UNITAT 3

RESOLUCIÓ DE SISTEMES MITJANÇANT DETERMINANTS

Pàgina 56

Determinants d'ordre 2

- **Resol cada un dels següents sistemes d'equacions i calcula el determinant de la matriu dels coeficients:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$

Solució: $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$. *Solució:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Solució: $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$. *Incompatible*

e) $\left.\begin{array}{l} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$

Solució: $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$. *Solució:* $x = \frac{1402}{109}, \ y = \frac{886}{109}$

Pàgina 57

Resolució de sistemes 2 × 2 mitjançant determinants

- **Resol, aplicant-hi $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ i $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, els següents sistemes d'equacions i comprova'n la solució:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x - 9y = -60 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286;$

Per tant: $x = \dfrac{156}{26} = 6;\quad y = \dfrac{-286}{26} = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166;$

Per tant: $x = \dfrac{-415}{-83} = 5;\quad y = \dfrac{-166}{-83} = 2$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{cases}$ $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 64;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -60 & 9 \end{vmatrix} = 192;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -60 \end{vmatrix} = -320;$

Per tant: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{192}{64} = 3;\quad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-320}{64} = -5$

d) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -10;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 28 & -2 \end{vmatrix} = -30;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 28 \end{vmatrix} = 50;$

Per tant: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-30}{-10} = 3;\quad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{50}{-10} = -5$

Pàgina 57

EXERCICIS PROPOSATS

1. **Calcula el valor d'aquests determinants:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

a) $3 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 17$

b) 0, perquè la segona fila és proporcional a la primera.

c) 0, perquè la segona fila només té zeros.

d) $7 \cdot (-2) = -14$

2. **Calcula:**

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ ac & bc \end{vmatrix}$

a) $a \cdot d - b \cdot c$

b) $a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2(b - a)$

c) 0, perquè la segona fila només té zeros.

d) $a \cdot b \cdot c - b \cdot a \cdot c = 0$, o també observeu que la segona fila és proporcional a la primera.

Pàgina 60

3. **Calcula els determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

4. **Troba el valor d'aquests determinants:**

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000$

Pàgina 62

5. Justifica, sense desenvolupar, aquestes igualtats:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Té una fila de zeros (propietat 2).

b) La 3a fila és proporcional a la 1a (3a = (–2) · 1a) (propietat 6).

c) La 3a fila és una combinació lineal de les dues primeres (3a = 1a + 10 · 2a) (propietat 9).

d) La 1a fila és una combinació lineal de les altres dues (1a = 10 · 2a + 3a) (propietat 9).

6. Tenint en compte el resultat del determinant que et donem, calcula la resta sense desenvolupar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Pàgina 63

7. Troba dos menors d'ordre dos i dos menors d'ordre tres de la matriu *M*:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menors d'ordre dos; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menors d'ordre tres; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

8. Troba el menor complementari i l'adjunt dels elements a_{12}, a_{33} i a_{43} de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Pàgina 64

9. Calcula el determinant següent aplicant-hi la regla de Sarrus i desenvolupa'l per cada una de les seves files i cada una de les seves columnes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprova que s'obté el mateix resultat en els set casos.

Aplicant-hi la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desenvolupant per la 1a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desenvolupant per la 2a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desenvolupant per la 3a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desenvolupant per la 1a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desenvolupant per la 2a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desenvolupant per la 3a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

10. Calcula els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desenvolupant per la 2a columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

També podríem haver observat que la 4a columna és igual a la suma de les altres tres; i, per tant, el determinant val zero.

Pàgina 65

11. Calcula el rang de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{8} \\ \mathbf{12} & \mathbf{10} & \mathbf{6} & \mathbf{23} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Observem que la 3a fila és la suma de les dues primeres, i que la 4a fila és la suma de la 2a i la 3a. Per tant, *ran* $(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Vegem si la 3a fila depèn linealment de les anteriors:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Les 3 primeres files són linealment independents.}$$

Vegem si la 4a fila depèn linealment de les anteriors:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $ran\,(B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, les tres primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, aleshores $ran\,(C) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la primera, la segona i la quarta files són linealment independents.

La tercera fila és la suma de les dues primeres. Per tant, $ran\,(D) = 3$.

Pàgina 66

10. Esbrina si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$

$|A'| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 2$

El sistema és *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema és *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculem el rang de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ i $|A| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$

Calculem el rang de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (ja que la 1a i la 3a columnes són iguals) $\rightarrow ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$

El sistema és *compatible*.

Observació: Com que la 4a columna de A' i la 1a són iguals, necessàriament $ran\,(A') = ran\,(A)$; és a dir, el sistema és compatible.

d) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + z &= 2 \\ 2y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabem que $ran(A) = 2$ (vegeu apartat *a)* d'aquest exercici).

Calculem el rang de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A)$

El sistema és *incompatible.*

Pàgina 67

13. Resol mitjançant la regla de Cramer:

a) $\left\{\begin{aligned} x - 3y + 5z &= -24 \\ 2x - y + 4z &= -8 \\ x + y &= 9 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 8 \\ 2x + 3y &= 10 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x - 3y + 5z &= -24 \\ 2x - y + 4z &= -8 \\ x + y &= 9 \end{aligned}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7;$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2;$ $|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$

Per tant: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

b) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 8 \\ 2x + 3y &= 10 \end{aligned}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30;$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0;$ $|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -18$

Per tant: $x = 5$, $y = 0$, $z = 3$

14. Resol aplicant-hi la regla de Cramer:

a) $\left\{\begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 4 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x + y + 7z &= 11 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 3x - 4y - z &= 4 \\ y + z &= 6 \\ 2x + 5y + 7z &= -1 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 4 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x + y + 7z &= 11 \end{aligned}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 65; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -26$$

Per tant: $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$

b) $$\left.\begin{aligned} 3x - 4y - z &= 4 \\ y + z &= 6 \\ 2x + 5y + 7z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $ran\,(A) < 3$.

