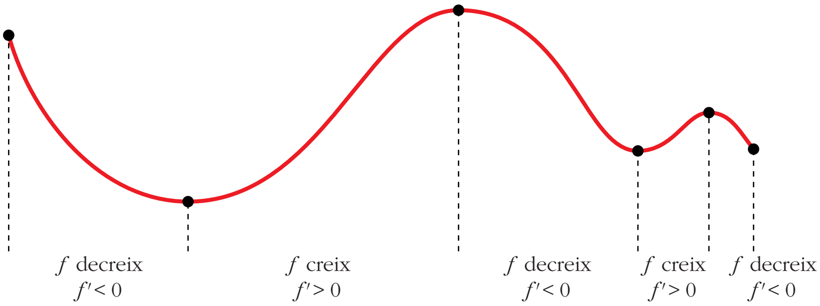
UNITAT 8

APLICACIONS DE LES DERIVADES

Pàgina 172

Relació del creixement amb el signe de la primera derivada

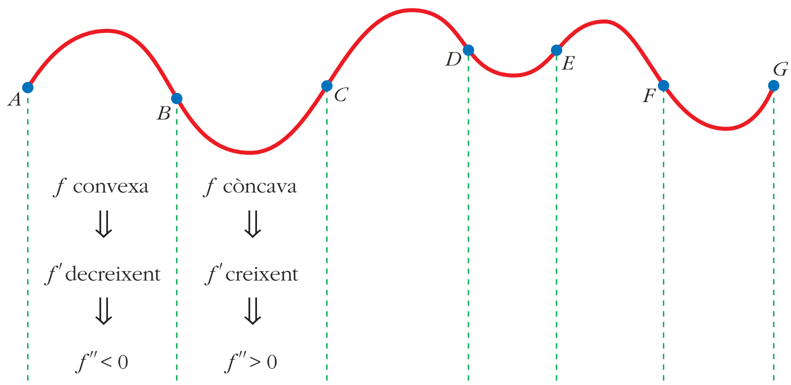
■ **Analitza la corba següent:**



Pàgina 173

Relació de la curvatura amb el signe de la segona derivada

■ **Descriu el tram *CD* i els trams *DE*, *EF* i *FG* següents:**



$CD \;\rightarrow\; f$ convexa $\;\rightarrow\; f'$ decreixent $\;\rightarrow\; f'' < 0$

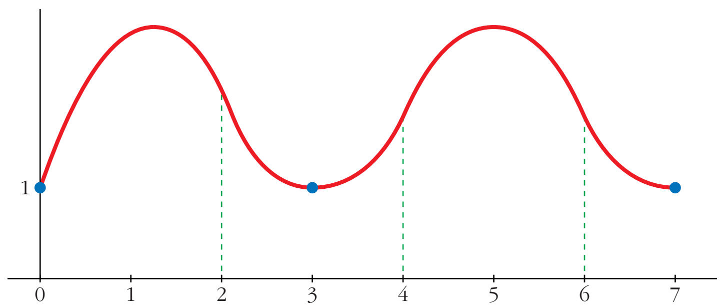
$DE \;\rightarrow\; f$ còncava $\;\rightarrow\; f'$ creixent $\;\rightarrow\; f'' > 0$

$EF \;\rightarrow\; f$ convexa $\;\rightarrow\; f'$ decreixent $\;\rightarrow\; f'' < 0$

$FG \;\rightarrow\; f$ còncava $\;\rightarrow\; f'$ creixent $\;\rightarrow\; f'' > 0$

■ **Dibuixa la gràfica d'una funció, f, que compleixi les condicions següents:**

- **La funció està definida en [0, 7].**
- **Només pren valors positius.**
- **Passa pels punts (0, 1), (3, 1) i (7, 1).**
- **En l'interval (1, 2), la funció és convexa.**
- **En l'interval (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En l'interval (4, 6), f' és decreixent.**
- **En l'interval (6, 7), f és còncava.**



Pàgina 174

EXERCICIS PROPOSATS

1. Troba les rectes tangents a la corba:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en els punts d'abscisses 0, 1, 3.

Calculem la derivada de la funció:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenades dels punts:

$y(0) = 0$; $y(1) = 4$; $y(3) = 150$

- **Recta tangent en (0, 0):** $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- **Recta tangent en (1, 4):** $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- **Recta tangent en (3, 150):** $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

2. **Troba les equacions de les rectes tangents a la corba:**

$$y = x^3 - 4x + 3$$

que siguin paral·leles a la bisectriu dels quadrants segon i quart.

$y' = 3x^2 - 4 = -1$ i per tant $x = 1$ i $x = -1$; així, les rectes són $y = -x + 2$ i $y = -x + 5$.

Pàgina 175

3. **Donada la funció $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, esbrina:**

a) On creix. **b) On decreix.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ és creixent en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ és creixent en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \rightarrow y' < 0 \rightarrow f$ és decreixent en $(-1, 3)$

Pàgina 177

4. **Comprova que la funció $y = x^3/(x - 2)^2$ té només dos punts singulars, en $x = 0$ i en $x = 6$.**

Descobreix de quin tipus és cada un d'aquests estudiant-ne el signe de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2) - 2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x - 6 - 2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hi ha un punt d'inflexió.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hi ha un mínim relatiu.}$$

5. **a) Troba tots els punts singulars (abscissa i ordenada) de la funció $y = -3x^4 + 4x^3$. Mitjançant una representació adequada, descobreix de quin tipus és cada un d'aquests.**

b) Ídem per a $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

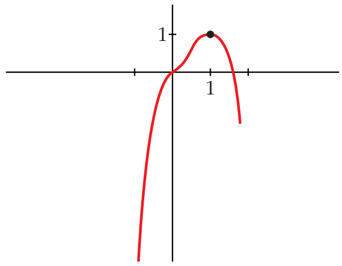
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \ \to \ \text{Punt } (0, 0) \\ x = 1 \ \to \ \text{Punt } (1, 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos punts singulars.}$$

Els dos punts són en l'interval $[-1; 1{,}5]$, on la funció és derivable.

A més, $f(-1) = -7$ i $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0, 0)$ hi ha un *punt d'inflexió.*
- En $(1, 1)$ hi ha un *màxim relatiu.*



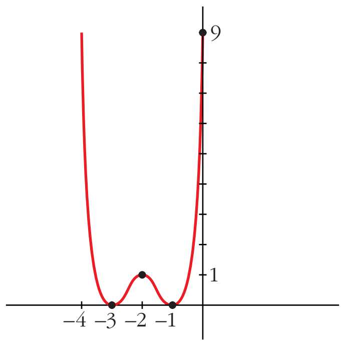
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \ \to \ \text{Punt } (-1, 0) \\ x = -2 \ \to \ \text{Punt } (-2, 1) \\ x = -3 \ \to \ \text{Punt } (-3, 0) \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres punts singulars.}$$

Els tres punts són en el mateix interval $[-4, 0]$, on la funció és derivable.

