Hi ha una matriu B tal que $A \cdot B$ sigui una matriu d'una sola fila?

b) I per a $B \cdot A$?

Posa un exemple per a cada cas, si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tindrà 2 files necessàriament. Per exemple, agafant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
i $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenim que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si agafem una matriu de dimensió 1×2 (ha de tenir dues columnes per poder multiplicar $B \cdot A$), el resultat tindrà una sola fila. Per exemple:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = (1 \ 2)$, aleshores $B \cdot A = (5 \ 2 \ 0)$

67. A i B són dues matrius quadrades d'igual grandària. Si A i B són simètriques, ho és també el seu producte $A \cdot B$?

Si la resposta és afirmativa, justifica-la, i si és negativa, posa'n un contra-exemple.

Si A i B són dues matrius quadrades del mateix ordre, simètriques, el seu producte, $A \cdot B$, no té per què ser una matriu simètrica. Per exemple:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no és simètrica.

Pàgina 55

68. Definim la *traça* d'una matriu quadrada A d'ordre 2 com $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Prova que si A i B són dues matrius quadrades d'ordre 2, llavors $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; aleshores:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Per tant, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

69. A és una matriu quadrada d'ordre 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A és una matriu diagonal). Prova que el producte de dues matrius diagonals és una matriu diagonal.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, el seu producte és:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}, \text{ que també és una matriu diagonal.}$$

70. Siguin $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. Quines condicions han de complir p, q i r perquè es puguin efectuar les operacions següents?

a) $A \cdot C \cdot B$

b) $A \cdot (B + C)$

a) $n = q = r$

b) $n = q; \quad p = r$

- 71.** A és una matriu de dues files i dues columnes el rang de la qual és 2. En pot variar el seu rang si li afegim una fila o una columna?

No, perquè el nombre de files linealment independents coincideix amb el nombre de columnes linealment independents. Si afegim una fila, A seguiria tenint dues columnes; i si afegim una columna, A seguiria tenint dues files. Per tant, el rang seguiria sent 2.

- 72. Una matriu de 3 files i 3 columnes té rang 3.**

- a) Com pot variar el rang si li traiem una columna?**

- b) Si li suprimim una fila i una columna, podem assegurar que el rang de la matriu que en resulti serà 2?

- a) Tindrà rang dos.

- b) No. Podría ser dos o un. Per exemple:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimim la primera fila i la tercera columna,

quedaria $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que té rang 1 (A tenia rang 3).

- 73.** a) Si A és una matriu regular d'ordre n i hi ha una matriu B de tal manera que $AB + BA = 0$, prova que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.

- b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, troba una matriu $B \neq 0$ que compleixi $AB + BA = 0$.

- a) Multipliquem per A^{-1} per l'esquerra en la igualtat:

$$AB + BA = \mathbf{0} \rightarrow A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \rightarrow B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$$

Ara multipliquem la igualtat obtinguda per A^{-1} per la dreta:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, aleshores:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Així:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ 2b - c + 3d = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} d = -a \\ d = 0 \\ d = 0 \\ \rightarrow 3a - 2b + c = 0 \rightarrow \\ \rightarrow c = -3a + 2b \end{array}$$

Per tant: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a i $b \neq 0$

Per exemple, amb $a = 1$ i $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

74. Demuestra que si una matriu verifica $A^2 = 0$ (0 és la matriu nul·la), llavors A no pot tenir inversa.

Suposem que es verifica que $A^2 = 0$, però que A sí té inversa, que existeix A^{-1} .

Multiplicant la igualtat $A^2 = 0$ per $(A^{-1})^2$, quedaria:

$$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = 0 \rightarrow (A^{-1} \cdot A)^2 = 0 \rightarrow I = 0; \text{ la qual cosa és absurda.}$$

Per tant, deduïm que no existeix A^{-1} .

75. ¿És possible afegir una fila a la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nova matriu tingui rang 4?

Raona la resposta.

Calculem el rang de la matriu donada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a - 3 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Té rang 2; així doncs, afegint una fila, la matriu resultant no podrà tenir rang 4 (tindria rang 2 o 3).

PER APROFUNDIR

76. A i B són dues matrius quadrades del mateix ordre. De la igualtat $A \cdot B = A \cdot C$ no pot deduir-se, en general, que $B = C$.

a) Prova aquesta afirmació buscant dues matrius B i C diferents de manera

que $A \cdot B = A \cdot C$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Quina condició ha de complir la matriu A perquè de $A \cdot B = A \cdot C$ es pugui deduir que $B = C$?

a) Per exemple, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \text{ però } B \neq C.$$

b) Ha d'existir A^{-1} .

77. Prova que qualsevol matriu quadrada d'ordre 3 pot escriure's com a suma d'una matriu simètrica i una altra d'antisimètrica.

Agafem una matriu quadrada d'ordre 3 qualsevol:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Fem el mateix amb una matriu simètrica S i una antisimètrica R .

