UNITAT 6

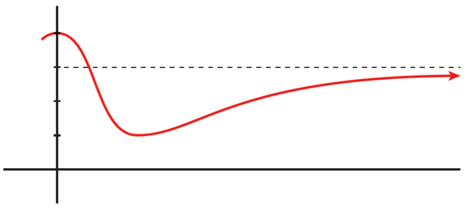
# LÍMITS I CONTINUÏTAT

## Pàgina 132

***Visió gràfica dels límits***

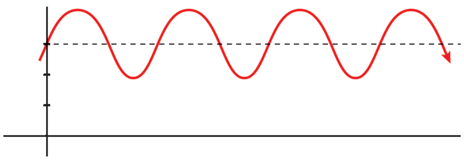
■ **Descriu anàlogament les branques següents assenyalades amb punta de fletxa:**

**a)**



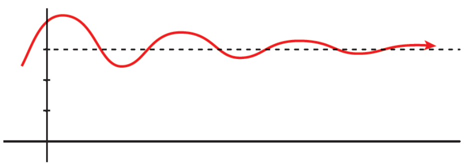
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

**b)**



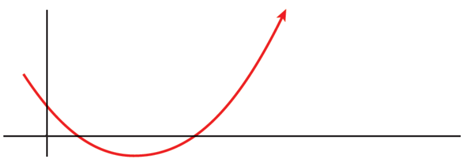
$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ no existeix

**c)**



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

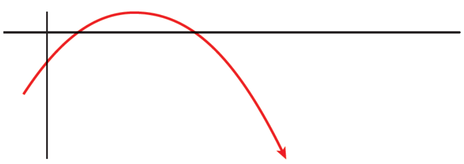
**d)**



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

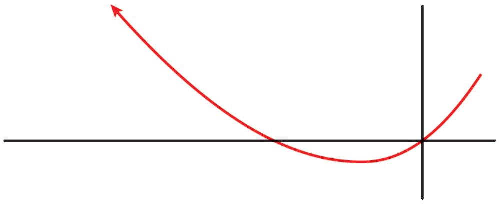
## Pàgina 133

**e)**



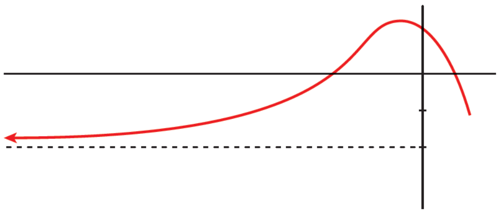
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

**f)**



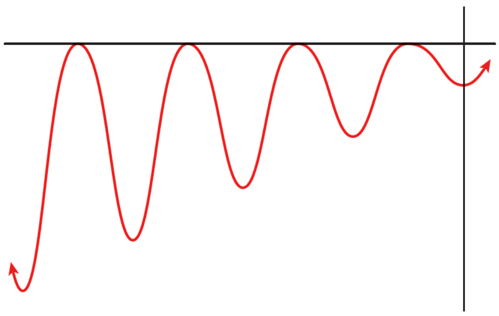
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

**g)**



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

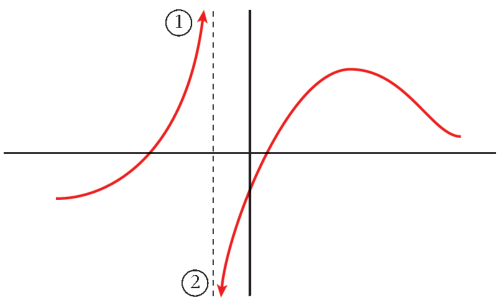
**h)**



$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ no existeix

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

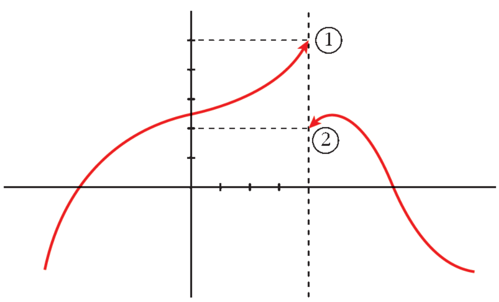
**i)**




① $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

② $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

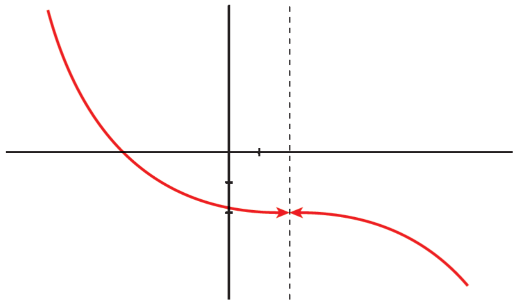
**j)**




① $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$

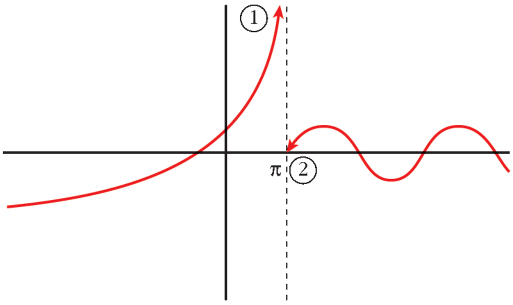
② $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$

**k)**



$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -2$

**l)**




① $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$

② $\lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = 0$

## Pàgina 135

### EXERCICIS PROPOSATS

**1. Si $u(x) \to 2$ i $v(x) \to -3$ quan $x \to +\infty$, calcula'n el límit quan $x \to +\infty$ de:**

**a)** $u(x) + v(x)$ **b)** $v(x)/u(x)$ **c)** $5^{u(x)}$

**d)** $\sqrt{v(x)}$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existeix

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

**2. Si $u(x) \to -1$ i $v(x) \to 0$ quan $x \to +\infty$, calcula'n el límit quan $x \to +\infty$ de:**

**a)** $u(x) - v(x)$ **b)** $v(x) - u(x)$ **c)** $v(x)/u(x)$

**d)** $\log_2 v(x)$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } v(x) \to 0^+ \\ \text{no existeix si } v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