A més, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hi ha un *mínim relatiu* en $(-3, 0)$, un *màxim relatiu* en $(-2, 1)$ i un *mínim relatiu* en $(-1, 0)$.



Pàgina 179

6. Estudia la curvatura de la funció: $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$; $f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \ \to \ 12x(3x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \to \ \text{Punt } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \ \to \ \text{Punt } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\ f'''(0) \neq 0;\ f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Els punts $(0, 5)$ i $\left(\frac{4}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ són punts d'inflexió.

- La funció és còncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, ja que $f''(x) > 0$.
- La funció és convexa en l'interval $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, ja que $f''(x) < 0$.

7. **Estudia la curvatura de la funció: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$**

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9;\quad f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \;\to\; 6x - 12 = 0 \;\to\; x = 2 \;\to\; \text{Punt } (2, 2)$$

$$\big(f'''(x) = 6;\; f'''(2) \neq 0\big)$$

El punt $(2, 2)$ és un punt d'inflexió.

- La funció és convexa en $(-\infty, 2)$, ja que $f''(x) < 0$.
- La funció és còncava en $(2, +\infty)$, ja que $f''(x) > 0$.

Pàgina 181

8. **Troba el nombre positiu la suma del qual amb vint-i-cinc vegades el seu invers sigui mínima.**

Anomenem x el nombre que busquem. Ha de ser $x > 0$. Hem de minimitzar la funció:

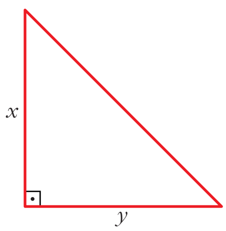
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 5 \;\to\; f(5) = 10 \\ x = -5 \;\; (\text{no val, ja que } x > 0) \end{cases}$$

(Com que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, i la funció és contínua en $(0, +\infty)$; hi ha un mínim en $x = 5$.)

Així doncs, el nombre buscat és $x = 5$. El mínim és 10.

9. **De tots els triangles rectangles els catets dels quals sumen 10 cm, troba les dimensions d'aquell que tingui l'àrea màxima.**



$x + y = 10 \;\to\; y = 10 - x$

$\text{Àrea} = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x \cdot (10 - x)}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2},\quad 0 < x < 10$

Hem de maximitzar la funció:

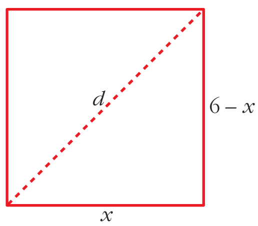
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2},\quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \;\to\; x = 5 \;\to\; y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\; f(10) = 0;\; f(5) = \dfrac{25}{2};\; \text{i } f \text{ és contínua. Per tant, a } x = 5 \text{ hi ha el màxim}\right)$.

Els catets mesuren 5 cm cada un. L'àrea màxima és de 12,5 cm^2.

10. Entre tots els rectangles de perímetre 12 m, quin és el que té la diagonal menor?



$d = \sqrt{(6-x)^2 + x^2}\,, \quad 0 < x < 6$

Hem de minimitzar la funció:

$f(x) = \sqrt{(6-x)^2 + x^2}\,, \quad 0 < x < 6$

$$f'(x) = \frac{-2(6-x) + 2x}{2\sqrt{(6-x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6-x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6-x)^2 + x^2}}$$

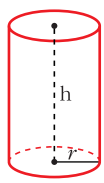
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -6 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

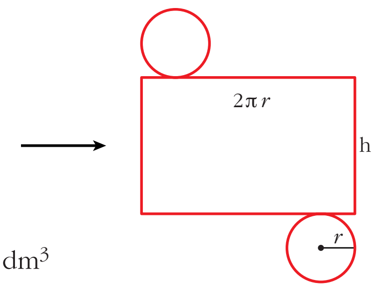
($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$; i $f(x)$ és contínua. Per tant, a $x = 3$ hi ha un mínim).

El rectangle amb la diagonal menor és el quadrat de costat 3 m.

11. Determina les dimensions que ha de tenir un recipient cilíndric de volum igual a 6,28 litres perquè pugui construir-se amb la menor quantitat possible de llauna.

Suposem el recipient amb dues tapes:





àrea total $= 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 =$

$= 2\pi r(\text{h} + r)$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Com que $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2} = \text{h}$

Així doncs: *Àrea total* $= 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Hem de trobar el mínim de la funció:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Com que $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, i f és contínua en $(0, +\infty)$; a $r = 1$ hi ha un mínim.)

$r = 1 \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$

El cilindre tindrà un radi d'1 dm i una altura de 2 dm.

Pàgina 186

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Recta tangent

12. Troba l'equació de la recta tangent a les corbes següents en els punts l'abscissa dels quals s'indica:

a) $y = \frac{1 - 3x^2}{2}$ **en** $x = 1$

b) $y = (0{,}3x - 0{,}01x)^2$ **en** $x = 10$

c) $y = \sqrt{x + 12}$ **en** $x = -3$

d) $y = \frac{x + 5}{x - 5}$ **en** $x = 3$

e) $y = e^{-x}$ **en** $x = 0$

f $y = \sin x \cos x$ **en** $x = \frac{\pi}{2}$

g) $y = \ln (x + 1)$ **en** $x = 0$

h) $y = x \ln x$ **en** $x = e$

a) $y = -3x - 4$

b) $y = 0{,}1x + 1{,}8$

c) $y = \frac{x}{6} + \frac{7}{2}$

d) $y = \frac{-5x}{2} + \frac{7}{2}$

e) $y = x + 1$

f) $y = \frac{1}{2}$

g) $y = x$

h) $y = 2x - e$

13. **Escriu l'equació de la tangent a la corba $y = x^2 + 4x + 1$, que és paral·lela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$.**

Calculem el pendent de la recta $4x - 2y + 5 = 0$:

$4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow$ Pendent 2.

$y' = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$

La recta tangent té pendent 2 i passa per $(-1, -2)$:

$y = -2 + 2 \cdot (x + 1) = 2x \rightarrow y = 2x$

14. **Troba les tangents a la corba $y = \frac{2x}{x - 1}$ paral·leles a la recta que passa per (0, 0) i per (1, –2).**

Busquem el pendent de la recta que passa per (0, 0) i (1, –2).

$\vec{V} = (1, -2) \qquad m_{\vec{V}} = \frac{-2}{1} = -2 = m_{\vec{V}}$

Busquem el pendent de la recta tangent a la corba.

$$m = f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Igualem:

$-2 = \frac{-2}{(x-1)^2} \qquad (x-1)^2$

$x = 2 \qquad x = 0$

Hi ha dues possibles solucions:

Si $x = 0$	Si $x = 2$
$f(0) = 0$	$f(2) = \frac{4}{1} = 4$
$y - 0 = -2(x - 0)$	$y - 4 = -2(x - 2)$
$y = -2x$	$2x + y - 8 = 0$

15. **Escriu les equacions de les tangents a la funció $y = 4x - x^2$ en els punts de tall amb l'eix d'abscisses.**

Els punts de tall són (0, 0) i (4, 0).

