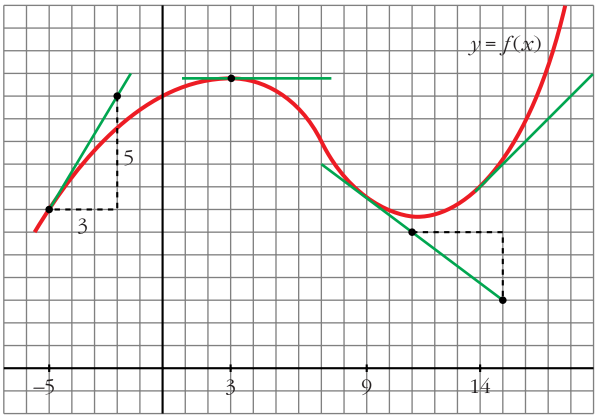
UNITAT 7

DERIVADES. TÈCNIQUES DE DERIVACIÓ

Pàgina 156

Tangents a una corba



- **Troba, mirant la gràfica i les rectes traçades, $f'(3)$, $f'(9)$ i $f'(14)$.**

  $f'(3) = 0$; $f'(9) = \dfrac{-3}{4}$; $f'(14) = 1$

- **Digues uns altres tres punts en què la derivada sigui positiva.**

  La derivada també és positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

- **Digues un altre punt en què la derivada sigui zero.**

  La derivada també és zero en $x = 11$.

- **Digues uns altres dos punts en què la derivada sigui negativa.**

  La derivada també és negativa en $x = 4$, $x = 5$…

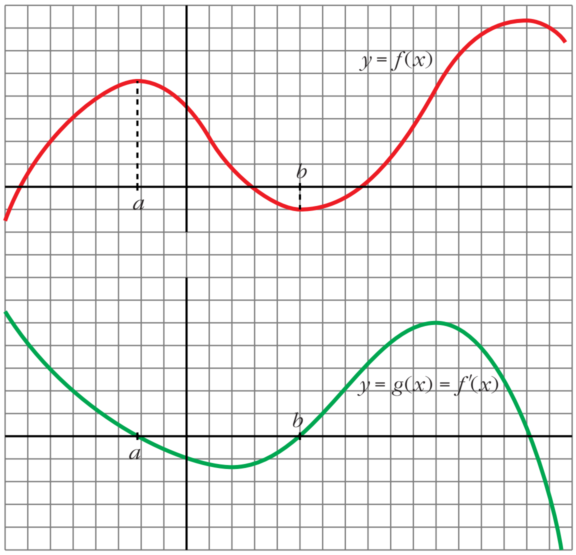
- **Digues un interval $[a, b]$ en el qual es compleixi que "si $x \in [a, b]$, llavors $f'(x) > 0$".**

  Per exemple, en l'interval $[-5, 2]$ es compleix que, si $x \in [-5, 2]$, aleshores $f'(x) > 0$.

Pàgina 157

Funció derivada

- **Continua escrivint les raons per les quals $g(x)$ és una funció el comportament de la qual respon al de la derivada de $f(x)$.**



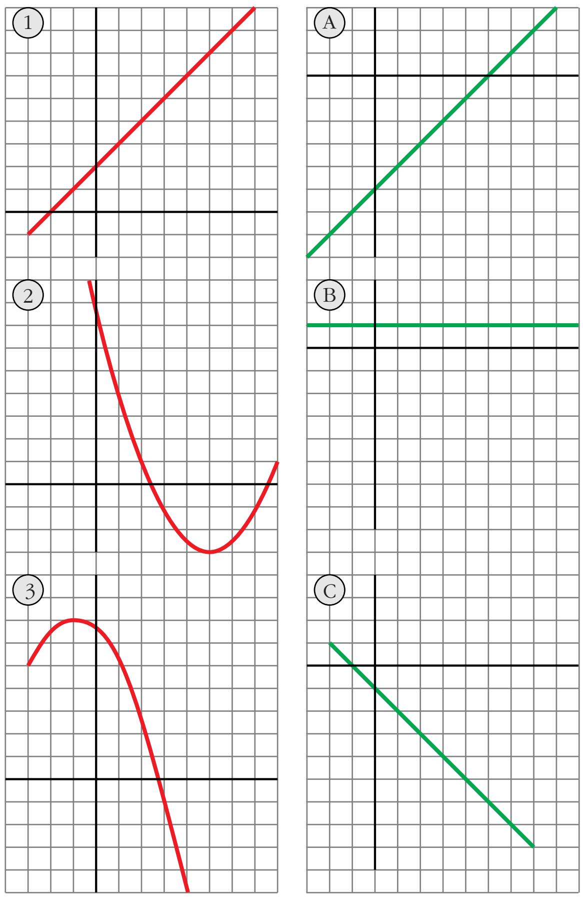
- En l'interval (a, b), $f(x)$ és decreixent. Per tant, la seva derivada és negativa. És el que li passa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f a b és 0: $f'(b) = 0$. I també és $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ on $f(x)$ té tangent horitzontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ on $f(x)$ és creixent.

  $g(x) = f'(x) < 0$ on $f(x)$ és decreixent.

- **Les gràfiques *A*, *B* i *C* són les funcions derivades de les gràfiques 1, 2 i 3, però en un altre ordre. Respon raonadament quina és la de cadascuna.**



1) B

2) A

3) C

La derivada s'anul·la en els punts de tangent horitzontal, és positiva on la funció és creixent, i és negativa on la funció decreix.

Pàgina 159

EXERCICIS PROPOSATS

1. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$ **És derivable en $x_0 = 2$?**

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1$

La funció no és contínua en $x = 2$, ja que: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Per tant, tampoc no és derivable en $x = 2$.

2. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 8, & x > 2 \end{cases}$ **És derivable en $x_0 = 2$?**

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 8) = -4$

La funció és contínua, ja que: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -4$

$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f'(2^-) = -3 \neq f'(2^+) = 4$

Per tant, $f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

Pàgina 161

3. **Calcula la derivada de cada una de les funcions següents:**

a) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

c) $f(x) = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$

d) $f(x) = \dfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}}$

f) $f(x) = \ln \sqrt{e^{tg\, x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x + 1}}$

h) $f(x) = \log (\sin x \cdot \cos x)^2$

i) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + x$

j) $f(x) = \sin\sqrt{x + 1} \cdot \cos \sqrt{x - 1}$

k) $f(x) = 7^{\sin(x^2 + 1)}$

l) $f(x) = \sin(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{\sin x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = \cos^2 \sqrt[3]{x + (3 - x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1 + x) - (1 - x) \cdot 1}{(1 + x)^2} = \dfrac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2} = \dfrac{-2}{(1 + x)^2}$

b) Utilitzem el resultat obtingut a a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}} \cdot \frac{-2}{(1 + x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x)(1 + x)^3}}$$

c) Utilitzem el resultat obtingut a a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{-2}{(1 + x)^2} = \frac{-2(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)^2} = \frac{-2}{1 - x^2}$$

D'una altra manera: Si agafem logaritmes prèviament:

$f(x) = ln\,(1 - x) - ln\,(1 + x)$. Derivem:

$$f'(x) = \frac{-1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{-1 - x - 1 + x}{1 - x^2} = \frac{-2}{1 - x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1 + tg^2\, x)(1 + tg\, x) - (1 - tg\, x) \cdot (1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2} =$

$$= \frac{(1 + tg^2\, x)[-1 - tg\, x - 1 + tg\, x]}{(1 + tg\, x)^2} = \frac{-2(1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2}$$

D'una altra manera: Si tenim en compte el resultat obtingut a a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1 + tg\, x)^2} \cdot D[tg\, x] = \frac{-2}{(1 + tg\, x)^2} \cdot (1 + tg^2\, x) = \frac{-2(1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2}$$

e) Tenint en compte el que hem obtingut a d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\, x)}{\sqrt{(1 - tg\, x)(1 + tg\, x)^3}}$$

També podríem haver arribat a aquest resultat utilitzant el que hem obtingut a b).

f) $f(x) = ln\, \sqrt{e^{tg\, x}} = ln\, e^{(tg\, x)/2} = \dfrac{tg\, x}{2}$

$$f'(x) = \frac{1 + tg^2\, x}{2}$$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x + 1}} = 3^{(x + 1)/2}$

$$f'(x) = 3^{(x + 1)/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot ln\, 3 = \frac{ln\, 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x + 1}}$$

h) $f(x) = log\,(sin\, x \cdot cos\, x)^2 = 2[log\,(sin\, x) + log\,(cos\, x)]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\, x}{sin\, x} \cdot \frac{1}{ln\, 10} + \frac{-sin\, x}{cos\, x} \cdot \frac{1}{ln\, 10}\right] = \frac{2}{ln\, 10} \cdot \frac{cos^2\, x - sin^2\, x}{sin\, x \cdot cos\, x} =$$

$$= \frac{4}{ln\ 10} \cdot \frac{cos^2 x - sin^2 x}{2 sin\ x \cdot cos\ x} = \frac{4}{ln\ 10} \cdot \frac{cos\ 2x}{sin\ 2x} = \frac{4}{ln\ 10 \cdot tg\ 2x}$$

D'una altra manera:

$$f(x) = log\ (sin\ x \cdot cos\ x)^2 = 2\ log \left(\frac{sin\ 2x}{2} \right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\ 10} \cdot \frac{cos\ 2x}{\frac{sin\ 2x}{2}} = \frac{4}{ln\ 10 \cdot tg\ 2x}$$

i) $f(x) = sin^2\ x + cos^2\ x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $f'(x) = \dfrac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{sin\sqrt{x+1} \cdot \left(-sin\sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}} =$

$$= \frac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sin\sqrt{x+1} \cdot sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = 7^{sin(x^2+1)} \cdot ln\ 7 \cdot D\left(sin\ (x^2+1)\right) = 7^{sin(x^2+1)} \cdot ln\ 7 \cdot 2x \cdot cos(x^2+1)$

l) $f'(x) = cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sin\ x + x^2 + 1}} \cdot (cos\ x + 2x) = \dfrac{cos\ x + 2x}{2\sqrt{sin\ x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sin\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2(3-x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$

$$= \frac{-2\ cos\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\ sin\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{(5 - 2x) \cdot sin\left(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$$

4. **Troba les derivades 1a, 2a i 3a de les funcions següents:**

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\ cos\ x$ **c)** $y = sin^2\ x + cos^2\ x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x$

$y' = cos\ x - x\ sin\ x$

$y'' = -sin\,x - sin\,x - x\,cos\,x = -2sin\,x - x\,cos\,x$

$y''' = -2cos\,x - cos\,x + x\,sin\,x = -3cos\,x + x\,sin\,x$

c) $y = sin^2\,x + cos^2\,x + x = 1 + x$

$y' = 1;\; y'' = 0;\; y''' = 0$

5. Calcula $f'(1)$ essent: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\, x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\, \frac{1}{\sqrt[30]{x^{17}}}$$

Per tant: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

6. Calcula $f'(\pi/6)$ essent: $f(x) = (cos^2\,3x - sin^2\,3x) \cdot sin\,6x$

$$f(x) = (cos^2\,3x - sin^2\,3x) \cdot sin\,6x = cos\,6x \cdot sin\,6x = \frac{sin\,12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12cos\,12x}{2} = 6cos\,12x$$

Per tant: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\,\dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

