UNITAT 5 PROGRAMACIÓ LINEAL

Pàgina 106

Paneres de Nadal

- **Per Nadal, es volen preparar dos tipus de paneres, P_1 i P_2. Cada panera del tipus P_1 ha de portar 4 barres de torró i 2 ampolles de cava, i cada panera del tipus P_2 ha de portar 3 barres de torró i 3 ampolles de cava. Amb cada panera del tipus P_1 s'obté un benefici de 4 €, i amb cada panera de tipus P_2, un benefici de 5 €.**

  Es disposa de 480 barres de torró i 360 ampolles de cava.

  Ens preguntem quantes paneres de cada tipus s'haurien de preparar per obtenir el màxim benefici.

  a) Si es preparen només paneres de tipus P_1, quantes se'n poden fer? Quin benefici s'obtindria en aquest cas?

  b) Si només es preparen paneres del tipus P_2, quantes se'n poden fer? Quin seria el benefici?

  c) Podríem preparar 60 paneres de cada tipus, però sobrarien prou torrons i ampolles de cava per preparar-ne encara més. Comprova-ho.

  Es podrien preparar 60 paneres del tipus P_1 i 80 del tipus P_2? En aquest cas, sobrarien torrons i ampolles de cava per preparar més paneres? Quin en seria el benefici?

  d) Quantes paneres creus que cal preparar per obtenir-ne el màxim benefici?

  a) Se'n poden fer 120 paneres, obtenint 480 € de benefici.

  b) També 120 paneres, però el benefici seria de 600 €.

  c) Si se'n preparen 60 de cada:
  torrons: $60x^4 + 60x^3 = 420$
  cava: $60x^2 + 60x^3 = 300$
  Si se'n preparen 60 de P_1 i 80 de P_2:
  torrons: $60x^4 + 80x^3 = 480$
  cava: $60x^2 + 80x^3 = 360$

No en sobra cap.

Benefici: 4 € × 60 + 5 € × 80 = 640 €

d) 60 de P_1 i 80 de P_2

Pàgina 107

Sistema d'inequacions

- **a) Comprova que el recinte següent correspon a les solucions d'aquest sistema d'inequacions lineals:**

$$\begin{cases} 4x + 3y \le 480 \\ 2x + 3y \le 360 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Suposem que (x, y) només poden ser punts d'aquest recinte. Considerem la funció $f(x, y) = 4x + 5y$. Esbrina el valor que pren aquesta funció en substituir alguns punts d'aquest recinte:

$f(0, 0) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

$f(60, 60) = 4 \cdot 60 + 5 \cdot 60 = 540$

$f(50, 80) =$

$f(120, 0) =$

$f(0, 120) =$

$f(60, 80) =$

En quin punt del recinte creus que la funció $f(x, y)$ assoleix el seu valor màxim?

b) $f(50,80) = 600$

$f(120,0) = 480$

$f(0,120) = 600$

$f(60,80) = 640$

Valor màxim de $f(x, y)$ per 60 i 80.

Pàgina 116

EXERCICIS PROPOSATS

1. **Representa la regió definida pel sistema d'inequacions següent:**

$x \geq 0$, $y \geq 3$, $x + y \leq 10$, $2y \geq 3x$

Esbrina en quins punts es fa màxima i mínima la funció $F(x, y) = 4x + 3y$.

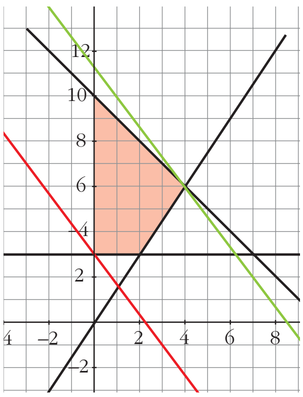
Representem la regió.

$x = 0 \;\rightarrow\;$ eix vertical

$y = 3 \;\rightarrow\;$ recta horitzontal a alçada 3

$x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x \;\rightarrow\; (0,10)$ i $(10,0)$

$2y = 3x \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x \;\rightarrow\; (0,0)$ i $(2,3)$



Representem la recta que representa la funció objectiu.

En verd el valor màxim de $F(x, y)$. Passa pel (4,6)

En vermell el valor mínim de $F(x, y)$. Passa pel (0,0)

2. **Representa el recinte definit per les inequacions $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 10$, $x \leq y$, $y - 2x \leq 6$, $3x + 4y \geq 4$.**

En quin punt la funció $F(x, y) = 10x + 15y$ abasta el valor màxim?

Representem la regió.

$x = 0 \;\rightarrow\;$ eix vertical

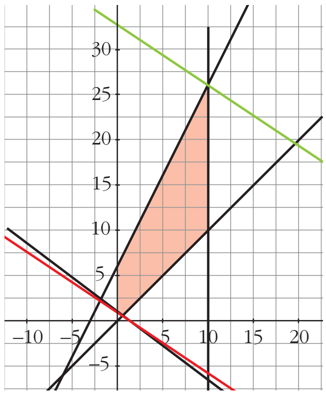
$y = 0 \;\rightarrow\;$ eix horitzontal

$x = 10 \;\rightarrow\;$ recta vertical en $x = 10$

$x = y \;\rightarrow\;$ bisectriu del primer quadrant

$y - 2x = 6 \;\rightarrow\; y = 2x + 6 \;\rightarrow\; (0,6)$ i $(-3,0)$

$3x + 4y = 4 \;\rightarrow\; y = 1 - \dfrac{3}{4}x \;\rightarrow\; (0,1)$ i $(4, -2)$



Els punts de tall que defineixen els vèrtexs de la regió són:

$P_1 = (0,\ 1)$ $P_2 = (0,\ 6)$ $P_3 = (10,\ 26)$ $P_4 = (10,\ 10)$ i $P_5 = \left(\frac{4}{7},\ \frac{4}{7}\right)$

Representem la recta funció objectiu

En verd el valor màxim de $F(x,\ y)$. Passa per (10, 26)

En vermell el valor mínim de $F(x,\ y)$. Passa per $\left(\frac{4}{7},\ \frac{4}{7}\right)$.

3. **En una cafeteria s'elaboren pasissos de nata i de poma. Cada pastís de nata requereix 1/2 kg de sucre i 8 ous, i per a cada pastís de poma es necessiten 1 kg de sucre i 6 ous. Al rebost només hi ha 10 kg de sucre i 120 ous.**

Quants pastissos de cada tipus s'han de fer si pretenem que els ingressos per la seva venda siguin màxims? Considera tres casos:

a) Els preus són: nata, 12 €; poma, 15 €.

b) Els preus són: nata, 16 €; poma, 12 €.

c) Els preus són: nata, 15 €; poma, 10 €.

	QUANTITAT (UNITATS)	QUANTITAT SUCRE	QUANTITAT OUS
PASTÍS DE NATA	x	$0{,}5x$	$8x$
PASTÍS DE POMA	y	$1y$	$6y$
TOTAL		$0{,}5x + y$	$8x + 6y$

Restriccions:

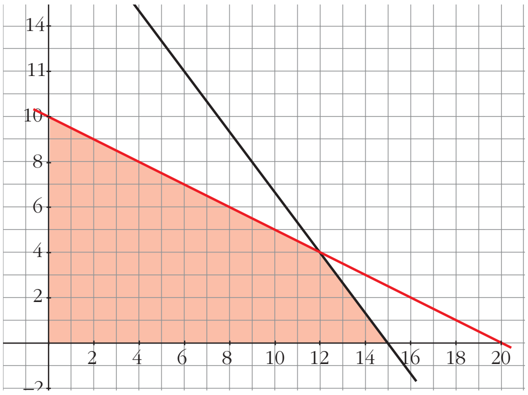
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}5x + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow & \text{eix vertical} \\ y = 0 & \rightarrow & \text{eix horitzontal} \\ 0{,}5x + y = 10 & \rightarrow & (0{,}10) \text{ i } (20{,}0) \\ 8x + 6y = 120 & \rightarrow & (0{,}20) \text{ i } (15{,}0) \end{cases}$$

Els vèrtexs de la regió solució són:

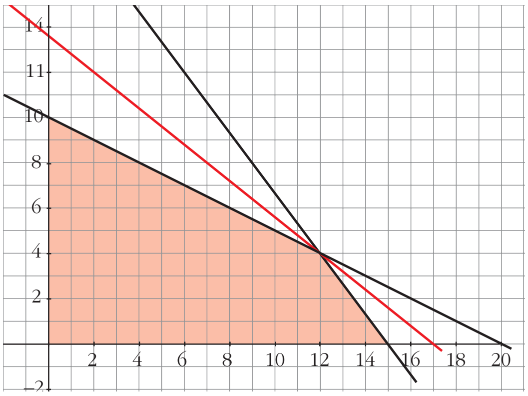
$P_1 = (0,\ 0)$ $P_2 = (0,\ 10)$ $P_3 = (12,\ 4)$ $P_4 = (15,\ 0)$

Aquesta regió és idèntica pels 3 apartats *a*, *b* i *c*.