## Pàgina 136

**3. Indica quines de les expressions següents són infinites (±∞) quan $x \to +\infty$:**

**a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$** **b) $0{,}5^x$** **c) $-1{,}5^x$**

**d) $\log_2 x$** **e) $1/(x^3 + 1)$** **f) $\sqrt{x}$**

**g) $4^x$** **h) $4^{-x}$** **i) $-4^x$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \rightarrow$ Sí

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}5^x = 0 \rightarrow$ No

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1{,}5^x) = -\infty \rightarrow$ Sí

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \rightarrow$ Sí

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \rightarrow$ No

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \rightarrow$ Sí

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \rightarrow$ Sí

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \rightarrow$ No

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \rightarrow$ Sí

**4. a) Ordena els ordres d'aquests infinits:**

$$\log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1{,}5^x \qquad 4^x$$

**b) Tenint en compte el resultat anterior, calcula:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $4^x \quad 1{,}5^x \quad 3x^5 \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad log_2 x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

## Pàgina 137

**5.** **Sabent que, quan $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, assigna límit, sempre que puguis, quan $x \to +\infty$, a les expressions següents:**

**a)** $f(x) - h(x)$ **b)** $f(x)^{f(x)}$ **c)** $f(x) + h(x)$

**d)** $f(x)^x$ **e)** $f(x) \cdot h(x)$ **f)** $u(x)^{u(x)}$

**g)** $f(x)/h(x)$ **h)** $[-h(x)]^{h(x)}$ **i)** $g(x)^{h(x)}$

**j)** $u(x)/h(x)$ **k)** $f(x)/u(x)$ **l)** $h(x)/u(x)$

**m)** $g(x)/u(x)$ **n)** $x + f(x)$ **o)** $f(x)^{h(x)}$

**p)** $x + h(x)$ **q)** $h(x)^{h(x)}$ **r)** $x^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \;\to$ Indeterminat

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = 0^0 \;\to$ Indeterminat

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \;\to$ Indeterminat

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \quad \to$ Indeterminat

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \quad \to$ No existeix

r) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

## Pàgina 138

**6. Les funcions $f$, $g$, $h$ i $u$ són les de l'exercici proposat 5 (pàgina anterior). Digues quines de les funcions següents són indeterminacions. En cada cas, si és indeterminació, digues de quin tipus, i, si no ho és, digues quin és el límit:**

**a)** $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$ **c)** $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

**e)** $f(x) \cdot u(x)$ **f)** $u(x)^{h(x)}$ **g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$. Indeterminat.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$. Indeterminat.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot u(x) = (+\infty)0$. Indeterminat.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminat.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

## Pàgina 139

**7.** **Calcula els límits següents:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2}$

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \dfrac{5}{3}$

**8.** **Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 (x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 x}{x^3 - 10x}$

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 (x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{x^3 - (x^3 + 9x^2 + 27x + 27)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{-9x^2 + 27x - 27} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 x}{x^3 - 10x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^3 + 6x^2 + x}{x^3 - 10x} = 9$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

## Pàgina 140

**9.** **Sense operar, digues el límit, quan $x \to +\infty$, de les expressions següents:**

**a)** $(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1})$ **b)** $(x^2 - 2^x)$ **c)** $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$

**d)** $3^x - 2^x$ **e)** $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

**10. Calcula el límit, quan $x \to +\infty$, de les expressions següents:**

**a)** $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

**b)** $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

**c)** $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

**d)** $(x+5)^{x^2-5x+1}$

**e)** $\left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^x$

**f)** $\left(\dfrac{x-2}{2x-3}\right)^{x^2+x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3+5)(x-2)-(4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4-6x^3+5x-10-4x^4-8x^3+x^2+2x}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4-14x^3+x^2+7x-10}{x^2-4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-2x^3-x}{4x^2+2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2+2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+5)^{x^2-5x+1} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{2x-3}\right)^{x^2+x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

## Pàgina 141

**11. Troba el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de les expressions següents:**

**a)** $\dfrac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}$

**b)** $\dfrac{\sqrt{x^3-5x-3}}{x^2-2x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 + 6x + 2}{3x^4 - x - 1} = \dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 5x - 3}}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{-x^3 + 5x + 3}}{x^2 + 2x}$

No existeix, ja que el radicand pren valors negatius quan $x \to -\infty$.

**12.** **Troba el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de les expressions següents:**

**a)** $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2}$ **b)** $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **c)** $3^x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 3}}{-3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-3x} = -\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3^x} = 0$

## Pàgina 143

**13.** **Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ i $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, digues el valor del límit quan $x$ tendeix a 1 de les funcions següents:**

**a)** $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot g(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

**d)** $f(x)^{g(x)}$ **e)** $\sqrt{g(x)}$ **f)** $4f(x) - 5g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) + g(x)\big) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(4f(x) - 5g(x)\right) = 12 - 10 = 2$

**14.** **Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, aleshores $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.**

**Enuncia les restants propietats dels límits de les operacions amb funcions emprant-hi la notació adequada.**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, aleshores:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = l^m$

6) Si $n$ és senar, o si $n$ és parell i $f(x) \geq 0$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ i $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

**15.** **Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ i $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, digues, en els casos que sigui possible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de les funcions següents:**

**(Recorda que les expressions $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ són indeterminacions.)**

**a)** $2p(x) + q(x)$ **b)** $p(x) - 3q(x)$ **c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ **d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

**e)** $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ **f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ **g)** $s(x) \cdot p(x)$ **h)** $s(x)^{r(x)}$

**i)** $p(x)^{r(x)}$ **j)** $r(x)^{s(x)}$ **k)** $\dfrac{3-r(x)}{s(x)}$ **l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

**m)** $r(x)^{p(x)}$ **n)** $r(x)^{-q(x)}$ **o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$ **p)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = +\infty - (+\infty)$. Indeterminat.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminat.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = 0 \cdot (+\infty)$. Indeterminat.

h) $\lim\limits_{x \to 2} s(x)^{r(x)} = 0^3 = 0$

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3-3}{(0)} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminat.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminat.

p) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = 1^{-\infty}$. Indeterminat.