Com que hi ha menors d'ordre 2 diferents de zero, $ran\,(A) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad ran\,(A') = 3$$

Per tant, aquest sistema és *incompatible.*

Pàgina 68

15. Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $$\left\{\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ -2y + 7z &= 0 \end{aligned}\right.$$

b) $$\left\{\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ -2y + 7z &= 10 \end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ -2y + 7z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ i } |A| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (la 1a i la 3a columnes són iguals) } \rightarrow\; ran\,(A') = 2$$

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 2a equació:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ -2y + 7z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x - y = 1 - 3z \;\rightarrow\; x = y + 1 - 3z = 1 + \frac{z}{2} \\ &-2y = -7z \;\rightarrow\; y = \frac{7z}{2} \end{aligned}$$

Solució: $x = 1 + \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 2\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$$

Sabem, per l'apartat a), que $ran\,(A) = 2$.

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible*.

16. Resol aquests sistemes:

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3$

Calculem el rang de A':

$|A'| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de l'última equació i aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solució: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Com que $|A'| = -309 \neq 0$, aleshores $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$.

El sistema és *incompatible*.

Pàgina 69

17. Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 5y + z = 0} \\ \mathbf{x - 2y + z = 0} \\ \mathbf{x + y \quad\;\; = 0} \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + 11y - 4z = 0} \\ \mathbf{-2x + 4y + z = 0} \\ \mathbf{x + y - 2z = 0} \\ \mathbf{2x - 16y + 5z = 0} \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y \quad\;\; = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Per tant, *ran* $(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow ran\,(A) = 3 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

18. Resol aquests sistemes:

a) $$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - y - z = 0} \\ \mathbf{x + y + 3z = 0} \\ \mathbf{x - 5y - 9z = 0} \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y + 5z \quad\;\; = 0} \\ \mathbf{3x - y \qquad - 2t = 0} \\ \mathbf{x - y + z - t = 0} \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Seleccionem el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

Podem suprimir la 3a equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \end{array}\right\} \quad \textit{Solució:} \ \ x = -\lambda, \ \ y = -2\lambda, \ \ z = \lambda$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + 5z \quad\;\; = 0 \\ 3x - y \qquad - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&5\\3&-1&0\\1&-1&1\end{vmatrix} = -14 \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = 3$$

Per resoldre'l, passem la t al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y \qquad = 2t \\ x - y + \ \ z = t \end{array}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix}0&1&5\\2t&-1&0\\t&-1&1\end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}1&0&5\\3&2t&0\\1&t&1\end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\3&-1&2t\\1&-1&t\end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solució: $x = \lambda, \ \ y = -\lambda, \ \ z = 0, \ \ t = 2\lambda$

Pàgina 71

19. Discuteix i resol:

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{l} x + \ y + az = \ 0 \\ ax - \ y \qquad = -1 \\ x + 4y + 6z = \ 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{l} x + \ y = k \\ kx - \ y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + \ \ y + az = \ 0 \\ ax - \ \ y \qquad = -1 \\ x + 4y + \ 6z = \ 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix}1&1&a\\a&-1&0\\1&4&6\end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&0\\a&-1&0&-1\\1&4&6&0\end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \to a = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&2\\2&-1&0\\1&4&6\end{matrix}}_{A} \ \begin{matrix}0\\-1\\0\end{matrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\2&-1&-1\\1&4&0\end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \to \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

- **Si $a = -3/4$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&-3/4\\-3/4&-1&0\\1&4&6\end{matrix}}_{A} \ \begin{matrix}0\\-1\\0\end{matrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\-3/4&-1\end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\-3/4&-1&-1\\1&4&0\end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

- **Si $a \neq 2$ i $a \neq -3/4$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = nre.\ d'incògnites = 3$, el sistema és *compatible determinat*. El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solució: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}$, $y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$, $z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ k \\ kx - \ \ y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\} \qquad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ k & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} k \\ 13 \\ 16 \end{matrix}\right)$$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \ \to\ k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \Big< \begin{array}{l} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{array}$$

- **Si $k = 2$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A} \ \ \begin{matrix} 2 \\ 13 \\ 16 \end{matrix}\right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \to\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\} \ \text{Sumant: } 3x = 15 \ \to\ x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solució: $x = 5$, $y = -3$

- **Si $k = 5/3$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 5/3 \\ 13 \\ 16 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \ \to\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - y = 13 \end{array}\right\} \text{ Sumant: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \rightarrow x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solució: $x = \dfrac{11}{2},\ y = \dfrac{-23}{6}$

- **Si $k \neq 2$ i $k \neq 5/3$** → $ran(A') = 3 \neq ran(A)$, el sistema és *incompatible*.

20. Discuteix i resol, d'acord amb el paràmetre a, el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{array}{l} \nearrow a = 0 \\ \searrow a = 1 \end{array}$$

- **Si $a = 0$**, queda:

  $$\left.\begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \quad y = x. \text{ Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Solució: $x = \lambda,\ y = \lambda$

- **Si $a = 1$**, queda:

  $$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Solució: $x = \lambda,\ y = 0$

- **Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$** → $ran(A) = 2$

  El sistema només té la solució trivial: $x = 0,\ y = 0$

Pàgina 72

21. Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$$|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{existeix } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$$|B| = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{existeix } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

22. Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$$|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{existeix } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$$|B| = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{existeix } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Pàgina 78

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Determinants

23. **Si sabem que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, justifica les igualtats següents, i cita en cada cas les propietats que hi has aplicat:**

a) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = 7$ **b)** $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = -14$

a) Propietat 8: si a una columna d'una matriu se li suma l'altra columna multiplicada per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número.

b) Propietat 5: si multipliquem cada element d'una columna per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número.

c) Propietat 3: si permutem les dues columnes, el determinant canvia de signe.

d) Propietat 7: si una fila és suma de dos, el determinant es pot descompondre en suma de dos determinants.