El que canvia en cada apartat és la funció solució

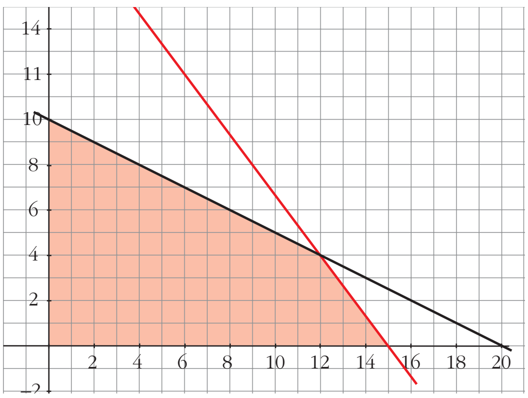


a) Representem la funció $F(x, y) = 12x + 15y$



La solució és $x = 12$ i $y = 4$

b) Representem la funció $F(x, y) = 16x + 12y$



Veiem que tots els punts del costat són solucions vàlides.

Cal tenir en compte, però, que la quantitat de pastissos de nata i poma han de ser valors naturals (no fareu mig pastís).

Això limita les solucions a:

$x = 12 \quad \rightarrow \quad y = 4$

$x = 13 \quad \rightarrow \quad y = \frac{8}{3}$ no és una solució vàlida

$x = 14 \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{3}$ no és una solució vàlida

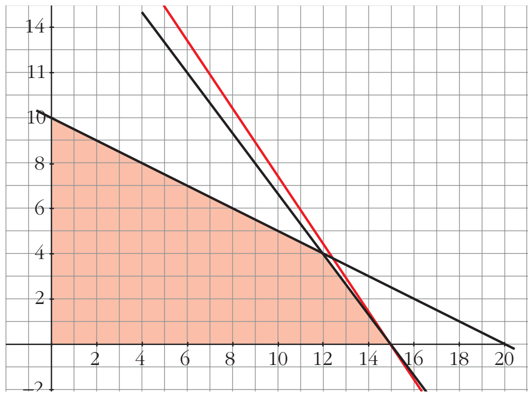
$x = 15 \quad \rightarrow \quad y = 0$

Tenim dues opcions:

$x = 12$ i $y = 4$

$x = 15$ i $y = 0$

c) Representem la funció $F(x, y) = 15x + 10y$



La solució és $x = 15$ i $y = 0$

Pàgina 122

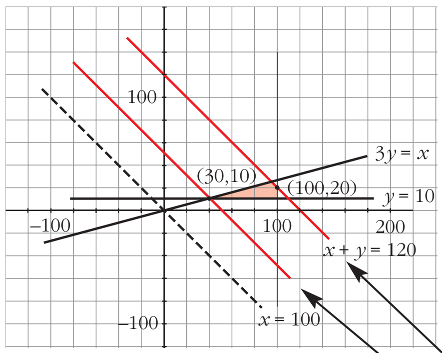
EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

4. **Minimitza la funció $f(x, y) = 25x + 20y$, sotmesa a les restriccions següents:**

$$\begin{cases} x + y \le 120 \\ 3y \le x \\ x \le 100 \\ y \ge 10 \end{cases}$$

Solució:



$f(x, y) = 25x + 20y$

Dibuixem $25x + 20y = 0$ i en fem una paral·lela si volem maximitzar

o una altra paral·lela si volem minimitzar

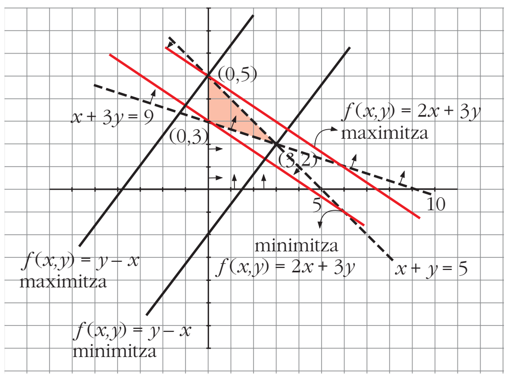
El mínim de la funció és en (30, 10) i val $f(30, 10) = 25 \cdot 30 + 20 \cdot 10 = 950$

5. **a) Maximitza i minimitza la funció $f(x, y) = 2x + 3y$ amb les restriccions següents:**

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Fes el mateix amb la funció $g(x, y) = y - x$.

Fronteres $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$



a) Màxim en (0, 5) $\rightarrow$ $f(0, 5) = 15$

mínim en (0, 3) $\rightarrow$ $f(0, 3) = 9$

b) Màxim en (0, 5) $\rightarrow$ $f(0, 5) = 5$

mínim en (3, 2) $\rightarrow$ $f(3, 2) = -1$

6. **Maximitza la funció $z = x + y + 1$ subjecta a les restriccions següents:**

$$\begin{cases} 0 \le y \\ 0 \le x \le 10 \\ x \le y \\ y - 2x \le 6 \\ 3x + 4y \ge 24 \end{cases}$$

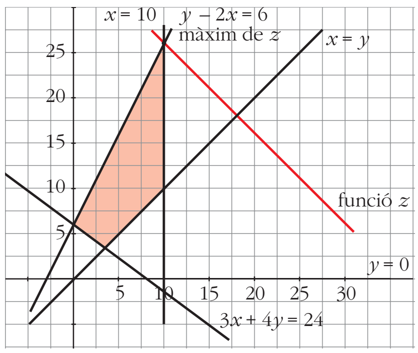
Dibuixem les fronteres de la regió solució.

Acolorim la regió solució amb color ▭.

Representem la funció a optimitzar z (línia de color vermell).

Trobem el màxim en el punt (10, 26)

$z = (10, 26) = 10 + 26 + 1 = 37$



7. **En la regió determinada per $x + y \ge 5$, $x + 3y \ge 9$, $4x + y \ge 8$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, troba el punt en què funció $f(x, y) = 2x + 3y$ aconsegueix el seu valor mínim. Pot aconseguir el seu màxim en aquesta regió?**

Dibuixem les fronteres de la regió solució.

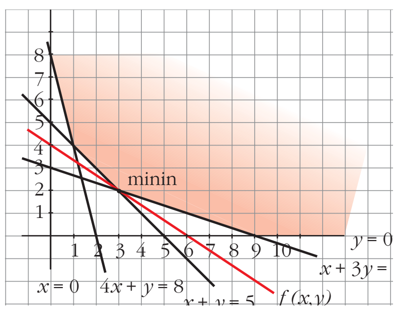
Acolorim la regió solució amb color ▭.

Representem la funció a optimitzar $f(x, y)$ (línia de color vermell).

Trobem el mínim en el punt (3, 2)

$f(3, 2) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$

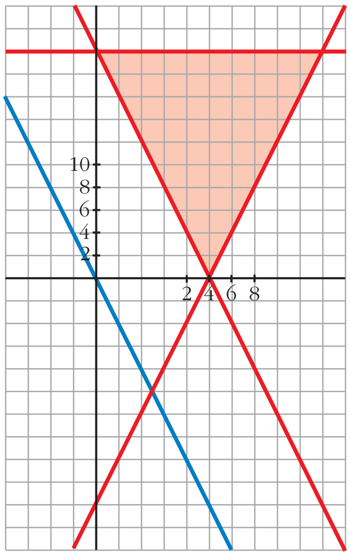
No hi ha valor pel màxim ja que la regió solució no és tancada.



8. **Calcula els punts del recinte $\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$ que fan mínima o màxima la funció $z = 2x + y$. Quantes solucions hi ha?**

- Representem les rectes $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 20 \\ y = 20 \\ y = 0 \end{cases}$

  i obtenim la regió que compleix les restriccions donades.



- Representem la direcció de les rectes $z = 2x + y$, dibuixant la recta $2x + y = 0$. Aquesta recta és paral·lela a $2x + y = 20$, que determina un dels costats del recinte:

- Hi ha infinits punts que fan mínima la funció: tots els que estan sobre el segment de recta $y = 20 - 2x$ amb $0 \leq x \leq 10$.

