UNITAT 9

REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS

Pàgina 190

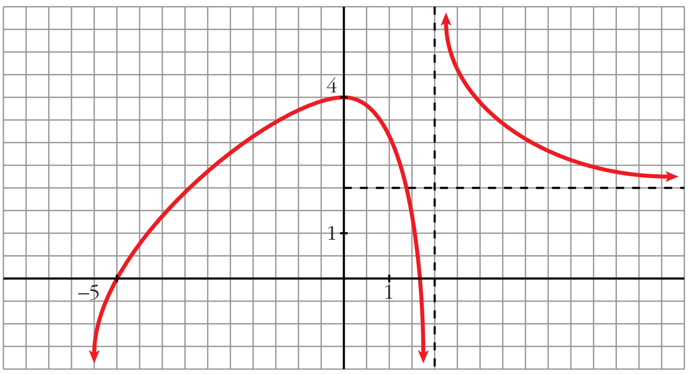
Descripció d'una gràfica

1. Copia en el quadern les dades enquadrades en vermell. A partir d'aquestes i sense mirar la gràfica que apareix al principi, representa aquesta funció sobre uns eixos coordenats dibuixats en paper quadriculat.

(La solució és en el mateix exercici).

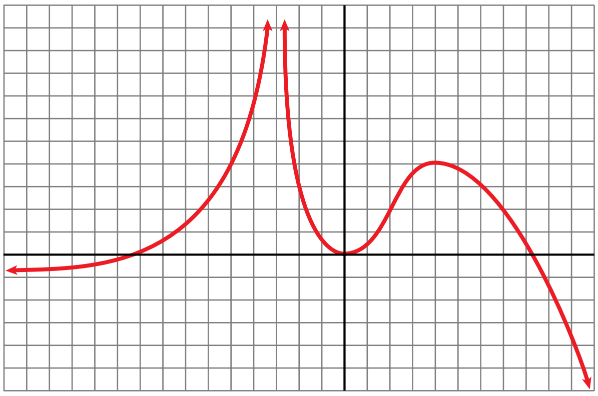
2. Traça uns eixos coordenats sobre paper quadriculat i representa-hi una corba, com més senzilla millor, que compleixi les condicions següents:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$; $f(1{,}75) = 0$
- f és derivable en tot $\mathbb{R}$, excepte en $x = 2$.



Pàgina 191

3. Descriu, amb la menor quantitat de dades i com en els apartats anteriors, la funció següent:



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

4. Representa sobre uns eixos en paper quadriculat una gràfica inventada per tu. Descriu-la en paper a banda. Dóna'n la descripció a la teva companya o company perquè la representi.

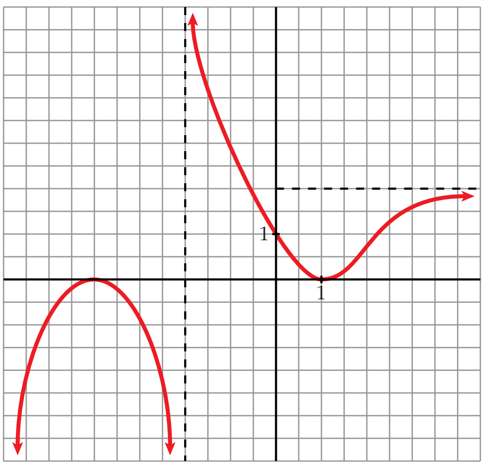
Representa tu la seva.

Compareu cada representació amb la corba original. Discutiu les diferències que hi observeu.

Hi ha cap error en la representació?

Hi ha, potser, error en la descripció?

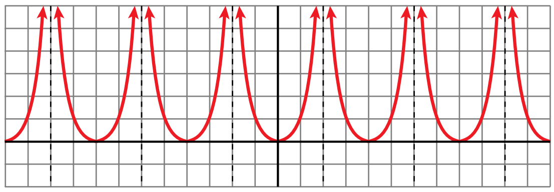
És tot correcte?



Per exemple:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0;\ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0;\ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

5. Observa aquesta gràfica:



- **Troba l'ordenada per a les abscisses següents:**

$$x = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 3,\ \ x = -7,\ \ x = 12,$$
$$x = -400,\ \ x = 13,\ \ x = -199$$

- **En quins punts no està definida aquesta funció?**
- **Quin tram de la funció et caldria conèixer per fer-te una idea exacta de com és la gràfica?**
- **Et suggereix aquesta corba cap tipus de simetria o periodicitat?**

- $f(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f(3) = 1;\ f(-7) = 1$

  $f(12) = 0;\ f(-400) = 0;\ f(13) = 1;\ f(-199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0$; $f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ i no existeix $f(x)$ en $x = 4k + 2$, amb $k \in \mathbb{Z}$).

- La funció no està definida en els punts de la forma $x = 4k + 2$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

- Només caldria conèixer la funció per a $x \in [0, 2)$, si sabéssim que és parell i que és periòdica de període 4.

- Simetria $\rightarrow$ És una funció parell (simètrica respecte a l'eix Y).

  Periodicitat $\rightarrow$ És periòdica de període 4.

Pàgina 192

EXERCICIS PROPOSATS

1. Troba el domini d'aquestes funcions:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$ **c)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $D = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ per a tot x $\rightarrow$ $D = \mathbb{R}$

2. Troba el domini de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = \ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \quad \to \quad D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ per a tot $x \quad \to \quad D = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \quad \to \quad D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad D = \mathbb{R} - \{0\}$

Pàgina 193

3. Troba les possibles simetries i periodicitats, digues on són contínues i on derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ **e)** $y = \sin x + 1/2\,(\cos 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

És una funció parell: simètrica respecte a l'eix Y.

No és periòdica.

És contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

b) *Domini* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No és parell ni senar; no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte al centre de coordenades.

No és periòdica.

És contínua en el seu domini.

És derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) *Domini* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

No és periòdica.

És contínua i derivable en el seu domini.

d) *Domini* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

No és periódica.

És contínua i derivable en el seu domini.

e) *Domini* = $\mathbb{R}$

$f(-x) = \ sin\ (-x) + \frac{1}{2}\ cos\ (-x) = -sin\ x + \frac{1}{2}\ cos\ x$

No és parell ni senar; no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

És periòdica de període 2π.

És contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

Pàgina 194

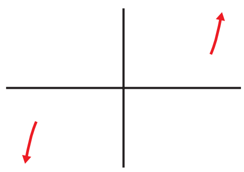
4. Troba les branques infinites de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **e)** $y = ln\ (x^2 + 1)$ **f)** $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



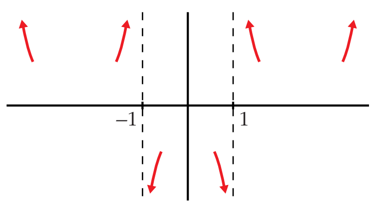
Branques parabòliques

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asímptotes verticals: } x = -1;\ x = 1$$



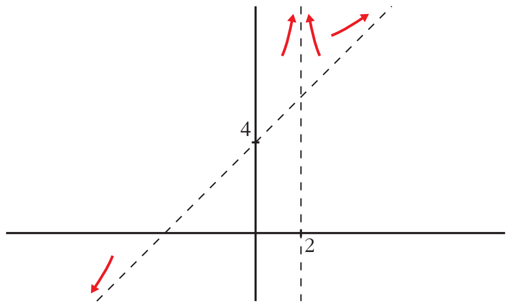
c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

- *Domini* = $\mathbb{R} - \{2\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $y = x + 4$ és una asímptota obliqua.

  $$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \quad \to \quad \begin{cases} f(x) - (x + 4) > 0 & \text{si } x \to +\infty \\ f(x) - (x + 4) < 0 & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$$

- $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{aligned}\right\} x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$



d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

- *Domini* = $x^2 - 2x > 0 \quad \to \quad x^2 - 2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \qquad x = 2$

  $f(x) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

  As. oblíqua: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \dfrac{2x}{x^2}} = 1$

  $$n = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = -1$$

  Dividim per x numerador
  i denominador

  La funció té asímptota oblíqua en $y = x - 1$ quan $x \to +\infty$

  Si fem el mateix per $x \to -\infty$, obtenim as. oblíq. en $y = -x + 1$

  - Punts de tall amb eixos:

    $x = 0 \notin [f(x)]$

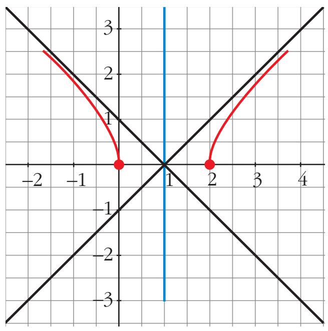
    $\sqrt{x^2 - 2x} = 0 \quad \to \quad x = 0 \text{ i } x = 2 \quad \to \quad (0, 0) \text{ i } (2, 0)$

• $f'(x) = \dfrac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

Extrems relatius:

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \;\rightarrow\; x = 1 \notin [f(x)]$. No té extrems relatius.

Monotonia:



e) $y = ln(x^2 + 1)$

• *Domini* = $\mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

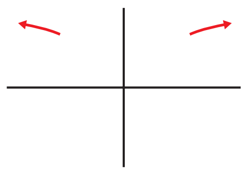
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^3 + x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^3 + x} = 0$

} Branques paràbòliques

• No hi ha asímptotes verticals.



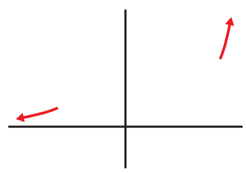
f) $y = 2^{x-1} > 0$ per a tot x.

• *Domini* = $\mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \;\rightarrow\; y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \;\; \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

• No hi ha asímptotes verticals.



Pàgina 195

5. Troba els punts singulars i els punts d'inflexió de:

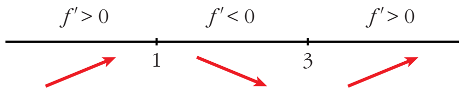
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ **b)** $y = ln\,(x^2 + 1)$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Domini* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

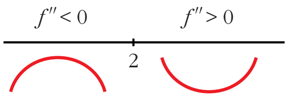


Hi ha un màxim en $(1, 9)$ i un mínim en $(3, 5)$.

- $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(2, 7)$.

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Domini* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

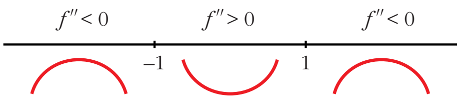
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ per a } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ per a } x > 0 \end{array}\right\} \text{Hi ha un mínim en } (0, 0).$$

- $f''(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(-1, ln\ 2)$ i un altre en $(1, ln\ 2)$.

6. Troba els punts singulars de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 15x^2(x^2 - 4) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	-2	$f' < 0$	0	$f' < 0$	2	$f' > 0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Hi ha un màxim en $(-2, 64)$, un mínim en $(2, -64)$, i un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	-1	$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$
$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

Hi ha un màxim en $(0, 0)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x - 6) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$	6	$f' > 0$
$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$ i un mínim en $\left(6, \frac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Domini* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \notin$ *Domini.*

No hi ha punts singulars.

Pàgina 197

7. Representa aquestes funcions:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ **b)** $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$ **c)** $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetries:**

$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Punts singulars: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Talls amb els eixos:**

— Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$ Punt $(0, 7)$

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \quad \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Punts: $(-\sqrt{7}, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(\sqrt{7}, 0)$

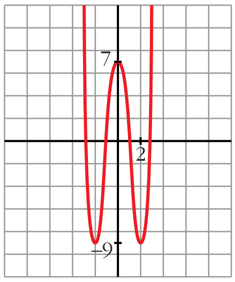
- **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Punts $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ i $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gràfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetries:**

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

Punts: (0, 0); (2, –64); (–3, –189)

- **Talls amb els eixos:**

— Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt (0, 0)

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$

Punts: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- **Punts d'inflexió:**

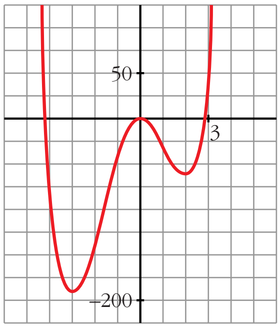
$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$

Punts: (1,12; –34,82) i (–1,79; –107,22)

• **Gràfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

• **Simetries:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

• **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• **Punts singulars:**

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right\}$ Punts $(1, 7)$; $(-1, -9)$; $(3, -9)$

• **Talls amb els eixos:**

— Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt $(0, 0)$

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$x = 0$

$x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 6) = 0$ $\begin{array}{l} x = 2 \\ x \approx 3{,}65 \\ x \approx -1{,}65 \end{array}$

Punts: $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(3{,}65; 0)$; $(-1{,}65; 0)$

• **Punts d'inflexió:**

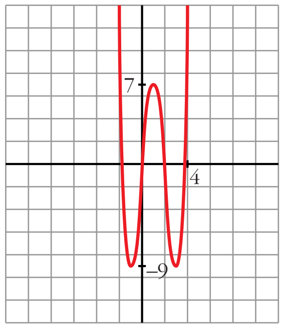
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \dfrac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$ $\begin{array}{l} x \approx 2{,}15 \\ x \approx -0{,}15 \end{array}$

Punts: $(2{,}15; -1{,}83)$ i $(-0{,}15; -1{,}74)$

- **Gràfica:**



8. **Representa les funcions següents:**

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$ **b)** $y = x^3 - 3x$ **c)** $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetries:**

  $f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen de coordenades.

- **Branques infinites:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

  Punts: $(0, -16)$; $(1, -17)$

- **Talls amb els eixos:**

  — Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -16 \rightarrow$ Punt $(0, -16)$

  — Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \rightarrow$

  $\begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ té una sola arrel, situada entre –2 i –1; ja que, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ i $g(-1) = 3 > 0$.

  Punts $(2, 0)$ i $(k, 0)$, amb k entre –2 i –1.

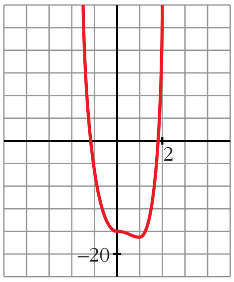
- **Punts d'inflexió:**

  $f''(x) = 36x^2 - 24x$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

  Punts: $(0, -16)$ i $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

• **Gràfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

• **Simetries:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

• **Branques infinites:**

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• **Punts singulars:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 1) = 0 \;\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Punts: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

• **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\;$ Punt $(0, 0)$

– Amb l'eix $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^3 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - 3) = 0$

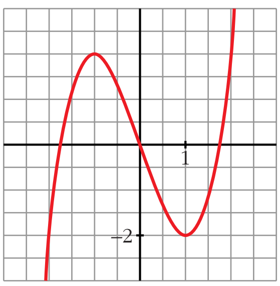
$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right\}$ Punts: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, 0)$

• **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punt $(0, 0)$

• **Gràfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetries:**

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Branques infinites:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Punts: (0, 0); (–2, –4); (2, –4)

- **Talls amb els eixos:**

— Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt (0, 0)

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Punts: $(0, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{2}, 0)$

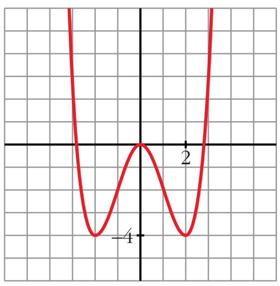
- **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Punts: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- **Gràfica:**



Pàgina 199

9. Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2} = -x + \dfrac{x}{1-x^2}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

- **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = 1$$

- **Asímptota obliqua:**

$\dfrac{x^3}{1-x^2} = -x + \dfrac{x}{1-x^2} \quad \to \quad y = -x$ és asímptota obliqua.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (corba per sobre)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (corba per sota)

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

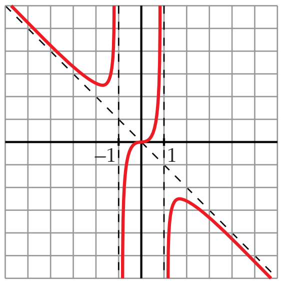
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(-x^2+3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Punts: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Talls amb els eixos:**

Talla els eixos en $(0, 0)$.

• **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$. No és parell ni senar: no és simètrica respecte a l'eix Y ni respecte a l'origen.

• **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = 0$$

• **Asímptota obliqua:**

$\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x} \quad \to \quad y = x - 2$ és asímptota obliqua.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (corba per sobre)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (corba per sota)

• **Punts singulars:**

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ per a tot x del domini.

La funció és creixent en tot el seu domini. No té punts singulars.

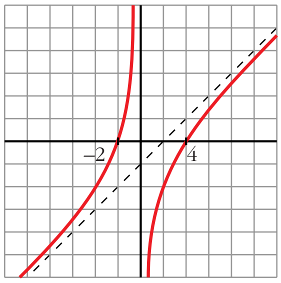
• **Talls amb els eixos:**

— Amb l'eix X → $y = 0$ → $x^2 - 2x - 8 = 0$ $\begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Punts: $(-2, 0)$ i $(4, 0)$

— No talla l'eix Y, ja que no està definida en $x = 0$.