7. Calcula $f'(0)$ essent: $f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$

$$f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2 = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{8x + 4}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - (16x^3 + 24x^2 + 24x + 8)}{\sqrt{3} \cdot (2x^2 + 2x + 2)} =$$

$$= \frac{-16x^3 - 24x^2 + (2\sqrt{3} - 24)x + \sqrt{3} - 8}{\sqrt{3} \cdot (2x^2 + 2x + 2)}$$

Per tant: $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3} - 8}{2\sqrt{3}}$

Pàgina 164

8. **Estudia la derivabilitat en $x_0 = 3$ de la funció:** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$

- Continuïtat en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0 \\ \text{Per tant, } f(x) \text{ és contínua en } x_0 = 3. \end{array}$$

- Derivabilitat en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\} \text{Les derivades laterals existeixen i coincideixen.}$$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $x_0 = 3$. A més, $f'(3) = 3$.

9. **Calcula m i n perquè $f(x)$ sigui derivable en $\mathbb{R}$:** $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$

- Si $x \neq 0$, la funció és contínua i derivable, ja que està formada per dos polinomis.

- Continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\} \text{Perquè } f(x) \text{ sigui contínua en } x = 0, \text{ ha de ser: } n = 5$$

- Derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\} \text{Perquè sigui derivable en } x = 0, \text{ ha de ser: } -m = 0 \rightarrow m = 0$$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $\mathbb{R}$ per a $m = 0$ i $n = 5$.

Pàgina 168

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Definició de derivada

10. **Troba la taxa de variació mitjana (TVM) de les funcions següents en els intervals: [–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h]**

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7x - 5$ **c)** $f(x) = 3$ **d)** $f(x) = 2^x$

En quines és constant la TVM? Quin tipus de funcions són?

a) $f(x) = x^2 + 1$

En $[-3, -1] \to \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En $[0, 2] \to \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En $[2, 5] \to \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + \text{h}] \to \text{TVM} = \dfrac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \dfrac{\text{h}^2 + 2\text{h}}{\text{h}} = \text{h} + 2$

b) $f(x) = 7x - 5$

En $[-3, -1] \to \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En $[0, 2] \to \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En $[2, 5] \to \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + \text{h}] \to \text{TVM} = \dfrac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \dfrac{7\text{h}}{\text{h}} = 7$

c) $f(x) = 3$

En $[-3, -1] \to \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En $[0, 2] \to \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En $[2, 5] \to \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 0$

En $[1, 1 + \text{h}] \to \text{TVM} = \dfrac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = 0$

d) $f(x) = 2^x$

En $[-3, -1] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = \dfrac{3}{16}$

En $[0, 2] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{3}{2}$

En $[2, 5] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = \dfrac{29}{3}$

En $[1, 1 + h] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{2 \cdot (h^2 - 1)}{h}$

La funció b) $f(x) = 7x - 5$ és una funció afí i la TVM és constant.

La funció c) $f(x) = 3$ és una funció constant i la TVM és 0 (constant).

11. Troba la TMV de la funció $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en l'interval $[2, 2 + h]$ i, amb el resultat obtingut, calcula $f'(2)$.

$f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $[2, 2 + h]$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} (-h + 1) = 1$$

12. Utilitzant la definició de derivada, calcula $f'(3)$ en les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{2}$ **b)** $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = (x - 5)^2$ **d)** $f(x) = \dfrac{2 + x}{x}$

a) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3h/7)}{h} = \dfrac{3}{7}$

b) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h}{h} = 6$

c) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = -4$

d) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{9h + 3h^2} = \dfrac{-2}{9}$

13. Calcula la funció derivada de les funcions següents, utilitzant la definició:

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2}$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **d)** $f(x) = x^2 - x$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5h/2}{9} = \dfrac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 - 6xh}{h} = 6x$

c) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x-2) \cdot (x+h-2) \cdot h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x-2) \cdot (x+h-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$

d) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh - h}{h} = 2x - 1$

14. Calcula, aplicant la definició de derivada, $f'(2)$, $f'(-1)$ i $f'(x)$, si $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x^2 + xh} = \frac{1}{x^2}$

per tant,

$f'(2) = 4$ i $f'(-1) = 1$.

15. Comprova, utilitzant la definició de derivada, que la funció $f(x) = \sqrt{x}$ no té derivada en $x = 0$.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{\sqrt{x}} = \infty$; no existeix.

16. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = e^x$ en l'interval $[2; 2{,}001]$ i comprova que el seu valor és molt proper a e^2.

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + 0{,}001) - f(2)}{0{,}001} \approx 7{,}39 \approx e^2$

17. Donada $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, troba $f'(1)$ i $f'(3)$ utilitzant la definició de derivada.

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1(1+h) - 3 + 1}{h} = 2$

$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 1 - 2}{h} = 1$

Regles de derivació

18. Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \frac{x+1}{(2-x)^2}$ **c)** $y = \frac{3x^2}{x + \sqrt{x}}$ **d)** $y = \left(0{,}5 - \frac{x}{10}\right)^4$

a) $y' = \dfrac{2x(x^2+3) - (x^2-3)\,2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$

b) $y' = \dfrac{(2-x)^2 + (x+1)\cdot 2(2-x)}{(2-x)^4} = \dfrac{x+4}{(2-x)^3}$

c) $y' = \dfrac{6x\cdot(x+\sqrt{x}) - 3x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2} = \dfrac{9x^2+6x^2\cdot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot(x+\sqrt{x})^2}$

d) $y' = \dfrac{-4}{10}\cdot\left(0{,}5-\dfrac{x}{10}\right)^3 = \dfrac{-2}{5}\cdot\left(0{,}5-\dfrac{x}{10}\right)^3$