- El màxim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

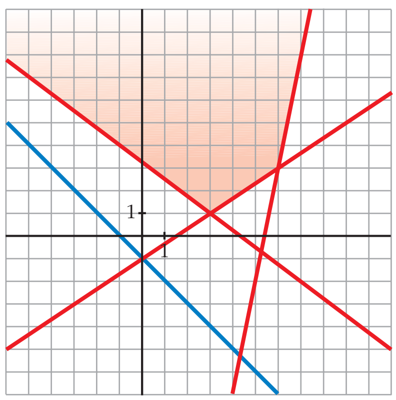
$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 20 \\ y &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= 20 \\ y &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \text{Punt } (20, 20)$$

9. **¿És possible maximitzar i minimitzar la funció $z = x + y + 1$ subjecta a aquestes restriccions?**

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 \geq 0 \\ 2x - 3y - 3 \leq 0 \\ 5x - y - 27 \leq 0 \end{cases}$$

- Representem les rectes: $\begin{cases} 3x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \\ 5x - y - 27 = 0 \end{cases}$

  i obtenim el recinte que compleix les restriccions del problema.



- Representem la direcció de les rectes

  $$z = x + y + 1,$$

  dibuixant la recta $x + y + 1 = 0$.

- No existeix màxim ni mínim.

10. **Les rectes $2x + y = 18$, $2x + 3y = 24$ i $x + y = 16$ es tallen dos a dos en tres punts que són els vèrtexs d'un triangle T. Sigui S la intersecció del triangle T amb el primer quadrant. Troba el màxim de la funció $z = 5x + 3y$ quan x i y varien en S.**

Expressa el recinte per mitjà d'un sistema d'inequacions.

Trobem els 3 vèrtexs femt 3 sistemes:

$$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases} \rightarrow (15/2, 3)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ x + y = 16 \end{cases} \rightarrow (2, 14)$$

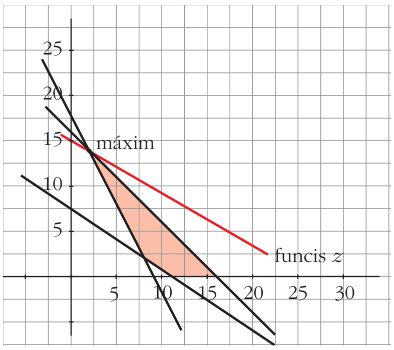
$$\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ x + y = 16 \end{cases} \rightarrow (24, -8)$$

Representem el triangle.

Ens queden amb la regió S fent la intersecció del triangle T amb el primer quadrant (color).

Representem la funció z (línia de color vermell).

El màxim és en el punt (2, 14) i $z(2, 14) = 52$



La regió es pot representar com:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 18 \\ 2x + 3y \geq 24 \\ x + y \leq 16 \end{cases}$$

11. **Dibuixa el recinte que compleix aquestes restriccions:**

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y + 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

a) **Localitza els punts d'aquest recinte en què la funció objectiu $F(x, y) = x + y$ es fa màxima i mínima, respectivament.**

b) **Sobre el mateix recinte, troba el màxim i el mínim de la funció $G(x, y) = 5x + y$.**

Representem les fronteres de la regió.

Acolorim la regió solució amb color ▭.

a) Representem $F(x, y)$ (color verd) i trobem màxim i mínim:

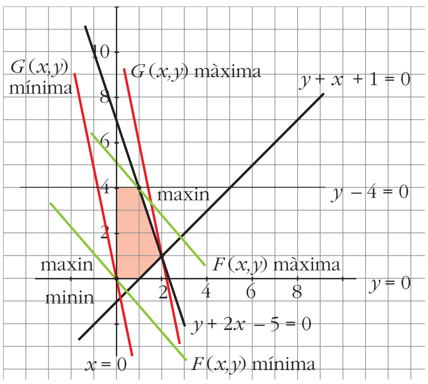
Màxim en (1/2, 4) $\rightarrow$ $F(1/2, 4) = \dfrac{9}{2}$

Mínim en (0, 0) $\rightarrow$ $F(0, 0) = 0$

b) Representem $G(x, y)$ (color vermell) i trobem màxim i mínim:

Màxim en (2, 1) $\rightarrow$ $G(2, 1) = 11$

Mínim en (0, 0) $\rightarrow$ $G(0, 0) = 0$



12. **Considera el triangle de vèrtexs (0, 0), (2, 8) i (10, 3). Determina raonadament:**

a) **Quin és el punt del triangle on la funció $f(x, y) = -4x + y + 9$ aconsegueix el màxim.**

b) **Quin és el punt del triangle on la funció $f(x, y) = 4x + y + 12$ aconsegueix el màxim.**

Sabem que el màxim s'aconsegueix en algun vèrtex (o en un costat). Calculem el valor de la funció donada en cada un dels vèrtexs:

a) $f(x, y) = -4x + y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} f(0, 0) = 9 \\ f(2, 8) = 9 \\ f(10, 3) = -28 \end{array}\right\}$$

Hi ha infinits punts que fan màxima la funció: tots els punts del costat que uneix els vèrtexs $(0, 0)$ i $(2, 8)$.

b) $f(x, y) = 4x + y + 12$

$$\left.\begin{array}{l} f(0, 0) = 12 \\ f(2, 8) = 28 \\ f(10, 3) = 55 \end{array}\right\}$$

La funció aconsegueix el màxim al punt $(10, 3)$.

PER RESOLDRE

13. Un estudiant reparteix propaganda publicitària en el seu temps lliure. L'empresa *A* li paga 0,05 € per imprès repartit i l'empresa *B*, amb opuscles més grans, li paga 0,07 € per imprès. L'estudiant porta dues bosses: una per als impresos de tipus *A*, on en caben 120, i una altra per als de tipus *B*, on en caben 100. Ha calculat que cada dia pot repartir 150 impresos com a màxim.

Quants impresos haurà de repartir de cada tipus perquè el seu benefici diari sigui màxim?

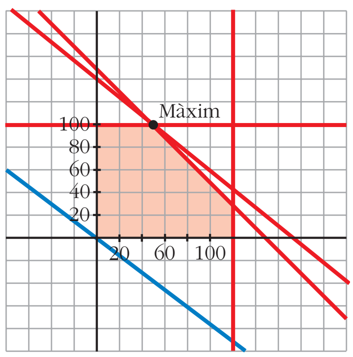
- Anomenem x al nre. d'impresos de tipus A i y al nre. d'impresos de tipus B.

- Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 120 \\ 0 \le y \le 100 \\ x + y \le 150 \end{array}\right\}$$

- La funció que ens dóna el benefici és $f(x, y) = 0{,}05x + 0{,}07y$. Hem de maximitzar $f(x, y)$, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el recinte de restriccions i la recta $0{,}05x + 0{,}07y = 0 \rightarrow 5x + 7y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 0{,}05x + 0{,}07y$.



- El màxim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ y = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 100 \end{array}$$

Per tant, haurà de repartir 50 impresos de tipus A i 100 de tipus B. El benefici serà de:

$$f(50, 100) = 0{,}05 \cdot 50 + 0{,}07 \cdot 100 = 9{,}5\ €$$

14. **Una indústria vinícola produeix vi i vinagre. El doble de la producció de vi és sempre menor o igual que la producció de vinagre més quatre unitats. A més, el triple de la producció de vinagre més quatre vegades la producció de vi és sempre menor o igual que 18 unitats.**

Troba el nombre d'unitats de cada producte que s'han de produir per aconseguir un benefici màxim, sabent que cada unitat de vi deixa un benefici de 8 € i cada unitat de vinagre, 2 €.

- Anomenem x a les unitats de vi i y a les de vinagre. Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x \leq y + 4 \\ 3y + 4x \leq 18 \end{array}\right\}$$

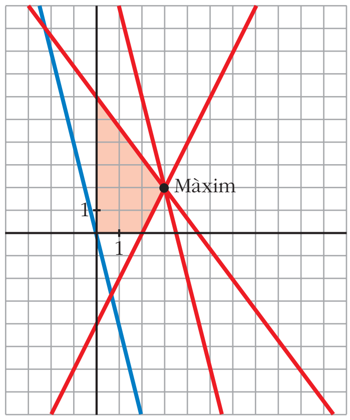
- La funció que ens dóna el benefici és $f(x, y) = 8x + 2y$. Hem de maximitzar $f(x, y)$, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el recinte de restriccions i la recta $8x + 2y = 0 \rightarrow 4x + y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 8x + 2y$.