24. **Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, quin és el valor de cada un d'aquests determinants?**

a) $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) –5, perquè el determinant coincideix amb el de la seva matriu transposada.

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \frac{1}{m} \cdot m\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

(1) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

(2) Si canviem d'ordre dues files o dues columnes, el determinant canvia de signe.

(3) Si multipliquem una fila o una columna per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número.

25. **Calcula el valor d'aquests determinants:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$

26. **Quin valor de *a* anul·la aquests determinants?**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$= (a-1)(3+a) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -3 \end{array} \right.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \left\langle \begin{array}{l} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{array} \right.$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow$

$\left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1 \pm\sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} a = 2 \\ a = -3 \end{array} \right. \end{array} \right.$

27. **Prova, sense desenvolupar-los, que el determinant a) és múltiple de 3 i que el b) és múltiple de 5:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

☛ ***a) Suma la 1a i 2a columnes a la 3a.***

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ múltiple de 3.

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 10 & 15 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ múltiple de 5.

Rang d'una matriu

28. Estudia el rang de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) El rang és 3 ja que el determinant $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$.

b) 4a fila = 2a fila – 1a fila

3a fila = 1a fila + 2a fila

Per tant: $ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ran \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ el rang és 2

29. Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \boldsymbol{a} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{-a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$

- **Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$** → Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{2}$** → $|A| \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 3$

$$|B| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El rang màxim pot ser 3.

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & 5 \end{vmatrix} = a \qquad |B_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & 5 \end{vmatrix} = a \qquad |B_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

- **Si $\boldsymbol{a \neq 0}$** $\rightarrow$ $ran\,(B) = 3$
- **Si $\boldsymbol{a = 0}$** $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = \ \ 1 \end{cases}$$

Observem que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow ran\,(C) \geq 2$

Per tant:

- **Si $\boldsymbol{a = 1}$** $\rightarrow$ $|C| = 0 \rightarrow ran\,(C) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a = -8}$** $\rightarrow$ $|C| = 0 \rightarrow ran\,(C) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ i $\boldsymbol{a \neq -8}$** $\rightarrow$ $|C| \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 3$

$$|D| = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1$$

$$-a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

- **Si a ≠ ± 1** $\rightarrow$ rang $D = 3$
- **Si a = 1**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rang } D = 2$$

- **Si a = –1**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rang } D = 2$$

30. **Estudia el rang d'aquestes matrius:**

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & 6 \end{pmatrix}$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \quad \to \quad a = \pm 1 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a & 2a \end{vmatrix} = -2a + a = -a = 0 \quad \to \quad a = 0 \end{array}\right\} ran\,(A) = 2$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 2a - 1 = 0 \quad \to \quad -(a-1)^2 = 0 \quad \to \quad a = 1 \\ \begin{vmatrix} a-2 & a-1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6a - 12 - a + 1 = 5a - 11 = 0 \quad \to \quad a = 11/5 \end{array}\right\} ran\,(A) = 2$$

En les dues matrius, cap valor de a anul·la tots els determinants 2 × 2.

Regla de Cramer

31. **Resol aplicant-hi la regla de Cramer:**

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$

a)
$$\left.\begin{array}{r} 3x - y \phantom{{}+z} = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right.\right) \to \ |A| = 1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solució: $x = -1, \ y = -5, \ z = 7$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}\right) \rightarrow |A| = -11 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solució: $x = -1, \ y = 2, \ z = -2$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Per tant: $x = \frac{-1}{3}, \ y = \frac{2}{3}, \ z = \frac{-1}{3}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y \qquad - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right)$. Tenim que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \quad \textit{Solucions: } \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$$

32. **Estudia la compatibilitat d'aquests sistemes:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{array}\right)$, $\underbrace{\hphantom{xx}}_{A}$. Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$,

tenim que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 2

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{Sumant: } 5x = 5 \quad \rightarrow \quad x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\} \textit{Solució: } (1, -5)$$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$, $\underbrace{\hphantom{xxx}}_{A}$

Tenim que $|A| = 0$ i que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ *ran* $(A) = 2$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ *ran* $(A') = 3 \neq$ *ran* $(A) = 2$

Per tant, el sistema és *incompatible.*

33. **Estudia i resol aquests sistemes, quan sigui possible aplicant la regla de Cramer:**

a) $\left\{\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x - y \hphantom{+z} = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$, $\underbrace{\hphantom{xxx}}_{A}$

Com que $|A| = -6 \neq 0$, tenim que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat.* El resolem mitjançant la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solució: $x = \frac{-1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = \frac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\hphantom{1 \quad -2 \quad 1}}_{A}$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ i $|A| = 0$, tenim que *ran* $(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Per tant, *ran* $(A') = 3 \neq$ *ran* $(A) = 2$.

Així doncs, el sistema és *incompatible.*

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t = 0 \\ 2x + 2z + t = 0 \end{array}\right\}$$ És un sistema homogeni.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A'| = 0$$
$$\underbrace{\hphantom{1 \quad 2 \quad 1}}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \rightarrow$$ *ran* $(A) = 3$. És *compatible indeterminat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació i passar la t al 2n membre. Així:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2t & 4 & 3 \\ -4t & 7 & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{6t}{16} = \frac{3t}{8}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2t & 3 \\ 1 & -4t & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{4t}{16} = \frac{t}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2t \\ 1 & 7 & -4t \end{vmatrix}}{16} = \frac{-14t}{16} = \frac{-7t}{8}. \quad \textit{Solucions:} \left(\frac{3}{8}\lambda, \frac{1}{4}\lambda, \frac{-7}{8}\lambda, \lambda\right)$$

d) $\left.\begin{array}{rl} x + y & = 5 \\ x + z & = 6 \\ y + z & = 7 \\ 2x + y + z & = 11 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc:c|c} 1 & 1 & 0 & & 5 \\ 1 & 0 & 1 & & 6 \\ 0 & 1 & 1 & & 7 \\ \hdashline 2 & 1 & 1 & & 11 \end{array}\right)$, $\underbrace{}_{A}$