## Pàgina 144

**16. Calcula els límits següents:**

**a)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

**17. Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x + 2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{-10}{2 \cdot 1} = -5$

## Pàgina 151

### EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

### PER PRACTICAR

### Límits quan $x \to \pm\infty$

**18. Sabem que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$. En quins dels casos següents hi ha indeterminació per a $x \to +\infty$?**

**En els casos en què no n'hi hagi, digues quin n'és el límit:**

**a)** $f(x) + g(x)$ **b)** $g(x) + h(x)$

**c)** $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ **d)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

**e)** $[h(x)]^{g(x)}$ **f)** $[3 - h(x)] \cdot f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) + \lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x)\big) = +\infty + (-\infty) =$

$= +\infty - (+\infty) \;\;\rightarrow\;\;$ Indeterminació.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x) + h(x)\big) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \;\;\rightarrow\;\;$ Indeterminació.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [h(x)]^{g(x)} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} [3 - h(x)] \cdot f(x) = 0 \cdot (+\infty) \;\;\rightarrow\;\;$ Indeterminació.

**19. Calcula els límits quan $x \to -\infty$ de les funcions següents:**

**a)** $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

**c)** $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x}{7 + 5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 - 2x}{7 - 5x^3} = \dfrac{1}{5}$

**20. Calcula els límits següents comparant els exponents del numerador i del denominador:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2 - 7}{x + 1}}$

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2 - 7}{x + 1}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}} = 0$

**21.** **Calcula aquests límits i observa quin és l'infinit d'ordre superior:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7})$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

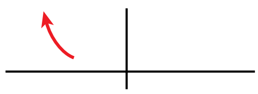
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

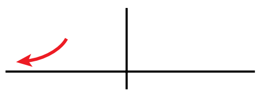
**22.** **Calcula els límits següents i representa'n gràficament els resultats obtinguts:**

**a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$



**23.** **Calcula el límit de les funcions següents quan $x \to +\infty$:**

**a)** $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + 1}{\log x}$

**c)** $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}}$ **d)** $\boldsymbol{i(x) = \dfrac{3^x}{2^x + 1}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{\log x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{2^x + 1} = +\infty$

## Límits en un punt

**24. Calcula els límits següents:**

**a)** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x + 6}{x^2 + 4x + 4}}$ **b)** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}}$

**c)** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}}$ **d)** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^2 + 15x}{x^3 - 3x^2}}$

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x + 6}{x^2 + 4x + 4} = \dfrac{0}{0}$ indet.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3(x + 2)}{(x + 2)^2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3}{x + 2} = \dfrac{3}{0}$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{3}{x + 2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{3}{x + 2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} = \dfrac{0}{0}$ indet.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 1)\,(x + 3)}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} (x + 1) = -2$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{0}{0}$ indet.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + 1)\,(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^2 + 15x}{x^3 - 3x^2} = \dfrac{0}{0}$ indet.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(5x^2 + 15)}{x(x^2 - 3x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^2 + 15}{x^2 - 3x} = \dfrac{15}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5x^2 + 15}{x^2 - 3x} = \dfrac{15}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5x^2 + 15}{x^2 - 3x} = \dfrac{15}{0^-} = -\infty$

**25.** **Si:** $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2} q(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0,$

**digues, en els casos que sigui possible, el valor dels límits següents:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

**c)** $\lim\limits_{x \to 2} [r(x)]^{q(x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty)$ $\rightarrow$ Indeterminat.

c) $\lim\limits_{x \to 2} [r(x)]^{q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

**26.** **Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)}\right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{(0)}.$

Trobem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = \dfrac{2}{0}$

Trobem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = +\infty.$

**27. Calcula:**

**a)** $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x-5}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2-7x+6}{x-1}$

**c)** $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-2x}$ **d)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x-5} = \frac{0}{-4} = 0$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2-7x+6}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-6)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x-6) = -5$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-2x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{2x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{2x} = \frac{3}{2}$

d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x-3)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-3)}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$

# Pàgina 152

## Continuïtat

**28. Esbrina si les funcions següents són contínues en $x = 2$:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \displaystyle \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (6-x) = 4 \\ f(2) = 6-2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ és contínua a $x = 2$, ja que $\displaystyle \lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \displaystyle \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x+1 = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ no és contínua a $x = 2$, ja que no existeix $\displaystyle \lim_{x \to 2} f(x)$.

**29. Estudia la continuïtat de les dues funcions següents:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- Si $x \neq 2 \Rightarrow$ És contínua, ja que està formada per funcions contínues.
- En $x \neq 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2^x = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 4 = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 2.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R}$.

b) El domini de la funció és $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Si $x \neq 0$ i $x \neq 1 \rightarrow$ La funció és contínua.
- En $x = 0$: És discontínua, ja que $f(x)$ no està definida per a $x = 0$. A més, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Hi ha una asímptota vertical en $x = 0$.
- En $x = 1$:

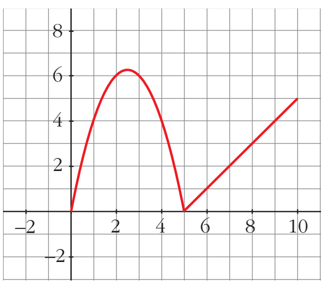
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ és contínua en } x = 1, \\ \text{ja que } \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \end{array}$$

**30. Estudia la continuïtat i representa gràficament la funció $f(x)$:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}}$$

Els trossos són polinomis, per tant són contínues.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 5x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x - 5) = 0 \end{array}\right\} \text{funció contínua}$$



**31.** **Estudia la continuïtat de les funcions següents, representa-les gràficament i digues quins en són els límits quan $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$.**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \le x \end{cases}$

- **Continuïtat:**

– Si $x \ne 0$ i $x \ne 1$ $\to$ És contínua, ja que està formada per funcions contínues.

– En $x = 0$ $\to \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 1) = 1 \end{array} \right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \\ \textit{No } \text{existeix } f(0). \end{array} \right.$

Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = 0$.