- El màxim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{array}{r} 2x = y + 4 \\ 3y + 4x = 18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

Per tant, s'han de produir 3 unitats de vi i 2 de vinagre.



Pàgina 123

15. **Un autobús Barcelona-París ofereix places per a fumadors al preu de 100 € i a no fumadors al preu de 60 €.**

Al no fumador se li deixa portar 50 kg de pes i al fumador, 20 kg.

Si l'autobús té 90 places i admet un equipatge de fins a 3000 kg, quina hauria de ser l'oferta de la companyia si se'n vol obtenir el màxim benefici?

- Anomenem x al nombre de places per a fumadors i y al nombre de places per a no fumadors.

- Les restriccions del problema són:

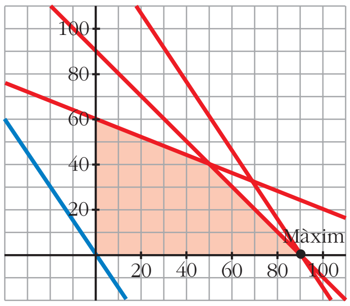
$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 20x + 50y \leq 3000 \quad \rightarrow \quad 2x + 5y \leq 300 \end{array}\right.$$

- Hem de maximitzar la funció:

  $f(x, y) = 100x + 60y$, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el recinte de restriccions i la recta $100x + 60y = 0 \rightarrow 5x + 3y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 100x + 60y$:
- El màxim s'aconsegueix al punt (90, 0).

Per tant, s'haurien d'oferir 90 places per a fumadors i cap per a no fumadors, per obtenir el màxim benefici.



16. Una persona vol invertir 100 000 € en dos tipus d'accions, A i B. Les de tipus A tenen més risc, però produeixen un benefici del 10%. Les de tipus B són més segures, però produeixen només el 7% nominal.

Decideix invertir com a màxim 60 000 € en la compra d'accions A i, com a mínim, 20 000 € en la compra d'accions B. A més, vol que el que inverteix en A sigui, almenys, igual que el que inverteix en B.

Com ha d'invertir els 100 000 € perquè el benefici anual sigui màxim?

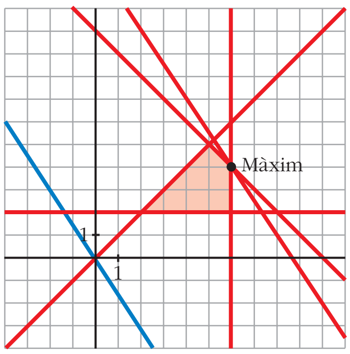
- Anomenem x als diners invertits en accions de tipus A (en desenes de milers d'euros) i y als diners invertits en accions de tipus B (en desenes de milers d'euros).
- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 6 \\ y \geq 2 \\ x \geq y \end{cases}$$

- La funció que ens dóna el benefici anual és: $f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$. Hem de maximitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.
- Representem el recinte de restriccions i la recta $0{,}1x + 0{,}07y = 0 \rightarrow 10x + 7y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 0{,}1x + 0{,}07y$.
- El màxim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Per tant, ha d'invertir 60 000 € en accions de tipus A i 40 000 € en accions de tipus B.



17. Un comerciant va a un mercat a comprar taronges amb 500 €. Li ofereixen dos tipus de taronges: les de tipus A a 0,5 € el kg i les de tipus B a 0,8 € el kg.

Sabem que en la seva furgoneta només disposa d'espai per transportar 700 kg de taronges com a màxim, i que pensa vendre el quilo de taronges de tipus A a 0,58 € i el de tipus B a 0,9 €.

Quants quilograms de taronges de cada tipus haurà de comprar el comerciant per obtenir-ne un benefici màxim?

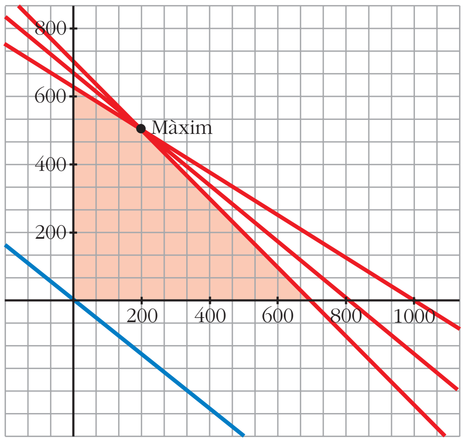
• Anomenem x als kg de taronges de tipus A i y als kg de taronges de tipus B.

• Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 700 \\ 0{,}5x + 0{,}8y \leq 500 \quad \rightarrow \quad 5x + 8y \leq 5\,000 \end{cases}$$

• La funció que ens dóna el benefici és $f(x, y) = 0{,}08 + 0{,}1y$. Hem de maximitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.

• Representem el recinte de restriccions, i la recta $0{,}08x + 0{,}1y = 0 \rightarrow 8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 0{,}08x + 0{,}1y$.



• El màxim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ 700 \\ 5x + 8y = 5\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 200 \\ y = 500 \end{array}$$

Per tant, haurà de comprar 200 kg de taronges del tipus A i 500 kg del tipus B.

18. **Un sastre té 80 m² de tela de cotó i 120 m² de tela de llana.**

Un vestit d'home requereix 1 m² de cotó i 3 m² de llana, i un vestit de dona necessita 2 m² de cada una de les teles.

Calcula el nombre de vestits d'home i de dona que ha de confeccionar el sastre per maximitzar els beneficis si els d'home i els de dona es venen al mateix preu.

• Anomenem x al nombre de vestits d'home i y al nombre de vestits de dona. Resumim en una taula la informació:

	NRE.	COTÓ	LLANA
VESTIT HOME	x	x	$3x$
VESTIT DONA	y	$2y$	$2y$
TOTAL		$x + 2y$	$3x + 2y$

• Les restriccions del problema són:

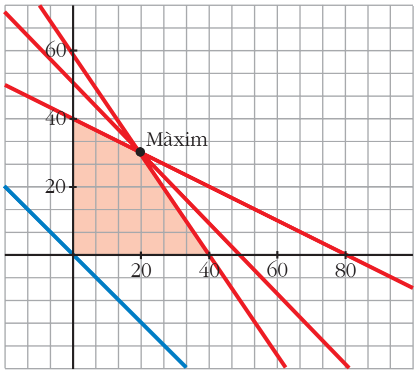
$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

• Si anomenem k al benefici obtingut per la venda d'un vestit d'home o de dona, la funció que ens dóna el benefici total és $f(x, y) = k(x + y)$. Hem de maximitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el recinte de restriccions i la recta $k(x+y)=0 \rightarrow x+y=0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z=k(x+y)$.
- El màxim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y=120\\ x+2y=80\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}x=20\\ y=30\end{array}$$

Per tant, ha de confecccionar 20 vestits d'home i 30 de dona.



19. **Es vol promocionar una marca desconeguda, D, d'olis, utilitzant una marca coneguda, C. Per fer-ho, es fa l'oferta següent:**

"Pagui només 2,5 € el litre d'oli C i a 1,25 € el litre d'oli D sempre que compri en total 6 litres o més, i la quantitat d'oli C estigui compresa entre la meitat i el doble de la quantitat comprada d'oli D."

Disposem d'un màxim de 21,25 €.

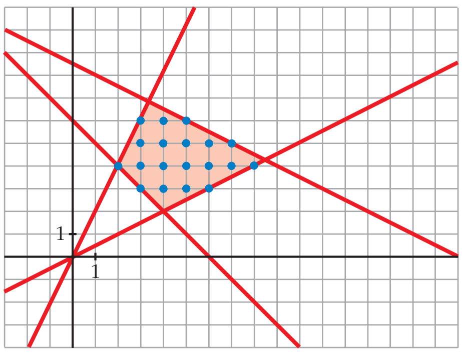
a) Representa gràficament les maneres que existeixen d'acollir-nos a l'oferta.

b) Acollint-nos a l'oferta, quina és la mínima quantitat d'oli D que podem comprar? Quina és la màxima de C?

- Anomenem x al nombre de litres d'oli D, i y al nombre de litres d'oli C.
- Les restriccions del problema són:

$$\left\{\begin{array}{l}x \geq 0;\quad y \geq 0\\ x+y \geq 6\\ \dfrac{x}{2} \leq y \leq 2x\\ 2{,}5y+1{,}25x \leq 21{,}25 \quad \rightarrow \quad 2y+x \leq 17\\ x,\ \ y \ \text{ enters}\end{array}\right.$$

a) Representem gràficament el recinte:



Hi ha 20 punts al recinte (20 maneres d'acollir-nos a l'oferta).

b) La mínima quantitat de D són 2 litres i la màxima de C són 8 litres.