Tenim que $|A'| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Per tant, *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació, que és 1a + 2a:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4. \quad \textit{Solució: } x = 2, \; y = 3, \; z = 4$$

Pàgina 79

Discussió de sistemes per mitjà de determinants

34. Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:

a) $\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right.$

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & -7 \\ 3 & 4 & m & -1 \\ 7 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$|A| = 49m - 245$

- **Si $|A| = 0$** $\rightarrow$ $49m - 245 = 0$ $\rightarrow$ $m = 5$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$

  Si $m = 5$ $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2$

  Mirem *ran* (A'). Sabent que $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$ $\rightarrow$ *ran* $(A') = 2$

  Si $m = 5$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* $(A') = 2 < 3$ = *nre. incògnites* $\rightarrow$ *sistema compatible indeterminat.*

  (La solució és $x = 1 - \dfrac{5}{7}\lambda \quad y = -1 - \dfrac{5}{7}\lambda \quad z = \lambda$).

- **Si $|A| \neq 0$** $\rightarrow$ $m \neq 5$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. incògnites* $= 3$ $\rightarrow$ *sistema compatible determinat.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{49m - 245}{49m - 245} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 3 & -1 & m \\ 7 & 7 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{245 - 49m}{49m - 245} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

Si $m \neq 5$ $\rightarrow$ $x = 1;\ y = -1;\ z = 0$

Per tant, si $m \neq 5$ $\rightarrow$ *sistema compatible determinat.*
si $m = 5$ $\rightarrow$ *sistema compatible indeterminat.*

b) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$|A| = -5$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. incògnites* $= 3$ $\rightarrow$ *sistema compatible determinat* per qualsevol valor de m.

La solució serà $x = \dfrac{-1}{5};\ y = \dfrac{m + 11}{-5};\ z = \dfrac{2m + 16}{-5};$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{pmatrix}$

$|A| = 0$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2$

Calculem el rang d'A'. Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & m \end{vmatrix} = -m + 10$

Si $m = 10$ $\rightarrow$ *ran* $(A') = 2$

Si $m \neq 10$ $\rightarrow$ *ran* $(A') = 3$

Conclusions:

Si $m = 10 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 < 3 =$ *nre. incògnites* $\rightarrow$ *sistema compatible indeterminat.*

Solució: $x = \dfrac{\lambda + 5}{5}$; $y = \dfrac{3\lambda - 5}{5}$; $z = \lambda$

Si $m \neq 10 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2 < 3 =$ *ran* $(A') \rightarrow$ *sistema incompatible.*

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & m \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & m & 6 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = m^2 - 2m$

Busquem quan $|A| = 0 \rightarrow m^2 - 2m = 0 \rightarrow m = 0$ o $m = 2$.

- **Si $m = 0$**

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y \quad = 6 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \textit{ran}\,(A') = 2$$

Si *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 < 3 =$ *nre. incògnites* $\rightarrow$ *sistema compatible indeterminat.*

Solució: $x = 3 - \lambda$; $y = \lambda$; $z = 3$.

- **Si $m = 2$**

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 2x \quad = 0 \end{array}\right.$$

S'observa que és impossible que es compleixi la 1a equació i la 2a equació $\rightarrow$ *sistema incompatible*

ran $(A) = 2 < 3 =$ *ran* (A')

- **Si $m \neq 0$ i $m \neq 2$**

ran $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nre. incògnites* $= 3 \rightarrow$ *sistema compatible determinat.*

Solució: $x = 0$; $y = \dfrac{6m^2 - 6m}{m^2 - 2m} = \dfrac{6m - 6}{m - 2}$; $z = \dfrac{-6}{m - 2}$

35. Discuteix els sistemes homogenis següents en funció del paràmetre a:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right.$

Sistema homogeni vol dir sistema compatible, ja que la solució $x = y = z = 0$.

Sempre és possible. En cada cas cal veure si és compatible determinat o indeterminat.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 5a + 30$

- **Si $|A| = 0$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = $2 < 3$ = *nre. incògnites* $\rightarrow$ *sistema compatible indeterminat.*

  $5a + 30 = 0 \rightarrow a = -6$

  Solució: $x = \dfrac{-19}{2}\lambda;\ y = \dfrac{5}{2}\lambda;\ z = \lambda.$

- **Si $a \neq -6$** $\rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. incògnites* $= 3 \rightarrow$ *sistema compatible determinat.*

  Única solució: $x = y = z = 0.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2 + 4a - 3$

Calculem quan $|A| = 0 \rightarrow -a^2 + 4a - 3 = 0 \rightarrow a = 1$ i $a = 3$.