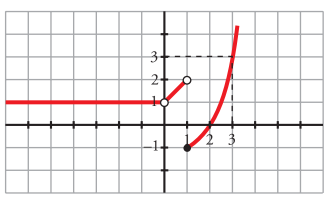
– En $x = 1$ $\to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

Discontinuïtat de salt finit en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$

- **Gràfica:**




b) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

- **Continuïtat:**

– Si $x \neq 3$ i $x \neq 6$ $\rightarrow$ És contínua, ja que està formada per funcions contínues.

– En $x = 3$ $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

– $f(x)$ és contínua en $x = 3$.

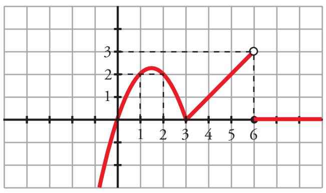
– En $x = 6$ $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} (x - 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} 0 = 0 \\ f(6) = 0 \end{array}\right.$

Discontinuïtat de salt finit en $x = 6$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

- **Gràfica:**




**32.** **Calcula el valor que ha de tenir $k$ perquè les funcions següents siguin contínues:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**c)** $f(x) = \begin{cases} 2x + k & \text{si } x < -1 \\ -kx - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Com que són funcions polinòmiques, només cal vigilar en el punt on s'uneixen els trossos.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

$2 + 1 = k - 2$

$k = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$0 + k = 0^2 - 1$

$k = -1$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$2(-1) + k = -k(-1) - 2$

$k - 2 = k - 2$

Sempre serà contínua sigui quin sigui el valor de $k$.

## PER RESOLDRE

**33. a) Calcula el límit de la funció $f(x)$ quan $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 5x + 6}$$

**b) Representa'n gràficament els resultats obtinguts.**

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

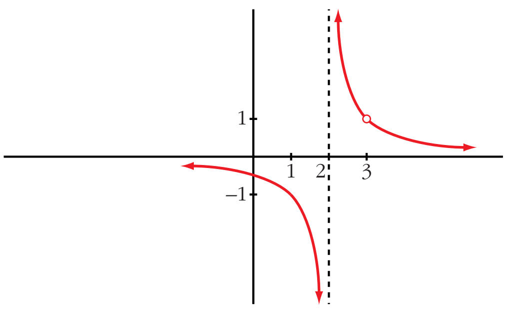
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(0)}.$$

Trobem els límits laterals: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

b)



**34.** **a) Calcula el límit de la funció $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ en aquells punts en què no està definida.**

**b) Troba'n el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$.**

**c) Representa la funció amb la informació que hi has obtingut.**

**d) Quins són els punts de discontinuïtat de la funció?**

a) El domini de la funció és: $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$, ja que el denominador s'anul·la a:

$$x^2 - 3x = 0 \;\to\; x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$$

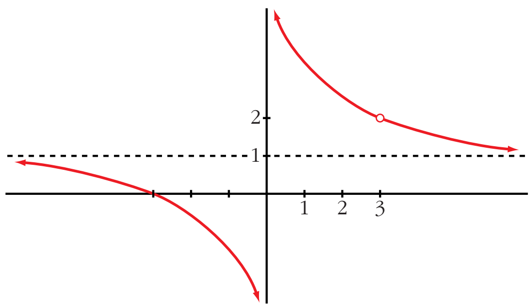
$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{(0)}.$$

Trobem els límits laterals: $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x+3}{x} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x+3}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x} = 1$; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{x} = 1$

c)




d) La funció és discontínua a $x = 0$ (té una asímptota vertical) i a $x = 3$ (no està definida; té una discontinuïtat evitable).

**35.** **Calcula el valor de $k$ perquè cada una de les funcions següents sigui contínua:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la funció és contínua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Perquè sigui contínua, ha de ser $k = 4$.

b) Perquè $f(x)$ sigui contínua a $x = 1$, ha de ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Per a $x = 1$, $f(x)$ és contínua (ja que està formada per funcions contínues).

Trobem $k$ perquè $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} k = k \\ &f(1) = k \end{aligned}\right\}$$

Ha de ser $k = 2$.

**36.** **Estudia la continuïtat de cada una de les funcions següents per als diferents valors del paràmetre $a$:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • A $x \ne 2$, la funció és contínua.

• A $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ &f(2) = 4 + 2a \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Perquè sigui contínua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\;\rightarrow\;\; a = -8 \end{array}$$

Per tant, la funció és contínua si $a = -8$, i és discontínua (a $x = 2$) si $a \ne -8$.

b) • A $x \ne 0$, la funció és contínua.

• A $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ &f(0) = 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Perquè sigui contínua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \;\;\rightarrow\;\; a = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Per tant, la funció és contínua si $a = \frac{1}{2}$, i és discontínua (a $x = 0$) si $a \ne \frac{1}{2}$.

**37.** **Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$.**

**a) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**

**b) Quina és la funció que coincideix amb $f(x)$ excepte en $x = 0$ i en $x = 1$?**

**c) En quins punts no és contínua $f(x)$?**

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2(x - 2)(x - 1)}{x(x - 1)}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x - 2)] = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x - 2)] = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$

c) En $x = 0$ i en $x = 1$. La funció no està definida en aquests valors (hi ha discontinuïtats evitables).

## Pàgina 153

**38.** **Calcula el límit de les funcions següents quan $x \to +\infty$:**

**a) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2}\right)$** **b) $g(x) = \left(\dfrac{2x + 1}{x - 3}\right)^{1 - x}$**

**c) $h(x) = \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1}\right)$** **d) $i(x) = \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x - 1}$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x + 1)}{2(x + 1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{x - 3}\right)^{1 - x} = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x - 1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

**39. Donada la funció:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}}$$

**calcula el valor de $b$ perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = -1$. És contínua en $x = 1$?**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

- Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = -1$, s'ha de tenir que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{x^2} + b\right) = 1 + b \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (3x^2 + 4) = 7 \\ f(-1) = 1 + b \end{array}\right\} \text{Ha de ser } 1 + b = 7\text{; és a dir, } b = 6.$$

- Vegem que la funció també és contínua en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x^2 + 4) = 7 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^3 + 8) = 7 \\ f(1) = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = f(1). \\ f(x) \text{ és contínua en } x = 1 \end{array}$$

**40. Estudia la continuïtat, representa i troba els límits per a $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$ de la funció:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **Continuïtat:**

– Si $x \ne 1$ i $x \ne 2$ → És contínua, ja que està formada per funcions contínues.