$y' = 4 - 2x$ $\begin{cases} y'(0) = 4 \text{ pendent en } (0, 0) \\ y'(4) = -4 \text{ pendent en } (4, 0) \end{cases}$

Rectes tangents:

En (0, 0) $\rightarrow y = 4x$

En (4, 0) $\rightarrow y = -4 \cdot (x - 4) = -4x + 16$

16. **Troba els punts de tangent horitzontal en les funcions següents i escriu l'equació de la tangent en aquests punts:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$

b) $y = -x^4 + x^2$

c) $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 0 \\ x = 1/3 \rightarrow y = 4/27 \end{cases}$

b) $y' = -4x^3 + 2x = x \cdot (-4x^2 + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = +\sqrt{2}/2 \rightarrow y = 1/4 \\ x = -\sqrt{2}/2 \rightarrow y = 1/4 \end{cases}$

c) $y' = \dfrac{6 \cdot (x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 3 \\ x = -1 \rightarrow y = -3 \end{cases}$

d) $y' = \dfrac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 4) \cdot 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = -1 \\ x = -2 \rightarrow y = -9 \end{cases}$

17. **Escriu l'equació de la tangent a la corba $f(x) = e^{2-x}$ en el punt en què talla l'eix d'ordenades.**

Com que és una exponencial, talla en l'eix d'ordenades (i mai en l'eix d'abcisses).

Busquem on talla

$x = 0 \rightarrow f(0) = e^2 \rightarrow$ en el punt $(0, e^2)$

Busquem el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt:

$f'(x) = e^{2-x} \cdot (-1) = -e^{2-x}$

$f(0) = -e^2$

La recta tangent és $y - e^2 = -e^2(x - 0) \rightarrow e^2 \cdot x + y - e^2 = 0$

18. **Determina el punt de la corba $f(x) = x^2 - 5x + 8$ en què la tangent és paral·lela a la bisectriu del primer i tercer quadrant. Escriu l'equació de l'esmentada tangent.**

La bisectriu del 1r i 3r quadrant té $m = 1$

$f'(x) = 2x - 5$

$m = 1 = f'(x) = 2x - 5 \rightarrow 1 = 2x - 5 \rightarrow x = 3$

$f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 = 2 \rightarrow$ punt $(3, 2)$

Eq. recta tangent:

$y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \rightarrow x - y - 1 = 0$

Màxims i mínims. Punts d'inflexió

19. **Troba els màxims, mínims i punts d'inflexió de les funcions següents:**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x - 8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

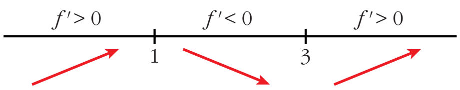
d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **f)** $y = e^x\,(x - 1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \;\to\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \;\to\; y = 0 \\ x = 1 \;\to\; y = 4 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



Hi ha un mínim en $(3, 0)$ i un màxim en $(1, 4)$.

Punts d'inflexió:

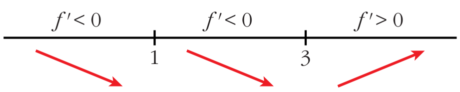
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \;\to\; x = 2 \;\to\; y = 2$$

Com que $f''(x) < 0$ per a $x < 2$ i $f''(x) > 0$ per a $x > 2$, el punt $(2, 2)$ és un punt d'inflexió.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

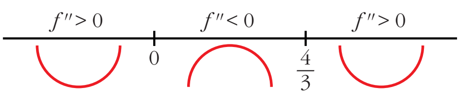
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\to\; y = 0 \\ x = 2 \;\to\; y = -(4/3) \end{cases}$$



Hi ha un mínim en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

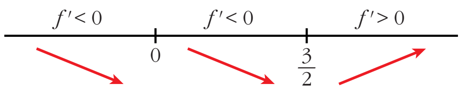
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\to\; x(3x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\to\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\to\; y = -(64/81) \end{cases}$$



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$ i un altre en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

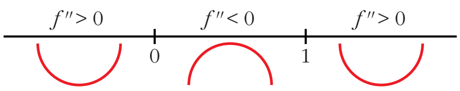
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -(27/16) \end{cases}$



Hi ha un mínim en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

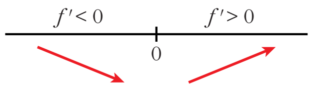
$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$ i un altre en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$



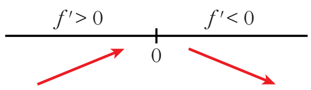
Hi ha un mínim en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ per a tot x.

No hi ha punts d'inflexió.

e) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

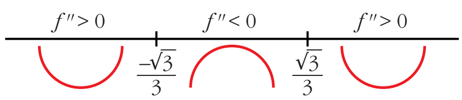
$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$



Hi ha un màxim en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

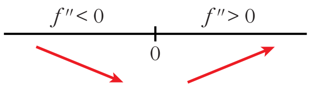


Hi ha un punt d'inflexió en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ i un altre en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (ja que $e^x \neq 0$ per a tot x)

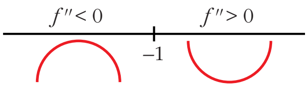
$y = -1$



Hi ha un mínim en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

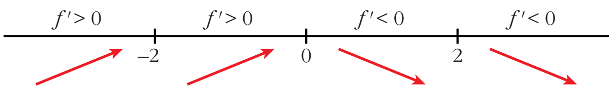
20. **Estudia els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents i digues si tenen màxims o mínims:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$. *Domini* $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de la derivada:



La funció: creix en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decreix en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

té un màxim en $\left(0, \dfrac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. *Domini* $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x + 1) - (2x - 3)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \dfrac{5}{(x + 1)^2}$

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq -1$.

Per tant, la funció és creixent en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

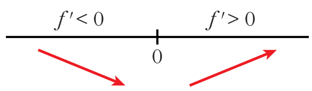
No té màxims ni mínims.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de la derivada:



La funció: decreix en $(-\infty, 0)$

creix en $(0, +\infty)$

té un mínim en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ per a tot $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 0$.

La funció és creixent en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No té màxims ni mínims.