• **Gràfica:**



10. **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix *Y*.

• **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = 2.$$

• **Asímptota horitzontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \quad \to \quad y = 1$ és asímptota horitzontal.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (corba per sota)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (corba per sota)

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 10x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad$ Punt $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

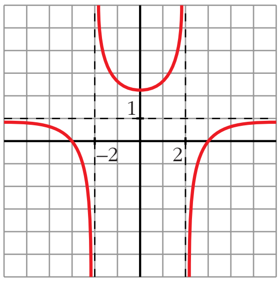
• **Talls amb els eixos:**

— Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow$ Punt $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Punts: $(-3, 0)$ i $(3, 0)$.

• **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Domini* = $\mathbb{R}$

• **Simetries:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. És senar: simètrica respecte a l'origen de coordenades.

• **No té asímptotes verticals.**

• **Asímptota obliqua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x$ és asímptota obliqua.

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (corba per sota)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (corba per sobre)

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow$ No té solució.

No hi ha punts singulars.

- **Talls amb els eixos:**

— Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt $(0, 0)$

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punt $(0, 0)$

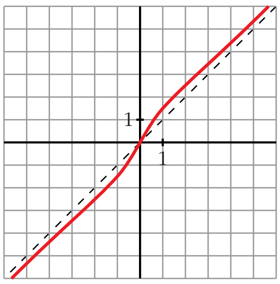
- **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \text{Punts: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gràfica:**



Pàgina 201

11. **Representa:**

a) $y = e^{1-x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **c)** $y = ln(x^2 + 4)$

a) $y = e^{1-x^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$.

- **Simetries:**

$f(-x) = e^{1-x^2} = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ és asímptota horitzontal. A més, com que $e^{1 - x^2} > 0$ per a tot x, la corba se situa per sobre de l'asímptota.

• **Punts singulars:**

$f'(x) = -2x \cdot e^{1 - x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punt $(0, e)$

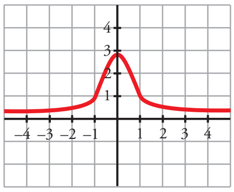
• **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = -2e^{1 - x^2} + (-2x) \cdot (-2x)^{1 - x^2} = (-2 + 4x^2)e^{1 - x^2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \approx 0{,}7 \;\rightarrow\; \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{1/2} \approx 1{,}65$

Punts d'inflexió: $(-0{,}7;\ 1{,}65)$, $(0{,}7;\ 1{,}65)$

• **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

• **Domini:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• **No és simètrica:**

• **Asímptotes verticals:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asímptota vertical en } x = 0.$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. A més $f(x) > 0$ per a tot x del domini.

$y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$

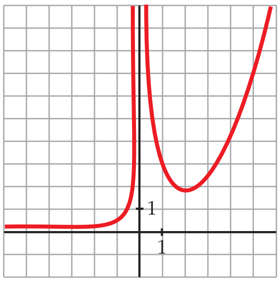
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Branca parabòlica.

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\;$ Punt $\left(2, \dfrac{e^2}{4}\right)$.

• **Gràfica:**



c) $y = ln(x^2 + 4)$

• **Domini:**

Com que $x^2 + 4 > 0$ per a tot x, $D = \mathbb{R}$.

• **Simetries:**

$f(-x) = ln\,(x^2 + 4) = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

• **No té asímptotes verticals.**

• **Branques infinites:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Per tant, no té asímptotes de cap tipus.

Té branques parabòliques.

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

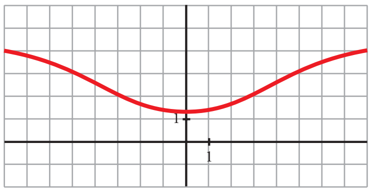
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punt $(0, ln\,4)$

• **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ Punts: $(-2, ln\,8)$ i $(2, ln\,8)$

• **Gràfica:**



12. **Representa:**

a) $y = \ln(x^2 - 1)$ **b)** $y = \sqrt{3}\, \sin x + \cos x$

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Domini:**

$x^2 - 1 > 0 \;\rightarrow\; D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Simetries:**

$f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

• **Asímptotes verticals:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \;\; \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.

• **Asímptotes horitzontals:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Té branques parabòl·liques.

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow$ No té punts singulars, ja que la funció no està definida en $x = 0$.

• **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No té punts d'inflexió.

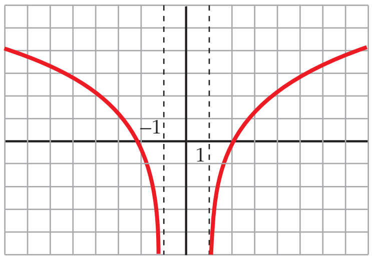
• **Punts de tall amb els eixos:**

– Amb l'eix $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \ln(x^2 - 1) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \text{Punts: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ i } (\sqrt{2}, 0)$$

– No talla l'eix Y, ja que no existeix $f(0)$.

- **Gràfica:**



b) $y = \sqrt{3}\ sin\ x + cos\ x$

- Està definida, i és *contínua i derivable* en tot $\mathbb{R}$.
- És *periòdica* de període 2π → només l'estudiem en $[0, 2\pi]$.
- No existeix $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ → no té asímptotes ni branques parabòliques.
- **Punts de tall amb els eixos:**

– Amb l'eix Y → $x = 0$ → $f(0) = 1$ → Punt $(0, 1)$

– Amb l'eix X → $y = 0$ → $\sqrt{3}\ sin\ x + cos\ x = 0$

– $\sqrt{3}\ tg\ x + 1 = 0$ → $tg\ x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ → $x = \dfrac{5\pi}{6}$ o $x = \dfrac{11\pi}{6}$

Punts $\left(\dfrac{5\pi}{6}, 0\right)$; $\left(\dfrac{11\pi}{6}, 0\right)$

- **Punts singulars:**

$f'(x) = \sqrt{3}\ cos\ x - sin\ x$

$f(x) = 0$ → $\sqrt{3}\ cos\ x - sin\ x = 0$ → $\sqrt{3} - tg\ x = 0$ →

$$\to tg\ x = \sqrt{3} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \to \text{Punt } \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \to \text{Punt } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -2\right) \end{cases}$$

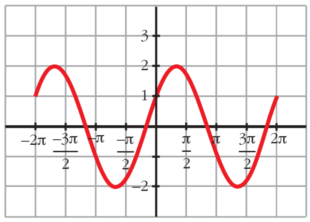
- **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = -\sqrt{3}\ sin\ x - cos\ x = -f(x)$

$f''(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$

Els punts d'inflexió són els de tall amb l'eix X.

• **Gràfica:**



Pàgina 203

EXERCICIS PROPOSATS

13. **Representa:**

a) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$ **c)** $|x - 5|x$

a) $|x - 3|$ si $x > 3 \rightarrow (x - 3)$.

si $x < 3 \rightarrow (3 - x)$.

$|x + 1|$ si $x < -1 \rightarrow (-x - 1)$.

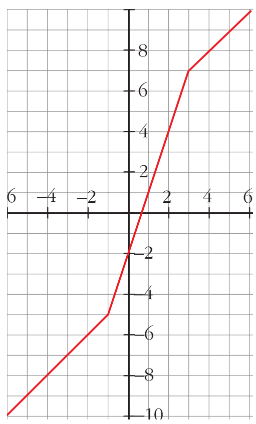
si $x > -1 \rightarrow (x + 1)$.

La funció $y = x - |x - 3| + |x + 1|$ queda com $y = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x + 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Són tres trams rectes.

N'avaluem els pendents i les ordenades, en l'origen.

• **Gràfica:**



b) • **Domini** $\mathbb{R}$.

• **No asímptotes verticals.**

• **Branques infinites** quan $x \rightarrow \infty$.

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \ge 0 \\ \dfrac{x^2 + 3x}{1 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 2.$

Asímptota obliqua en $y = x + 2$ quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-1)x) = -4.$

Asímptota obliqua en $y = -x - 4$ quan $x \to -\infty$.

- **No té simetria.**
- **Talls amb eixos.**

eix $y \to f(0) = 0 \to (0, 0)$.

eix $x \to \dfrac{x^2 + 3x}{2|x| + 1} = 0 \to x^2 + 3x = 0 \to \begin{array}{l} x = 0 \to (0, 0). \\ x = -3 \to (-3, 0). \end{array}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **Punts singulars.**

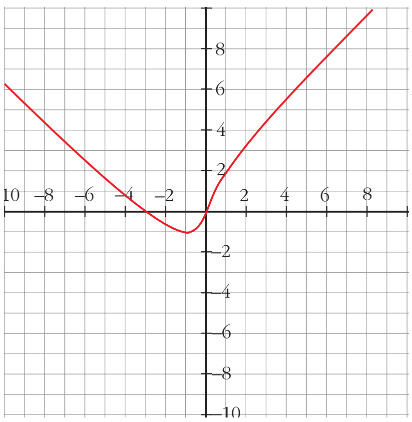
$f'(x) = 0 \quad x = -1 \quad f(-1) = -1 \to (-1, -1)$ mínim.

- **Monotonia** $f'(x) > 0$ i $f'(x) < 0$.

$f(x)$ creix si $x \in (-1, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, -1)$.

- **Gràfica:**



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \\ 5x - x^2 & \text{si } x < 5 \end{cases}$

- **Domini** $\mathbb{R}$.
- **No té asímptotes verticals.**
- **Branca infinita** quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty \qquad$ Branca parabólica quan $x \to \infty$.

Branca infinita quan $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ Branca parabólica quan $x \to -\infty$.

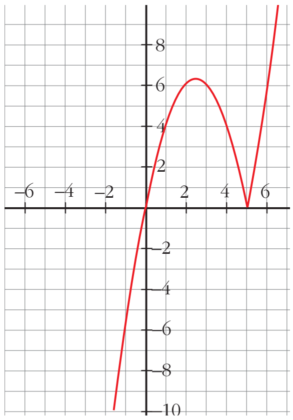
- **No simetria.**
- **Talls amb eixos:** eix $y \to (0, 0)$.

  eix $y \to (0, 0)$ i $(5, 0)$.

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x > 5 \\ 5 - 2x & \text{si } x < 5 \end{cases}$ No derivable a $x = 5 \to$ pic.

- **Punts singulars:** $f'(x) = 0 \quad x = 5/2 \quad f(5/2) = \dfrac{25}{4} \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$ màxim.
- **Monotonia:** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 5/2) \cup (5, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (5/2, 5)$.
- **Gràfica:**



Pàgina 210

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

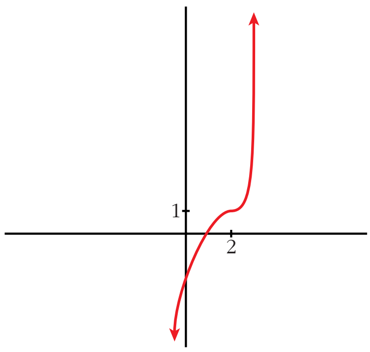
PER PRACTICAR

Descripció d’una gràfica

14. **Representa una funció contínua i derivable en $\mathbb{R}$ que compleixi:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \; f'(2) = 0$$

$$f(2) = 1, \; f'(x) \geq 0 \text{ per a qualsevol } x.$$



15. **D'una funció $y = f(x)$ tenim aquesta informació:**

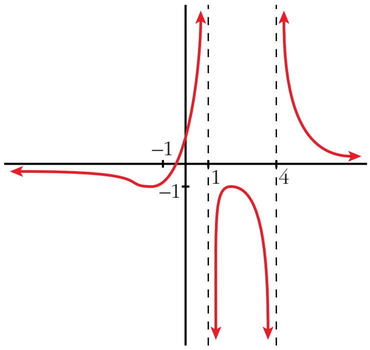
$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \ \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty; \ \lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty; \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$$f'(2) = 0, \ f(2) = -1; \ f'(-1) = 0, \ f(-1) = -1$$

Representa-la.

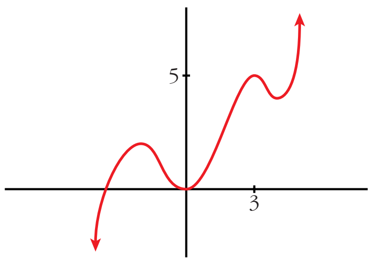


16. **Dibuixa la gràfica d'una funció de la qual es coneixen les propietats següents:**

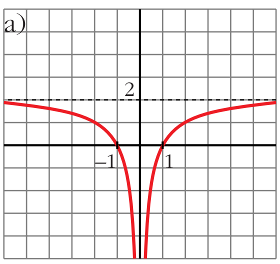
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

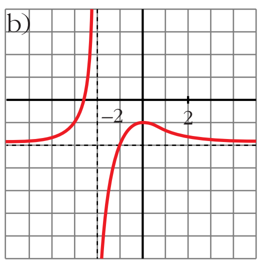
$$f'(x) = 0 \ \text{si} \ x = -2, \ x = 0, \ x = 3, \ x = 4$$

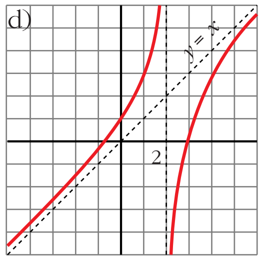
$$f(-2) = 2; \ f(0) = 0; \ f(3) = 5; \ f(4) = 4$$



17. **Descriu les funcions següents indicant-ne les asímptotes i branques infinites, els punts singulars i els intervals de creixement i de decreixement.**







a) • Asímptota vertical: $x = 0$. Asímptota horitzontal: $y = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

• $f(x)$ no té punts singulars.

• Decreix en $(-\infty, 0)$ i creix en $(0, +\infty)$.

b) • Asímptota vertical: $x = -2$. Asímptota horitzontal: $y = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

• Punts singulars: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Màxim en $(0, -1)$

• Creixent en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ i decreixent en $(0, +\infty)$.

c) • Asímptota horitzontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

• Punts singulars:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínim en $(0, 0)$

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Màxim en $(2, 1)$

• Decreixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i creixent en $(0, 2)$.

d) • Asímptota vertical: $x = 2$

Asímptota obliqua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

• Punts singulars: no en té.

• Creixent en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Funcions polinòmiques

18. Estudia les branques infinites i els punts singulars de les funcions següents i representa-les:

a) $y = -x^2 + 3x + 10$ **b)** $y = \dfrac{3x^2 - 12x}{4}$

c) $y = (x + 1)^2 + 3$ **d)** $y = -2x^2 + 12x - 9$

e) $y = x^3 - 9x$ **f)** $y = -x^3 - 6x^2$

a) Branques infinites: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

- Punts singulars:

$f'(x) = -2x + 3$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{3}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{49}{4} \quad \rightarrow \quad \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$ màxim

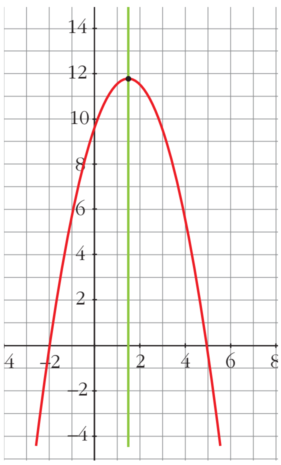
- Talls amb eixos:

$x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 10 \quad \rightarrow \quad (0, 10)$

$y = 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 3x + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad \rightarrow \quad (-2, 0)$

$x = -5 \quad \rightarrow \quad (5, 0)$

- Dibuixem la paràbola:



b) Branques infinites: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

- Punts singulars:

$f'(x) = \dfrac{3}{2}x - 3$

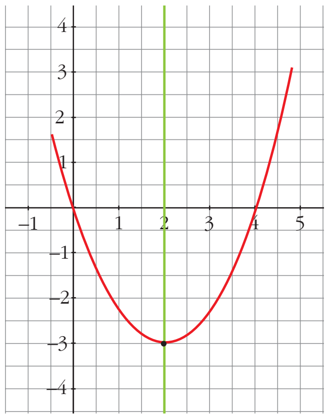
$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = -3 \quad \rightarrow \quad (2, -3)$ mínim

• Talls amb eixos:

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

$y = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{3x^2 - 12x}{4} = 0 \;\rightarrow\; \begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 4 \;\rightarrow\; (4, 0) \end{array}$

• Dibuixem la paràbola:



c) Branques infinites: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

• Punts singulars:

$f'(x) = 2x + 2$

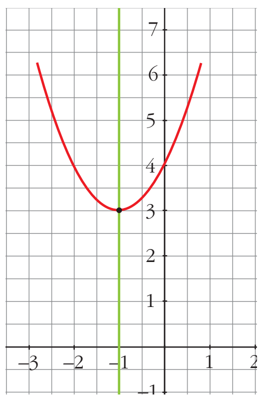
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = 3 \;\rightarrow\; (-1, 3)$ mínim