– En $x = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\}$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$

$f(x)$ és contínua en $x = 1$

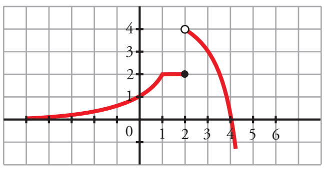
– En $x = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 4x) = 4 \\ f(2) = 2 \end{array} \right.$

Discontinuïtat de salt finit en $x = 2$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$

- **Gràfica:**




**41.** **Sigui** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**Estudia'n la continuïtat i representa-la gràficament.**

Tots els trossos són funcions polinòmiques. Avaluem $x = -1$ i $x = 2$.

En $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$(-1)^2 + 2(-1) + 1 \stackrel{?}{=} 2(-1) + 2$

$0 = 0$

Contínua en $x = -1$

En $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$2 \cdot 2 + 2 \stackrel{?}{=} -2^2 + 8 \cdot 2$

$6 \neq 12$

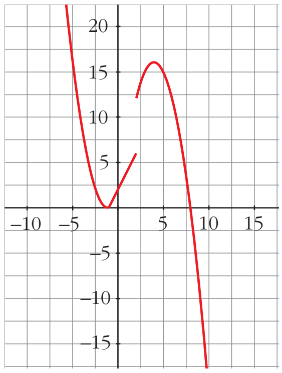
No contínua en $x = 2$

El tros 1 $x^2 + 2x + 1$ és una paràbola còncava amb el mínim a $x = \dfrac{-2}{2 \cdot 1} = -1$, vèrtex $(-1, 0)$, definida de $-\infty$ a $-1$.

El tros 2 $2x + 2$ és una recta de pendent 2 que passa pel $(0, 2)$, definida de 1 a 2.

El tros 3 $-x^2 + 8x$ és una paràbola convexa amb el mínim a $x = 0$ (0, 0), definida de 2 a $+\infty$. Talla els eixos en $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$ i (0, 0).

- **Gràfica:**




**42. Estudia la continuïtat de les funcions següents i representa-les:**

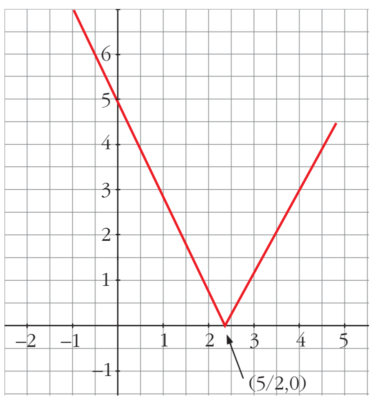
**a)** $f(x) = |2x-5| = \begin{cases} -2x+5 & \text{si } x < \frac{5}{2} \\ 2x-5 & \text{si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$

**b)** $f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

**c)** $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^-} f(x) = -2 \cdot \dfrac{5}{2} + 5 = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = 2 \cdot \dfrac{5}{2} - 5 = 0 \end{array}\right\}$ Contínua en $x = \dfrac{5}{2}$

També a la resta ja que són polinomis



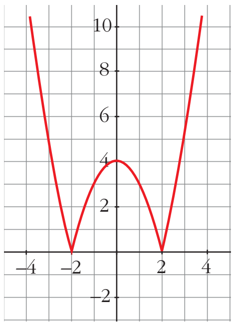
b) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0\end{array}\right\}\text{Contínua en } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0\end{array}\right\}\text{Contínua en } x = 2$$

En la resta de punt també ho és ja que és un polinomi.

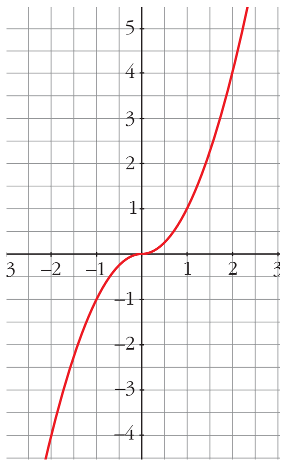
És una paràbola de vèrtex (0, –4) que creua els eixos en (–2, 0) i (2, 0).

El valor absolut passa a positiu tots els valors negatius.




c) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2) = 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Contínua en } x = 0 \\ \text{La resta de punt també és contínua ja que és polinómica.}\end{array}$$

Són dues branques de paràbola connectada en $x = 0$.



**43.** **Una empresa ha establert per als seus empleats un incentiu (en centenars d'euros) en relació amb el valor $x$ (en centenars d'euros) d'allò que ha venut cadascun. Aquest incentiu segueix la funció:**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01x & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x + 2300} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

**a) Estudia la continuïtat de $f(x)$. Indica si l'incentiu rebut per un empleat és sensiblement diferent si el valor de les vendes és lleugerament superior o inferior a 10 000 €.**

**b) Quina és la quantitat màxima que un empleat podria rebre com a incentiu si les seves vendes fossis molt grans? Justifica la teva resposta.**

a) Domini = $[0, +\infty)$

– Si $x \neq 100 \rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per funcions contínues als intervals definits.

$$\text{– En } x = 100 \rightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 100^-} f(x) = \lim_{x \to 100^-} 0{,}01x = 1 \ \ (100 \text{ €}) \\ \displaystyle\lim_{x \to 100^+} f(x) = \lim_{x \to 100^+} \frac{30x}{2x + 2300} = 1{,}2 \ \ (120 \text{ €}) \\ f(100) = 1 \ \ (100 \text{ €}) \end{cases}$$

Hi ha una discontinuïtat de salt finit en $x = 100$.

Com que $\displaystyle\lim_{x \to 100^-} f(x) \neq \lim_{x \to 100^+} f(x)$, l'incentiu rebut per un empleat sí és sensiblement diferent si el valor de les seves vendes és lleugerament superior o inferior a 10 000 € ($x = 100$).