21. Troba els intervals de creixement i els màxims i mínims de les funcions següents:

a) $\boldsymbol{y = \dfrac{8-3x}{x\,(x-2)}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ **c)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^3}{x^2-1}}$

d) $\boldsymbol{y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}}$ **e)** $\boldsymbol{y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)(x-4)}}$ **f)** $\boldsymbol{y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

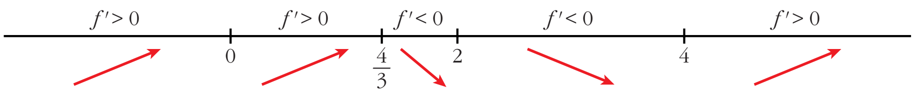
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x) - (8-3x) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 16x + 16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

és decreixent en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

té un màxim en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$

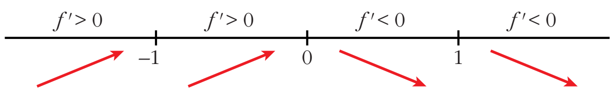
té un mínim en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

és decreixent en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

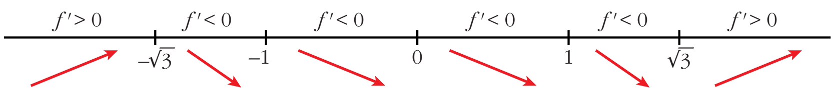
té un màxim en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

és decreixent en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

té un màxim en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

té un mínim en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

té un punt d'inflexió en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{2\}$

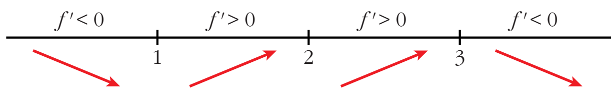
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\to\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(1, 2) \cup (2, 3)$

és decreixent en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

té un mínim en $(1, -1)$

té un màxim en $(3, -9)$

e) $y = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{x(x - 3)(x - 4)}$. *Domini* = $\mathbb{R}$

La funció: és creixent en $(-1{,}6;\ 3{,}4)$

és decreixent en $(-\infty, -1{,}6) \cup (3{,}4, +\infty)$

té un màxim en $(3{,}4;\ -4{,}1)$

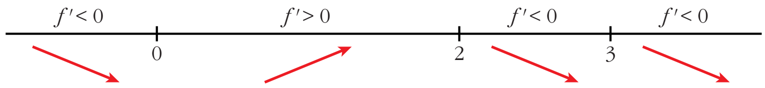
té un mínim en $(1{,}6;\ -0{,}04)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8x(3x - 6)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8(3x - 6)}{x^3(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 3x - 6 = 0 \;\to\; x = 2$$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(0, 2)$

és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

té un màxim en $(2, -2)$

22. Estudia la concavitat, la convexitat i els punts d'inflexió de les funcions següents:

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x - 2)^4$

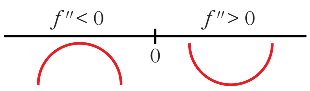
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ **f)** $y = \ln(x + 1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f''(x)$:



La funció: és convexa en $(-\infty, 0)$

és còncava en $(0, +\infty)$

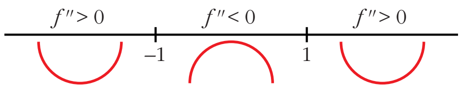
té un punt d'inflexió en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signe de $f''(x)$:



La funció: és còncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

és convexa en $(-1, 1)$

té un punt d'inflexió en $(-1, -5)$ i un altre en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

$f''(x) > 0$ per a $x \neq 2$

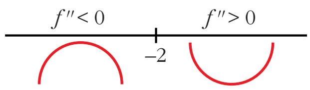
Per tant, la funció és còncava. No té punts d'inflexió.

d) $y = x\,e^x$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)\,e^x; \quad f''(x) = e^x + (1 + x)\,e^x = (2 + x)\,e^x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad (e^x \neq 0$ per a tot $x)$

Signe de $f''(x)$:



La funció: és convexa en $(-\infty, -2)$

és còncava en $(-2, +\infty)$

té un punt d'inflexió en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

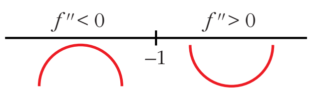
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ per a tot x.

Signe de $f''(x)$:



La funció: és convexa en $(-\infty, -1)$

és còncava en $(-1, +\infty)$

no té punts d'inflexió

f) $y = ln(x + 1)$. *Domini* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ per a $x \in (-1, +\infty)$

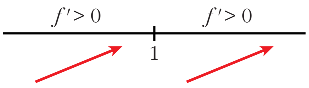
Per tant, la funció és convexa en $(-1, +\infty)$.

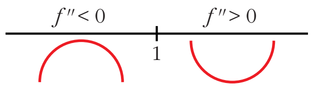
23. **Estudia si les funcions següents tenen màxims, mínims o punts d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 1$:**

a) $\boldsymbol{y = 1 + (x - 1)^3}$ **b)** $\boldsymbol{y = 2 + (x - 1)^4}$

c) $\boldsymbol{y = 3 - (x - 1)^6}$

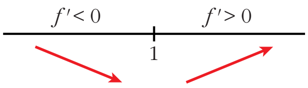
a) $f'(x) = 3(x - 1)^2$; $f''(x) = 6(x - 1)$

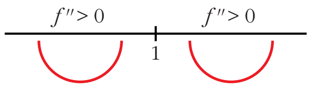




Hi ha un punt d'inflexió en $x = 1$.

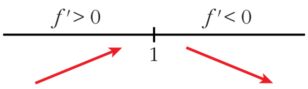
b) $f'(x) = 4(x - 1)^3$; $f''(x) = 12(x - 1)^2$

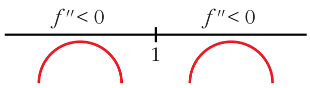




Hi ha un mínim en $x = 1$.

c) $f'(x) = -6(x - 1)^5$; $f''(x) = -30(x - 1)^4$





Hi ha un màxim en $x = 1$.

Pàgina 187

Problemes d'optimació

24. **Una discoteca obre a les 10 de la nit i tanca quan han marxat tots els seus clients. La funció que representa el nombre de clients en relació al nombre d'hores que està oberta, t, és:**

$$N(t) = 80t - 10t^2.$$

a) A quina hora el nombre de clients és màxim? Quants clients hi ha en aquell moment?

b) A quina hora tancarà la discoteca?

a) $N'(t) = 80 - 20t$

$N'(t) = 0 = 80 - 20t \;\rightarrow\; t = 4 \;\rightarrow\;$ A les dues de la matinada

Nombre de clients quan $t = 4 \;\rightarrow\; N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$ clients.

b) Tanca quan han marxat tots els clients, és a dir, quan $N(t) = 0$

$0 = 80t - 10t^2$

$t(80 - 10t) = 0 \begin{cases} t = 0 & \text{això és quan obre} \\ 80 - 10t = 0 \quad t = 8 & \rightarrow \text{ A les sis del matí} \end{cases}$

25. **Una franquícia de botigues de moda ha estimat que els seus beneficis setmanals (en milers d'euros) depenen del nombre de botigues en funcionament (n) d'acord amb l'expressió:**

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

Determina raonadament:

a) El nombre de botigues que han de tenir per maximitzar els beneficis setmanals.

b) Els valors d'aquests beneficis màxims.

a) $B'(n) = -24n^2 - 120n - 96$

$B'(n) = 0 = -24n^2 - 120n - 96 \begin{cases} n = 1 \\ n = 4 \end{cases}$

Amb la segona derivada veurem si són màxims o mínims:

$B''(n) = -48n + 120$

$B''(1) > 0 \quad \rightarrow \quad n = 1$ és un mínim

$B''(4) < 0 \quad \rightarrow \quad n = 4$ és un màxim

El nombre de botigues ha de ser 4.

b) $B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 = 64$.