• Talls amb eixos:

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 4 \;\rightarrow\; (0, 4)$

no talla l'eix x

• Dibuixem la paràbola:



d) Branques infinites: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

- Punts singulars:

$f'(x) = -4x + 12$

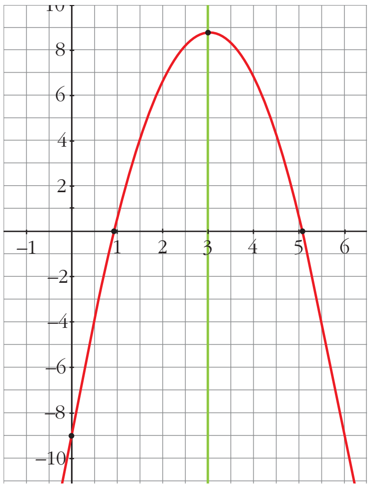
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x + 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; f(3) = 9 \;\rightarrow\; (3, 9)$ màxim

- Talls amb els eixos:

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = -9 \;\rightarrow\; (0, -9)$

$y = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 12x - 9 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \pm \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\left(3 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

- Dibuixem la paràbola:



e) Branques infinites: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

- Punts singulars:

$f'(x) = 3x^2 - 9$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ mínim

$x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \rightarrow (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ màxim

- Talls amb els eixos:

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

$y = 0 \;\rightarrow\; x^3 - 9x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

$x = 3 \;\rightarrow\; (3, 0)$

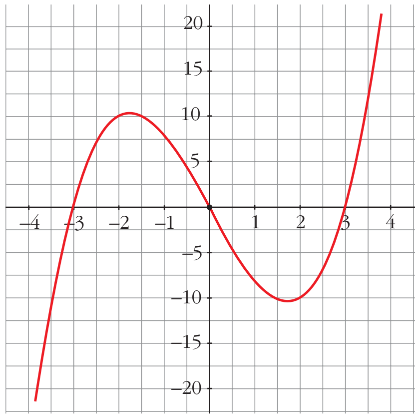
$x = -3 \;\rightarrow\; (-3, 0)$

- Punts d'inflexió:

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ punt d'inflexió

• Dibuixem la corba:



f) Branques infinites: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

• Punts singulars:

$f'(x) = -3x^2 - 12x$

$f'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ màxim

$x = -4 \rightarrow f(-4) = -32 \rightarrow (-4, -32)$ mínim

• Talls amb els eixos:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \rightarrow -x^3 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

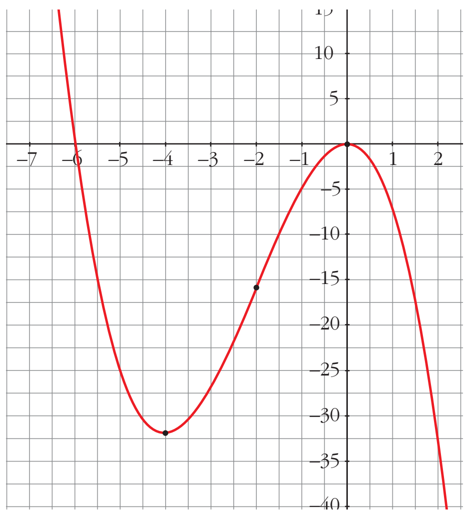
$x = -6 \rightarrow (-6, 0)$

• Punts d'inflexió:

$f''(x) = -6x - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow -6x - 12 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow f(-2) = -16 \rightarrow (-2, -16)$

• Dibuixem la corba:



19. **Estudia les branques infinites, creixement, màxims i mínims i punts d'inflexió de les funcions següents i representa-les:**

a) $y = 3 + (2 - x)^3$ **b)** $y = 2 - (x - 3)^4$

c) $y = (x + 1)^6 - 5$ **d)** $y = 3 - (1 - x)^3$

a) • **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

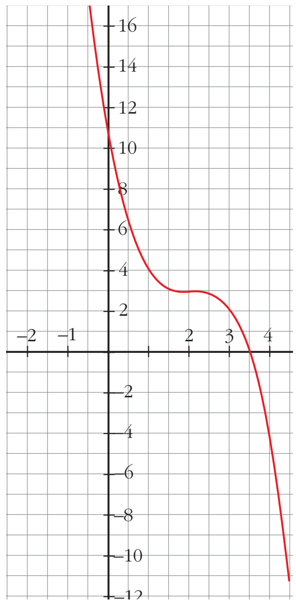
• **Punts singulars.**

Talls amb els eixos (0, 11) (3,442, 0).

$f'(x) = 3(2 - x)^2$ $f'(x) = 0$ $x = 2$ $f(2) = 3$ (2, 3) punt d'inflexió.

• **Monotonia** $f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, +\infty)$.

• **Gràfica:**



b) • **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

• **Punts singulars.**

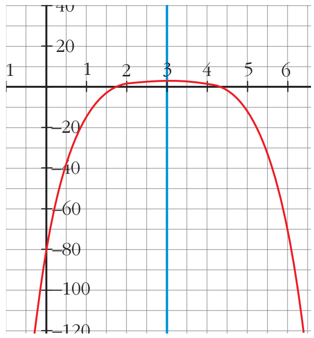
Talls amb eixos (1,811, 0) (4,190, 0) (0, –79).

$f'(x) = -4(x - 3)^3 = 0$ $x = 3$ $f(3) = 2$ (3, 2) màxim.

- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 3)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (3, +\infty)$.

- **Gràfica:**



c) - **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

  Branca infinita quan $x \to -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

- **Punts singulars.**

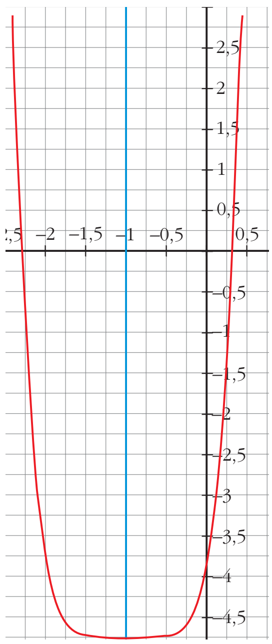
  Talls amb els eixos (–2,308, 0) (0,0308, 0) (0, –4).

  $f'(x) = 6(x - +1)^5 = 0$ $x = -1$ $f(-1) = -5$ $(-1, -5)$ mínim.

- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-1, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, -1)$.

- **Gràfica:**



d) • **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

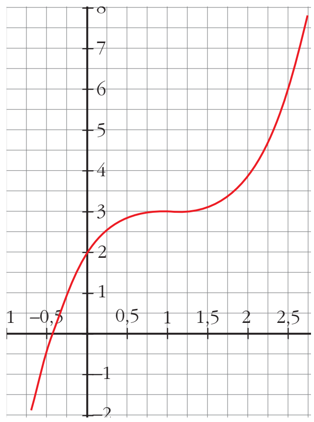
• **Punts singulars.**

Talls amb els eixos $(-0{,}442, 0)$ $(0, 2)$.

$f'(x) = +3(1 - x)^2 = 0$ $x = 1$ $f(1) = 3$ $(1, 3)$ punt d'inflexió.

• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, +\infty)$.

• **Gràfica:**



20. Estudia i representa les funcions:

a) $y = x^3 + 3x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x^2 + 5$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$ **e)** $y = x^5 - 5x^3$ **f)** $y = (x - 1)^3 - 3x$

Totes són funcions polinòmiques.

a) • **No té simetria.**

• **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

- **Punts singulars.**

  Talls amb els eixos (–3, 0) i (0, 0).

  $f'(x) = 0 \quad 3x^2 + 6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 0 \qquad (0, 0)$ mínim.

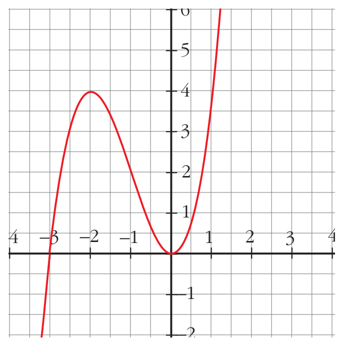
  $x = -2 \quad \rightarrow \quad f(-2) = 4 \qquad (-2, 4)$ màxim.

- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (-2, 4)$.

- $f''(x) = 6x + 6 \quad f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad f(-1) = 2 \quad (-1, 2)$ punt d'inflexió.

- **Gràfica:**



b) • **No té simetria.**

- **Branca** infinita quan $x \rightarrow \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

  Branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

- **Punts singulars.**

  Talls amb eixos (–1, 0) i (0, 5).

  $f'(x) = 0 \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 5 \quad \rightarrow \quad (0, 5)$ màxim.

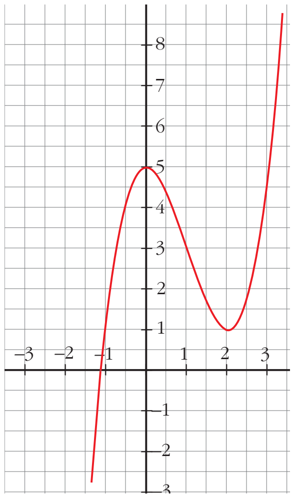
  $x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = 1 \quad \rightarrow \quad (2, 1)$ mínim.

- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (0, 2)$.

- $f''(x) = 0 \quad x = 1 \quad f(1) = 3 \quad (1, 3)$ punt d'inflexió.

• **Gràfica:**



c) • **Té simetria parell.**

• **Branca infinita** quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \to -\infty$ igual que $x \to \infty$ ja que simetria parell.

• **Punts singulars.**

Tall amb eixos (–3,925, 0) (–1,612, 0) (1,612, 0) (3,925, 0) (0, 10).

$f'(x) = 0 \quad x^3 - f(x) = 0 \quad x = -3 \quad f(-3) = -10 \quad (-3, -10)$ mínim.

$x = 0 \quad f(0) = 10 \quad (0, 10)$ màxim.

$x = 3 \quad f(3) = -10 \quad (3, 10)$ mínim.

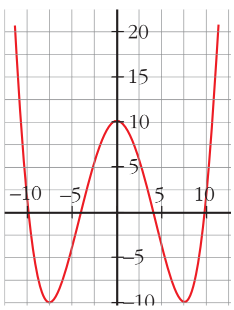
• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$.

• $f''(x) = 3x^2 - 9 = 0 \to x = -\sqrt{3} \quad f(-\sqrt{3}) = -1{,}25 \quad (-\sqrt{3}, -1{,}25)$ punt d'inflexió.

$x = \sqrt{3} \quad f(\sqrt{3}) = 1{,}25 \quad (\sqrt{3}, 1{,}25)$ punt d'inflexió.

• **Gràfica:**



d) • **No té simetria.**

• **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

• **Punts singulars.**

Talls amb eixos (0, 0).

$f'(x) = 0 \quad x = 0 \quad f(0) = 0 \quad (0, 0)$ màxim.

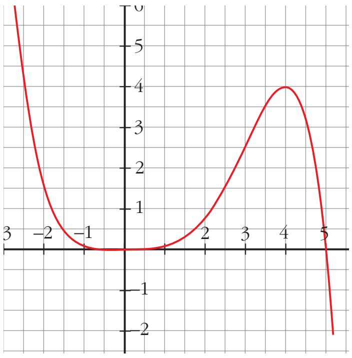
$x = 4 \quad f(4) = 4 \quad (4, 4)$ mínim.

• **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (0, 4)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

• $f''(x) = 0 \quad x = 3 \quad f(3) = 5/2 \quad (3, 5/2)$ punt d'inflexió.

• **Gràfica:**



e) • **Té simetria senar.**

• **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Branca parabòlica.

Branca infinita quan $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.

• **Punts singulars.**

Talls amb eixos $(-\sqrt{5}, 0)$ $(0, 0)$ $(\sqrt{5}, 0)$.

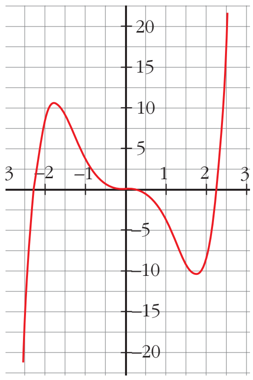
$f'(x) = 0 \quad x = -\sqrt{3} \quad f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \quad (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ màxim.

$x = 0 \quad f(0) = 0 \quad (0, 0)$.

$x = \sqrt{3} \quad f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} \quad (\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ mínim.

- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
- $f''(x) = 0 \quad x = 0 \quad (0, 0)$ punt d'inflexió.
- **Gràfica:**



f) • **No té simetria.**

- **Branca** infinita quan $x \to \infty$.

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ Branca parabòlica.

  Branca infinita quan $x \to -\infty$.

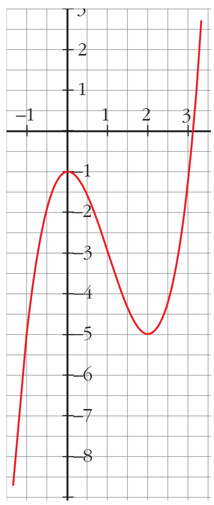
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Branca parabòlica.
- **Punts singulars.**

  Talls amb eixos (3,104, 0).

  $f'(x) = 0 \quad x = 0 \quad f(0) = -1 \quad (0, -1)$ màxim.

  $ \quad x = 2 \quad f(2) = -5 \quad (2, -5)$ mínim.
- **Monotonia** $f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

  $f(x)$ decreix si $x \in (0, 2)$.
- $f''(x) = 0 \quad x = 1 \quad f(1) = -3 \quad (1, -3)$ punt d'inflexió.
- **Gràfica:**



Funcions racionals

21. **En les funcions següents, estudia'n el domini, asímptotes i posició de la corba respecte d'aquestes, i representa-les a partir dels resultats obtinguts:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asímptotes:**

  $\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = 0; \quad \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = 0$

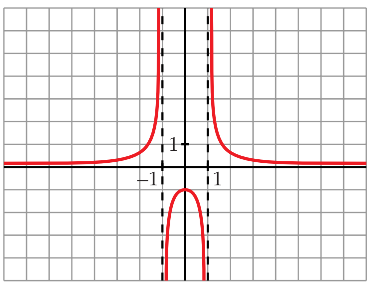
  $y = 0$ és asímptota horitzontal.

  (si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

  $$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to -1^-}{\text{lím}} f(x) = +\infty \\ \underset{x \to -1^+}{\text{lím}} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = -1 \text{ és asímptota vertical}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to 1^-}{\text{lím}} f(x) = -\infty \\ \underset{x \to 1^+}{\text{lím}} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

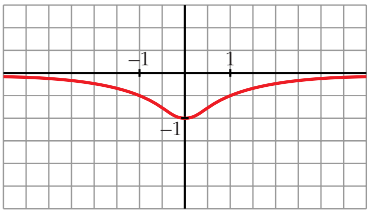
  No té asímptotes verticals.

  $\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = 0; \quad \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = 0$

  Asímptota horitzontal en $y = 0$.

  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

• **Gràfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

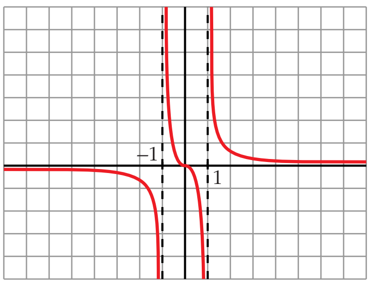
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímptota horitzontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = -1 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

• **Gràfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

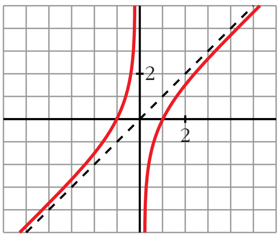
• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gràfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

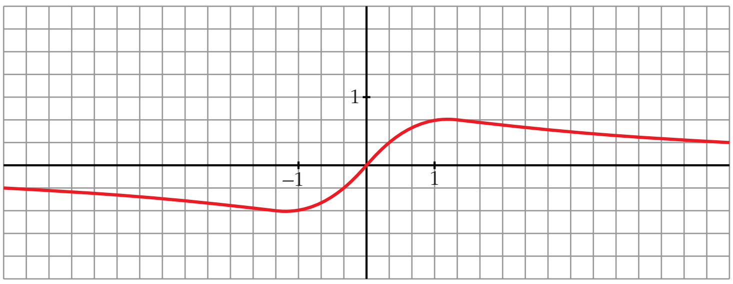
No té asímptotes verticals.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímptota horitzontal.

- **Gràfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Domini:**

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \quad \to$ No té solució.

$D = \mathbb{R}$

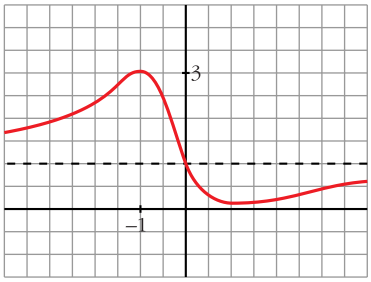
- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ és asímptota horitzontal.