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{30x}{2x + 2300} = 15 \rightarrow 1500$ €

**44.** **Les conclusions d'un estudi estableixen que el nombre d'individus d'una determinada població d'una espècie protegida vindrà donat, durant els propers anys, per la funció:**

**$f(t) = \dfrac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$, essent $t$ el nombre d'anys transcorreguts. Es demana:**

**a) Dimensió actual de la població.**

**b) Com evoluciona la dimensió de la població entre els anys 4 i 9?**

**c) Si aquesta funció fos vàlida indefinidament, s'estabilitzaria la dimensió de la població? Justifica la resposta.**

a) $f(0) = 5000$ individus.

b) T.V.M. $[4, 9] = \dfrac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \dfrac{7250 - 7000}{5} = \dfrac{250}{5} = 50$

Augmenta en 250 individus, la qual cosa suposa un augment mitjà de 50 per any.

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15\,000\,t + 10\,000}{2\,t + 2} = 7500$

S'estabilitzaria en 7500 individus.

**45. La profunditat de la capa de sorra d'una platja estarà afectada per la construcció d'una escullera. En una zona de la platja, aquesta profunditat vindrà donada per la funció següent:**

$$P(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

**$P$ és la profunditat en metres i $t$ el temps en anys des de l'inici de la construcció. Si la profunditat arribés a superar els 4 metres, s'hauria d'elevar l'altura del passeig marítim.**

**a) És $P(t)$ una funció contínua?**

**b) Caldrà elevar l'altura del passeig amb el pas del temps, a causa de la profunditat de la sorra?**

**c) Fes una gràfica aproximada de $P(t)$.**

a) El tros 1 és polinòmic, per tant serà contínua.

El tros 2 no estarà definit en $2t^2 = 0 \;\rightarrow\; t = 0$. Com que $t = 0$ està en el domini de definició del tros 1, no hi ha cap problema. Per acabar, cal avaluar $t = 1$.

$$\lim_{t \to 1^-} P(t) \stackrel{?}{=} \lim_{t \to 1^+} P(t)$$

$$2 + 1^2 \stackrel{?}{=} \frac{8 \cdot 1^2 - 1 - 1}{2 \cdot 1^2}$$

$3 = 3$ Sí, la funció és contínua per a tot $x$.

b) En $t = 0 \;\rightarrow\; P(0) = 2 < 4$

En $t = 1 \;\rightarrow\; P(1) = 3 < 4$

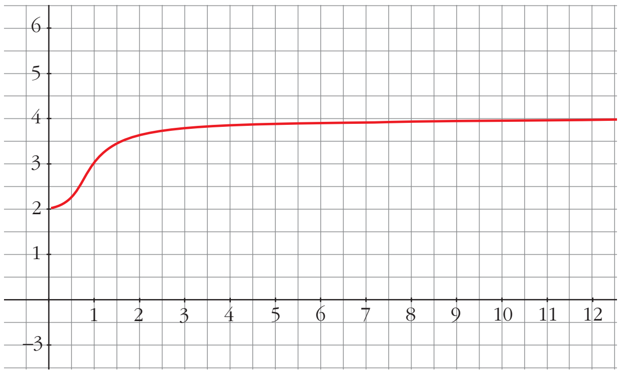
El tros 1 és una paràbola còncava amb vèrtex a $t = 0$ a (0, 2), per tant en el tros 1 no hi haurà problema.

Del tros 2, n'avaluem el límit quan $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8\cancel{t^2}}{2\cancel{t^2}} = 4$. La funció no arribarà mai a 4, i no caldrà elevar el passeig.

c)




## Pàgina 154

**46. S'ha investigat el temps (*T*, en minuts) que es triga a realitzar una prova d'atletisme d'acord amb el temps d'entrenament dels esportistes (*x*, en dies), i s'ha obtingut que:**

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30}, & 0 \le x \le 30 \\[2ex] \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

**a) Justifica que la funció *T* és contínua en tot el seu domini.**

**b) Per molt que s'entreni un esportista, serà capaç de fer la prova en menys d'1 minut? I en menys de 2?**

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30}, & 0 \le x \le 30 \\[2ex] \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) • La funció $y = \dfrac{300}{x+30}$ és contínua, excepte en $x = -30$; però, com que només la considerem en $0 \le x \le 30$, serà contínua en l'interval $(0, 30)$.

• La funció $y = \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2$ és contínua, excepte en $x = 5$ i en $x = 15$; però com que l'estem considerant per a $x > 30$, és contínua en l'interval $(30, +\infty)$.

• Per tant, si $x \ne 30$ $(x \in [0, 30) \cup (30, +\infty))$, la funció $T(x)$ és contínua.

- Si $x = 30$, tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 30^-} T(x) = \lim\limits_{x \to 30^-} \dfrac{300}{x+30} = 5 \\ \\ \lim\limits_{x \to 30^+} T(x) = \lim\limits_{x \to 30^+} \left(\dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 5 \\ \\ T(30) = 5 \end{array}\right\} T(x) \text{ és contínua en } x = 30.$$

- Per tant, $T(x)$ és contínua en el seu domini.

b) $T(0) = 10$ minuts; i, com major és el temps d'entrenament, menys triguen a realitzar la prova. A més:

$$\lim_{x \to +\infty} T(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 2$$

Per tant, cap esportista no seria capaç de realitzar la prova en menys d'1 minut ni en menys de 2 minuts.

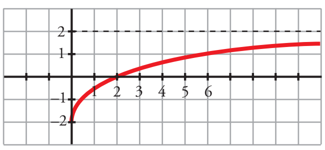
**47.** **S'ha comprovat que les pèrdues o guanys d'una empresa s'ajusten a la funció $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$, essent $x$ els anys de vida de l'empresa ($x \geq 0$) i $y$ les pèrdues o guanys en centenars de milers de €.**

**a) Representa la funció.**

**b) En quin any deixa de tenir pèrdues?**

**c) Estan limitats els seus beneficis? Si ho estan, quin n'és el límit?**

a)




b) $\dfrac{2x-4}{x+2} = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ (i la funció és creixent).