Els beneficis setmanals seran de 64.000 €.

26. **El cost total de producció de x unitats d'un producte és:**

$$C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$$

Es defineix la funció cost mitjà o cost per unitat com $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Quantes unitats han de produir per tal que el cost per unitat sigui mínim?

El cost per unitat $Cm(x) = \frac{1}{3}x + 6 + \frac{192}{x}$.

Volem que sigui mínim:

$$C'm(x) = \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{3} = \frac{192}{x^2} \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow x = 24$$

Cal produir 24 unitats.

27. **Una empresa vol produir $c(t) = 200 + 10t$ unitats d'un producte per vendre a un preu $p(t) = 200 - 2t$ euros per unitat, essent t el nombre de dies transcorreguts des de l'inici de la producció.**

a) Calcula els ingressos si $t = 10$.

b) Escriu, depenent de t, la funció de benefici.

$(0 \leq t \leq 60)$

c) Determina quan els ingressos són màxims.

Enunciat: canviar benefici per ingressos

a) Ingressos = unitat · preu per unitat

$$\text{Si } t = 10 \begin{cases} c(10) = 300 \\ p(10) = 160 \end{cases} \Bigg\} \text{ Ingressos} = 300 \cdot 160 = 48\,000 \text{ euros}$$

b) $I(t) = (200 + 10t) \cdot (200 - 2t) = -20t^2 + 1600t + 40000 = I(t)$

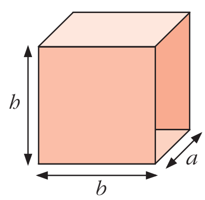
c) $I(t)' = -40t + 1600 = 0$

$t = 40$

Al cap de 40 dies d'iniciar la producció.

28. **Es vol fabricar una capsa de volum màxim que sigui el doble de llarga que d'ampla i en la qual, a més, la suma de l'amplada més la llargada més l'alçada sigui igual a un metre.**

Calcula quant ha de mesurar la capsa i quin volum tindrà.



Volum màxim: $V = a \cdot b \cdot h$

Ens demanen que

$2a = b$

$a + b + h = 1 \rightarrow h = 1 - a - b = 1 - a - 2a = 1 - 3a$

$V(a) = a \cdot 2a \cdot (1 - 3a)$

$V(a) = 2a^2 - 6a^3$

$V'(a) = 4a - 18a^2$

$$V'(a) = 0 = 4a - 18a^2 \begin{cases} a = 0 \quad \text{no té sentit} \\ 4 - 18a = 0 \;\rightarrow\; a = \dfrac{2}{9}\ m \quad b = \dfrac{4}{9}\ m \quad h = \dfrac{3}{9}\ m \end{cases}$$

$$V\left(\frac{2}{9}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 - 6\left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{243}\,m^3$$

PER RESOLDRE

29. Prova que la recta $y = -x$ és tangent a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Troba el punt de tangència i estudia si aquesta recta talla la corba en un altre punt diferent que el de tangència.

Les dues rectes es tallen en dos punts:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^3 - 6x^2 + 8x \end{array}\right\} \rightarrow (0,\ 0);\ (3,\ -3)$$

El pendent de la recta tangent a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ a $x = 0$ i $x = 3$ val:

$y = x^3 - 6x^2 + 8x \;\rightarrow\;$ per a $x = 0$, el pendent val 8

$\rightarrow\;$ per a $x = 3$, el pendent val -1

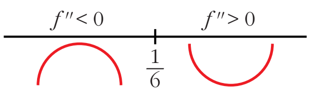
Per tant, $(3, -3)$ correspon al punt de tangència amb la recta $y = -x$ (que té pendent -1) i $(0, 0)$ a un altre punt de tall entre totes dues funcions.

30. Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = 4x^3 - 12x^2 - 10$ en el seu punt d'inflexió.

- Trobem el seu punt d'inflexió:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{6}$$



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{271}{27}\right)$.

- Pendent de la recta tangent en aquest punt: $f'\left(\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{3}$

- Equació de la recta tangent:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

31. **Determina la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ que és tangent a la recta $y = 2x - 3$ en el punt $A(2, 1)$ i que passa pel punt $B(5, -2)$.**

$y = -x^2 + 6x - 7$

32. **La corba $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ talla l'eix d'abscisses en $x = -1$ i té un punt d'inflexió en (2, 1). Calcula a, b i c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \rightarrow -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 \rightarrow 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 \rightarrow 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

33. **De la funció $f(x) = ax^3 + bx$ sabem que passa per (1, 1) i en aquest punt té tangent paral·lela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Troba a i b.

b) Determina'n els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

a) $f(x) = ax^3 + bx; \quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \rightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \rightarrow 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -3(2x^2 - 1) = 0 \quad \begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

Signe de la derivada:

$f' < 0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $f' > 0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $f' < 0$

La funció: és decreixent en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

és creixent en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

té un mínim en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

té un màxim en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

34. De la funció $f(x) = x^2 + ax + b$ se'n sap que:

– Té un mínim en $x = 2$.

– La seva gràfica passa pel punt (2, 2).

Tenint en compte aquestes dades, quant val la funció en $x = 1$?

$f(x) = x^2 + ax + b$

$f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(2) = 4 + a = 0 \rightarrow a = -4$

$f(2) = 4 - 8 + b = 2 \rightarrow b = 6$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6$

$f(1) = 3$

35. Calcula p i q de manera que la corba $y = x^2 + px + q$ contingui el punt (–2, 1) i presenti un mínim en $x = -3$.

$y = x^2 + px + q$

$y' = 2x + p \rightarrow y'(-3) = -6 + p = 0 \rightarrow p = 6$

$f(-2) = -8 + q = 1 \rightarrow q = 9$

$\Rightarrow y = x^2 + 6x + 9$

36. Estudia els intervals de creixement i de concavitat de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{3x}{1 + x^2}$ **b)** $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

a) creix en $(-1, 1)$ i decreix en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. A més, és còncava en els intervals $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ i convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$.

b) $f(x)$ decreix en $(-\infty, 0)$ i creix en $(0, +\infty)$. A més, és còncava en els intervals $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ i convexa en l'interval $(-3, -1)$.

37. Comprova i justifica que la funció $f(x) = e^{-3x}$ és sempre decreixent i còncava.

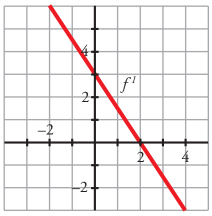
$f(x)' = -3 \cdot e^{-3x}$ i $f(x)'' = 9 \cdot e^{-3x}$. Com que e^{-3x} sempre serà positiu, $f(x)' < 0$ i $f(x)'' > 0$. Per tant, sempre és decreixent i còncava.

Pàgina 188

38. **Observant la gràfica de la funció f', derivada de f, digues:**

a) Quins són els intervals de creixement i decreixement de f.