• **Gràfica:**



22. **Representa aquestes funcions estudiant-ne prèviament el domini, les asímptotes i la posició i els extrems relatius.**

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = 2x$ és asímptota obliqua.

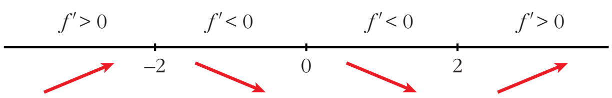
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \;\to\; x^2 = 4 \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}$

Signe de la derivada:



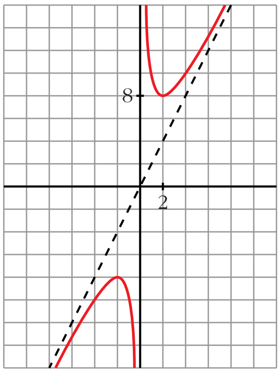
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

té un màxim en $(-2, -8)$

té un mínim en $(2, 8)$

• **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímptota horitzontal.

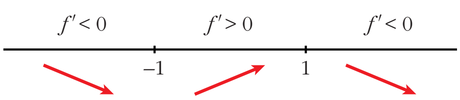
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = -1 \text{ és asímptota vertical}$$

• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x + 2 = 0 \quad \to \quad x = 1$

Signe de $f'(x)$:

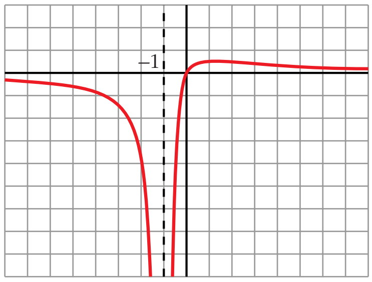


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

és creixent en $(-1, 1)$

té un màxim en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

- **Gràfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(x^2 - 12) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	$-\sqrt{12}$	$f' < 0$	-2	$f' < 0$	0	$f' < 0$	2	$f' < 0$	$\sqrt{12}$	$f' > 0$
↗		↘		↘		↘		↘		↗

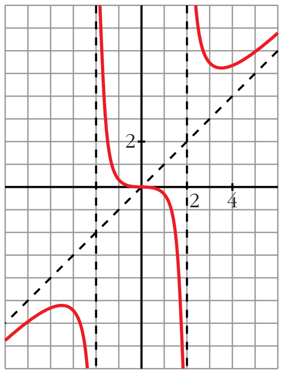
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

és decreixent en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

té un màxim en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

té un mínim en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

- **Gràfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x - 1$ és asímptota obliqua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$	2	$f' > 0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

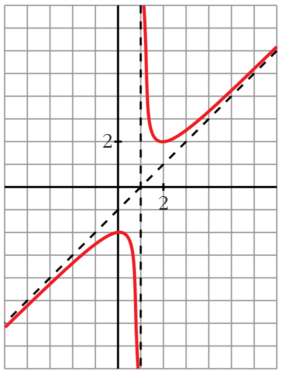
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(0, 1) \cup (1, 2)$

té un màxim en $(0, -2)$

té un mínim en $(2, 2)$

• **Gràfica:**



Pàgina 211

Funcions «a trossos»

23. **Representa la funció:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica'n els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius. Té algun punt d'inflexió?

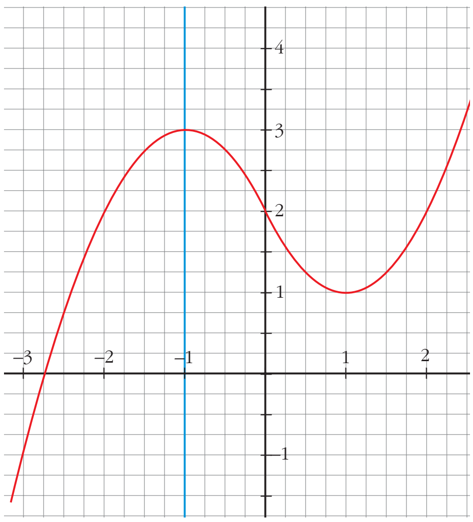
El primer tros és una paràbola convexa.

El segon tros és una paràbola còncava.

En la frontera $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$ Les dues paràboles connecten en el punt (0, 2).

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



• **Extrems:**

$-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1.$

$2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1.$

• **Creixement:**

$f(x)$ = creix si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$f(x)$ = decreix si $x \in (-1, 1)$.

• **Punt d'inflexió:**

En $x = 0$ la funció passa de ser convexa a ser còncava.

24. **Representa les funcions següents. Indica, en cada cas, els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius, si n'hi ha.**

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) • **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to \infty} (-x^2 - 4) = \infty$

• **Punts singulars:**

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0) \rightarrow$ màxim

$\xrightarrow{\text{2n tros}} +2x = 0 \rightarrow x = 0$ no pertany al domini del 2n tros

• **Talls amb els eixos:**

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} -x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

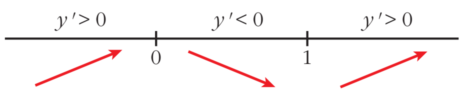
$\xrightarrow{\text{2n tros}} x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow$ $(2, 0)$; $x = -2 \notin$ al domini del 2n tros

• **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

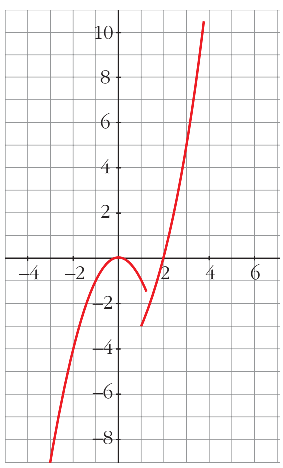
$f''(x) = 0$ mai

• **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$f(x)$ decreix si $x \in (0, 1)$



b) • **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x-1}\right) = \infty$

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, -1) \text{ mínim}$$

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{2n tros}} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \rightarrow \text{mai}$$

• **Talls amb els eixos:**

$x = 0 \rightarrow (0, -1)$

$$y = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \notin \text{al domini del tros 1} \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \end{array}$$

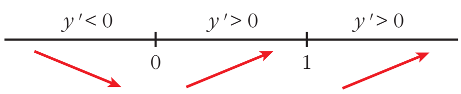
$$\xrightarrow{\text{2n tros}} \sqrt{x-1} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$$

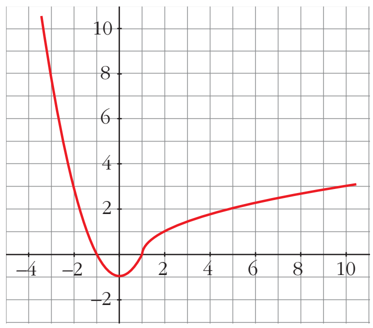
• **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-1}{4\sqrt{(x-1)^3}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f''(x) = 0$ mai

• **Monotonia:**





$f(x)$ creix si $x \in (0, +\infty)$

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, 0)$

c) • **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x) = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = 0$

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \cdot \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{1r tros}} 2^x \cdot \ln 2 = 0 \quad \text{mai} \\ \xrightarrow{\text{2n tros}} \dfrac{-2}{x^2} = 0 \quad \text{mai} \end{array} \rightarrow \text{No hi ha punts singulars}$$

- **Talls amb els eixos:**

$x = 0 \;\to\; f(0) = 2^0 = 1 \;\to\; (0,\ 1)$

$y = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} 2^x = 0 \;\to\; \text{mai}$

$ \xrightarrow{\text{2n tros}} \dfrac{2}{x} = 0 \;\to\; \text{mai}$ $\;\to\;$ No talla l'eix x

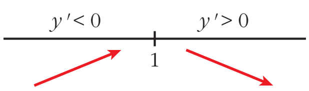
- **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \begin{cases} 2^x \cdot \ln^2 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{4}{x^3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} 2^x \cdot \ln^2 2 = 0 \;\to\; \text{mai}$

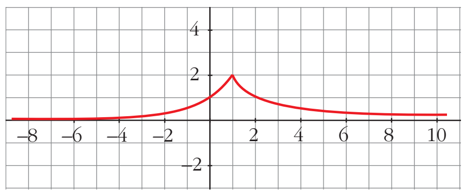
$ \xrightarrow{\text{2n tros}} \dfrac{4}{x^3} = 0 \;\to\; \text{mai}$ $\;\to\;$ No hi ha punts d'inflexió

- **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (-\infty,\ 1)$

$f(x)$ decreix si $x \in (1,\ +\infty)$



d) - **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x+1}) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} (2x - 2) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x+1} \cdot (-1) & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} e^{-x+1} \cdot (-1) = 0 \;\to\; \text{mai}$

$ \xrightarrow{\text{2n tros}} 2 = 0 \;\to\; \text{mai}$

No hi ha punts singulars.

- **Talls amb els eixos:**

$x = 0 \;\to\; f(0) = e \;\to\; (0,\ e)$

$y = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} e^{-x+1} = 0 \;\to\; \text{mai}$

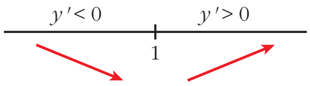
$ \xrightarrow{\text{2n tros}} 2x - 2 = 0 \to x = 1 \;\to\; (1,0)$

- **Punts d'inflexió:**

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

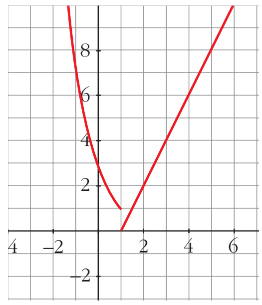
$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{-x+1} = 0 \quad \rightarrow \quad$ mai No hi ha punts d'inflexió.

- **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (1, +\infty)$

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, 1)$



25. **Representa la funció següent:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia'n els intervals de creixement i decreixement, els extrems relatius i la curvatura.

El primer tros és polinòmica de grau 3 i el coeficient que multiplica a x^3 és $1 > 0 \quad \rightarrow$ .

El segon tros és una paràbola còncava.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

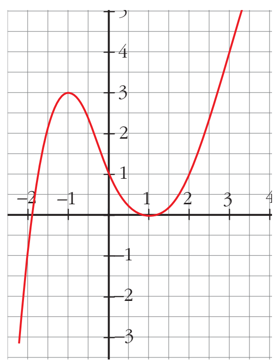
- **Extrems:**

$3x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\, 1$. Només és vàlid $x = -1$, ja que $x = 1$ cau fora de l'interval de treball $x < 0$

Extrem en $(-1, 3)$ màxim.

$2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

Extrem en $(1, 0)$ mínim.



- **Creixement:**

$f(x)$ creix si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-1, 1)$.

- **Curvatura:**

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 & \rightarrow & \text{tram convex} \\ 2 & \text{si } x > 0 & \rightarrow & \text{tram còncau} \end{cases}$$

26. **Defineix per intervals i representa les funcions següents:**

a) $y = (x - 2)\,|x|$ **b)** $y = x\,|x - 1|$ **c)** $y = |-x^2 + 1|$

d) $y = |x^2 - 4x|$ **e)** $y = \dfrac{1}{|x|}$ **c)** $y = \dfrac{1}{|x - 2|}$

a) El valor absolut no actua si $x > 0 \ \to\ (x - 2) \cdot x = x^2 - 2x$

El valor absolut actua si $x < 0 \ \to\ (x - 2)(-x) = 2x - x^2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

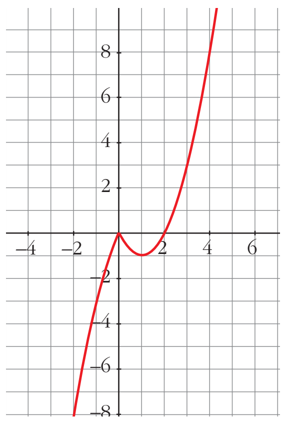
- **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - x^2) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} 2 - 2x = 0 \ \to\ x = 1 \notin$ domini del 1r tros

$\xrightarrow{\text{2n tros}} 2x - 2 = 0 \ \to\ x = 1 \ \to\ f(1) = -1 \ \to\ (1, -1)$ mínim



b) El valor absolut no actua si $x - 1 > 0 \ \to\ x > 1 \ \to\ x(x - 1) = x^2 - x$

El valor absolut actua si $x - 1 < 0 \ \to\ x < 1 \ \to\ x(-x + 1) = x - x^2$

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

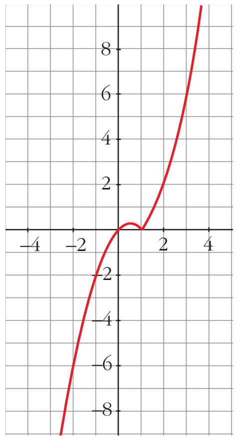
- **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - x^2) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x) = \infty$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} 1 - 2x = 0 \to x = \frac{1}{2} \to f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ màxim}$$

$$\xrightarrow{\text{2n tros}} 2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2} \notin \text{domini del tros 2.}$$



c) El valor absolut no actua si $-x^2 + 1 > 0 \to -x^2 > -1 \to x^2 < 1 \to |x| < 1$ és a dir, si $-1 < x < 1$, la funció és $1 - x^2$.

El valor absolut actua si $-x^2 + 1 < 0 \to -x^2 < -1 \to x^2 > 1 \to |x| > 1$ és a dir, si $x > 1$, la funció és $x^2 - 1$
$x < -1$, la funció és $x^2 - 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 1) = \infty$

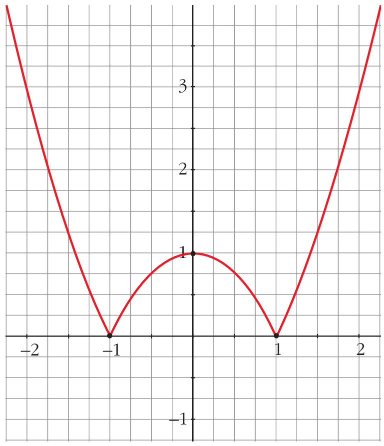
- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{1r tros}} 2x = 0 \to x = 0 \notin \text{domini del 1r tros}$$

$$\xrightarrow{\text{2n tros}} -2x = 0 \to x = 0 \to f(0) = 1 \to (0, 1) \text{ màxim}$$

$$\xrightarrow{\text{3r tros}} 2x = 0 \to x = 0 \notin \text{domini del 3r tros}$$



d) Busquem quan $x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}$

$x^2 - 4x$ és un paràbola còncava. Així:

$$\underset{}{f(x) > 0} \quad \underset{0}{|} \quad f(x) < 0 \quad \underset{4}{|} \quad f(x) > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x < 0 \\ 4x - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- **Branques infinites:** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 4x) = \infty$

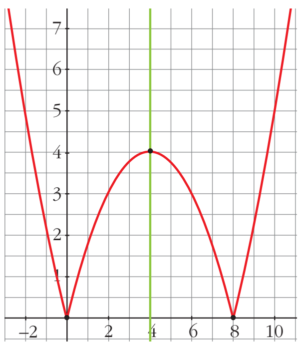
- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 < x < 4 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ $\xrightarrow{\text{1r tros}}$ $2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \notin$ domini del 1r tros

$\xrightarrow{\text{2n tros}}$ $4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow f(2) = 4 \rightarrow (2, 4)$ màxim

$\xrightarrow{\text{3r tros}}$ $2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \notin$ domini del 3r tros



e) El valor absolut actua si $x < 0 \rightarrow -x$

El valor absolut no actua si $x > 0 \rightarrow x$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

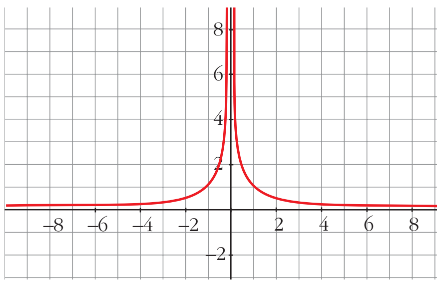
• **Branques infinites:**

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{-x}\right) = 0 \rightarrow \text{asímptota horitzontal en } y = 0 \text{ quan } x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \rightarrow \text{asímptota horitzontal en } y = 0 \text{ quan } x \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{-x}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{asímptota vertical en } x = 0$$

• **Punts singulars:** no n'hi ha



f) El valor absolut actua si $x - 2 < 0 \rightarrow x < 2$

El valor absolut no actua si $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$

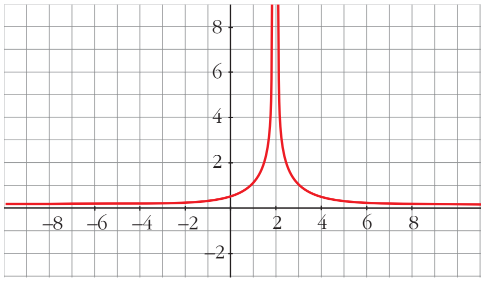
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

• **Branques infinites:**

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2 - x}\right) = 0 \rightarrow \text{asímptota horitzontal en } y = 0 \text{ quan } x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x - 2}\right) = 0 \rightarrow \text{asímptota horitzontal en } y = 0 \text{ quan } x \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{1}{2-x}\right) = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{ asímptota vertical en } x = 2$$



27. **En les funcions de l'exercici anterior determina els màxims i els mínims dels apartats *a*, *b*, *c* i *d* i les asímptotes dels apartats *e* i *f*.**

Vegeu exercici anterior.