- **Si $a = 1$ o $a = 3$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = $2 < 3$ = *nre. incògnites* $\rightarrow$ *sistema compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq 1$ i $a \neq 3$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. incògnites* $= 3 \rightarrow$ *sistema compatible determinat.*

Les solucions per als diferents valors de a són:

$$\text{Si } a = 1: \left\{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right. \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} z = \lambda \\ x = \lambda \\ y = -3\lambda \end{array} \qquad x = \lambda;\ y = -3\lambda;\ z = \lambda$$

$$\text{Si } a = 3: \left\{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 4x + y - 3z = 0 \end{array}\right. \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} z = \lambda \\ x = \lambda \\ y = -\lambda \end{array} \qquad x = \lambda;\ y = -\lambda;\ z = \lambda$$

36. **Existeix algun valor de a per al qual aquests sistemes tinguin infinites solucions?**

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 2y - 3z = 2} \\ \mathbf{2x + ay - 5z = -4} \\ \mathbf{x + y + 2z = 2} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y + z = a - 1} \\ \mathbf{2x + y + az = a} \\ \mathbf{x + ay + z = 1} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$

$|A| = 9a + 27 = 0 \rightarrow a = -3$

- **Si $\boldsymbol{a = -3}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ i $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, aleshores:

$ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3 \;\rightarrow\;$ El sistema és *incompatible.*

- **Si $\boldsymbol{a \neq -3}$** $\;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \;\rightarrow\;$ *Compatible determinat.*

Per tant, *no* existeix cap valor de a per al qual el sistema tingui infinites solucions.

b) $\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + \;\; z = a - 1 \\ 2x + \;\; y + az = a \\ x + ay + \;\; z = 1 \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$, amb A la matriu dels coeficients $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \qquad \begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}$$

- **Si $\boldsymbol{a = 1}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Contradictòries. El sistema és *incompatible.*

- **Si $\boldsymbol{a = 2}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A. Les columnes 1a, 3a i 4a són iguals, i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

per tant, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$. El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ i $\boldsymbol{a \neq 2}$** $\;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \;\rightarrow\;$ *Compatible determinat.*

Per tant, el sistema té infinites solucions per a $a = 2$.

Matriu inversa

37. Calcula la matriu inversa de les matrius següents i comprova'n el resultat:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 10 \neq 0 \rightarrow$ existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

c) $|C| = 3 \neq 0 \rightarrow$ existeix C^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(C) \longrightarrow (Adj(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

d) $|D| = -10 \neq 0 \rightarrow$ existeix D^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(D) \longrightarrow (Adj(D))^t \longrightarrow \frac{1}{|D|}(Adj(D))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

Per comprovar-ho, $A \cdot A^{-1} = I,\ B \cdot B^{-1} = I,\ C \cdot C^{-1} = I,\ D \cdot D^{-1} = I.$

38. Resol les equacions matricials següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $X \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)$

a) Anomenem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de manera que tenim:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem $A^{-1} \cdot B$:

$$\frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solució és: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Anomenem $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = (1 \quad 2)$, de manera que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{existeix } A^{-1}$$

Calculem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem $B \cdot A^{-1}$:

$$(1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (6 \quad -7)$$

La solució és: $X = (6 \quad -7)$

39. Calcula la inversa de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

i resol les equacions:

a) $\boldsymbol{AX = B}$ **b)** $\boldsymbol{XB = A}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existeix } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Existeix } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

a) $AX = B \quad \to \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \to \quad X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot B \quad \to \quad X \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot B^{-1} \quad \to \quad X = A \cdot B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

PER RESOLDRE

40. Estudia i resol aquests sistemes homogenis:

a) $$\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right.$$

b) $$\left\{\begin{aligned} 9x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, aleshores, $ran\,(A) = 2$.

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x - 2y &= -z \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Solucions: $\left(\dfrac{\lambda}{3}, \dfrac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $$\left.\begin{aligned} 9x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, aleshores, $ran\,(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

Sistema *compatible determinat*.

El sistema només té la solució trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

41. Expressa en forma matricial i resol utilitzant la matriu inversa:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y = 2} \\ \boldsymbol{2x - y = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + 3y - z = -1} \\ \boldsymbol{x - y - z = -1} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 5} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solució del sistema és: $x = -2, \ y = -4$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \rightarrow$$

$$\rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = -20 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -10 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-20} \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

La solució del sistema és: $x = \dfrac{2}{5}, \ y = 0, \ z = \dfrac{7}{5}$

42. Estudia i resol els sistemes següents:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \end{array}\right)$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenim que *ran* $(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la primera equació:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x = 3 - z \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3 - z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array}\right\} \text{ Fem } z = 3\lambda$$

Solucions: $x = 1 - \lambda, \quad y = -1 - 7\lambda, \quad z = 3\lambda$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$,

tenim que: *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nre. d'incògnites* $= 3$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la quarta equació. Apliquem la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solució: $x = 3, \; y = -2, \; z = 1$

43. **Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre m i resol-los quan sigui possible:**

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{matrix}}_{A} \end{array} \left| \begin{matrix} 4 \\ m \\ 2 \end{matrix} \right.\right)$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ Contradictòries → Sistema *incompatible.*

- **Si $m = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$ Contradictòries → Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$** → *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-m^2 + 3m + 4}{m^2 - 1} = \frac{-(m-4)}{m-1} = \frac{4 - m}{m - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 4 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^3 - 7m + 6}{m^2 - 1} = \frac{(m+3)(m-1)(m-2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m^2 + m - 6}{m + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 + 3m - 10}{m^2 - 1}$$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$, amb $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

- **Si $\boldsymbol{m = 1}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Contradictòries} \;\rightarrow\; \text{El sistema és } \textit{incompatible.}$$

- **Si $\boldsymbol{m = 2}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right). \text{ Les columnes 1a, 3a i 4a són iguals.}$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* (A') = *ran* $(A) = 2 <$ *nre. d'incògnites*

El sistema és *compatible indeterminat.*

Solucions: $x = 1 - \lambda, \;\; y = 0, \;\; z = \lambda.$

- **Si $\boldsymbol{m \neq 1}$ i $\boldsymbol{m \neq 2}$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-m^3 + 2m^2 + m - 2}{-m^2 + 3m - 2} = m + 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^2 - 4m + 4}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{m - 2}{1 - m}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^2 - 2m}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{m}{1 - m}$$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$, amb $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = -2m + 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$$

- **Si $\boldsymbol{m = 1}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right). \text{ Com que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

aleshores: *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. Sistema *incompatible.*

- **Si $\boldsymbol{m \neq 1}$,** queda: *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

d) $\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, $\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \qquad \begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$$