20. **Es vol elaborar una dieta per a bestiar que satisfaci unes condicions mínimes de continguts vitamínics al dia: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de C i 2 mg de D.**

Per fer-ho, es mesclaran pinsos de dos tipus, P i Q, el preu per quilo dels quals és, per a ambdós, de 0,3 € i el contingut vitamínic en mil·ligrams per quilo de cadascun és el següent:

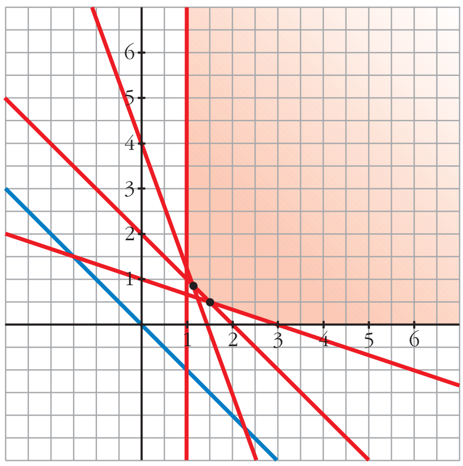
	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

Com s'han de mesclar els pinsos perquè la despesa sigui mínima?

- Anomenem x al pinso de tipus P (en kg) i y al de tipus Q (en kg). Les restriccions són les següents:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + 3y \geq 3 \\ 20x + 7{,}5y \geq 30 \;\rightarrow\; 8x + 3y \geq 12 \\ 2x \geq 2 \;\rightarrow\; x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- La funció que ens dóna la despesa és: $f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}3y = 0{,}3(x + y)$. Hem de minimitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.



- Representem el recinte de restriccions, i la recta

$$0{,}3(x, y) = 0 \;\rightarrow\; x + y = 0,$$

que ens dóna la direcció de les rectes $z = 0{,}3(x + y)$.

- Com que la recta $x + y = 0$ és paral·lela a $x + y = 2$, s'aconsegueix qualsevol punt de la recta $x + y = 2$ comprès entre A i B. Trobem les coordenades de A i de B:

A: Punt de tall de les rectes:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 8x + 3y = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{5} \\[2ex] y = \dfrac{4}{5} \end{array}\right\} \quad A\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

B: Punt de tall de las rectes:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\[2ex] y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

21. **Disposem de 120 refrescos de cola amb cafeïna i de 180 refrescos de cola sense cafeïna.**

Els refrescos es venen en paquets de dos tipus:

– Tipus *A*, amb 3 refrescos amb cafeïna i 3 sense cafeïna.

– Tipus *B*, amb 2 refrescos amb cafeïna i 4 sense cafeïna.

El venedor guanya 6 € per cada paquet que ven de tipus *A* i 5 € per cada paquet de tipus *B*. Calcula de manera raonada quants paquets ha de vendre de cada tipus perquè el benefici sigui màxim. Quin és aquest benefici?

	QUANTITAT	REFRESCOS AMB CAFEÏNA	REFRESCOS SENSE CAFEÏNA
TIPUS *A*	x	$3x$	$3x$
TIPUS *B*	y	$2y$	$4y$
TOTAL		$3x + 2y$	$3x + 4y$

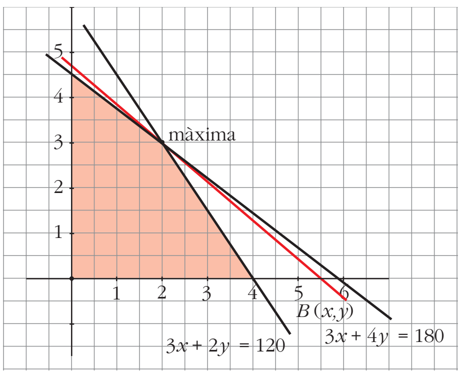
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \end{cases} \quad \text{i } x \text{ i } y \text{ han de ser valors naturals}$$

Representem la regió solució .

Calculem la funció a optimitzar: $B(x, y) = 6x + 5y$ (línia color vermell).

La representem i trobem el punt màxim i el benefici màxim.

màxim (20, 30) $\rightarrow$ $B(20, 30) = 270$ €.



Pàgina 124

22. **Una fàbrica produeix jaquetes i pantalons. Utilitzen tres màquines —de tallar, cosir i tenyir— en la producció.**

Fabricar una jaqueta representa usar la màquina de tallar una hora, la de cosir, tres hores i la de tenyir, una hora. Fabricar uns pantalons representa usar la màquina de tallar una hora, la de cosir, una hora i la de tenyir, cap hora. La màquina de tenyir es pot usar durant tres hores, la de cosir, dotze i la de tallar, set.

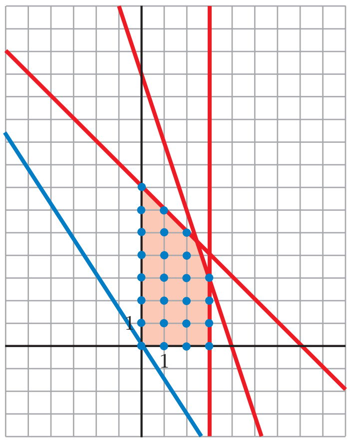
Tot el que es fabrica es ven i s'obté un benefici de vuit euros per cada jaqueta i cinc per cada un dels pantalons.

Quantes jaquetes i pantalons calen per aconseguir el benefici màxim?

- Anomenem x al nombre de jaquetes i y al nombre de pantalons.
- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \end{cases} \qquad x, \; y \text{ enters}$$

- La funció que ens dóna el benefici és $f(x, y) = 8x + 5y$. Hem de maximitzar aquesta funció subjecta a les restriccions anteriors.
- Representem el conjunt de restriccions i la recta $8x + 5y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 8x + 5y$:
- El màxim s'aconsegueix al punt (2, 5). Per tant, s'han de fabricar 2 jaquetes i 5 pantalons.



23. **Un ramader ha de subministrar un mínim diari de 4 mg de vitamina A i 6 mg de vitamina B en el pinso que dóna al seu bestiar. Disposa per a això de dos tipus de pinso P_1 i P_2 els continguts vitamínics per quilogram dels quals són els que apareixen en la taula:**

	A	B
P_1	2 mg	6 mg
P_2	4 mg	3 mg

Si el quilogram de pinso P_1 val 0,4 € i el del P_2 0,6 €, com s'han de barrejar els pinsos per subministrar les vitamines requerides amb un cost mínim?

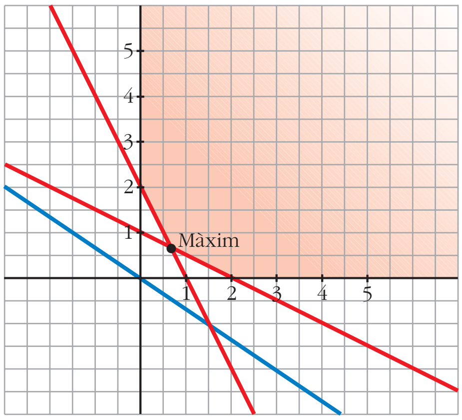
- Anomenem x als kg de pinso P_1 i y als kg de pinso P_2.
- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 4 \quad \rightarrow \quad x + 2y \geq 2 \\ 6x + 3y \geq 6 \quad \rightarrow \quad 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

- La funció que ens dóna el cost és $f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}6y$. Hem de minimitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.
- Representem el conjunt de restriccions i la recta

$$0{,}4x + 0{,}6y = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y = 0,$$

que ens dóna la direcció de les rectes $z = 0{,}4x + 0{,}6y$.



- El mínim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{2}{3} \quad y = \frac{2}{3}$$

Per tant, s'han de barrejar $\frac{2}{3}$ kg de pinso P_1 amb $\frac{2}{3}$ kg de pinso P_2.

24. **Volem organitzar una planta d'un taller d'automòbils on treballaran electricistes i mecànics.**

Per necessitats de mercat, cal que hi hagi major o igual nombre de mecànics que d'electricistes, i que el nombre de mecànics no superi el doble del d'electricistes. En total hi ha disponibles 30 electricistes i 20 mecànics.

El benefici de l'empresa per jornada és de 150 € per electricista i 120 € per mecànic.

Quants treballadors de cada classe s'han d'elegir per obtenir el benefici màxim?