PER RESOLDRE

28. **Representa les funcions següents estudiant-ne prèviament:**

– El domini de definició, les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes.

– Els intervals de creixement i de decreixement, i els extrems relatius.

a) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{9-x^2}$

e) $y = \dfrac{x^2+4}{x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

g) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ **h)** $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$

i) $y = \dfrac{x^3}{x+2}$ **j)** $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$

a) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asímptota obliqua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

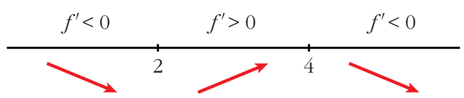
- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$

Signe de $f'(x)$:

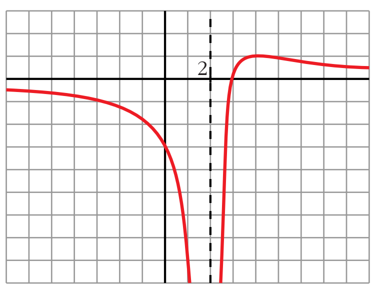


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

és creixent en $(2, 4)$

té un màxim en $(4, 1)$

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímptota horitzontal.

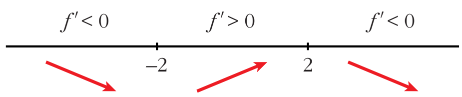
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -2$

Signe de $f'(x)$:

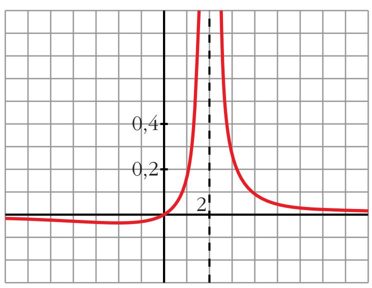


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és creixent en $(-2, 2)$

té un mínim en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$

- **Gràfica:**



c) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x-2-\dfrac{1}{x-2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x - 2$ és asímptota obliqua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

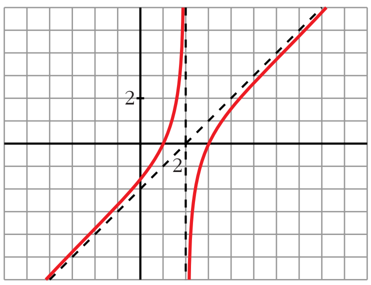
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; (x-2)^2 + 1 = 0 \;\to$ no té solució

$f(x)$ no té extrems relatius.

$f'(x) > 0$ per a tot $x \;\to\; f(x)$ és creixent en tot el seu domini.

- **Gràfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{9-x^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ és asímptota horitzontal.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\}\ x = -3 \text{ és asímptota vertical}$$

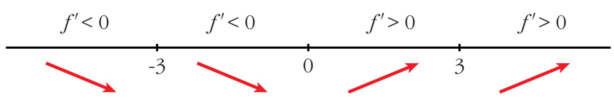
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\}\ x = 3 \text{ és asímptota vertical}$$

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 18x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signe de $f'(x)$:

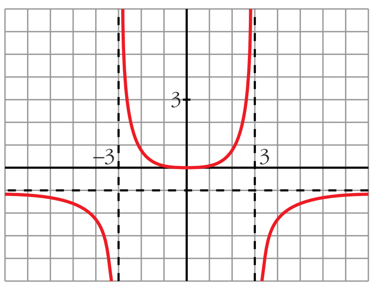


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

és creixent en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

té un mínim en $(0, 0)$

- **Gràfica:**



e) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\}\ x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

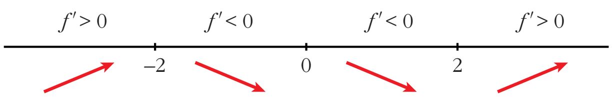
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signe de $f'(x)$:



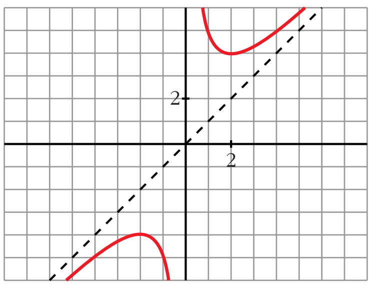
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

té un màxim en $(-2, -4)$

té un mínim en $(2, 4)$

- **Gràfica:**



f) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ és asímptota horitzontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 3 \text{ és asímptota vertical}$$

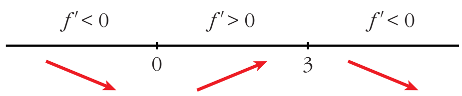
- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:

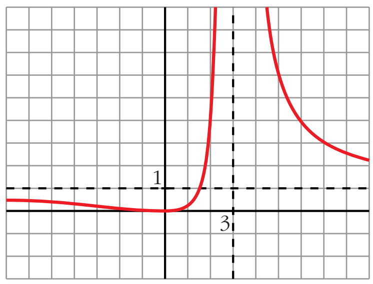


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

és creixent en $(0, 3)$

té un mínim en $(0, 0)$

- **Gràfica:**



g) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$y = 2x$ és asímptota obliqua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2x$.)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

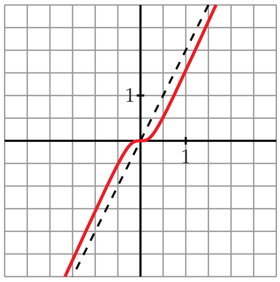
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^2(x^2+3) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 0$

$f(x)$ és creixent en tot $\mathbb{R}$.

- **Gràfica:**



h) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = -2 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 2 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' < 0$	$-\sqrt{8}$	$f' > 0$	-2	$f' > 0$	0	$f' < 0$	2	$f' < 0$	$\sqrt{8}$	$f' > 0$
↘		↗		↗		↘		↘		↗

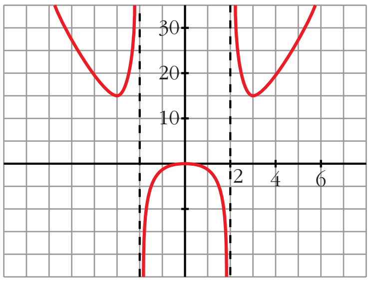
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

és creixent en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

té un mínim en $\left(-\sqrt{8}, 16\right)$ i un altre en $\left(\sqrt{8}, 16\right)$

té un màxim en $(0, 0)$

• **Gràfica:**



i) $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = -2 \text{ és asímptota vertical}$$

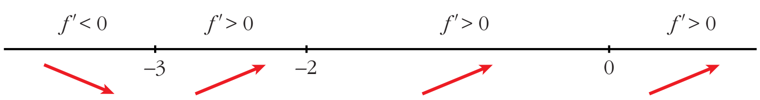
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

• **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x + 2) - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x + 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array} \right.$$

Signe de $f'(x)$:



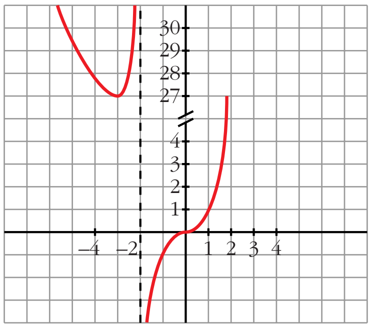
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -3)$

és creixent en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

té un mínim en $(-3, 27)$

té un punt d'inflexió en $(0, 0)$

- **Gràfica:**



j) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x - 3$ és asímptota obliqua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$.)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$	2	$f' > 0$
↗		↘		↘		↗

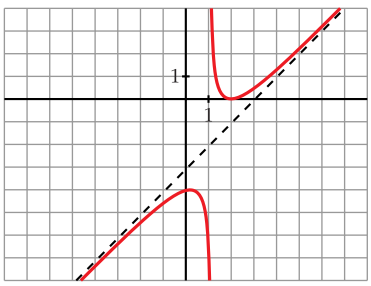
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(0, 1) \cup (1, 2)$

té un màxim en $(0, -4)$

té un mínim en $(2, 0)$

- **Gràfica:**



29. **a) Troba les asímptotes de la gràfica de la funció definida per a $x > 0$ per $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.**

b) Troba les regions de creixement i de decreixement de f indicant-ne els màxims i mínims locals i globals, si n'hi ha.

c) Esbossa la gràfica de f.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 0$ és asímptota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad \to \quad y = x$ és asímptota obliqua.

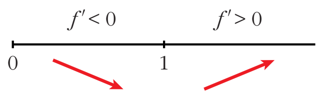
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0$ ⟨ $x = -1$ (no val); $x = 1$

($x = -1$ no val, ja que $f(x)$ està definida tan sols per a $x > 0$)

Signe de $f'(x)$:



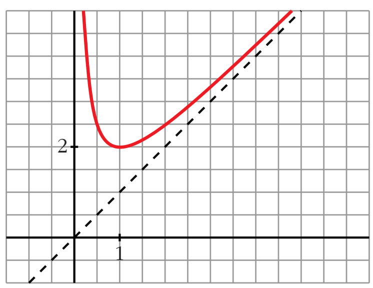
$f(x)$ és decreixent en $(0, 1)$

és creixent en $(1, +\infty)$

té un mínim (local i global) en $(1, 2)$

no té un màxim

c)



30. **En les funcions següents es demana:**

– El domini de definició, les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes.

– Els intervals de creixement i decreixement i els extrems.

– La representació gràfica.

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{3 - 2x}{x}$

c) $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

a) • **Domini:** $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1 \quad x = 3$

$\mathbb{D}\,[f(x)] = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

• **Asímptotes verticals:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ Asímp. vertical en $x = -1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ Asímp. vertical en $x = 3$

• **Asímptotes horitzontals:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ Asímptota horitzontal en $y = 0$ quan $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ Asímptota horitzontal en $y = 0$ quan $x \to +\infty$

• **Punts de tall amb els eixos:**

$x = 0 \rightarrow f(0) = \dfrac{-1}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{-1}{3}\right)$

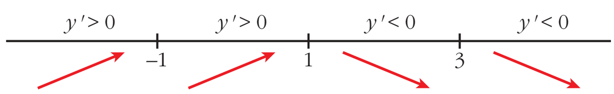
$y = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0$ mai

• **Punts singulars:**

$f'(x) = \dfrac{-2x + 2}{(x^2 - 2x - 3)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1 \quad f(1) = \dfrac{-1}{4} \rightarrow \left(1, \dfrac{-1}{4}\right)$ màxim

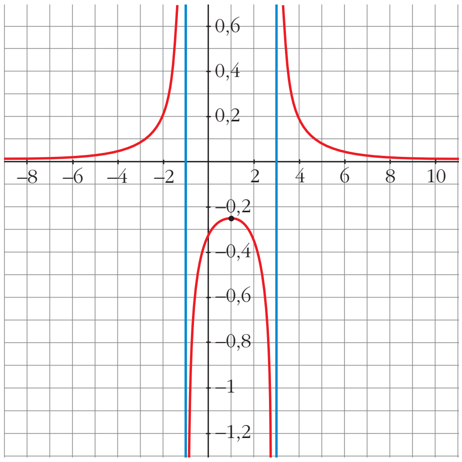
• **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 1) \cup (-1, 1)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (1, 3) \cup (3, +\infty)$.

• **Gràfica:**



b) • **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asímptotes verticals:**

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ Asímp. vertical en $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ Asímp. vertical en $x = 0$

• **Asímptotes horitzontals:**

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{-2}{1} = -2$ Asímptota horitzontal en $y = -2$ quan $x \to +\infty$

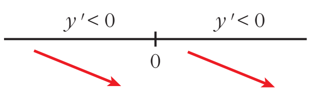
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-2}{1} = -2$ Asímptota horitzontal en $y = -2$ quan $x \to -\infty$

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{-3}{x^2}$$

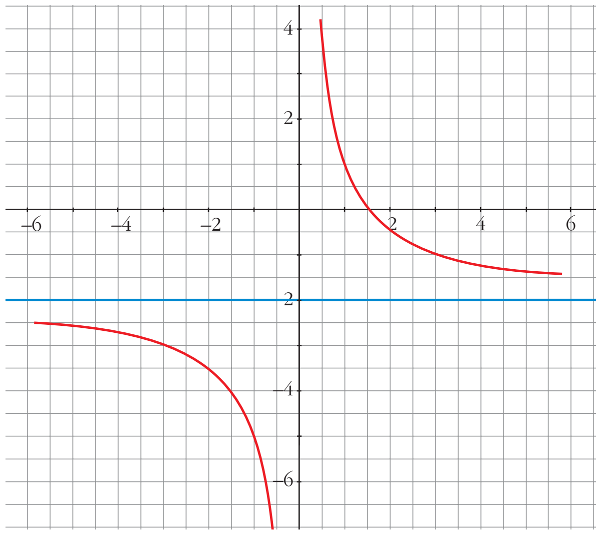
$f'(x) = 0 \quad \to \quad$ cap punt singular

• **Monotonia:**



$f(x)$ decreix si $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

• **Gràfica:**



c) • **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asímptota vertical:**

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ Asímp. vertical en $x = 0$

• **Asímptotes horitzontals:**

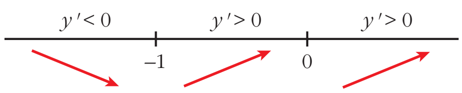
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3 - 2}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3 - 2}{x}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{No asímptota horitzontal}$$

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^3 + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \quad f(-1) = 3 \;\rightarrow\; (-1, 3)$ mínim

• **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

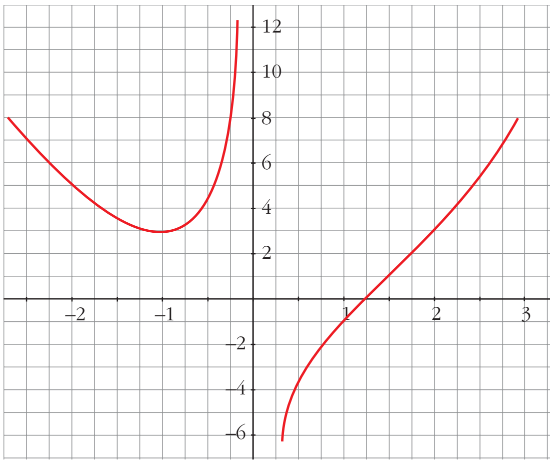
$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, -1)$

• **Punt d'inflexió:**

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 4}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^3 - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt[3]{2} \qquad f(\sqrt[3]{2}\,) = 0 \;\rightarrow\; (\sqrt[3]{2}\,,\,0)$$

• **Gràfica:**



d) • **Domini:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

• **Asímptota vertical:**

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \qquad \text{Asímp. vertical en } x = -2$$

• **Asímptotes horitzontals:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{No hi ha asímpt. horitzontal}$$

• **Asímptota obliqua:**

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x + 2} - 1 \cdot x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = x - 2 \\ \text{Asímp. obliqua} \end{array}$$

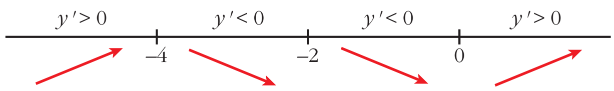
Igual quan $x \rightarrow -\infty$

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 4x = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0,\,0) \text{ mínim} \\ x = -4 \;\rightarrow\; f(-4) = -8 \;\rightarrow\; (-4,\,-8) \text{ màxim} \end{cases}$$

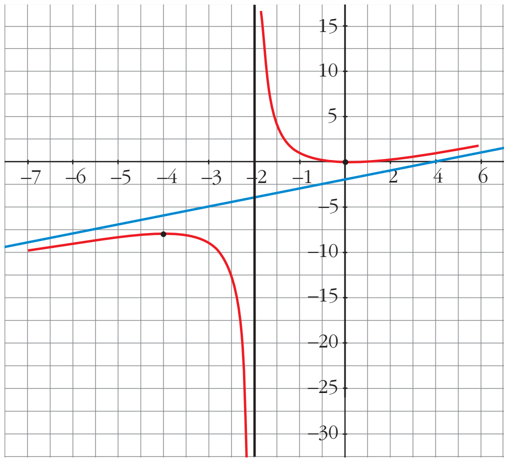
• **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (-8, -4) \cup (0, +\infty)$

$f(x)$ decreix si $x \in (-4, -2) \cup (-2, 0)$

• **Gràfica:**



31. **Estudia i representa les funcions següents:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **b)** $y = \dfrac{e^x}{x^2-3}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2+1}$

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

• **Domini:** $\mathbb{R}$ ja que $x^2 + 1 > 0$ sempre

• **Asímptotes horitzontals:**

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ Asímptota horitzontal en $y = 0$ quan $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ Asímptota horitzontal en $y = 0$ quan $x \to -\infty$

• **Punts de tall amb els eixos:**

$x = 0 \to f(0) = 1 \to (0, 1)$

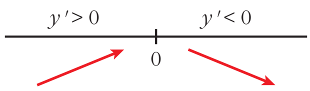
$y = 0 \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \to$ mai

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ (0, 1) màxim

• **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (0, +\infty)$.