- **Si $\boldsymbol{m = 3}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{ Contradictòries } \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $\boldsymbol{m = 1}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right). \text{ La 1a i la 3a files són iguals.}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$

A més, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Per tant, *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.*

Solucions: $x = \frac{7}{2} - \lambda, \;\; y = \frac{1}{2}, \;\; z = \lambda.$

- **Si $\boldsymbol{m \neq 3}$ i $\boldsymbol{m \neq 1}$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1-m}{m^2-4m+3} = \frac{-1}{m-3}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1-m}{m^2-4m+3} = \frac{-1}{m-3}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{5m^2-16m+11}{-m^2+3m-2} = \frac{5m-11}{m-3}$$

44. Discuteix i resol els sistemes homogenis següents d'acord amb el paràmetre *a*:

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que *ran* (A) = *ran* (A').

$$|A| = -5a - 25 = 0 \;\rightarrow\; a = -5$$

- **Si $a = -5$** → Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ → $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$.

  El sistema és *compatible indeterminat.*

  Solucions: $x = \dfrac{\lambda}{5},\quad y = \dfrac{7}{5}\lambda,\quad z = \lambda.$

- **Si $a \neq -5$** → Només té la solució trivial (0, 0, 0).

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + \ \ z = 0 \\ ax \qquad + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\}\quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = \ \ 2 \end{cases}$$

- **Si $a = -3$ o $a = 2$** → Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ → $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$.

  El sistema és *compatible indeterminat.*

  Solucions: si $a = -3$: $x = \dfrac{2}{3}\lambda,\quad y = \dfrac{-5}{3}\lambda,\quad z = \lambda$

  si $a = 2$: $x = -\lambda,\quad y = 0,\quad z = \lambda.$

- **Si $a \neq -3$ i $a \neq 2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Només existeix la solució trivial (0, 0, 0).

45. **Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) $|B_1| = 3k - 9$ → s'anul·la per $k = 3$

$|B_2| = 3k + 9$ → s'anul·la per $k = -3$

$|B_3| = 4k + 6$ → s'anul·la per $k = -3/2$

$|B_4| = 6k - 18$ → s'anul·la per $k = 3$

Cap valor de k anul·la tots els determinants 3 × 3, per tant, rang $B = 3$ sigui quin sigui el valor de k.

b) $|C_1| = k^2 - 2k - 3$ → s'anul·la per $k = -1$ i $k = 3$

$|C_2| = k^3 - 3k - 2$ → s'anul·la per $k = -1$ i $k = 2$

$|C_3| = -k^2 + 1$ → s'anul·la per $k = -1$ i $k = 1$

$|C_4| = -k^2 + 1$ → s'anul·la per $k = -1$ i $k = 1$

L'únic valor que anul·la tots els determinants 3×3 és $k = -1$

Si $k \neq 1 \rightarrow$ rang $C = 3$

Si $k = -1$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rang } C = 2$$

Pàgina 80

46. **a) Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i calcula el rang de les matrius AA^t i A^tA.**

b) Resol el sistema d'equacions lineals homogeni la matriu de coeficients del qual és A^tA.

c) Resol el sistema d'equacions lineals homogeni la matriu de coeficients del qual és AA^t.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rang} = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rang} = 2$$

b) Com que el rang és 2, seleccionem el menor.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podem suprimir la tercera equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= -z \\ 2x + y &= -z \end{aligned}\right\} \rightarrow x = z, \; y = -3z$$

La solució és: $x = \lambda, \; y = -3\lambda, \; z = \lambda$

c) Com que el rang = 2 = *nre. d'incògnites*

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \; y = 0$

47. **Donades $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Troba A^{-1} i B^{-1}.

b) Troba la matriu inversa de $A \cdot B$.

c) Comprova que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $|A \cdot B| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existeix $(A \cdot B)^{-1}$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(AB) \xrightarrow{\qquad} (Adj(AB))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|AB|}(Adj(AB))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

c) $B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (A \cdot B)^{-1}$

48. Donada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriu B que verifica $B - I = A^tA^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^t \cdot A^{-1} + I$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

49. Discuteix el sistema següent i resol-lo, si és possible, en el cas $a = 4$:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y = a} \\ \boldsymbol{x + a^2 z = 2a + 1} \\ \boldsymbol{x - y + a(a-1)z = 2a} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

Estudiem el rang de la matriu de coeficients:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix}$$

$$|A| = a(a-1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0, \; a = 1$$

- Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$, $ran(A) = 3 = ran(A')$.

  El sistema és *compatible determinat*. Són solució:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a \cdot (a^2 - a - 1)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix} = -a$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = a$$

  La solució és: $x = \dfrac{a^2 - a - 1}{a - 1}, \; y = \dfrac{-1}{a-1}, \; z = \dfrac{1}{a-1}$

- Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A) = 2$

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

  Per resoldre'l, prenem les dues primeres equacions:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right\}$$

  Solució: $x = 1, \; y = 1, \; z = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Si } a = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 2 \\[2ex] A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 3 \end{array}\right\}$$

El sistema és *incompatible.*

- Si $a = 4$, es tracta d'un sistema *compatible determinat*, resolt en el primer cas, amb solució:

$$x \frac{11}{3},\quad y = \frac{-1}{3},\quad z = \frac{1}{3}$$

50. **Sigui:** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

a) Troba els valors de x per als quals A té inversa.

b) Calcula, si és possible, A^{-1} per a $x = 2$.

a) Existeix A^{-1} només quan $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \ \text{ si } \ x \neq 0$$

Per tant, existeix A^{-1} per a tot $x \neq 0$.

b) Per a $x = 2$, tenim que $|A| = 2 \neq 0$, per tant existeix A^{-1} en aquest cas. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

51. **Donades les matrius:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}}$$

troba la matriu X que verifica $AB + CX = D$.