- Anomenem x al nombre d'electricistes i y al de mecànics.
- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x \leq 30; \quad y \leq 20 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ x, y \text{ enters} \end{cases}$$

- La funció que ens dóna el benefici és:

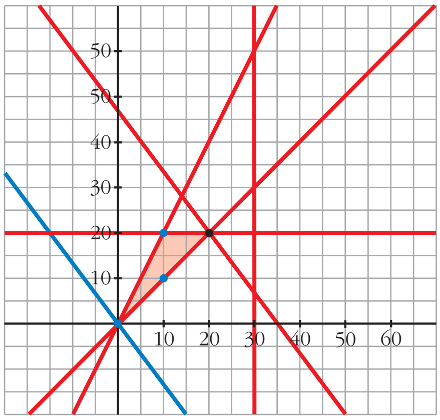
$$f(x, y) = 150x + 120y$$

Hem de maximitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el conjunt de restriccions i la recta

$$150x + 120y = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 4y = 0,$$

que ens dóna la direcció de les rectes $z = 150x + 120y$.



- Només hi ha 4 punts en el conjunt de restriccions: (0, 0), (10, 10), (10, 20) i (20, 20). El màxim s'aconsegueix al punt (20, 20). Per tant, s'han d'elegir 20 electricistes i 20 mecànics.

25. **Una confiteria és famosa per les seves dues especialitats en pastissos: el pastís Imperial i el pastís de Lima.**

El pastís Imperial requereix per a la seva elaboració mig quilo de sucre i 8 ous, i té un preu de venda de 8 €.

El pastís de Lima necessita 1 quilo de sucre i 8 ous, i té un preu de venda de 10 €.

En el magatzem els queden 10 quilos de sucre i 120 ous.

a) Quines combinacions d'especialitats poden fer?

Planteja el problema i representa gràficament el conjunt de solucions.

b) Quantes unitats de cada especialitat s'han de produir per obtenir el major ingrés per vendes?

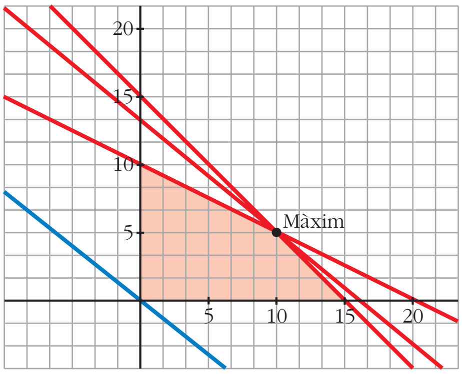
a) • Anomenem x al nombre de pastissos de tipus Imperial i y al nombre de pastissos de Lima.

- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x, \quad y \ \text{enters} \\ 0{,}5x + y \leq 10 \quad \rightarrow \quad x + 2y \leq 20 \\ 8x + 8y \leq 120 \quad \rightarrow \quad x + y \leq 15 \end{cases}$$

- La funció que ens dóna els ingressos per vendes és $f(x, y) = 8x + 10y$. Hem de maximitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el conjunt de restriccions i la recta $8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 8x + 10y$:



(Punts de coordenades enteres dins d'aquest recinte)

b) El màxim s'aconsegueix en el punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 15 \\ x + 2y &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 10 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Per tant, han de fabricar 10 pastissos Imperials i 5 de Lima.

26. **Un orfebre fabrica dos tipus de joies.**

La unitat de tipus A es fa amb 1 g d'or i 1,5 g de plata i es ven a 25 €.

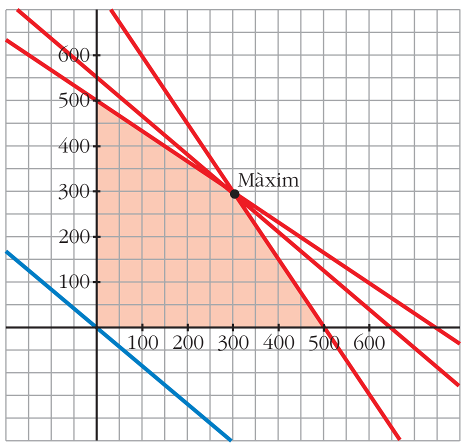
La de tipus B es ven a 30 € i porta 1,5 g d'or i 1 g de plata.

Si només es disposa de 750 g de cada metall, quantes joies ha de fabricar de cada tipus per obtenir el màxim benefici?

- Anomenem x al nombre d'unitats de tipus A i y al nombre d'unitats de tipus B.
- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \end{cases}$$

- La funció que hem de maximitzar, subjecta a les restriccions anteriors, és: $f(x, y) = 25x + 30y$



- Representem el conjunt de restriccions i la recta

$$25x + 30y = 0 \quad \to \quad 5x + 6y = 0,$$

que ens dóna la direcció de les rectes $z = 25x + 30y$.

- El màxim s'aconsegueix al punt de tall de les rectes:

$$\left.\begin{aligned} 1{,}5x + y &= 750 \\ x + 1{,}5y &= 750 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 300 \\ y &= 300 \end{aligned}$$

Per tant, ha de fabricar 300 joies de cada un dels dos tipus.

27. **Una penya de seguidors d'un equip de futbol encarrega a una empresa de transports el viatge per portar els 1200 socis a veure la final que juga el seu equip. L'empresa disposa d'autobusos de 50 places i de microbusos de 30 places. El preu del lloguer de cada autobús és de 1260 € i el de cada microbús, de 900 €. L'empresa només disposa, aquell dia, de 28 conductors.**

Quin nombres d'autobusos i microbusos han de contractar per aconseguir el mínim cost possible? Quin és aquest cost?

	QUANTITAT	SOCIS TRANSPORTATS	CONDUCTORS
AUTOBUSOS	x	$50x$	$1x$
MICROBUSOS	y	$30y$	$1y$
TOTAL		$50x + 30y$	$x + y$

$$\begin{cases} x \geq 0, \text{ on } x \text{ i } y \text{ han de ser nombres naturals} \\ y \geq 0 \\ 50x + 30y \geq 1200 \\ x + y \leq 28 \end{cases}$$

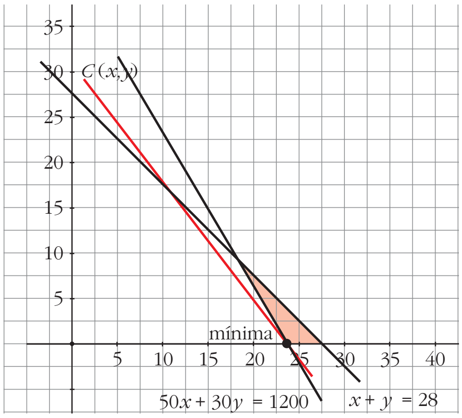
Representem la regió solució .

Calculem la funció a optimitzar: $C(x, y) = 1260x + 900y$

La representem i trobem el mínim i el cost mínim.

mínim $(24, 0)$ → $C(24, 0) = 30240$ €.

Caldria llogar 24 autobusos i cap microbús.



28. **Una persona té 15000 € per invertir en dos tipus d'accions, *A* i *B*. El tipus A té un interés anual del 9% i el tipus *B*, del 5%.**

Decideix invertir, com a màxim, 9000 € en *A* i com a mínim 3000 € en *B*. A més, vol invertir en *A* tant o més que en *B*.

a) Dibuixa la regió factible.

b) Com ha d'invertir els 15000 € per tal que el benefici sugui màxim?

c) Quin és aquest benefici anual màxim?

x = diners invertits en A

y = diners invertits en B

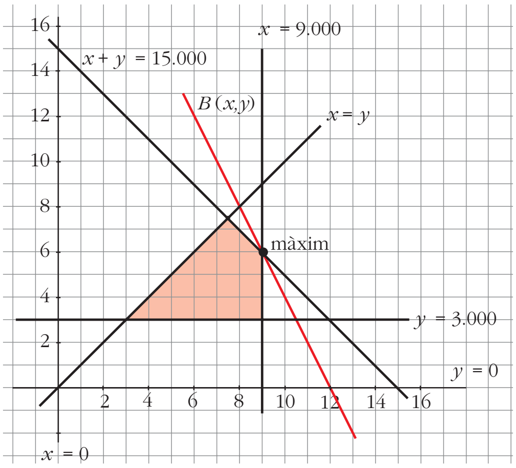
$$\begin{cases} x + y \leq 15000 \\ x \leq 9000 \\ y \geq 3000 \\ x \geq y \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Representem les fronteres de la regió factible. Acolorim la regió .

b) La funció a optimitzar és $B(x, y) = 0{,}09x + 0{,}05y$. La representem en color vermell. Trobem el màxim (9000, 6000).

c) Calculem el benefici

$B(9000, 6000) = 0{,}09 \cdot 9000 + 0{,}05 \cdot 6000 = 1110$ €.