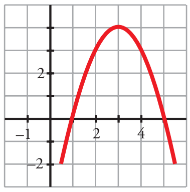
b) Té f màxim o mínim?



a) f creix en l'interval $(-\infty, 2)$ i decreix en l'interval $(2, +\infty)$.

b) Té un màxim en $x = 2$, quan $f' = 0$

39. **Aquesta és la gràfica de la funció derivada de $f(x)$.**



Explica si $f(x)$ té màxims, mínims o punts d'inflexió en $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$.

La funció $f(x)$ presenta un mínim en $x = 1$ ($f(x)' = 0$) i un màxim en $x = 5$ ($f(x)' = 0$). A $x = 3$ la funció presenta un punt d'inflexió, ja que $f(x)'' = 0$ (el pendent de la derivada de $f(x)'$ serà 0).

40. **Donada la funció**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Troba'n la funció derivada.

b) Té f algun punt en el qual $f'(x) = 0$?

c) Estudia el creixement i decreixement de f.

d) Escriu l'equació de la recta tangent a f en $x = 0$.

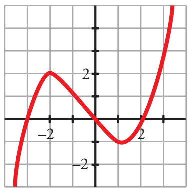
a) $f(x)' \begin{cases} 2x + 2 \\ 1 \end{cases}$

b) per $x = -1$

c) $f(x)$ decreix a l'interval $(-\infty, -1)$ i creix als intervals $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$

d) $y = 2x - 1$

41. **Aquesta és la gràfica d'una funció $y = f(x)$.**



a) Indica el signe que tindrà f' en els intervals $(-\infty, 2)$, $(-2, 1)$ i $(1, +\infty)$.

b) En quins punts la gràfica de f' tallarà l'eix OX?

a) f' serà positiva als intervals $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, i negativa a l'interval $(-2, 1)$.

b) f' tallarà l'eix OX en $x = -2$ i $x = 1$.

42. **Escriu l'equació de la recta tangent a la corba $y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$ en el seu punt d'inflexió.**

Punt d'inflexió en $x = 4$. Així, $y = -24x + 113$

43. **Donada la corba $y = x^4 - 4x^3$**

a) Quina és la funció que ens dóna el pendent de la recta tangent en un punt qualsevol?

b) Troba el punt en què el pendent de la recta tangent és màxim.

a) $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

b) $f(x)' = 0$; Hi ha un pendent mínim a $x = 0$ i $x = 2$; no hi ha cap pendent màxim.

44. **Una fira ramadera és oberta al públic des de les 10 hores fins a les 20 hores. Se sap que el nombre de visitants diaris ve donat per:**

$$N(t) = -20\,(A - t)^2 + B, \qquad 10 \le t \le 20$$

Si sabem que a les 17 hores s'arriba al nombre màxim de 1 500 visitants, determina el valor de A i de B.

L'enunciat diu que: $N(17) = 1500$
i que $N'(17) = 0$, ja que és un màxim.

$N'(t) = -20(A - t) \cdot (-1) = 40A - 40t$

$$\begin{cases} N(17) = 1500 \\ N'(17) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -20(A-17)^2 + B = 1500 \\ 40A - 40 \cdot 17 = 0 \end{cases} \rightarrow A = 17 \rightarrow B = 1500$$

45. **El nombre de vehicles que ha passat un dia determinat pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:**

$$\boldsymbol{N(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 9 \\ 10 - \left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si} \quad 9 \le t \le 24 \end{cases}}$$

en què N indica el nombre de vehicles i t el temps transcorregut en hores des de les 0.00 h.

a) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava per l'autopista?

b) A quina hora va passar el major nombre de vehicles? Quants en van passar?

$$N(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 9 \\ 10 - \left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si} \quad 9 \le t \le 24 \end{cases}$$

Ho arreglem.

$$N(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}t^2 - \dfrac{2}{3}t + 3 & \text{si} \quad 0 \le t \le 9 \\ -\dfrac{1}{9}t^2 + \dfrac{10}{3}t - 15 & \text{si} \quad 9 \le t \le 24 \end{cases}$$

$$N'(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}t - \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad 0 < t \le 9 \\ -\dfrac{2}{9}t + \dfrac{10}{3} & \text{si} \quad 9 \le t \le 24 \end{cases}$$

Comprovem que $N'(9^+) = N'(9^-) = \dfrac{4}{3}$

a) Demanen quan $N'(t) > 0$, que vol dir quan $N(t)$ creix.

Per al primer tros: $\dfrac{2}{9}t - \dfrac{2}{3} > 0 \quad \to \quad \dfrac{2}{9}t > \dfrac{2}{3} \quad \to \quad t > 3$

Com que el primer tros està definit entre $0 \le t \le 9$, podem dir que $N(t)$ creix si $3 < t < 9$ o, el que és el mateix, $t \in (3, 9)$.

Per al segon tros: $-\dfrac{2}{9}t + \dfrac{10}{3} > 0 \quad \to \quad -\dfrac{2}{9}t > -\dfrac{10}{3} \quad \to \quad \dfrac{2}{9}t < \dfrac{10}{3} \quad \to \quad t < 15$

Com que el segon tros està definit entre $9 \le t \le 24$, podem dir que $N(t)$ creix si $9 < t < 15$ o, el que és el mateix, $t \in (9, 15)$.

Ajustant els dos trossos obtenim que $N(t)$ creix si $t \in (3, 15)$.

b) Per al primer tros: $N'(t) = 0 \quad \to \quad \dfrac{2}{9}t - \dfrac{2}{3} = 0 \quad \to \quad t = 3$

Per al segon tros: $N'(t) = 0 \quad \to \quad -\dfrac{2}{9}t - \dfrac{10}{3} = 0 \quad \to \quad t = 15$

Si fem la primera derivada veiem que $N''(3) = \frac{2}{9} > 0 \rightarrow$ mínim.

Si fem la segona derivada veiem que $N''(15) = -\frac{2}{9} < 0 \rightarrow$ màxim.

$N(15) = 10$.

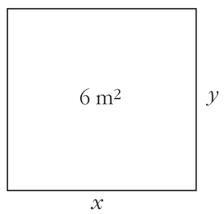
El màxim de vehicles el trobem a les 15 h. Van passar 10 vehicles.

46. Volem construir el marc per a una finestra rectangular de 6 m² de superfície. El metre lineal de tram horitzontal costa 2,5 € i el de tram vertical 3 €.

a) Calcula les dimensions de la finestra perquè el cost del marc sigui mínim.

b) Quin serà aquest cost mínim?

a) Àrea $= x \cdot y = 6 \rightarrow y = \frac{6}{x}$



Cost $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

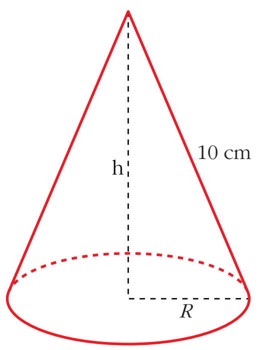
$C = 5x + \frac{36}{x}$

$C' = 5 - \frac{36}{x^2} = 0 \rightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68$ m $\rightarrow$ y $= \sqrt{5} \approx 2{,}24$ m

$\left(C'' = \frac{72}{x^3};\ C''\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ és mínim}\right)$

b) $C = 5 \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$ €

47. Es vol construir un recipient cònic la generatriu del qual mesuri 10 cm i que tingui capacitat màxima. Quin n'ha de ser el radi de la base?