$$AB + CX = D \rightarrow CX = D - AB \rightarrow X = C^{-1} \cdot (D - AB)$$

- Calculem C^{-1} ($|C| = -2 \neq 0 \rightarrow$ existeix C^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(C) \longrightarrow (Adj\,(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculem $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}$$

- Així doncs:

$$X = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -8 & 17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

52. Troba X si $3AX = B$, de manera que: $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$3AX = B \quad \rightarrow \quad X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculem A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

53. Resol l'equació $A\,X\,B = C$ si:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

☛ ***Multiplica C per A^{-1} per l'esquerra i per B^{-1} per la dreta.***

$AXB = C \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculem A^{-1} i B^{-1} ($|A| = 1$ i $|B| = 1 \quad \rightarrow \quad$ existeixen A^{-1} i B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = B^{-1}$$

Per tant:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

54. Donada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, troba una matriu X de manera que $A\,X\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☛ ***Multiplica dues vegades per A^{-1}, una vegada per l'esquerra i una altra per la dreta.***

Calculem A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

55. Determina si les equacions següents tenen solució i troba-la si és possible:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Com que $|A| = 0$, no existeix A^{-1}. L'equació *no* té solució.

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Com que $|A| = 4 \neq 0$, existeix A^{-1} i l'equació té solució.

$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Trobem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Així doncs:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&3&5\\4&2&2\\-4&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&3/4&5/4\\1&1/2&1/2\\-1&1/4&3/4\end{pmatrix}$$

56. Resol l'equació: $\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{5}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$

☛ ***Com que*** $\boldsymbol{AX + B = C \rightarrow X = A^{-1}\,(C - B)}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}}_{B}$$

Calculem A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}3&-1&2\\-5&7&2\\-5&-9&2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3&1&2\\5&7&-2\\-5&9&2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix} = A^{-1}$$

Així doncs:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}16\\-16\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Per tant, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; és a dir: $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$

57. Resol l'equació:

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{3}&\mathbf{4}&\mathbf{6}\\\mathbf{4}&\mathbf{2}&\mathbf{9}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

Sigui $A = \begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$. Aleshores:

$$X \cdot A - B = C \rightarrow X \cdot A = C + B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C + B) \cdot A^{-1} \rightarrow$$
$$\rightarrow X = (C + B) \cdot A^{-1}$$

$$C + B = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existeix } A^{-1}$$

Calculem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 3 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 & -3 & -10 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

58. **Hi ha algun valor de *a* per al qual aquest sistema tingui infinites solucions?**

$$\left\{\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= -4 \\ x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= -4 \\ x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$$

$|A| = 9a + 27 = 0 \quad \to \quad a = -3$

- **Si $a = -3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ i $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, aleshores:

$ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3 \quad \to$ El sistema és *incompatible.*

- **Si $a = -3$** $\quad \to \quad ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \quad \to$ *Compatible determinat.*

Per tant, *no* existeix cap valor de *a* per al qual el sistema tingui infinites solucions.

Pàgina 81

QÜESTIONS TEÒRIQUES

59. **El rang de la matriu de coeficients d'un sistema homogeni de quatre equacions i tres incògnites és igual a 3. Què pots dir, de la seva solució?**

Com que el sistema és homogeni amb 3 incògnites, tenim que *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema seria compatible determinat. Per tant, tindria com a solució única la solució trivial (0, 0, 0).

60. En un sistema d'igual nombre d'equacions que d'incògnites, el determinant de la matriu de coeficients és igual a 0.

a) Pot ser compatible?

b) Pot tenir solució única?

c) S'hi pot aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podria ser compatible indeterminat si *ran* (A) = *ran* (A') < *nre. d'incògnites*.

b) No, ja que com que *ran* (A) < *nre. d'incògnites*, el sistema no pot ser compatible determinat.

c) Sí, si és compatible, passant al 2n membre les incògnites que calgui.

61. Quina condició ha de complir una matriu quadrada per tenir inversa?

La condició necessària i suficient perquè una matriu, A, quadrada tingui inversa és que el seu determinant sigui diferent de zero, és a dir, $|A| \neq 0$.

62. Hi ha algun valor de a per al qual la matriu $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tingui inversa?

Si ha de tenir inversa $|A| = 0$

$|A| = a^2 - (a^2 - 2) = 2$. Sempre és $\neq 0$ → Sigui quin sigui el valor de a, la matriu $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ té inversa.

63. Siguin A i B inverses una de l'altra. Si $|A| = 4$, quant val $|B|$?

Si A i B són inverses l'una de l'altra, aleshores $A \cdot B = I$. Així:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

64. El rang de la matriu de coeficients d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és igual a 1.

Quin rang, com a màxim, pot tenir la matriu ampliada?

Com a màxim, la matriu ampliada podrà tenir rang 2.

65. Prova, sense desenvolupar, que aquests determinants són zero:

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

☛ ***a) Hi ha dues línies proporcionals. b) Suma la 3a fila a la 2a.***

a) La 1a i la 3a columnes són proporcionals (la 3a és –5 per la 1a).

b) Sumem la 3a fila a la 2a:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (ja que té dues files iguals).}$$

66. **Prova, sense desenvolupar el determinant, que:**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x+1} & \boldsymbol{x+2} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x+3} & \boldsymbol{x+4} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x+5} & \boldsymbol{x+6} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

☛ ***Resta la primera fila a la segona i a la tercera.***

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 2a-1a \\ 3a-1a \end{array}} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ja que les dues últimes files són proporcionals.