19. Troba la derivada d'aquestes funcions:

a) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ **b)** $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$ **c)** $y = \dfrac{1}{\sin x}$ **d)** $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

a) $y' = \dfrac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}$

b) $y' = 3\cdot\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2\cdot\dfrac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2} = 3\cdot\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2}$

c) $y' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$

d) $y' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

20. Deriva les funcions següents:

a) $y = e^{4x}(x-1)$ **b)** $y = \dfrac{(1-x)^2}{e^x}$ **c)** $y = \sqrt{2^x}$ **d)** $y = \ln(2x-1)$

a) $y' = 4\cdot e^{4x}\cdot(x-1) + e^{4x}\cdot 1 = e^{4x}\cdot(4x-3)$

b) $y' = \dfrac{-2\cdot(1-x)\cdot e^x - (1-x)^2\cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2\cdot(1-x)-(1-x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x\cdot\ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1}\cdot\ln 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

21. Deriva aquestes funcions:

a) $y = \ln(x^2-1)$ **b)** $y = \ln\sqrt{1-x}$ **c)** $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$ **d)** $y = \sin^2 x^2$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

b) $y = \ln \sqrt{1-x} = \ln (1-x)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln (1-x)$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(1-x)} = \frac{-1}{2-2x}$

c) $y' = \frac{1/x \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1/x - \ln x}{e^x} = \frac{1 - x \cdot \ln x}{x \cdot e^x}$

d) $y' = 2x \cdot 2 \cdot \sin x^2 \cdot \cos x^2 = 4x \cdot \sin x^2 \cdot \cos x^2$

22. **Calcula la derivada d'aquestes funcions:**

a) $y = \sin x \cos^2 x$ **b)** $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$

c) $y = e^{x^2+1}$ **d)** $y = \cos^3 (2x + 1)$

a) $y' = \cos^3 x - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$

b) $y' = \frac{2\sin x \cdot \cos x \cdot (1 + \cos^2 x) + \sin^2 x \cdot 2\cos x \cdot \sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{4\sin x \cdot \cos x}{(1 + \cos^2 x)^2}$

c) $y' = 2x \cdot e^{x^2+1}$

d) $y' = -2 \cdot 3 \cdot \cos^2(2x+1) \cdot \sin(2x+1) = -6 \cdot \cos^2(2x+1) \sin(2x+1)$

23. **Deriva les funcions següents:**

a) $y = \log_2 \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{\sin x^2}$ **c)** $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ **d)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a) $y = \log_2 1 - \log_2 x$

$y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2}$

b) $y' = \frac{2x \cdot \cos x^2}{3\sqrt[3]{\sin x^2}}$

c) $y' = \frac{\frac{2 \cdot (1-2x) + (1+2x) \cdot 2}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{\frac{4}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{(1-2x)^2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^3(1+2x)}}$

d) $y' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4 \cdot \sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

24. **Troba la derivada de:**

a) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ **b)** $y = ln\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **c)** $y = ln(sin\sqrt{e^x})$ **d)** $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

☛ ***b) Aplica les propietats dels logaritmes abans de derivar.***

a) $y = \sqrt[4]{x^3} \rightarrow y' = \dfrac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

b) $y = \dfrac{1}{2} \cdot \big(ln\ x - ln\ (x+1)\big)$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

c) $y' = \dfrac{e^{x/2} \cdot cos\sqrt{e^x}}{2 \cdot sin\sqrt{e^x}}$

d) $y' = \dfrac{\dfrac{x+1-x+1}{(x-1)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1) \cdot (x+1)^3}}$

Pàgina 169

Continuïtat i derivabilitat

25. **Estudia la continuïtat i derivabilitat de les funcions següents en els punts que s'indiquen, i representa-les.**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **en** $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **en** $x = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

a) **Continuïtat en** $x = 1$**:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 1.$$

Derivabilitat en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\}$$ Les derivades laterals existeixen i coincideixen.

Per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 1$. A més, $f'(1) = 3$.

Així $f(x)$ és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

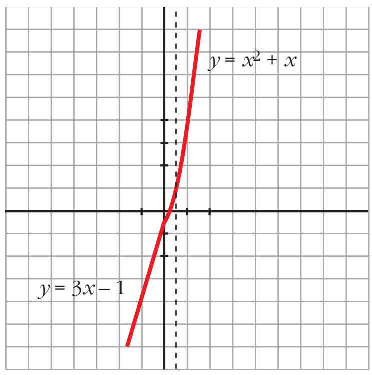
$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

a) La funció és contínua, perquè $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2$

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h) - 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 + 1 + h + 2}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 3) = 3$$

Per tant, és derivable en $x = 1$

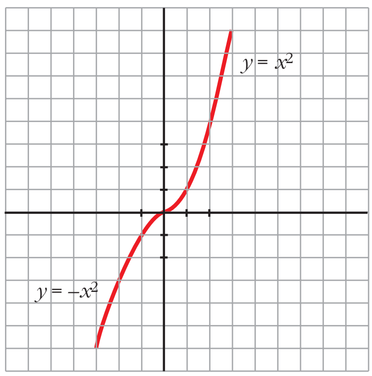


b) La funció és contínua, perquè $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \to 0} -h = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

Per tant, és derivable en $x = 0$

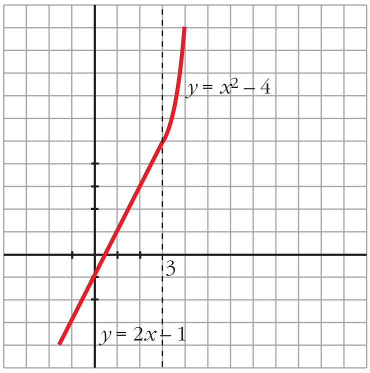


c) La funció és contínua, perquè $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3) = 5$

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0} \frac{2(3 + h) - 1 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

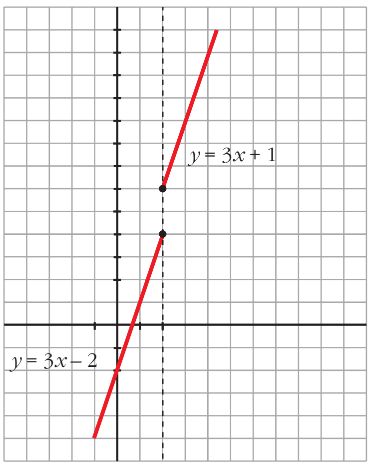
$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 4 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} h + 6 = 6$$

Per tant, no és derivable en $x = 3$, és un punt angulós.



d) La funció no és contínua, perquè $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq f(2)$

Per tant, no és derivable.