29. **Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per nens. Per fer una jaqueta es necessiten 1 m de tela i 2 botons, i per fer uns pantalons calen 2 m de tela, 1 botó i 1 cremallera. El taller disposa de 500 m de tela, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que s'obté per la venda d'una jaqueta és de 20 e i per la d'uns pantalons, 30 e. Suposant que es ven tot el que es fabrica:**

Calcula el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per obtenir un benefici màxim.

	QUANTITAT	TELA (M)	BOTONS	CREMALLERES
JAQUETES	x	x	$2x$	
PANTALONS	y	$2y$	y	y
TOTAL		$x + 2y$	$2x + y$	y

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \text{on } x \text{ i } y \text{ han de ser nombres naturals} \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$$

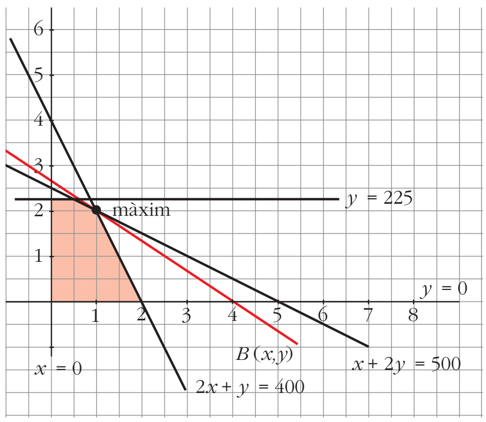
Representem les fronteres de la regió solució. Acolorim la regió solució .

La funció a optimitzar és $B(x, y) = 20x + 30y$

Trobem el màxim i el benefici màxim.

màxim (100, 200) → $B(100, 200) = 8000$ €.

Cal fer 100 jaquetes i 200 pantalons.



30. **Una empresa fabricant d'automòbils produeix dos models, A i B. Té dues factories, F_1 i F_2.**

A F_1 es fabriquen diàriament 6 cotxes de tipus A i 4 de tipus B amb un cost de 32 000 € diaris. F_1 no funciona més de 50 dies.

A F_2, se'n fabriquen 4 del tipus A i 4 del B amb un cost de 24 000 € diaris.

Per abastir el mercat s'han de posar a la venda almenys 360 cotxes de tipus A i almenys 300 del tipus B.

Quants dies ha de funcionar cada factoria perquè el cost total sigui mínim? Quin és aquest cost?

	DIES DE FUNCIONAMENET	PRODUCCIÓ COTXES A	PRODUCCIÓ COTXES B	COST
FACTORIA 1	x	$6x$	$4x$	$32000x$
FACTORIA 2	y	$4y$	$4y$	$32000x$
TOTAL		$6x + 4y$	$4x + 4y$	$32000x + 32000x$

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \text{on } x \text{ i } y \text{ han de ser nombres naturals} \\ 6x + 4y \geq 360 \\ 4x + 4y \geq 300 \\ x \leq 50 \end{cases}$$

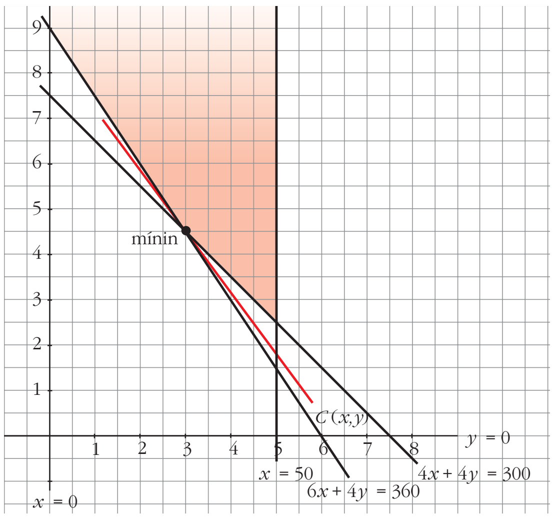
Representem les fronteres de la regió solució. Acolorim la regió solució .

Trobem la funció a optimitzar és $C(x, y) = 32000x + 24000y$

Trobem el mínim i el valor del cost en aquest mínim.

mínim (30, 45) $\rightarrow$ $C(30, 45) =$ 2 040 000 €.

Ha de funcionar 30 dies F_1 i 45 dies F_2.



31. **Una empresa està seleccionant empleats amb contracte eventual d'un any i amb contracte fix. Els salaris anuals són, respectivament, 8 000 € i 15 000 €. L'empresa té un màxim de 480 000 € per als salaris d'aquests nous empleats.**

El nombre d'empleats fixos ha d'estar entre 10 i 24. Els eventuals no poden ser més de 14.

Si l'objectiu és contractar el major nombre d'empleats possible, quants n'ha de contractar de cada tipus?

I si l'objectiu fos contractar el major nombre d'eventuals?

	QUANTITAT	SALARI
EMPLEATS EVENTUALS	x	$8000x$
EMPLEATS FIXOS	y	$15000y$
TOTAL		$8000xx + 15000y$

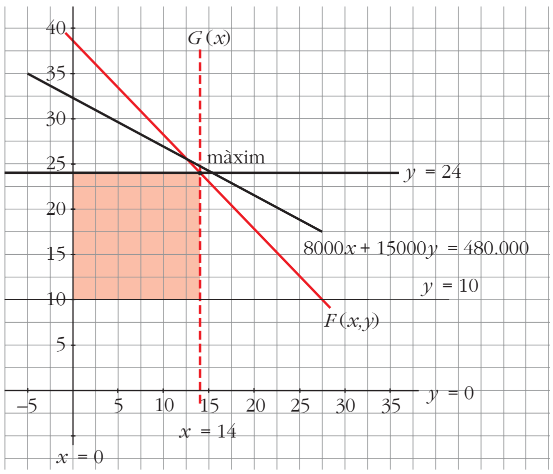
$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{ on } x \text{ i } y \text{ han de ser naturals} \\ 8000x + 15000y \leq 480000 \\ x \leq 14 \\ 10 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

Representem les fronteres de la regió solució. Acolorim la regió solució .

Si volem contractar el major nombre d'empleats → $F(x, y) = x + y$ (color vermell).

Màxim en (14, 24) → $F(14, 24) = 38$ empleats són el màxim.

Si volem contractar el màxim nombre d'eventuals, seria 14 eventuals, i el nombre de fixos que es volgués entre 10 i 24, ja que $G(x) = x$ → i coincideix amb la frontera $x = 14$.



32. **Un fabricant de mobles produeix dos tipus de taules: clàssiques i modernes. Cada taula del model clàssic requereix 4 hores per polir-la i 3 per envernissar-la, i deixa un benefici de 200 €. No se n'han de fabricar més de 9 d'aquest model.**

Cada taula moderna necessita 3 hores per polir-la i 4 hores per envernissar-la i el seu benefici és de 100 €.

Es disposa de 48 hores per polir i de 60 hores per envernissar.

Quantes taules de cada tipus ha de fabricar perquè els beneficis sigui màxims?

	QUANTITAT	POLIT (EN HORES)	ENVERSSINAT (EN HORES)
CLÀSSICA	x	$4x$	$3x$
MODERNA	y	$3y$	$4y$
TOTAL		$4x + 3y$	$3x + 4y$

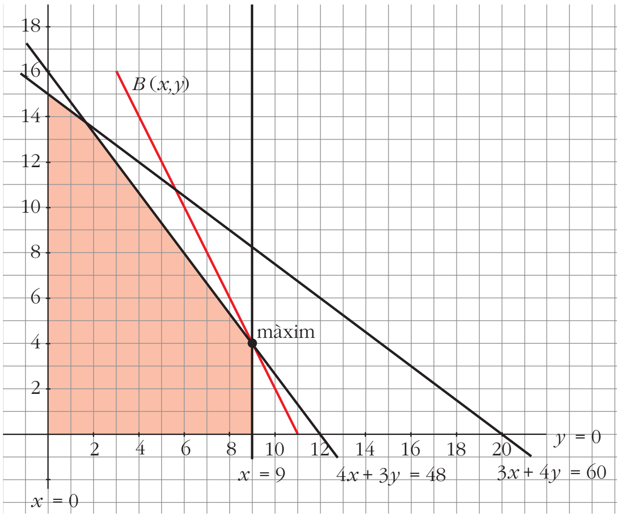
$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{ on } x \text{ i } y \text{ han de ser naturals} \\ 4x + 3y \leq 48 \\ 3x + 4y \leq 60 \\ x \leq 9 \end{cases}$$

Representem les fronteres de la regió solució. Acolorim la regió solució .