$h^2 + R^2 = 100 \rightarrow R^2 = 100 - h^2$

Volum $= \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$

Hem de maximitzar la funció volum:

$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$

$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$

$f'(\mathrm{h}) = 0 \;\rightarrow\; 100 - 3\mathrm{h}^2 = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$

(considerem l'arrel positiva, ja que $\mathrm{h} \geq 0$).

$\Big($$f'(\mathrm{h}) > 0$ a l'esquerra de $\mathrm{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ i $f'(\mathrm{h}) < 0$ a la dreta de $\mathrm{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$.

Per tant, en $\mathrm{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ hi ha un màxim$\Big)$.

Així doncs, el radi de la base serà:

$$R^2 = 100 - \mathrm{h}^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \;\rightarrow\; R = \sqrt{\frac{200}{3}} \text{ cm.}$$

48. Un article ha estat 8 anys en el mercat. El seu preu $P(t)$, en milers d'euros, estava relacionat amb el temps, t, en anys, que aquest feia que era al mercat, mitjançant la funció:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) Estudia el creixement i decreixement de $P(t)$.

b) Quin va ser el preu màxim que va aconseguir l'article?

c) Quina va ser la taxa de variació mitjana del preu durant els darrers 6 anys?

a) $P(x)' \begin{cases} 8x \\ -5/2 \end{cases}$

El preu ha crescut fins al segon any (0, 2), i ha disminuït a partir d'aquest (2, 8).

b) 20 000 €, al segon any ($t = 2$)

c) –2500 €/any

Pàgina 189

QÜESTIONS TEÒRIQUES

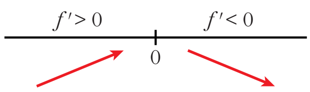
49. La funció f té derivades primera i segona i és $f'(a) = 0$ i $f''(a) = 0$.

Pot presentar f un màxim relatiu en el punt a?

En cas afirmatiu, posa'n un exemple.

Sí pot presentar un màxim. Per exemple:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ és tal que:



$f'(x) = -4x^3 \qquad f''(x) = -12x^2$

Per tant: $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 0$

En (0, 0) hi ha un màxim relatiu.

50. **Una funció f és decreixent en el punt a i derivable en aquest.**

a) Pot ser $f'(a) > 0$?

b) Pot ser $f'(a) = 0$?

c) Pot ser $f'(a) < 0$?

Raona les teves respostes.

a) El pendent d'una funció decreixent mai no serà positiu; per tant, mai no podrà ser $f(x)' > 0$.

b) Sí. En aquest cas trobaríem un punt d'inflexió en $x = 0$.

c) Sí. El pendent de la tangent d'una funció decreixent és menor que 1 ($f(x)' < 1$).

51. **Considera la funció $|x|$ (valor absolut de x):**

a) Presenta un mínim relatiu en cap punt?

b) En quins punts és derivable?

Raona les teves respostes.

a) No en presenta cap.

b) És derivable en l'interval $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ja que no és derivable en $x = 0$.

52. **Comprova si existeix algun valor de a per al qual la funció $f(x) = a \ln x + x^3$ tingui un punt d'inflexió en $x = 1$.**

Si punt d'inflexió $\rightarrow$ $f''(x) = 0$

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 3x^2$$

$$f''(x) = \frac{-a}{x^2} + 6x$$

Si punt d'inflexió en $x = 1$ $\rightarrow$ $f''(1) = 0$

$$\frac{-a}{1} + 6 \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 6$$

53. **D'una funció f sabem que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ i $f'''(a) = 5$. Podem assegurar que f té màxim, mínim o punt d'inflexió en $x = a$?**

f té un punt d'inflexió en $x = a$.

Vegem per què:

$f'''(a) = 5 > 0$ $\rightarrow$ f'' és creixent en $x = a$.

Com que, d'altra banda, $f''(a) = 0$, tenim que $f''(x) < 0$ a l'esquerra de a i $f''(x) > 0$ a la seva dreta. És a dir, $f(x)$ canvia de convexa a còncava en $x = a$.

Per tant, hi ha un punt d'inflexió en $x = a$.

54. **Si $f'(a) = 0$, quina d'aquestes proposicions és certa?**

a) f té un màxim o un mínim en el punt d'abscissa $x = a$.

b) f té una inflexió en $x = a$.

c) f té en el punt $x = a$ tangent paral·lela a l'eix OX.

Si $f'(a) = 0$, només podem assegurar que f té en $x = a$ tangent horitzontal (paral·lela a l'eix OX).

Podria tenir un màxim, un mínim o un punt d'inflexió en $x = a$.

Per tant, només és certa la proposició c).

55. **D'una funció $f(x)$ se sap que:**

$f(1) = f(3) = 0;\ f'(2) = 0;\ f''(2) > 0$

Què pots dir sobre la gràfica d'aquesta funció?

Es tracta d'una paràbola amb un mínim en $x = 2$, que talla l'eix OX en $x = 1$ i $x = 3$.

56. **La representació gràfica de la funció derivada d'una funció f, és una recta que passa pels punts (2, 0) i (0, 2).**

Utilitzant la gràfica de la derivada:

a) Estudia el creixement i decreixement de la funció f.

b) Estudia si la funció f té màxim o mínim.

a) f creix en l'interval $(-\infty, 2)$ i decreix en l'interval $(2, +\infty)$.

b) Té un màxim en $x = 2$, quan $f' = 0$

57. **Si la gràfica de la derivada de g és una paràbola que talla l'eix OX en (0, 0) i (4, 0) i té per vèrtex (2, 1), què pots dir del creixement i decreixement de g?**

Determina si la funció g presenta màxims o mínims.

a) La funció g creix en l'interval (0, 4) i decreix en els intervals $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

b) La funció presenta un mínim en $x = 0$ i un màxim en $x = 4$, a més d'un punt d'inflexió en $x = 2$.

58. **Estudia l'existència de màxims i mínims relatius i absoluts de la funció $y = |x^2 - 4|$. Comprova que té dos punts d'inflexió.**

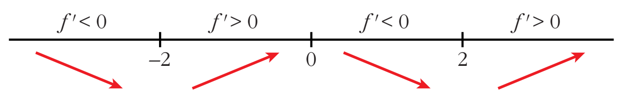
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no és derivable, ja que $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no és derivable, ja que $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada s'anul·la en $x = 0$.
- Signe de la derivada:



- La funció té un màxim relatiu en $(0, 4)$.

  No té màxim absolut $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Té un mínim relatiu en $(-2, 0)$ i un altre en $(2, 0)$. En aquests punts, el mínim també és absolut, atès que $f(x) \ge 0$ per a tot x.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La funció $f(x)$ és còncava si $f''(x) > 0$.

Això passa si $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

La funció $f(x)$ és convexa si $f''(x) < 0$.