26. **Comprova que $f(x)$ és contínua però no derivable en $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

• Continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} ln\,(x-1) = ln\,1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \; f \text{ és contínua en } x = 2.$$

• Derivabilitat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Les derivades laterals existeixen, però no coincideixen.

$f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

27. **Considera la funció següent:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudia'n la continuïtat.

b) Estudia'n la derivabilitat.

Continuïtat:

• **Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$** $\rightarrow$ És contínua, ja que està formada per funcions contínues.

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \; \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Així doncs, la funció és contínua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$ Així doncs, la funció és contínua en $x = 1$.

La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$** $\rightarrow$ La funció és derivable. La seva derivada és, en aquests punts:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 0$; i $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Per tant, $f(x)$ no és derivable en $x = 1$.

La funció és derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. La seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

28. Prova que la funció $f(x) = |x + 1|$ no és derivable en $x = -1$.

$f'(-1^-) = -1$ i $f'(-1^+) = 1$, per tant, no és derivable en $x = -1$.

29. Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En $x \neq 1$: La funció és contínua, perquè està formada per dues funcions contínues.

En $x = 1$:

La funció és contínua, perquè $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2$

Derivabilitat:

Si $x \neq 1$: La funció és derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x = 1$:

$f'(1^-) = 4$
$f'(1^+) = 1$ per tant, no és derivable en $x = 1$.

30. **Donada la funció $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ estudia'n la continuïtat i la derivabilitat.**

Continuïtat:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per dues funcions contínues.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Per tant, la funció és contínua en $x = 0$.

La funció és contínua en tot $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Així doncs, $f(x)$ és derivable en $x = 0$ i $f'(0) = -1$. La funció és derivable en tot $\mathbb{R}$. La seva derivada seria:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

31. **En quins punts no són derivables les funcions següents:**

a) $f(x) = |x^2 - 4|$ **b) $f(x) = |2x - 3|$**

a) En $x = 2$ i $x = -2$.

b) Primerament cal mirar si és contínua.

$f(x) = |2x - 3|$ és contínua ja que és una funció polinòmica (el valor absolut només en pot canviar el signe).

Per veure si és o no derivable caldrà convertir el valor absolut:

El valor absolut no actua si $2x - 3 > 0 \ \rightarrow \ x > \dfrac{3}{2}$

El valor absolut actua si $2x - 3 > 0 \ \rightarrow \ x < \dfrac{3}{2}$

Així podem escriure la funció com:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } \ x \geq 3/2 \\ 3 - 2x & \text{si } \ x < 3/2 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \to 3/2^-} f(x) = \lim_{x \to 3/2^+} f(x) = 0$$

La derivem:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } \ x > 3/2 \\ -2 & \text{si } \ x < 3/2 \end{cases}$$

La funció serà derivable excepte en $x = \dfrac{3}{2}$, on:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -2 \neq 2 = f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

No és derivable en $x = \dfrac{3}{2}$

PER RESOLDRE

32. **Donada** $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } \ x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$

a) Calcula $f'(1)$ i $f'(3)$.

b) Comprova que $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } \ x < 2 \\ 2x & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$$

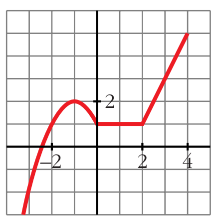
a) Com que $1 < 2 \ \rightarrow \ f'(1) = 3$

Com que $3 > 2 \ \rightarrow \ f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

b) $f'(2^-) = 3 \neq 4 = f'(2^+)$

33. **Aquí sota tenim la gràfica d'una funció $y = f(x)$. Calcula, observant-la: $f'(-1)$, $f'(1)$ i $f'(3)$**

En quins punts no és derivable?



$f'(-1) = 0;\ \ f'(1) = 0;\ \ f'(3) = 2$

No és derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

34. Quants punts que no tinguin derivada hi ha en la funció $y = |x^2 + 6x + 8|$?

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La funció és contínua, ja que és el valor absolut d'una funció contínua.

En $x = -4 \ \rightarrow\ y'(-4^-) = -2 \ne y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \ \rightarrow\ y'(-2^-) = -2 \ne y'(-2^+) = 2$

La funció no és derivable en $x = -4$ ni en $x = -2$; és a dir, en $(-4, 0)$ i en $(-2, 0)$. Són dos punts "angulosos".

35. Calcula a i b perquè la funció següent sigui derivable en tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Perquè sigui derivable, en primer lloc, ha de ser contínua.

- **Si $x \ne 2$** $\rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, és a dir, $2a + 3 = b$; o bé $b = -2a - 3$.

Derivabilitat:

- **Si $x \ne 2$** $\rightarrow$ la funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **En $x = 2$:**

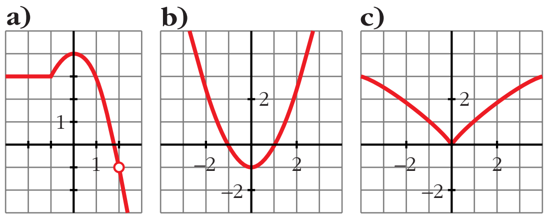
$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$ Perquè sigui derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, és a dir, $b = -4a + 1$.