Deixa de tenir pèrdues el 2.n any ($x = 2$).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2 \rightarrow 200\,000$ €.

El benefici està limitat a 200 000 €.

**48.** **Un comerciant ven un producte determinat. Per cada unitat de producte cobra la quantitat de 5 €. No obstant això, si se li n'encarreguen més de 10 unitats, disminueix el preu per unitat, i per cada $x$ unitats cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

**a) Troba $a$ de manera que el preu varii de forma contínua en variar el nombre d'unitats que es comprin.**

**b) A quant tendeix el preu d'una unitat quan es compren "moltíssimes" unitats?**

☛ ***El preu d'una unitat és*** $\dfrac{C(x)}{x}$.

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Perquè sigui contínua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \quad \to \quad 100a + 500 = 2500 \quad \to \quad 100a = 2000 \quad \to \quad a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4,47$ €

## QÜESTIONS TEÒRIQUES

**49.** **Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.**

**El segon membre de la igualtat manca de sentit quan $x = 2$. Com elegim el valor de $f(2)$ perquè la funció $f$ sigui contínua en aquest punt?**

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Perquè $f$ sigui contínua a $x = 2$, hem d'elegir $f(2) = 4$.

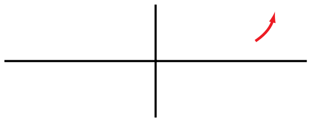
**50.** **Expressa simbòlicament cada una d'aquestes frases i fes-ne una representació gràfica de cada cas:**

**a) Podem aconseguir que $f(x)$ sigui major que qualsevol nombre $K$, per gran que sigui, donant a $x$ valors tan grans com calgui.**

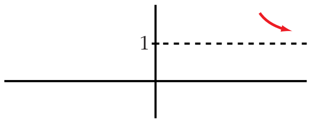
**b) Si pretenem que els valors de $g(x)$ estiguin tan pròxims a 1 com vulguem, haurem de donar a $x$ valors suficientment grans.**

**c) Podem aconseguir que $h(x)$ sigui major que un nombre $K$, per gran que sigui, donant a $x$ valors suficientment pròxims a 2.**

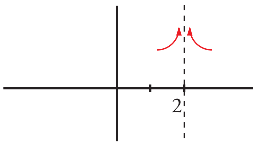
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$




c) $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = +\infty$




**51.** **D'una funció $g$ se sap que és contínua en l'interval tancat [0, 1] i que per a $0 < x \leq 1$ és:**

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

**Quant val $g(0)$?**

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1.$$

Així doncs, $g(0) = 1$.

**52.** **Escriu una definició per a cada una d'aquestes expressions i fes una representació de $f$:**

**a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

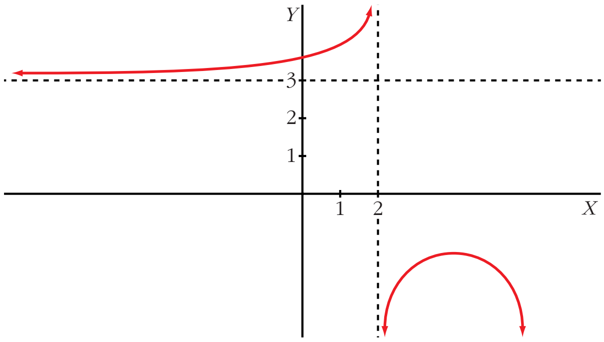
**c)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

a) Podem aconseguir que $f(x)$ estigui tan pròxim a 3 com vulguem només donant a $x$ valors prou «grans i negatius».

b) Podem aconseguir que $f(x)$ sigui tan «negatiu» com vulguem només prenent $x$ tan gran com calgui.

c) Podem aconseguir que $f(x)$ prengui valors tan grans com vulguem només donant $x$ valors tan pròxims a 2 (però menors que 2) com calgui.

d) Podem aconseguir que $f(x)$ prengui valors tan «grans i negatius» com vulguem només donant a $x$ valors tan pròxims a 2 (però majors que 2) com calgui.




**53.** **Si una funció no està definida en $x = 3$, pot passar que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$?**

**Pot ser contínua la funció en $x = 3$?**

Sí, pot ser que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, per exemple:

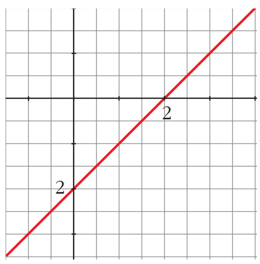
$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ és tal que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; i $f(x)$ no està definida en $x = 3$.

No obstant això, $f(x)$ no pot ser contínua en $x = 3$ (ja que no existeix $f(3)$).

**54.** **D'una funció contínua, $f$, sabem que $f(x) < 0$ si $x < 2$ i $f(x) > 0$ si $x > 2$. Podem assegurar que no té límit en $x = 2$? Posa'n exemples.**

No ho podem assegurar.

CAS 1

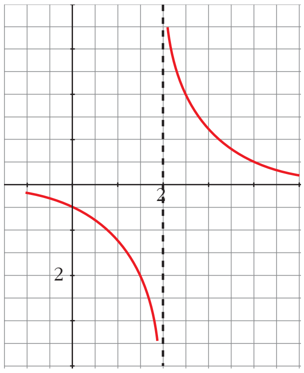



$f(x) = x - 2$ compleix que $\begin{cases} f(x) < 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) > 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Si calculem $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0$

En aquest cas existeix el límit.

CAS 2




$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ compleix que $\begin{cases} f(x) < 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) > 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Si calculem $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$$

No existeix el límit.