• **Punts d'inflexió:**

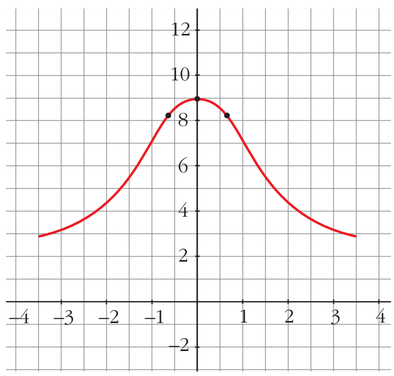
$$f''(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 1 = 0$

$x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left(-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

• **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{e^x}{x^2-3}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -\sqrt{3} \text{ és asímptota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \quad x = \sqrt{3} \text{ és asímptota vertical}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 3} = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \text{ és asímptota horitzontal quan } x \rightarrow -\infty$$

$$(f(x) > 0)$$

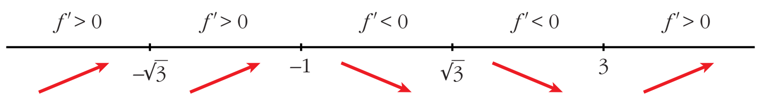
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Branca parabòlica}$$

- **Creixement, màxims i mínims:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



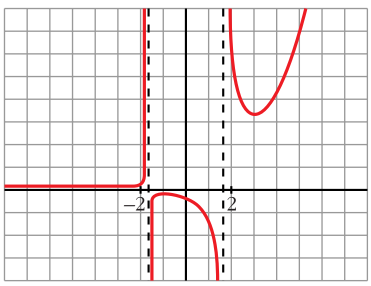
$f(x)$ és creixent en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (3, +\infty)$

és decreixent en $\left(-1, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 3\right)$

té un màxim en $\left(-1, \dfrac{-1}{2e}\right)$

té un mínim en $\left(3, \dfrac{e^3}{6}\right)$

- **Gràfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

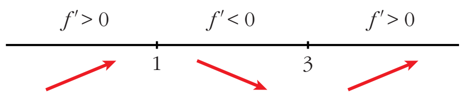
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Creixement, decreixement, extrems relatius:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{8}{(x-1)^3} = \dfrac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$

$f'(x) = 0 \;\to\; (x-1)^3 = 8 \;\to\; x - 1 = 2 \;\to\; x = 3$

Signe de $f'(x)$:

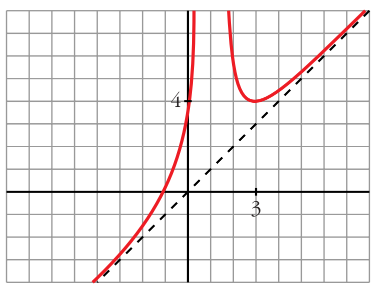


$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

és decreixent en $(1, 3)$

té un mínim en $(3, 4)$

- **Gràfica:**



d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$ simetria parell $f(x) = f(-x)$

- **Asímptotes horitzontals:**

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ No asímptotes horitzontals.

• **Asímptotes obliques:**

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = 0 \quad \to$$

$\to$ Asímptota obliqua en $y = x$ quan $x \to +\infty$

Si $x \to -\infty$, asímptota obliqua en $y = -x$

• **Punts de tall amb els eixos:**

$x = 0 \to f(0) = 1 \to (0, 1)$

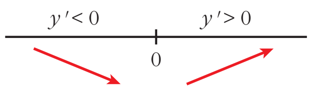
$y = 0 \to \sqrt{x^2 + 1} = 0 \to$ mai

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad (0, 1)$ mínim

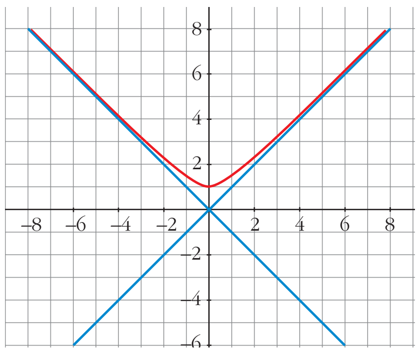
• **Monotonia:**



$f(x)$ creix si $x \in (0, +\infty)$.

$f(x)$ decreix si $x \in (-\infty, 0)$.

• **Gràfica:**



32 **Estudia i representa les funcions següents:**

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

- **Domini:** $[-2, 2]$

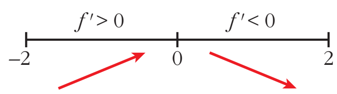
- **Asímptotes:** No en té.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:

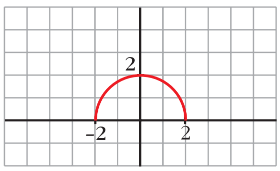


$f(x)$ és creixent en l'interval $(-2, 0)$ i decreixent en l'interval $(0, 2)$.

Té un màxim en $(0, 2)$.

- **Talla l'eix X en $(-2, 0)$ i en $(2, 0)$.**

- **Gràfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

- **Domini:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

- **Simetria:**

$f(-x) = f(x) \;\rightarrow\;$ És parell $\;\rightarrow\;$ Simètrica respecte a l'eix Y.

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} + x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$$

$y = x$ és asímptota obliqua quan $x \to +\infty$, $(f(x) < x)$

Per simetria (ja que $f(x)$ és parell), deduïm que:

$y = -x$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$.

$(f(x) < -x)$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

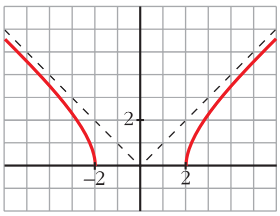
$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$ (que no està en el domini)

No té punts singulars.

$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -2)$ i és creixent en $(2, +\infty)$.

- Passa per $(-2, 0)$ i $(2, 0)$.

- **Gràfica:**



c) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Simetria:**

$f(-x) = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$. És parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- No té asímptotes.
- **Branques infinites:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

• **Punts singulars:**

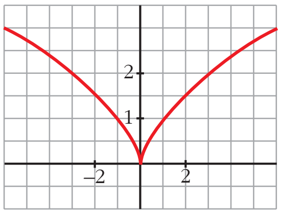
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

No existeix $f'(0)$ → $f(x)$ no és derivable en $x = 0$.

$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0)$ i creixent en $(0, +\infty)$.

• Passa per $(0, 0)$.

• **Gràfica:**



d) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

• **Domini:** $\mathbb{R}$

• **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

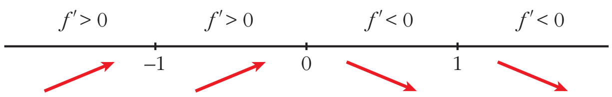
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}} \quad \to \quad f(x) \text{ no és derivable en } x = -1 \text{ ni en } x = 1.$$

$f'(x) = 0$ → $-2x = 0$ → $x = 0$; $(0, 1)$ màxim

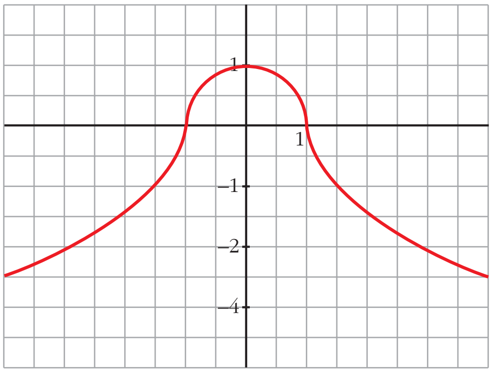
Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0)$, és decreixent en $(0, +\infty)$; té un màxim en $(0, 1)$.

• Talla l'eix X en $(-1, 0)$ i en $(1, 0)$.

• **Gràfica:**



Pàgina 212

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

33. **Dibuixa la gràfica de les funcions següents:**

a) $y = x + |x + 2|$ **b)** $y = 2x - |x - 3|$

c) $y = |x| + |x - 3|$ **d)** $y = x\,|x - 1|$

a) Quan $x > -2$ el valor absolut no fa res.

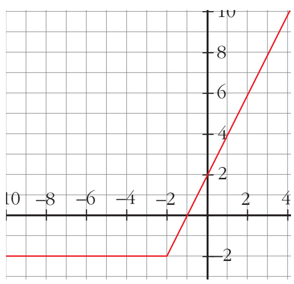
Quan $x < -2$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

El primer tram és una recta horitzontal a alçada –2.

El segon és una recta de pendent 2 i ordenada en l'origen 2.

• **Gràfica:**



b) Quan $x > 3$ el valor absolut no afecta.

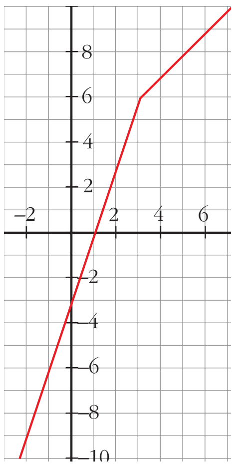
Quan $x < 3$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x \leq 3 \\ x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

El primer tram és una recta de pendent 3 i ordenada en l'origen –3.

El segon tram és una recta de pendent 1 i ordenada en l'origen 3.

- **Gràfica:**

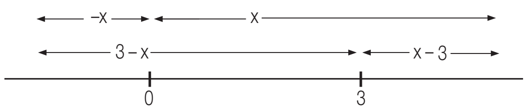


c) $|x|$ → Quan $x > 0$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 0$ el valor absolut canvia el signe.

$|x - 3|$ → Quan $x > 3$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 3$ el valor absolut canvia el signe.



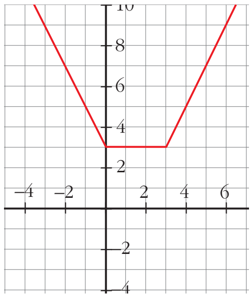
$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

El primer tram és una recta de pendent –2 i ordenada en l'origen 3.

El segon tram és una recta horitzontal a alçada 3.

El tercer tram és una recta de pendent 2 i ordenada en l'origen –3.

- **Gràfica:**



d) Quan $x > 1$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 1$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } \ x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

El primer tram és una paràbola convexa.

Els punts de tall amb l'eix horitzontal són $x = 0$ i $x = 1$.

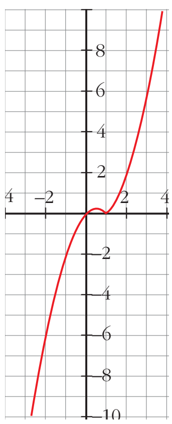
El vèrtex és a $x = 1/2$ $\quad f(1/2) = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \quad \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ màxim.

El segon tram és una paràbola còncava.

Els punts de tall amb l'eix horitzontal són $x = 0$ fora de l'interval de treball i $x = 1$.

El vèrtex és a $x = \dfrac{1}{2}$ $\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \quad \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ fora de l'interval de treball.

- **Gràfica:**



34. **Representa gràficament:**

a) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$ **b)** $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$

a) Quan $x > 0$ el valor absolut no afecta.

Quan $x < 0$ el valor absolut canvia el signe.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x-2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Com que $\dfrac{1}{|x| - 2}$ té simetria parella $f(x) = f(-x)$, representem la funció

per a $x > 0$ i després fem que l'eix vertical faci de mirall.

- **Domini:** $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.
- **Asímptota vertical:**

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{|x| - 2} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$ existeix asímptota vertical en $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -+\infty$$

- **Asímptota horitzontal:**

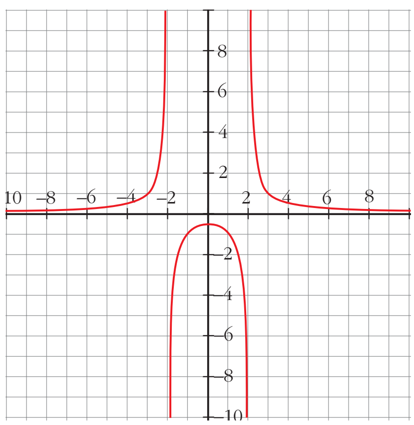
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{1}{\infty} = 0^-$ existeix asímptota horitzontal quan $x \to \infty$ en $y = 0$ per sota.

No talla els eixos

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{-1}{(-x-2)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(x-2)} & \text{si } x > 0 \end{array} \right\}$$ sempre decreix $f(x)$ i no té extrems.

Apliquem la simetria i obtenim la representació.

- **Gràfica:**



b) Té simetria parella $f(x) = f(-x)$.

- **Domini** $\mathbb{R}$.
- **Branca infinita** quan $x \rightarrow \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ grau num. < grau den. $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ per sobre.

- **Tall amb els eixos** $x = 0 \quad f(0) = 0 \quad (0, 0)$

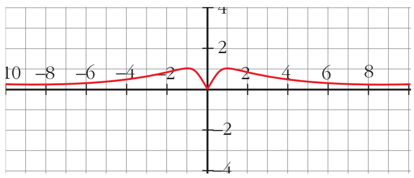
$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

- **Extrems** $f'(x) = 0 \quad 2 - 2x^2 = 0 \quad x = 1 \quad f(1) = 1 \quad (1, 1)$ màxim.
- **Monotonia** $f(x)$ creix si $(0, 1)$

$f(x)$ decreix si $(1, +\infty)$

Apliqueu la simetria i representeu.

- **Gràfica:**



35. Donada la funció $f(x) = x^2|x-3|$ troba:

a) Els punts en què f no és derivable.

b) Calcula'n els màxims i els mínims.

c) Representa-la gràficament.

a) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x^2(-x+3) & \text{si} \;\; x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si} \;\; x \geq 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -x^3 + 3x^2 & \text{si} \;\; x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si} \;\; x \geq 3 \end{array} \right.$

– **Si $x \pm 3$, tenim que:** $f(x)$ és derivable. La seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si} \;\; x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si} \;\; x > 3 \end{cases}$$

Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \;\text{ no és derivable en }\; x = 3 \;\; \big(\text{Punt } (3, 0)\big) \end{array}$$

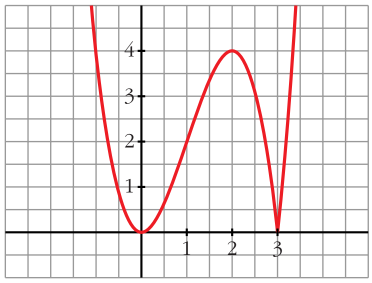
b) $f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 \;\text{ si }\; x < 3 \\ 3x(-x+2) = 0 \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{array} \\ 3x^2 - 6x = 0 \;\text{ si }\; x > 3 \rightarrow \text{cap} \end{cases}$

Com que $f(x) \geq 0$ per a tot x, tenim que:

$f(x)$ té un mínim en $(0, 0)$ i un altre en $(3, 0)$, i té un màxim en $(2, 4)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Unint totes les dades anteriors, arribem a la gràfica:



36. **La recta $y = 2x + 6$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$.**

a) Troba el valor de k i representa'n la funció.

• **Trobem k:**

Si $y = 2x + 6$ és asímptota obliqua, tenim que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Per tant:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \quad \to \quad k = 3$$

Així doncs: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 3 \text{ és asímptota vertical}$$

$y = 2x + 6$ és asímptota obliqua.

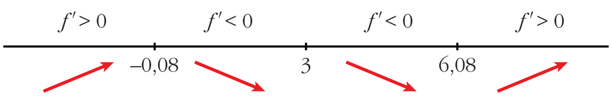
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3)-(2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2-12x-2x^2-1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-12x-1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2-12x-1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144+8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



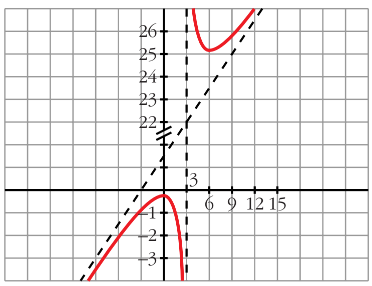
$f(x)$ és creixent en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$

és decreixent en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$

té un màxim en $(-0{,}08; -0{,}33)$

té un mínim en $(6{,}08; 24{,}32)$

• **Gràfica:**



37. **Considera la funció:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) En l'interval (–∞, 0] estudia l'existència de punts de tall amb els eixos, si la funció creix o decreix, l'existència de punts d'inflexió i si té asímptotes.

b) Dibuixa la gràfica en tot ℝ.

a) No hi ha tall amb eixos en $x \in (-\infty, 0)$.