Tenint en compte les dues condicions obtingudes:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\;\rightarrow\;\; 2a = 4 \;\;\rightarrow\;\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Per tant, perquè $f(x)$ sigui derivable en tot $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ i $b = -7$.

36. **Observa les gràfiques de les funcions següents i indica en quins punts no són derivables.**



Alguna d'aquestes és derivable en tot $\mathbb{R}$?

a) No és derivable en $x = -1$ (té un punt "angulós") ni en $x = 2$ (no està definida la funció).

b) És derivable en tot $\mathbb{R}$.

c) No és derivable en $x = 0$ (té un punt "angulós").

37. **La funció $f(x)$ està definida per:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula a i b perquè f sigui contínua i derivable.

Continuïtat:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Perquè sigui contínua ha de ser } b = 0$$

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{Perquè sigui derivable, ha de ser } a = -1.$$

Així doncs, $f(x)$ serà contínua i derivable si $a = -1$ i $b = 0$.

38. **La funció $f(x)$ està definida de la manera següent:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat i derivabilitat.

Si $x \ne 0$ i $x \ne 3$, la funció és contínua i derivable.

Continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

Continuïtat en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$

Els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen. La funció no és contínua en $x = 3$.

Derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Les derivades laterals existeixen, però no coincideixen.

$f(x)$ no és derivable en $x = 0$.

Derivabilitat en $x = 3$:

Com que $f(x)$ no és contínua en $x = 3$, $f(x)$ no és derivable en $x = 3$.

Pàgina 170

39. **Esbrina per quins valors de x és $f'(x) = 0$ en cadascuna de les funcions següents:**

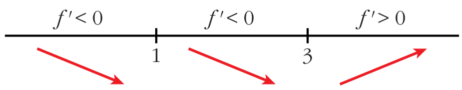
a) $f(x) = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ **d)** $f(x) = e^x(x-1)$

a) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

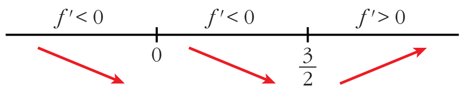
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -(4/3) \end{cases}$$



Hi ha un mínim en $\left(2, \frac{-4}{3}\right)$.

b) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

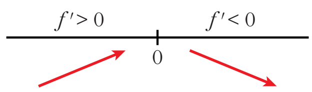
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -(27/16) \end{cases}$$



Hi ha un mínim en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

c) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$

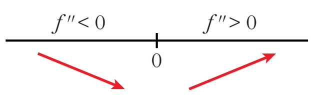


Hi ha un màxim en $(0, 1)$.

d) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \rightarrow xe^x = 0 \rightarrow x = 0$ (ja que $e^x \neq 0$ per a tot x)

$y = -1$



Hi ha un mínim en $(0, -1)$.

40. **Troba els punts en què el pendent de la recta tangent és igual a 0 en cada una de les funcions següents:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = \dfrac{+1}{-1} = -1$; Per tant, en $(0, -1)$ el pendent de la tangent val 0.

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow 3x^4 - 3x^2 - 2x^4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$

$f(0) = \dfrac{0}{-1} = 0;\ f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2};\ f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$

Per tant, en $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ i $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ el pendent de la tangent val 0.

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$

$f'(x) = \dfrac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1;\ x = 3$

$f(1) = \dfrac{-1}{+1} = -1;\ f(3) = \dfrac{9}{-1} = -9$

Per tant, en $(1, -1)$ i $(3, -9)$ el pendent de la tangent val 0.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1;\ x = -1$

$f(1) = \frac{-2}{1} = 2$; $f(-1) = \frac{+2}{-1} = -2$

Per tant, en (1, 2) i (–1, –2) el pendent de la tangent val 0.

41. Esbrina si en les funcions següents existeixen punts en els quals $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$ **b)** $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = ln(x + 1)$ **d)** $f(x) = 10 - (x - 2)^4$

a) No n'existeix cap ja que $f'(x) = \frac{5}{x^2 + 2x + 1}$ i mai $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = \frac{6 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0$

$6 - 6x^2 = 0$

$x = 1$ i $x = -1$

c) No n'existeix cap ja que $f'(x) = \frac{1}{x + 1}$ i mai $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 48 + 32 = 0$

$x = 2$

42. Les funcions següents tenen alguns punts en què la derivada no existeix. Troba'ls en cada cas.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x + 2}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = |x - 3|$ **e)** $f(x) = \left|\frac{4x - 5}{2}\right|$ **f)** $f(x) = |x^2 - 2x|$

a) $x = 0$

b) $x \leq -2$

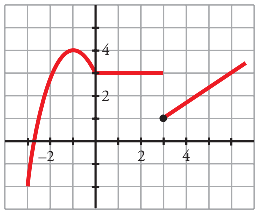
c) $-1 \leq x \leq +1$

d) $x = 3$

e) $x = \frac{5}{4}$

f) $x = 0$ i $x = 2$

43. **Aquesta és la gràfica d'una funció $y = f(x)$.**



Estudia'n la continuïtat i derivabilitat.

És una funció contínua en els intervals $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$ i discontínua en $x = 3$. És derivable en els intervals $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ i $(3, +\infty)$, i no derivable en $x = 0$ i $x = 3$.

44. **Considera la funció:** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula els valors de m i n perquè f sigui derivable en tot $\mathbb{R}$.

Perquè sigui derivable, en primer lloc ha de ser contínua.