La funció a optimitzar és $B(x, y) = 200x + 100y$ (color vermell).

Així trobem el màxim al punt (9, 4).

El benefici màxim seria $B(9, 4) = 2200$ €.



PER APROFUNDIR

33. **Una empresa compra 26 locomotores a tres fàbriques: 9 a A, 10 a B i 7 a C. Les locomotores han de prestar servei en dues estacions diferents: 11 en l'estació N i 15 en la S. Els costos de trasllat són, per cada una, els que s'indiquen en la taula (en milers d'euros):**

Esbrina com convé fer el repartiment perquè el cost sigui mínim.

	A	**B**	**C**
N	**6**	**15**	**3**
S	**4**	**20**	**5**

- Fem una taula:

	A	B	C	
N	x	y	$11 - x - y$	11
S	$9 - x$	$10 - y$	$x + y - 4$	15
	9	10	7	26

• Les restriccions del problema són:

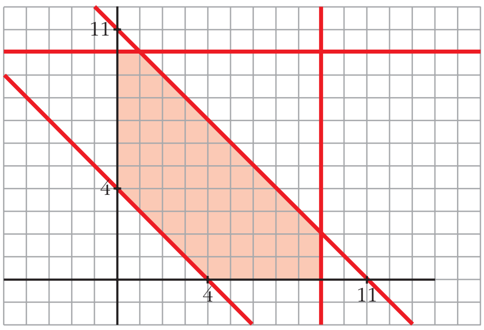
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0; \;\; y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 11 \\ x \leq 9 \\ y \leq 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(perquè totes les dades de la taula siguin positives o zero)} \\ (x, \; y \text{ enters}) \end{array}$$

• La funció que ens dóna el cost (en milers d'euros) és:

$$f(x, y) = 6x + 15y + 3(11 - x - y) + 4(9 - x) + 20(10 - y) + 5(x + y - 4) =$$
$$= 4x - 3y + 249$$

Hem de minimitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.

• Representem el recinte de restriccions:



(x, y enters)

Els vèrtexs del recinte són:

$A\,(0, 10)$ $B\,(1, 10)$

$C\,(9, 2)$ $D\,(9, 0)$

$E\,(4, 0)$ $F\,(0, 4)$

• Trobem $f(x, \; y)$ en cada un dels vèrtexs:

$f(0, 10) = 219$ $f(1, 10) = 223$

$f(9, 2) = 279$ $f(9, 0) = 285$

$f(4, 0) = 265$ $f(0, 4) = 237$

• El mínim s'aconsegueix al punt $A\,(0, 10)$.

Per tant, el repartiment s'ha de fer així:

	A	B	C	
N	0	10	1	11
S	9	0	6	15
	9	10	7	26

34. **Un pastisser fabrica dos tipus de pastissos, T_1 i T_2, per a la qual cosa usa tres ingredients, A, B i C. Disposa de 150 kg d'A, 90 kg de B i 150 kg de C. Per fabricar un pastís T_1 ha de mesclar 1 kg d'A, 1 kg de B i 2 kg de C, mentre que per fer un pastís T_2 necessita 5 kg d'A, 2 kg de B i 1 kg de C.**

a) Si es venen els pastissos T_1 a 10 €, i els T_2 a 23 €, quina quantitat n'ha de fabricar de cada tipus per maximitzar-ne els ingressos?

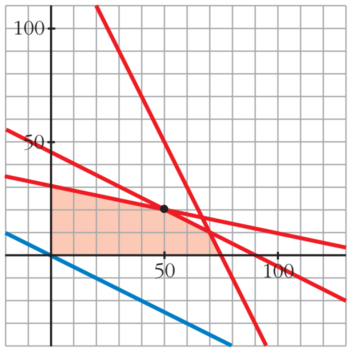
b) Si es fixa el preu d'un pastís del tipus T_1 en 15 €, quin serà el preu d'un pastís del tipus T_2 si una solució òptima és fabricar 60 pastissos del tipus T_1 i 15 del tipus T_2?

- Anomenem x al nombre de pastissos de tipus T_1 i y al nombre de pastissos de tipus T_2.
- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x + 5y \leq 150 \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \end{cases}$$

a) • La funció que ens dóna els ingressos és $f(x, y) = 10x + 23y$. Hem de maximitzar aquesta funció, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el recinte de restriccions, i la recta $10x + 23y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 10x + 23y$.



- El màxim s'aconsegueix al punt d'intersecció de les rectes:

$$\left.\begin{array}{l} x + 5y = 150 \\ x + 2y = \ \ 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 20 \end{array}$$

Per tant, s'han de fabricar 50 pastissos de tipus T_1 i 20 pastissos de tipus T_2.

b) • Si anomenem k al preu del pastís de tipus T_2, els ingressos vindrien donats per la funció $g(x, y) = 15x + ky$.

- Si la funció $g(x, y)$ aconsegueix el màxim al punt (60, 15), que no és un vèrtex, serà perquè hi ha infinites solucions i la recta $15x + ky = 0$ serà paral·lela a $x + 2y = 90$. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} 15x + ky = 0 \quad \rightarrow \quad \text{pendent} = -\dfrac{15}{k} \\ x + 2y = 90 \quad \rightarrow \quad \text{pendent} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \dfrac{-15}{k} = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad k = 30$$

Per tant, el preu d'un pastís del tipus T_2 serà de 30 €.

35. **El senyor Montagut decideix emprar fins a 30 000 € del seu patrimoni en l'adquisició d'accions de dues societats d'inversió: BLL i ISSA.**

El preu de cada acció és de 10 € en ambdós casos.

BLL dedica el 35% de la seva activitat al sector de les assegurances, el 45% al sector immobiliari i el 20% a l'industrial.

ISSA dedica el 30% dels seus recursos al sector de les assegurances, el 25% a l'immobiliari i el 45% a l'industrial.

El senyor Montagut no vol invertir més del 40% del seu capital en el sector industrial ni més del 35% en l'immobiliari. Quantes accions ha d'adquirir de cada societat si BLL preveu lliurar un dividend d'1,2 €/acció i ISSA d'1 €/acció? (Òbviament, el senyor Montagut vol el benefici màxim.)

- Anomenem x al nombre d'accions que adquireix de BLL i y al nombre d'accions que adquireix d'ISSA.
- Fem una taula que resumeixi la informació que ens donen:

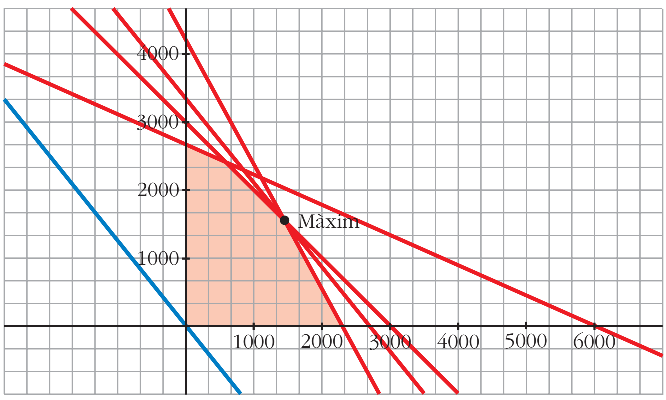
	NOMBRE	PREU	ASSEGURANCES	IMMOBILIARI	INDUSTRIAL
ACCIONS BBL	x	$10x$	$3,5x$	$4,5x$	$2x$
ACCIONS ISSA	y	$10y$	$3y$	$2,5y$	$4,5y$
TOTAL		$10x + 10y$	$3,5x + 3y$	$4,5x + 2,5y$	$2x + 4,5y$

- Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 30\,000 \quad \to \quad x + y \leq 3000 \\ 2x + 4,5y \leq 12\,000 \\ 4,5x + 2,5y \leq 10\,500 \end{cases}$$

- La funció que ens dóna els beneficis és $f(x, y) = 1,2x + y$. Hem de maximitzar-la, subjecta a les restriccions anteriors.

- Representem el conjunt de restriccions i la recta $1,2x + y = 0$, que ens dóna la direcció de les rectes $z = 1,2x + y$:



- El màxim s'aconsegueix al punt de tall de les rectes:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3\,000 \\ 4,5x + 2,5y &= 10\,500 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 1500 \\ y &= 1500 \end{aligned}$$

Per tant, ha d'adquirir 1500 accions de cada una de les dues societats.