En $x = 0 \quad f(0) = -0 + 1 \quad \to \quad (0, 1)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Si $x < 0$ numerador > 0 i denominador > 0 → $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creix si $x \in (-\infty, 0)$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

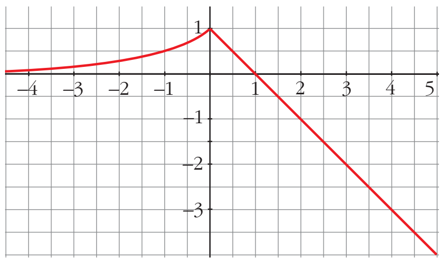
$$f''(x) = 0 \quad 6x^2 - 2 = 0 \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ punt d'inflexió.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

Existeix una asímptota horitzontal quan x tendeix a $-\infty$ en $y = 0$.

b) • **Gràfica:**



38. **Donada la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, calcula a i b perquè la gràfica de f passi pel punt (–2, –6) i tingui, en aquest punt, tangent horitzontal. Per a aquests valors de a i b, representa la funció.**

$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$; $f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{• Passa per } (-2, -6) \to -2a + b - 4 = -6 \\ \text{• Tangent horitzontal} \to f'(-2) = 0 \to a - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} a = 2;\ b = 2$$

Per a aquests valors, queda: $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$

• **Domini:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asímptotes:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \quad \to \quad y = 2x + 2$ és asímptota obliqua

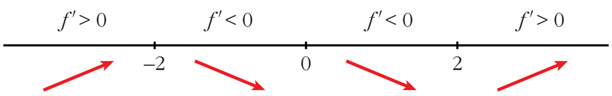
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

• **Punts singulars:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



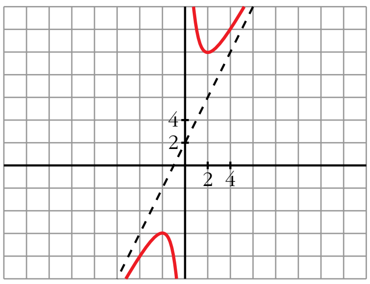
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

és decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

té un màxim en $(-2, -6)$

té un mínim en $(2, 10)$

• **Gràfica:**



39. **Troba els valors de a, b, c per als quals la funció $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$ té com a asímptota horitzontal la recta $y = -1$ i un mínim en (0, 1).**

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$

$f(0) = \dfrac{c}{-4} = 1 \quad \rightarrow \quad c = -4$

Substituint c pel valor –4:

$$f'(x) = \frac{-bx^2 + (8 - 8a) \cdot x - 4b}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-4b}{16} = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$$

Substituint b pel valor 0:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 - 4}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ grau numerador = grau denominador } \lim_{x \to \infty} \frac{a}{1} = -1 \to a = -1$$

40. Representa les funcions següents:

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x - 1)e^x$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

h) $y = \ln (x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Branca parabòlica}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

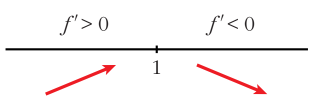
  $y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Punts singulars:**

  $$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x)}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

  $$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$$

  Signe de $f'(x)$



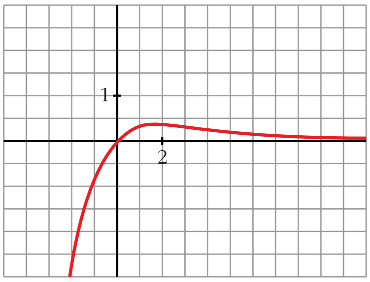
  $f(x)$ és creixent en $(-\infty, 1)$

  és decreixent en $(1, +\infty)$

  té un màxim en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

- Talla els eixos en el punt $(0, 0)$.

- **Gràfica:**



b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- **Domini:** $(0, +\infty)$

- **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

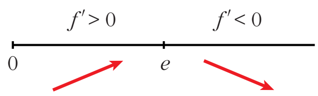
$y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = 1 \quad \to \quad x = e$$

Signe de $f'(x)$:



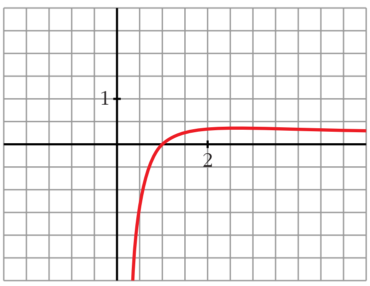
$f(x)$ és creixent en $(0, e)$

és decreixent en $(e, +\infty)$

té un màxim en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

- Talla l'eix X en $(1, 0)$.

- **Gràfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Domini:** $(0, +\infty)$

- **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

No té asímptotes verticals.

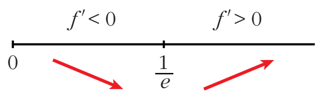
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Branca parabòlica}$$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = -1 \quad \to \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signe de $f'(x)$:



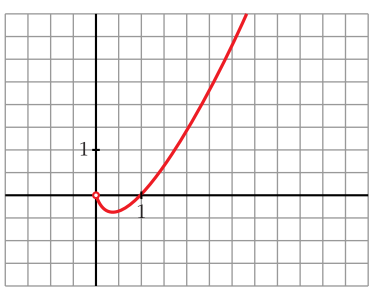
$f(x)$ és decreixent en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

és creixent en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

té un mínim en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

- Talla l'eix X en $(1, 0)$.

- **Gràfica:**



d) $y = (x - 1)\,e^x$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)\,e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

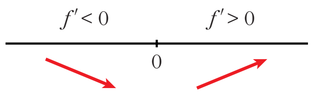
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Branca parabòlica}$$

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = e^x + (x - 1)\,e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

  Signe de $f'(x)$:



  $f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0)$

  és creixent en $(0, +\infty)$

  té un mínim en $(0, -1)$

- Talla l'eix X en $(1, 0)$.

- **Gràfica:**

e) $y = e^{-x^2}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Simetria parella:**

  $f(x) = f(-x) \quad \to \quad e^{-x^2} = e^{-(-x)^2}$

  $$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{-\infty}} = 0 \quad \to \quad \text{Asímptota horitzontal en } y = 0.$$

  Per simetria, igual si $x \to -\infty$

- **Punts de tall amb els eixos:**

  $x = 0 \;\rightarrow\; e^0 = 1 \;\rightarrow\; (0,\ 1)$

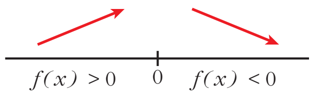
  $y = 0 \;\rightarrow\; e^{-x^2} = 0 \;\rightarrow\;$ mai

- **Punts singulars:**

  $f'(x) = (-2x) \cdot e^{-x^2}$

  Extrems de $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; (-2x) \cdot e^{-x^2} = 0 \begin{cases} -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,\ 1) \\ e^{-x^2} = 0 \text{ mai} \end{cases}$

- **Monotonia**



  $f(x)$ creix si $x \in (-\infty,\ 0)$

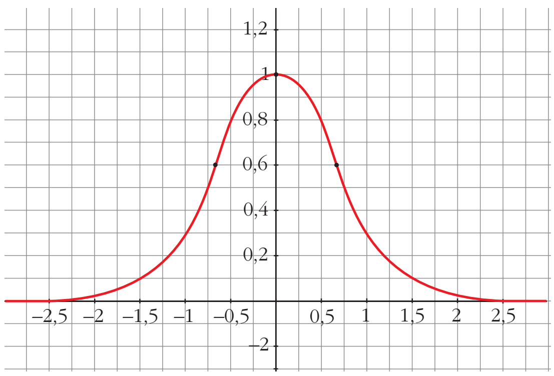
  $f(x)$ decreix si $x \in (0,\ +\infty)$

- **Punts d'inflexió:**

  $f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$

  $f''(x) = 0 \begin{cases} e^{-x^2} = 0 \text{ mai} \\ 4x^2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{-2} \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{-2},\ e^{-1/2}\right) \\ \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\ e^{-1/2}\right) \end{cases} \end{cases}$

- **Gràfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

  No té asímptotes verticals.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \;\rightarrow\;$ Branca parabòlica

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

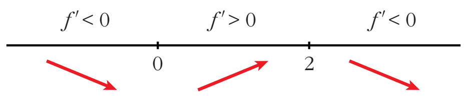
  $y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Punts singulars:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 2x - x^2 = 0 \;\;\rightarrow\;\; x(2 - x) = 0 \;\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



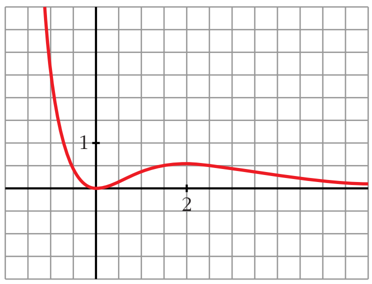
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

és creixent en $(0, 2)$

té un mínim en $(0, 0)$

té un màxim en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- **Gràfica:**



g) $y = \dfrac{x^2}{ln\, x}$

- **Domini:**

$ln\, x = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 1$. A més, ha de ser $x > 0$.

Domini: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asímptotes:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical.}$$

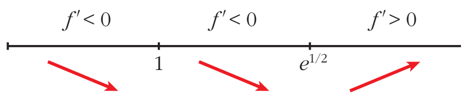
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\;\rightarrow\;\; \text{Branca parabòlica}$$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x\,ln\,x - x^2 \cdot \dfrac{1}{x}}{(ln\,x)^2} = \frac{2x\,ln\,x - x}{(ln\,x)^2} = \frac{x(2ln\,x - 1)}{(ln\,x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x(2ln\,x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no val)} \\ ln\,x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = e^{1/2} \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

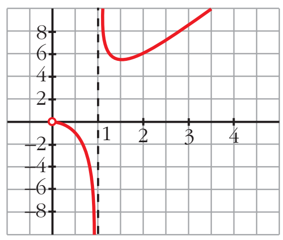


$f(x)$ és decreixent en $(0, 1) \cup (1, e^{1/2})$

és creixent en $(e^{1/2}, +\infty)$

té un mínim en $(e^{1/2}, 2e)$.

- **Gràfica:**



h) $y = ln(x^2 - 1)$

- **Domini:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Asímptotes:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \;\rightarrow\; x = -1$ és asímptota vertical

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \;\rightarrow\; x = 1$ és asímptota vertical

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

- **Punts singulars:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

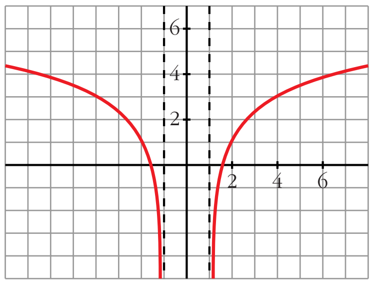
No hi ha punts singulars ($x = 0$ no pertany al domini).

- **Punts de tall amb l'eix X:**

  $ln(x^2 - 1) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 1 \;\rightarrow\; x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

  Punts: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ i $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

- **Gràfica:**



41. **Estudia els màxims, els mínims i els punts d'inflexió de les funcions següents i representa-les gràficament:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sinh\, x$. Aquesta funció s'anomena sinus hiperbòlic de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x + e^{-x} = 0 \;\rightarrow$ no té solució $\rightarrow$

  $\rightarrow$ no hi ha màxims ni mínims

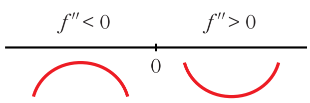
  $f'(x) > 0$ per a tot $x \;\rightarrow\; f(x)$ és creixent

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; e^{2x} - 1 = 0$

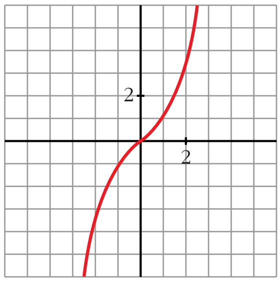
  $e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

  Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

• **Gràfica:**

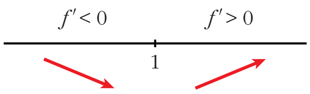


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$. Aquesta funció s'anomena cosinus hiperbòlic de x.

• $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad e^x - e^{-x} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1$

Signe de $f'(x)$:

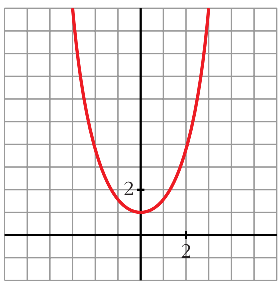


Hi ha un mínim en $(0, 1)$.

• $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad$ no té solució $\quad \rightarrow \quad$ no hi ha punts d'inflexió

• **Gràfica:**

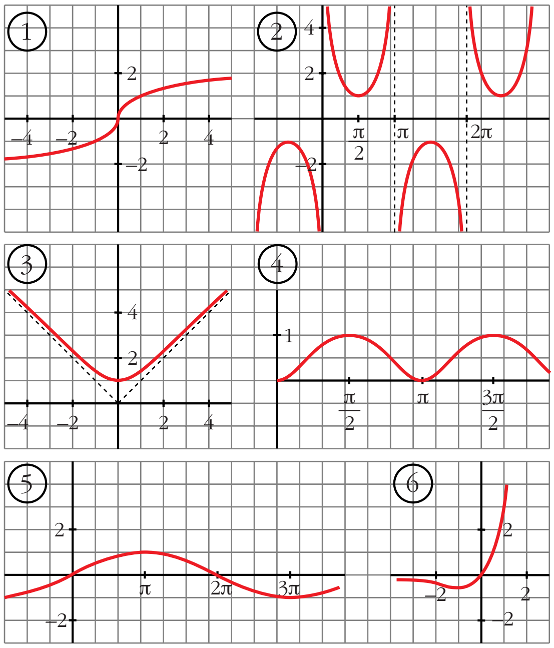


42. **Estudia el domini de definició, les asímptotes i els extrems de cada una de les funcions següents i, amb aquesta informació, tracta de trobar-ne la gràfica corresponent entre les que estan representades:**

a) $y = \dfrac{1}{sin\ x}$ **b)** $y = x\,e^x$

c) $y = sin\ \dfrac{x}{2}$ **d)** $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **f)** $y = sin^2\ x$



a) $y = \dfrac{1}{sin\ x}$

- **Domini:**

  $sin\ x = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 0 + \pi k; \;\; k \in \mathbb{Z}$

  $D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, \;\; k \in \mathbb{Z}$

- **Asímptotes:**

  $x = \pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$ són asímptotes verticals.

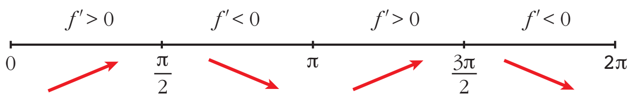
  No hi ha més asímptotes.

- **Extrems:**

  $f'(x) = \dfrac{-\,cos\ x}{sin^2\ x}$

  $f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; cos\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{array} \right. \;\; (k \in \mathbb{Z})$

  Signe de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



  $f(x)$ és periòdica de període 2π.

  $f(x)$ és decreixent en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

és creixent en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

té un mínim en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

té un màxim en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 2

b) $y = xe^x$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

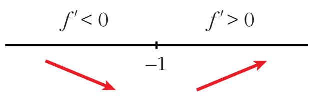
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Branca parabòlica}$$

- **Extrems:**

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -1)$

és creixent en $(-1, +\infty)$

té un mínim en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 6

c) $y = sin\ \frac{x}{2}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:** No en té.

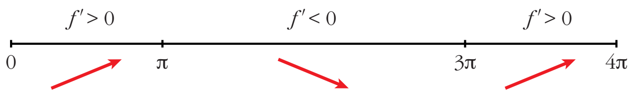
- **Extrems:**

$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad cos\ \dfrac{x}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \quad \rightarrow \quad x = \pi + 2\pi k$

$f(x)$ és periòdica de període 4π.

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

és decreixent en $(\pi, 3\pi)$

té un màxim en $(\pi, 1)$

té un mínim en $(3\pi, -1)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 5

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:** No en té.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Branques parabòliques}$$

- **Extrems:**

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \rightarrow \quad f(x)$ no és derivable en $x = 0$

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 0$.

$f(x)$ és creixent.

- **Gràfica** $\rightarrow$ 1

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Simetria:**

$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow \quad f(x)$ és parell: simètrica respecte a l'eix Y.

- **Asímptotes:**

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ és asímptota obliqua quan $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

Per simetria:

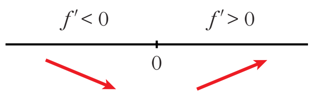
$y = -x$ és asímptota obliqua quan $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extrems:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0)$

és creixent en $(0, +\infty)$

té un mínim en $(0, 1)$

- **Gràfica** $\to$ 3

f) $y = sin^2\, x$

- **Domini:** $\mathbb{R}$

- **Asímptotes:** No en té.