## Pàgina 155

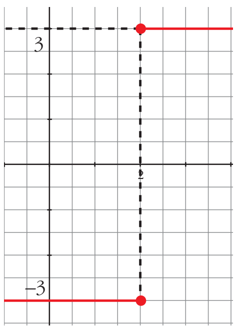
**55. Dibuixa, en cada cas, la gràfica d'una funció $f(x)$ que compleix:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -3$ **i** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

**b)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -2$ **i** $f(2) = 1$

**Pot ser $f$ una funció contínua en algun dels dos casos?**

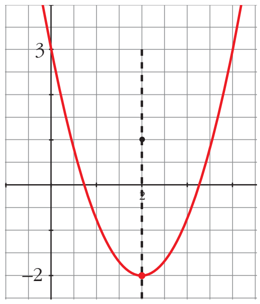
a)




Per exemple:

$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 2 \\ -3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

b)




Per exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Mai poden ser contínues, ja que incompleixen:

a) límits laterals iguals

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

b) imatge = límit

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

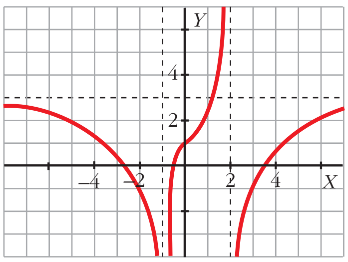
**56.** **Sigui $P$ un polinomi: $P(x) = ax^2 + bx + c$**

**Prova que $\dfrac{P(x) - P(0)}{x}$ té límit en 0 i calcula'n el valor.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x) - P(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + c - c}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(ax + b)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} (ax + b) = b$$

**57.** **Calcula sobre la gràfica d'aquesta funció:**




**a)** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

**b)** $\lim_{x \to -1} f(x)$

**c)** $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

**d)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

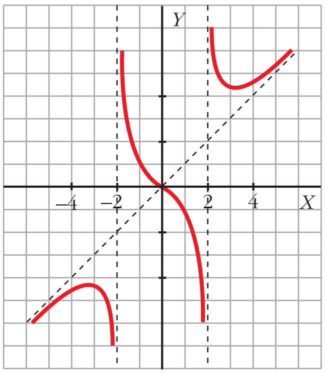
a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

**58. Troba, observant la gràfica d'aquesta funció, els límits següents:**




**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

**b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

**c)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

**d)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

**e)** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

**f)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

## PER APROFUNDIR

**59.** **Calcula $a$ per tal que $\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \frac{1}{6}$**

$$\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x-a}{(x+a)(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{2a} = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad a = 3$$

**60.** **Estudia la continuïtat de les funcions següents, definint-les prèviament en intervals:**

**a)** $y = 1 - |x|$ **b)** $y = |x-3| - x$ **c)** $y = \frac{1}{|x-1|}$

**d)** $y = x|x-3|$ **e)** $y = |x^2-1|$ **f)** $y = |x-2| + |x|$

a) És contínua en $\mathbb{R}$, ja que és la diferència de dues funcions contínues.

$$y = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) És contínua en $\mathbb{R}$, ja que és la diferència de dues funcions contínues.

$$y = |x-3| - x = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ -3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

c) És contínua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$y = \frac{1}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{-x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

d) $y = x|x-3|$

El valor absolut no actua quan $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$, en canvi, el valor absolut actua (canviant de signe) quan $x - 3 < 0 \rightarrow x < 3$.

Així, la funció ens queda:

$$y = \begin{cases} x \cdot (3-x) & \text{si } x < 3 \\ x \cdot (x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 3x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Els trossos són polinòmics (paràboles), per tant, mirarem només $x = 3$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} y &= \lim_{x \to 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim_{x \to 3^+} y &= \lim_{x \to 3^+} (x^2 - 3x) = 0 \end{aligned}\right\} \text{És contínua.}$$

e) És contínua en $\mathbb{R}$.

$$y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f) És contínua en $\mathbb{R}$, ja que és la diferència de dues funcions contínues.

$$y = |x - 2| + |x| = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**61. Estudia la continuïtat de la funció següent:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x & \textbf{si } x \le -1 \\ |x - 2| & \textbf{si } -1 < x \end{cases}}$$

El valor absolut no actua quan $x - 2 > 0 \rightarrow x < 2$; en canvi, el valor absolut actua (canviant de signe) quan $x - 2 < 0 \rightarrow x < 2$.

Això ens permet transformar la funció en:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le -1 \\ 2 - x & \text{si } -1 < x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Els tres trossos són polinòmics, la funció serà contínua en ells. Avaluem:

$x = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

$-1 = 2 - (-1)$

$-1 \ne 3$

No és contínua en $x = -1$

$x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$2 - 2 \stackrel{?}{=} 2 - 2$

$0 = 0$

És contínua en $x = 2$

La funció $f(x)$ no és contínua ja que en $x = -1$ no és contínua.

**62. Estudia la continuïtat de la funció: $\boldsymbol{y = 2x + \frac{|x|}{x}}$ en $\boldsymbol{x = 0}$. Quin tipus de discontinuïtat té?**

En $x = 0$, la funció no està definida; per tant, és discontínua. Com que:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ aleshores:}$$

$$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$$

Així doncs, hi ha una discontinuïtat de salt (finit) en $x = 0$.

**63.** **Donada la funció $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

**64.** **Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x)$

**b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}$

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x} - x}$

☛ ***Multiplica i divideix per*** $\sqrt{x^2+3x} + x$

a) $$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - x)(\sqrt{x^2+3x} + x)}{\sqrt{x^2+3x} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x} - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}\right)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2-(x^2-4)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2-x^2+4}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} = 0$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x} - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x} + x)}{(\sqrt{x^2+4x} - x)(\sqrt{x^2+4x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x} + x}{x^2+4x-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x} + x}{4x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2} + x}{4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-x}{4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

**65. Calcula els límits següents:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(1 - \sqrt{3 - x}\right)\left(1 + \sqrt{3 - x}\right)}{(x - 2)\left(1 + \sqrt{3 - x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - (3 - x)}{(x - 2)\left(1 + \sqrt{3 - x}\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - 3 + x}{(x - 2)\left(1 + \sqrt{3 - x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x - 2)\left(1 + \sqrt{3 - x}\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1 + \sqrt{3 - x}} = \dfrac{1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x + 9} - 3\right)\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)}{x^2\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 9 - 9}{x^2\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)} = \dfrac{1}{(0)}$

Trobem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)} = +\infty$