Això passa si $x \in (-2, 2)$

En els punts $x = -2$ i $x = 2$ canvia la curvatura de la funció; per tant, tenim 2 punts d'inflexió en $x = -2$ i $x = 2$.

59. **Estudia els intervals de creixement i els màxims i mínims de la funció donada per $y = |x^2 + 2x - 3|$. Té punts d'inflexió?**

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no és derivable, ja que $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no és derivable, ja que $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Vegem on s'anul·la la derivada:

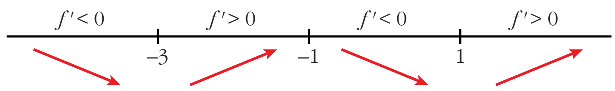
  $2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

  Però $f'(x) = 2x + 2$ per a $x < -3$ i $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$ i $f'(x) = -2x - 2$ per a $-3 < x < 1$

  Per tant, $f'(x)$ s'anul·la en $x = -1$.

- Signe de la derivada:



- La funció: és creixent en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  és decreixent en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  té un màxim en $(-1, -4)$

  té un mínim en $(-3, 0)$ i un altre en $(1, 0)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ -2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La funció $f(x)$ és còncava si $f''(x) > 0$.

Això passa si $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

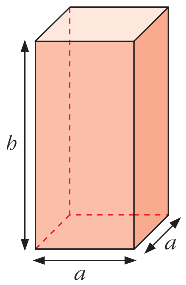
La funció $f(x)$ és convexa si $f''(x) < 0$.

Això passa si $x \in (-3, 1)$

En els punts $x = -3$ i $x = 1$ canvia la curvatura de la funció; per tant, tenim 2 punts d'inflexió en $x = -3$ i $x = 1$.

60. Volem fer un envàs amb forma de prisma regular de base quadrada i capacitat 80 cm³. Per a la tapa i la superfície lateral usem un determinat material, però per a la base hem d'utilitzar un material un 50% més car.

Troba les dimensions d'aquest envàs perquè el preu en sigui el menor possible.



$V = a^2 \cdot h = 80$ cal complir-ho $\rightarrow$ $h = \dfrac{80}{a^2}$

La funció a optimitzar és el cost.

Cost = preu · superfície utilitzada

Anomenarem p el preu de la tapa i la superfície lateral.

Així, la base tindrà un preu de $p + \dfrac{50}{100}p = 1{,}5\,p$

Cost = preu base · S_{base} + preu tapa · S_{tapa} + preu lateral · S_{lateral}

Cost $= 1{,}5\,p \cdot a^2 + p \cdot a^2 + p \cdot 4 \cdot a \cdot h$

Cost $= p \cdot 1{,}5a^2 + p \cdot a^2 + p \cdot 4a\left(\dfrac{80}{a^2}\right)$ $\rightarrow$ $h = \dfrac{80}{a^2}$

Cost $= p \cdot \left(2{,}5a^2 + \dfrac{320}{a}\right)$

El preu és un valor que no sabem, però que està fixat. Això s'anomena paràmetre, i el derivem com si fos un nombre:

Cost$' = p \cdot \left(5a^2 - \dfrac{320}{a^2}\right)$

Cost$' = 0$

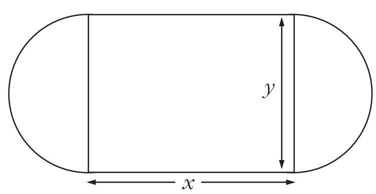
$p \cdot \left(5a^2 - \dfrac{320}{a^2}\right) = 0$

$5a^3 = 320$

$a^3 = 64$

$a = 4$ cm $\rightarrow$ $h = 20$ cm

61. Es vol construir una pista d'entrenament que consta d'un rectangle i de dos semicercles adossats a dos costats oposats del rectangle. Si volem que el perímetre d'aquesta pista sigui de 200 m, troba les dimensions que fan màxima l'àrea de la regió rectangular.



Perímetre de la pista = $2x + \pi \cdot y = 200$

Aïllem $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

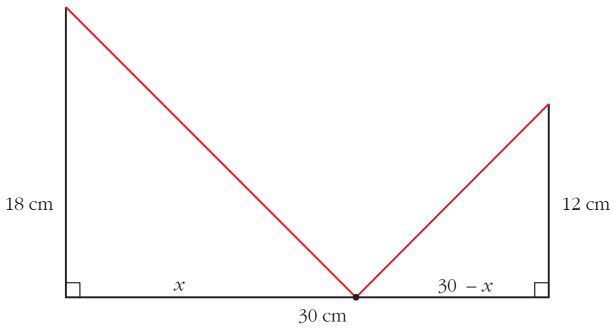
Àrea del rectangle = $x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivem

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \;\rightarrow\; x = 50 \text{ m} \;\rightarrow\; y = \frac{100}{\pi}\text{m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\ A''(50) < 0 \;\Rightarrow\; x = 50 \text{ és màxim}\right).$$

62. **Dos pals de 12 i 18 m d'altura disten entre si 30 m. Es vol col·locar un cable que uneixi un punt del terra entre els dos pals amb els extrems d'aquests. On cal situar el punt del terra perquè la longitud total del cable sigui mínima?**



La longitud de la línia vermella ha de ser mínima. Per Pitàgores:

$$L = \sqrt{18^2 + x^2} + \sqrt{12^2 + (30 - x)^2}$$

$$L = \sqrt{324 + x^2} + \sqrt{144 + 900 - 60x + x^2}$$

$$L = \sqrt{x^2 + 324} + \sqrt{x^2 - 60x + 1044}$$

Derivem per igualar a zero:

$$L' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 324}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1044}}$$

$$L' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 324}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1044}}$$

$$L' = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 324}} = \frac{-(x - 30)}{\sqrt{x^2 - 60x + 1044}}$$

Elevem al quadrat:

$$\frac{x^2}{x^2 + 324} = \frac{x^2 - 60x + 900}{x^2 - 60x + 1044}$$

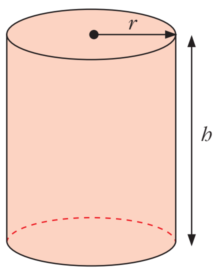
$180x^2 - 19440x + 291600 = 0$

$x = 18$

$x = 90$

Cal situar-lo a 18 m del pal de 18 m i a 12 m del pal de 12 m.

63. Es vol construir un dipòsit de llautó amb forma de cilindre d'àrea total 54 cm^2. Determina el radi de la base i l'altura del cilindre perquè el volum sigui màxim.



La funció que volem optimitzar és el volum:

$V = \pi r^2 - h$

Cal complir $A = 2\pi r h = 2\pi r^2 = 54 \rightarrow h = \dfrac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{27}{\pi r} - r$

$V(r) = \pi r^2 \left(\dfrac{27}{\pi r} - r \right) = 27r - \pi r^3$

$V'(r) = 27 - 3r^2$

$V'(r) = 0 = 27 - 3r^2$

$r = 3 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{9}{\pi} - 3 \text{ cm.}$