- **Si $x \neq 1$,** la funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua en $x = 1$, ha de ser: $-4 + m = -1 + n$; és a dir: $m = n + 3$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 1$,** la funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$ Perquè sigui derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, és a dir, $n = -1$.

Per tant, la funció serà derivable en tot $\mathbb{R}$ si $m = 2$ i $n = -1$. En aquest cas, la derivada seria:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

45. Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Existeix algun punt en el qual $f'(x) = 0$?

Representa-la gràficament.

Continuïtat:

- **En $x \neq 1$:** La funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Per tant, la funció és contínua en $x = 1$.

La funció és contínua en tot $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- **Si $x \neq 1$:** La funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La funció no és derivable en $x = 1$.

Per tant, la funció és derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Punts en els quals $f'(x) = 0$:

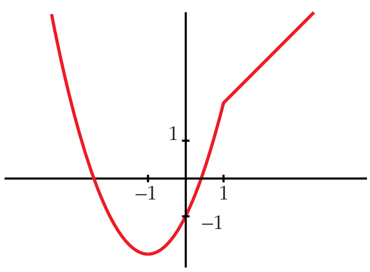
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \;\rightarrow\; f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Per tant, la derivada s'anul·la a $x = -1$.

Gràfica de $f(x)$:



46. **Troba a i b perquè la funció $f(x)$ sigui contínua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Estudia la derivabilitat de f per als valors de a i b obtinguts.

- **Si $x \ne -1$ i $x \ne 0$:** La funció és contínua, ja que està formada per polinomis.

- **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser $-2 + a = -a + b$, és a dir: $b = 2a - 2$.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser $b = 2$.

Així doncs, $f(x)$ serà contínua si $a = 2$ i $b = 2$.

Per a aquests valors, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}; \text{ és a dir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilitat:

- **Si $x \ne 0$:** És derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \ne f'(0^+) = 0$

La funció no és derivable en $x = 0$.

Per tant, és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

47. **Calcula $f'(0)$ si**

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{2x + 1}}.$$

☛ ***Aplica les propietats dels logaritmes abans de derivar.***

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)e^x + (-2x - 3)e^{-x}}{(2x + 1)e^x + (2x + 1)e^{-x}}$$

$f'(0) = -1$

48. **Troba el pendent de la recta tangent a les corbes següents en els punts indicats.**

a) $y = \sin x \cos x$ **en** $x = \frac{\pi}{4}$

b) $y = x \ln x$ **en** $x = e$

c) $y = \frac{x^2}{e^x}$ **en** $x = 0$ **i en** $x = 1$

d) $e^{x^2 - 1}$ **en** $x = 1$

a) $f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

b) $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(e) = 2$

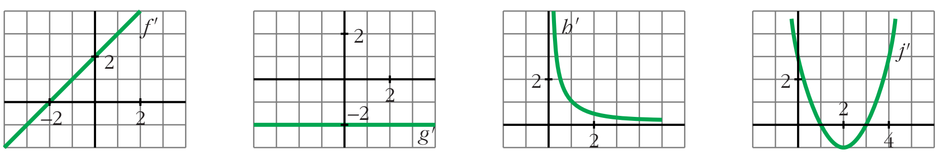
c) $f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x}{\ln^2 x}$

$f'(0) = 0$ i $f'(1) = \frac{1}{e}$

d) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2 - 1}$

$f'(1) = 2$

49. **Aquestes gràfiques representen les funcions derivades de les funcions f, g, h i j:**



a) Quines d'aquestes funcions tenen punts en què $f'(x) = 0$?

b) Quina d'aquestes gràfiques és la funció derivada d'una funció polinòmica de primer grau?

c) Quina d'aquestes correspon a una funció polinòmica de segon grau?

a) Els punts de tangent horitzontal són els punts en els quals s'anul·la la derivada.

f té un punt de tangent horitzontal en $x = -2$, ja que $f'(-2) = 0$.

j té dos punts de tangent horitzontal en $x = 1$ i en $x = 3$, ja que $j'(1) = j'(3) = 0$.

g i h no tenen cap punt de tangent horitzontal.

b) La derivada d'una funció polinòmica de primer grau és una funció constant. Per tant, és g'.

c) La derivada d'una funció polinòmica de segon grau és una funció polinòmica de primer grau. Per tant, és f'.

Pàgina 171

QÜESTIONS TEÒRIQUES

50. **Una funció polinòmica de tercer grau, quants punts de derivada nul·la pot tenir?**

En pot tenir un o cap?

La derivada d'una funció polinòmica de tercer grau és una funció polinòmica de segon grau.

Així doncs, pot haver-hi dos punts, un punt o cap punt amb derivada nul·la.

Per exemple:

$$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{Dos punts}$$

$$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Un punt}$$

$$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0 \text{ per a tot } x \;\rightarrow\; \text{Cap punt}$$

51. **Justifica que una funció polinòmica de segon grau té sempre un punt de tangent horitzontal.**

La seva derivada és una funció polinòmica de primer grau, que s'anul·la sempre en un punt.

52. **Si una funció té un punt angulós en $x = a$, què podem dir de $f'(a)$?**

Que $f'(a)$ no existeix, perquè $f(x)$ no és derivable en $x = a$.

53. **Sigui f una funció de la qual sabem que:**

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -1$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$

És f derivable en $x = 2$?

No, cal que $f'(2^-) = f'(2^+)$.

54. **La funció $f(x) = \sqrt{x-3}$ és contínua en $x = 3$ i $f'(3) = +\infty$.**

Com és la recta tangent a f en $x = 3$?

La tangent és vertical.

55. **Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, troba $f'(x)$ i $f''(x)$ aplicant dues vegades la definició de derivada.**

☛ ***Tingues en compte que***

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x+h)^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}}{2} = \lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{2} = x$$

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

PER APROFUNDIR

56. **Sigui la funció: $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

a) Troba $f'(x)$.

b) Troba $f''(x)$.

c) Representa f' i f''.