És evident que per tal de poder-les sumar $R + S$ i que el resultat sigui una matriu A d'ordre 3, R i S també han de ser d'ordre 3. Per definició:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ +s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ +s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ -r_{12} & 0 & r_{23} \\ -r_{13} & r_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Volem demostrar que $R + S = A$

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ -r_{12} & 0 & r_{23} \\ -r_{13} & -r_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si agafem la suma terme a terme veurem que sempre es complirà. Pels elements de la diagonal principal és evident, ja que:

$$0 + s_{11} = a_{11} \quad 0 + s_{22} = a_{22} \quad 0 + s_{33} = a_{33}$$

Pels altres elements observem que, agafant-los per parelles simètriques:

$$\begin{cases} r_{12} + s_{12} = a_{12} \\ r_{12} + s_{12} = a_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} -r_{13} + s_{13} = a_{13} \\ r_{13} + s_{13} = a_{31} \end{cases} \quad \begin{cases} r_{23} + s_{23} = a_{23} \\ -r_{23} + s_{23} = a_{32} \end{cases}$$

Són sistema de 2 eq. i 2 incogn. de resolució evident. (Sumant les 2 eq. obtenim un valor, i restant-les obtenim l'altre). Fem pel primer:

$$2s_{12} = a_{12} + a_{21} \rightarrow s_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \quad \text{i} \quad 2r_{12} = a_{12} - a_{21} \rightarrow r_{12} = \frac{a_{12} - a_{21}}{2}$$

Així trobaríem tots els valors de R i S demostrant el que demana l'enunciat.

78. Estudia el rang de les matrius següents segons els valors de a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$
- Si $a = -2 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$
- Si $a \neq 1$ i $a \neq -2 \rightarrow \text{ran}(M) = 3$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$
- Si $a \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

79. Es diu que una matriu és *antisimètrica* quan la seva transposada és igual a la seva oposada. Obtén la forma general d'una matriu d'ordre 2 que sigui antisimètrica.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, aleshores $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ i $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Perquè $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ d = 0 \end{cases}$$

Per tant, una matriu *antisimètrica* d'ordre 2 és de la forma: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

80. Recorda que una matriu A és *simètrica* si $A^t = A$. Una matriu s'anomena *antisimètrica* si $-A^t = A$. (Tant les matrius simètriques com les antisimètriques són, òbviament, quadrades.) Demostra que en una matriu antisimètrica tots els elements de la diagonal principal són zeros.

- Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, els elements de la seva diagonal principal són a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$.
- La transposada és $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; els elements de la seva diagonal principal també seran a_{ii} (els mateixos que els de A).
- L'oposada de la transposada és $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; els elements de la seva diagonal principal seran $-a_{ii}$.
- Perquè $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; per tant, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$ (és a dir, els elements de la diagonal principal són zeros).

81. Diem que una matriu quadrada és *màgica* de suma k quan la suma dels elements de cada fila, com també els de cada columna i els de les dues diagonals, és, en tots els casos, igual a k . Quant val k si una matriu màgica és antisimètrica? Troba totes les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3.

- Hem vist en l'exercici anterior que, en una matriu antisimètrica, els elements de la diagonal principal són zeros. Per tant, si la matriu és antisimètrica, $k = 0$.
- Busquem les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3 (sabem que, en aquest cas, la suma ha de ser zero).

Vegem com és una matriu antisimètrica d'ordre 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot A \text{ antisimètrica si } A^t = -A; \text{ és a dir:}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

$$\text{Així doncs, una matriu antisimètrica d'ordre 3 és de la forma: } A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Perquè } A \text{ sigui màgica, ha de donar-se que: } \begin{cases} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{cases} \begin{cases} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{cases}$$

és a dir: $\begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$

Per tant, les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3 són de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ amb } b \in \mathbb{R}.$$

82. Obten totes les matrius màgiques simètriques d'ordre 3 per a $k = 0$.

Una matriu simètrica d'ordre 3 és de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ (ja que } A = A^t). \text{ Perquè sigui màgica amb } k = 0, \text{ ha de ser:}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + d + e &= 0 \\ c + e + f &= 0 \\ a + d + f &= 0 \\ 2c + d &= 0 \end{aligned} \right\} & \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a - 1a \\ 5a \end{array} \rightarrow \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 2a \\ 5a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 3a \\ 5a - 2 \cdot 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a : 2 \\ 5a + 4a \end{array} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \rightarrow a = -b - c = -f \\ b + d + e = 0 \rightarrow b = -e = f \\ c + e + f = 0 \rightarrow c = 0 \\ d + e + f = 0 \rightarrow e = -f \\ 3d = 0 \rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Per tant, una *matriu màgica simètrica d'ordre 3 amb $k = 0$* , és de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \text{ amb } f \in \mathbb{R}.$$

83. Obten totes les matrius màgiques simètriques d'ordre 3 per a $k = 3$.

Una matriu *simètrica* d'ordre 3 és de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Perquè sigui màgica amb $k = 3$, ha de ser:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ b + d + e = 3 \\ c + e + f = 3 \\ a + d + f = 3 \\ 2c + d = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a - 1a \\ 5a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 2a \\ 5a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a + 3a \\ 5a - 2 \cdot 3a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a \\ 4a : 2 \\ 5a + 4a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \rightarrow a = 3 - b - c = 3 - f - 1 = 2 - f \\ b + d + e = 3 \rightarrow b = 3 - d - e = 3 - 1 - 2 + f = f \\ c + e + f = 3 \rightarrow c = 3 - e - f = 3 - 2 + f - f = 1 \\ d + e + f = 3 \rightarrow e = 3 - d - f = 3 - 1 - f = 2 - f \\ 3d = 3 \rightarrow d = 1 \end{cases}$$

Per tant, una *matriu màgica simètrica d'ordre 3 amb $k = 3$* , és de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ amb } f \in \mathbb{R}$$

Per exemple, amb $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.