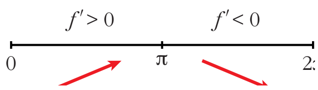
- **Extrems:**

$f'(x) = 2sin\, x\, cos\, x = sin\, 2x$

$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; sin\, 2x = 0 \;\; \to \;\; 2x = 0 + \pi k \;\; \to \;\; x = \dfrac{\pi}{2} k, \;\; k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ és periòdica de període π.

Signe de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ és creixent en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

és decreixent en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

té un màxim en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

té un mínim en $(0, 0)$ i un altre en $(\pi, 0)$

- **Gràfica** $\rightarrow$ 4

43. **Troba els punts de tall dels eixos, màxims i mínims i punts d'inflexió de les funcions següents definides en l'interval [0, 2π] i representa-les.**

a) $y = 1 - 2\cos x$ **b)** $y = 1 + 2\sin x$

c) $y = \sin x - \cos x$ **d)** $y = \sin x + \cos x$

a) $y = 1 - 2\cos x$

- **Domini:** $[0, 2\pi]$ (ens la defineixen en aquest interval).

- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punt $(0, -1)$

– Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$

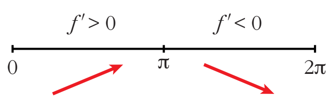
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \text{Punts: } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ i } \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

- **Màxims, mínims, creixement i decreixement:**

$f'(x) = 2\sin x$

$f'(x) = 0 \rightarrow \sin x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en l'interval $(0, \pi)$ i és decreixent en l'interval $(\pi, 2\pi)$.

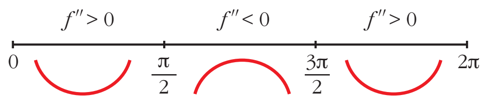
Té un màxim en $(\pi, 3)$, un mínim en $(0, -1)$ i un altre mínim en $(2\pi, 1)$.

- **Punts d'inflexió:**

  $f''(x) = 2\ cos\ x$

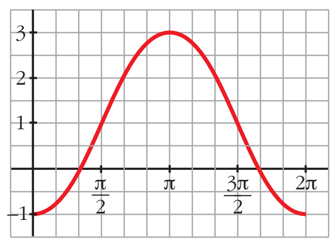
  $f''(x) = 0 \ \rightarrow \ cos\ x = 0 \ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{3} \end{cases}$

  Signe de $f''(x)$:



  Punts d'inflexió: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ i $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$

- **Gràfica:**



b) $y = 1 + 2\,sin\ x$

- **Domini:** $[0, 2\pi]$ (només està definida en aquest interval).

- **Talls amb els eixos:**

  – Amb l'eix Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 1$ $\rightarrow$ Punt $(0, 1)$

  – Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $1 + 2\ sin\ x = 0$ $\rightarrow$ $sin\ x = -\dfrac{1}{2}$ $\rightarrow$

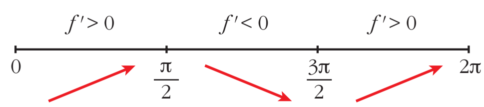
  $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{6} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} \end{array}\right\}$ Punts: $\left(\dfrac{7\pi}{6}, 0\right)$ i $\left(\dfrac{11\pi}{6}, 0\right)$

- **Màxims, mínims, creixement i decreixement:**

  $f'(x) = 2\ cos\ x$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow \ cos\ x = 0 \ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

  Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; és decreixent en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

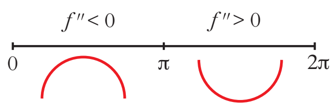
Té un màxim en $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ i un mínim en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- **Punts d'inflexió:**

$f''(x) = -2\,sin\,x$

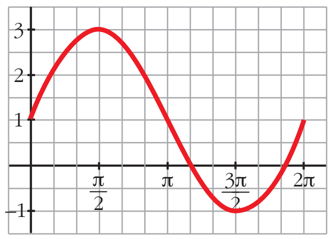
$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; sin\,x = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$

Signe de $f''(x)$:



Punts d'inflexió en $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ i en $(2\pi, 1)$.

- **Gràfica:**



c) $y = sin\,x - cos\,x$

- **Domini:** $[0, 2\pi]$ (ens la defineixen en aquest interval).

- **Talls amb els eixos:**

– Amb l'eix $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = -1 \;\rightarrow\;$ Punt $(0, -1)$

– Amb l'eix $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; sin\,x - cos\,x = 0$

$tg\,x = 1 \;\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$ Punts: $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ i $\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$

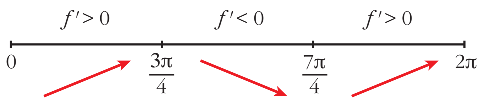
- **Màxims, mínims, creixement i decreixement:**

$f'(x) = cos\,x + sin\,x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\,x + sin\,x = 0 \;\rightarrow\; 1 + tg\,x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; tg\,x = -1 \;\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$; és decreixent en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

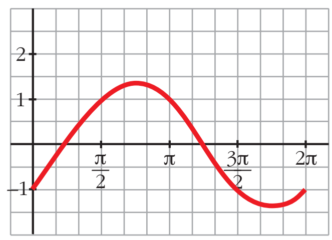
Té un màxim en $\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ i un mínim en $\left(\frac{7\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- **Punts d'inflexió:**

  $f''(x) = -sin\ x + cos\ x = -(sin\ x - cos\ x) = -f(x)$

  Els punts d'inflexió són els punts de tall amb l'eix X.

- **Gràfica:**



d) $y = sin\ x + cos\ x$

- **Domini:** $[0, 2\pi]$ (ens la defineixen en aquest interval).

- **Talls amb els eixos:**

  – Amb l'eix Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 1$ $\rightarrow$ Punt $(0, 1)$

  – Amb l'eix X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $sin\ x + cos\ x = 0$ $\rightarrow$ $sin\ x = -cos\ x$ $\rightarrow$

  $$\rightarrow \quad tg\ x = -1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array} \right\} \text{Punts: } \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \text{ i } \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$$

  Punts de tall $(0, 1)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ i $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

- **Màxims, mínims, creixement i decreixement:**

  $f'(x) = cos\ x - sin\ x$

  $f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x - sin\ x = 0 \rightarrow cos\ x = sin\ x \rightarrow$

$\rightarrow \quad tg\, x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$ Els punts seran $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ màxim i $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ mínim

La funció $f(x)$ creix si x pertany $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

La funció $f(x)$ decreix si x pertany $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

- **Punts d'inflexió:**

  $f''(x) = -cos\ x - sin\ x$

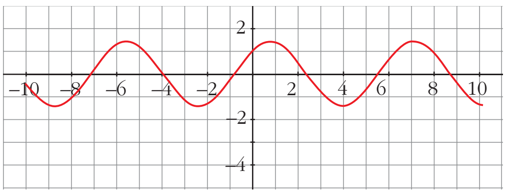
  $f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -cos\ x - sin\ x = 0 \quad \rightarrow \quad -(cos\ x + sin\ x) = 0$ i d'abans

  $x = \dfrac{3\pi}{4}$ i $x = \dfrac{7\pi}{4}$

  els punts d'inflexió coincideixen amb els punts de tall amb l'eix horitzontal.

- **Gràfica:**

  Cal tenir en compte que està representada per un domini de tots els reals, i no per domini de $[0, 2\pi]$ que seria només el període que repeteix començant en $x = 0$.



Pàgina 213

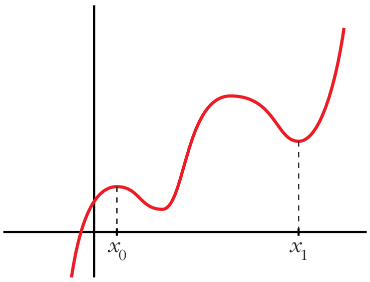
QÜESTIONS TEÒRIQUES

44. Què podem dir del grau d'una funció polinòmica que té dos màxims i dos mínims relatius? En aquesta funció, pot estar un dels mínims més alt que el màxim?

- Si té dos màxims i dos mínims relatius, i és polinòmica, la seva derivada té, com a mínim, quatre arrels; és a dir, $f'(x)$ serà, com a mínim, de grau 4.

  Així doncs, $f(x)$ serà, com a mínim, de grau 5.

- Sí, podria haver-hi un mínim més alt que un màxim. Per exemple:



El mínim de x_1 és més alt que el màxim de x_0.

45. **Quants punts d'inflexió pot tenir com a màxim una funció polinòmica de quart grau?**

Si $f(x)$ és un polinomi de quart grau, $f'(x)$ serà un polinomi de tercer grau i $f''(x)$ serà un polinomi de segon grau.

Així doncs, $f'(x)$ tindrà, a tot estirar, dues arrels.

Per tant, $f(x)$ tindrà, com a màxim, dos punts d'inflexió.

46. **La funció $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no està definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; no obstant això, té només una asímptota vertical. Justifica aquesta informació.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ és asímptota vertical}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hi ha una discontinuïtat evitable, no hi ha una asímptota.

47. **Quantes asímptotes verticals pot tenir una funció? I horitzontals?**

- D'asímptotes verticals, en pot tenir infinites. (Com a exemple, podem considerar la funció $y = \dfrac{1}{sin\ x}$, la gràfica de la qual està representada en l'exercici **20**, és la gràfica 2).
- D'asímptotes horitzontals, en pot tenir, com a màxim, dues: una quan $x \to -\infty$ i una altra quan $x \to +\infty$.

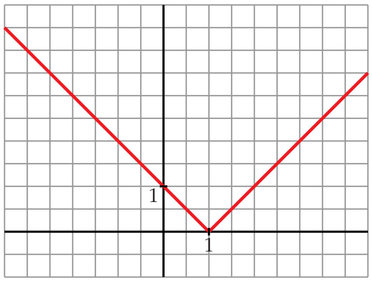
48. **Dóna un exemple d'una funció que tingui un mínim en $x = 1$ i que no sigui derivable en aquest punt. Representa-la.**

$$y = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ per a } x \neq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Hi ha un mínim en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no és derivable en $x = 1$, ja que $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gràfica és:



49. **Dóna un exemple d'una funció que sigui derivable en $x = 1$ amb $f'(1) = 0$ i que no tingui màxim ni mínim en aquest punt.**

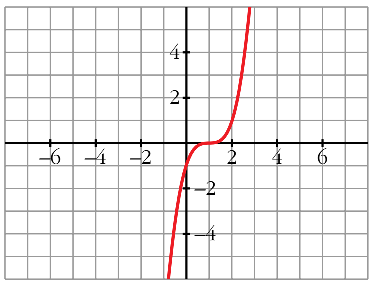
Per exemple, $y = (x - 1)^3$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$

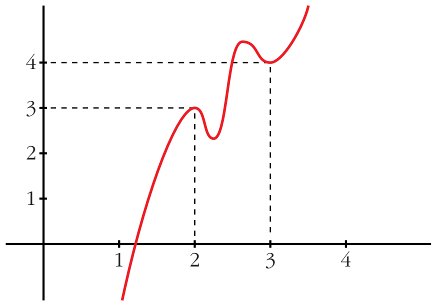
$f'(x) > 0$ per a $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ és creixent

En $x = 1$ hi ha un punt d'inflexió.

La gràfica és:



50. **Si és possible, dibuixa una funció contínua en l'interval [0, 4] que tingui, almenys, un màxim relatiu en el punt (2, 3) i un mínim relatiu en el punt (3, 4). Si la funció fos polinòmica, quin n'hauria de ser, com a mínim, el grau?**



$f(x)$ ha de tenir, almenys, dos màxims i dos mínims en $[0, 4]$, si és derivable.

Si $f(x)$ fos un polinomi, tindria, com a mínim, grau 5 (ja que $f'(x)$ s'anul·laria, almenys, en quatre punts).

51. **Sobre la gràfica de la funció $y = |x^2 - 4|$ indica els intervals de concavitat i convexitat. Quins són els seus punts d'inflexió?**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$f(x)$ còncava si $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
$f(x)$ convexa si $x \in (-2, 2)$

Els punts on canvia la concavitat són $x = -2$ i $x = 2$.

52. **Comprova que la funció $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ té dues asímptotes horitzontals diferents.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Per tant:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \quad \to \quad y = -1 \text{ és asímptota horitzontal quan } x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad \to \quad y = 1 \text{ és asímptota horitzontal quan } x \to +\infty$$

53. **La funció $f(x) = x + e^{-x}$ té alguna asímpota? En cas afirmatiu, troba-la.**

- **Domini:** $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ no hi ha asímptotes verticals
- **Asímptotes horitzontals:**

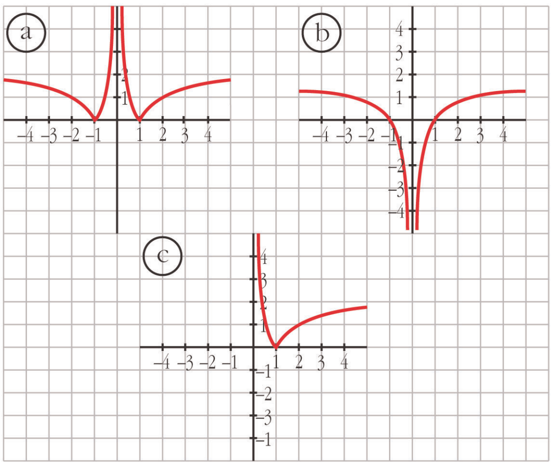
$$\lim_{x \to \infty} (x + e^{-x}) = \infty \rightarrow \text{no hi ha asímptota horitzontal quan } x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = \infty \rightarrow \text{no hi ha asímptota horitzontal quan } x \rightarrow -\infty$$

54. **Són iguals les gràfiques de $f(x) = e^{x}$ i de $g(x) = e^{|x|}$? Justifica la teva resposta.**

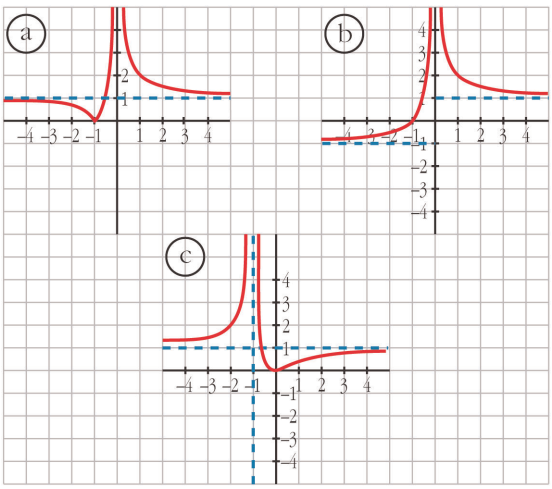
No són iguals. $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \neq e^{x}$

55. **Quina d'aquestes gràfiques correspon a la funció $f(x) = \ln|x|$ i quina a $g(x) = |\ln x|$?**



$f(x)$ és la *b*.; $g(x)$ és la *c*.

56. **Quina d'aquestes gràfiques correspon a la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$?**



$f(x)$ és la *b*.

PER APROFUNDIR

57. **Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, es demana:**

a) Domini de definició, asímptotes i posició de la corba respecte a aquestes.

b) Màxims i mínims relatius, i intervals de creixement i de decreixement.

c) Dibuixa la gràfica de f.

a) • **Domini:** $\mathbb{R}$

• **Asímptotes:**

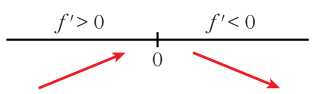
No té asímptotes verticals.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ és asímptota horitzontal.} \\ (f(x) > 0 \;\to\; \text{la corba està per sobre de l'asímptota).} \end{array}$$

b) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

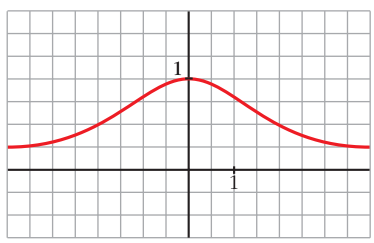
$f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0)$; és decreixent en $(0, +\infty)$. Té un màxim en $(0, 1)$.

c)



58. **Determina les asímptotes de les funcions següents:**

a) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{3x}$ **b)** $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}$

a) • **Domini** $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

• **Asímptotes verticals:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x}}{3x} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \rightarrow \quad \text{Existeix asímptota vertical en } x = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

• **Asímptotes horitzontals:**

No hi ha branca infinita quan $x = +\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{grau numerador} < \text{grau denominador} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Existeix asímptota horitzontal quan $x = -\infty$ en $y = 0$.

b) • **Domini** $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

• **Asímptotes verticals:**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{x(1 + \sqrt{1 + 1/x^2})}{x} \right] = \lim_{x \to 0} (1 + \quad (1 + \sqrt{1 + 1/x^2}) \ ) = \pm\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \text{Existeix asímptota vertical en } x = 0.$$

• **Asímptotes horitzontals:**

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{grau numerador} = \text{grau denominador} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

Existeix asímptota. horitzontal quan $x = \infty$ en $y = 2$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{grau numerador} = \text{grau denominador} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Existeix asímptota horitzontal quan $x = -\infty$ en $y = 0$.