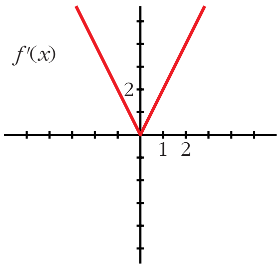
a) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

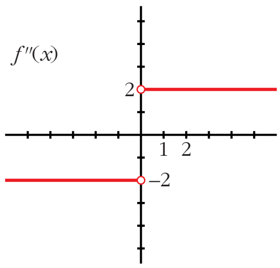
En $x = 0$ existeix la derivada, ja que $f(x)$ és contínua, i, a més, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

b) $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En $x = 0$ no existeix la segona derivada, ja que $f''(0^-) \neq f''(0^+)$.

c)





57. Prova que la funció $f(x) = x + |x - 3|$ no és derivable en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} x - x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x + x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = 0 \neq f'(3^+) = 2$. Per tant, la funció no és derivable en $x = 3$.

58. Calcula la derivada d'ordre n de la funció $f(x) = e^{2x}$.

$$f'(x) = 2e^{2x}$$
$$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$$
$$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x}$$
$$\ldots$$
$$f^n(x) = 2^n e^{2x}$$

Ho demostrem per inducció:

Per a $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, veiem que es compleix.

Suposem que és cert per a $n - 1$; és a dir, que $f^{n-1}(x) = 2^{n-1}e^{2x}$; aleshores, derivant, tenim que: $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} = 2^n e^{2x}$. Per tant, l'expressió obtinguda és certa per a tot n.

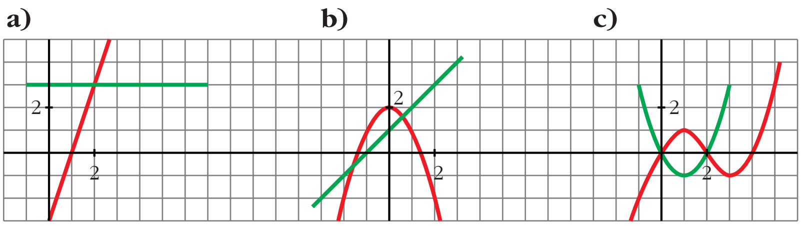
59. **Donada la funció $f(x) = e^x + ln(1 - x)$, comprova que $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 0$. Serà també $f'''(0) = 0$?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1-x} \quad \rightarrow \quad f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1-x)^2} \quad \rightarrow \quad f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1-x)^3} \quad \rightarrow \quad f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

60. **Quina d'aquestes gràfiques representa la funció f i la seva derivada f'? Justifica la teva resposta.**



a) La funció és una recta que té pendent 3. Per tant, la seva derivada és $y = 3$. Així doncs, aquesta gràfica *sí* representa una funció i la seva derivada.

b) En $x = 0$, la funció té un màxim; la derivada s'anul·la. La recta hauria de passar per (0, 0).

No representa, per tant, una funció i la seva derivada.

c) En $x = 1$, la funció té un màxim; la derivada s'anul·la, i hauria de passar per (1, 0). Aquesta *tampoc* no representa una funció i la seva derivada.

Per tant, només la primera és vàlida.

61. **La funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ i $f''(1) = 0$. Calcula a, b i c.**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

62. **Determina el valor de k que fa que la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + k}$ tingui només un punt en el qual es verifiqui $f'(x) = 0$.**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + k) - 2xe^x}{(x^2 + k)^2} = \frac{(x^2 - 2x + k)\, e^x}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x + k = 0 \quad \to \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Perquè hi hagi una sola solució, ha de ser $4 - 4k = 0$; és a dir, $k = 1$.

63. **Calcula a, b i c perquè es compleixi que la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ passi pel punt (0, 3) i verifiqui $f'(1) = -2$ i $f'(2) = 0$.**

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f'(1) = -2 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \\ \to \\ \to \end{array} \left\{\begin{array}{l} c = 3 \\ 2a + b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ a = 1 \\ b = -4 \end{array}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

64. **Troba els punts de la funció $y = \dfrac{2x}{x - 1}$ en què el pendent de la recta tangent és igual a -2.**

$$y' = \frac{2(x - 1) - 2x \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

$$y' = -2$$

$$\frac{-2}{(x - 1)^2} = -2 \quad \to \quad 1 = (x - 1)^2 \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

65. **Troba a i b perquè la funció $f(x)$ sigui contínua:**

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{array}\right.$$

Per als valors de a i b obtinguts, estudia la derivabilitat de f.

- **Si $x \neq -1$ i $x \neq 0$:** La funció és contínua, ja que està formada per polinomis.
- **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Perquè sigui contínua, ha de ser} \\ -2 + a = -a + b, \text{ és a dir: } b = 2a - 2. \end{array}$$

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \text{ Perquè sigui contínua, ha de ser } b = 2.$$

Així doncs, $f(x)$ serà contínua si $a = 2$ i $b = 2$.

Per a aquests valors, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases} ; \text{ és a dir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilitat:

• **Si $x \ne 0$:** És derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \ne f'(0^+) = 0$

La funció no és derivable en $x = 0$.

Per tant, és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

66. Hi ha algun punt en què $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ no sigui derivable? Justifica la teva resposta.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \ge 0 \\ \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es comprova que és contínua en tot $\mathbb{R}$, ja que els punts que anul·len el denominador són del domini de l'altre tros.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si $x \ne 0$ serà derivable.

Si $x = 0$

$$f'(0^+) = -1 \ne 1 = f'(0^-)$$

$f(x)$ no és derivable en $x = 0$