67. **Calcula el valor dels determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{10} & \mathbf{4} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-8} & \mathbf{9} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & +2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -43 - 21 - 2 \cdot (4) = -72$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 = +18 - 3 \cdot (12) = -18.$$

c) $$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&1\\1&2&4&5\\3&4&1&2\end{vmatrix} = (-1)^2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&5\\4&1&2\end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 2\begin{vmatrix}2&3&4\\2&4&5\\4&1&2\end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^4\cdot 1\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&1\\4&1&2\end{vmatrix} + (-1)^5\cdot 3\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&1\\2&4&5\end{vmatrix} = 21 - 2\cdot(-2) + (-16) - 3\,(3) = 0$$

d) $$\begin{vmatrix}-1&3&2&-1\\2&-2&1&3\\0&-5&10&4\\7&-8&9&-2\end{vmatrix} = (-1)^2\cdot(-1)\begin{vmatrix}-2&1&3\\-5&10&4\\-8&9&-2\end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 2\begin{vmatrix}-3&2&-1\\-5&10&4\\-8&9&2\end{vmatrix} +$$

$$+ 0 + (-1)^5\cdot 7\cdot\begin{vmatrix}-3&2&-1\\-2&1&3\\-5&10&4\end{vmatrix} = -(175) - 2\,(-287) - 7\,(-77) = 938$$

68. Per a quins valors de *a* s'anul·la aquest determinant?

a) $$\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&2&-3&8\\a&-1&-1&1\\1&-1&1&-2\end{vmatrix}$$ **b)** $$\begin{vmatrix}1&-2&0&1\\0&1&1&a\\1&0&-3&-1\\0&1&-1&2\end{vmatrix}$$

a) $$\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&2&-3&8\\a&-1&-1&1\\1&-1&1&-2\end{vmatrix} = (-1)^2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&-3&8\\-1&-1&1\\-1&1&-2\end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 1\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&-1&1\\-1&1&-2\end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^4\cdot a\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-3&8\\-1&1&-2\end{vmatrix} + (-1)^5\cdot 1\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-3&8\\-1&-1&1\end{vmatrix} = -5-(-6)+a\cdot(-8)-(-15) = -8a+16$$

Igualem a zero: $-8a + 16 = 0 \rightarrow a = 2$.

b) $$\begin{vmatrix}1&-2&0&1\\0&1&1&a\\1&0&-3&-1\\0&1&-1&2\end{vmatrix} = 0 + (-1)^4\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-3&-1\\0&-1&2\end{vmatrix} + (-1)^5\cdot 1\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\0&1&2\end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^6\cdot a\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&0&-3\\0&1&-1\end{vmatrix} = -8-6+a\cdot 1 = a-14$$

Igualem a zero: $a - 14 = 0 \rightarrow a = 14$.

69. **Obtén d'acord amb $\boldsymbol{a, b, c}$ el valor de:** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

☛ ***Resta la tercera columna a les dues primeres.***

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{1a} - \text{3a} \\ \text{2a} - \text{3a} \\ \text{3a} \end{array} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -c & 0 \\ b & -c & 0 \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & -c \\ b & -c \end{vmatrix} = abc$$

PER APROFUNDIR

70. **a) Per a quin valor de $\boldsymbol{a}$ aquest sistema és compatible determinat?**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ y + z & = & a \\ x - 3z & = & -1 \\ y - z & = & 2 \end{array} \right.$$

b) Pot ser compatible indeterminat?

a) $\left. \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ y + z & = & a \\ x - 3z & = & -1 \\ y - z & = & 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ x - 3z & = & -1 \\ y - z & = & 2 \\ y + z & = & 2 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right)$, with the first three columns marked $\underbrace{}_{A}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad \textit{ran}\,(A) = 3 = \textit{nre. d'incògnites}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \overset{\text{FILES}}{\begin{array}{l} \text{1a} \\ \text{2a} - \text{1a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} \end{array}} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$$

$\to \quad a = 14$

Per tant, $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \textbf{Si } \boldsymbol{a = 14} \ \to \ \textit{ran}\,(A) = \textit{ran}\,(A') = 3 \ \to \ \textit{Compatible determinat} \\ \bullet\ \textbf{Si } \boldsymbol{a \neq 14} \ \to \ \textit{ran}\,(A) = 3 \neq \textit{ran}\,(A') = 4 \ \to \ \textit{Incompatible} \end{array} \right.$

b) *No*, pel que hem vist en l'apartat anterior.

71. **Calcula el valor d'aquest determinant i dóna el resultat factoritzat:**

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{1a} \\ \text{2a} - \text{1a} \\ \text{3a} - \text{1a} \\ \text{4a} - \text{1a} \end{matrix}$$

$$(3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3+3x)\begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3+3x)\,(3-x)^3 = 3(1+x)\,(x-3)^3$$

(1) Sumem a la 1a columna les altres.

(2) Traiem $(3+3x)$ factor comú, de la 1a columna.

(3) Desenvolupem per la 1a columna.

72. Discuteix els sistemes següents segons els valors dels paràmetres que contenen:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - 3y + z = a} \\ \boldsymbol{x \quad\quad - z = b} \\ \boldsymbol{x \quad\quad + z = c} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y + z = 2} \\ \boldsymbol{2x + 3y - 2z = -8} \\ \boldsymbol{4x + y + az = b} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \quad\quad - z = b \\ x \quad\quad + z = c \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right.\right)$

$|A| = 6 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* → El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de a, b i c.

b) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 2 \\ -8 \\ b \end{matrix}\right.\right)$

$|A| = 5a = 0$ → $a = 0$

- **Si $\boldsymbol{a = 0}$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 2 \\ -8 \\ b \end{matrix}\right.\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \;\rightarrow\; b = -4$$

- **Si $\boldsymbol{a = 0}$ i $\boldsymbol{b = -4}$** → *ran* (A) = *ran* $(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible indeterminat*.

- **Si $\boldsymbol{a = 0}$ i $\boldsymbol{b \neq -4}$** → *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema és *incompatible*.

- **Si $\boldsymbol{a \neq 0}$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat*, qualsevol que sigui el valor de b.