

Anàlisi d'algunes estratègies

Pàgina 10

- 1** El matemàtic Hardy va visitar a l'hospital el matemàtic indi Ramanujan. Li va comentar: «He vingut amb el taxi 1729, un nombre molt insípid». «De cap manera» —va contestar Ramanujan—, «és un nombre molt interessant: és el més petit que es pot expressar com a suma de dos cubs de dues maneres diferents». Demostra-ho.

L'arrel cúbica de 1729 és $\sqrt[3]{1729} = 12,0023\dots$

Per tant, per expressar 1729 com a suma de dos cubs, només poden intervenir els cubs de 1 a 12.

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$3^3 = 27$$

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125$$

$$6^3 = 216$$

$$7^3 = 343$$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$10^3 = 1000$$

$$11^3 = 1331$$

$$12^3 = 1728$$

Veiem que $12^3 + 1^3 = 1729$

Quins són els altres dos cubs que, sumats, donen el nombre buscat? Fixant-nos-hi, veiem que $9^3 + 10^3 = 1729$.

Ja hem comprovat que 1729 es pot expressar com a suma de dos cubs naturals de dues maneres diferents.

Per veure quin és el nombre més petit que compleix aquesta propietat, temp-tegem amb els cubs de l'1 a l'11 i comprovem que no es pot obtenir el mateix nombre per mitjà de dues sumes diferents.

- 2** El producte de quatre enters consecutius és 7 590 024. Quins nombres són?

Com que $\sqrt[4]{7\,590\,024} \approx 52,488$, provem amb nombres propers a 52.

Temp-tejant, obtenim que: $51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 = 7\,590\,024$

Per tant, els nombres buscats són 51, 52, 53 i 54.

- 3** Troba el nombre enter n més gran que compleixi aquesta desigualtat: $n^{200} < 5^{300}$.

$$n^{200} < 5^{300} \Leftrightarrow (n^2)^{100} < (5^3)^{100} \Leftrightarrow n^2 < 5^3 \Leftrightarrow n^2 < 125$$

Com que $\sqrt{125} \approx 11,18$, tenim que:

$$\left. \begin{array}{l} 11^2 = 121 < 125 \\ 12^2 = 144 > 125 \end{array} \right\} \rightarrow n = 11$$

El nombre 11 és l'enter més gran tal que $n^{200} < 5^{300}$.

- 4** Quants nombres de quatre xifres que acabin en 45 són múltiples de 45? N'hi ha cap que comenci per 45? Explica la resposta.

Els nombres de quatre xifres acabats en 45 són de la forma: $xy45 = xy00 + 45$.

Com que 45 és múltiple de 45, és necessari que $xy \cdot 100$ també ho sigui.

La descomposició factorial de 45 és: $45 = 3^2 \cdot 5$.

La descomposició factorial de 100 és: $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

Perquè el quocient $\frac{xy00}{45}$ sigui exacte, el nombre xy ha de ser un nombre de dues xifres que sigui múltiple de 9.

És a dir, busquem nombres de dues xifres la suma dels quals sigui múltiple de 9:

18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90

Els nombres de quatre xifres acabats en 45 que busquem són:

1 845, 2 745, 3 645, 4 545, 5 445, 6 345, 7 245, 8 145, 9 045

Com es pot veure, el nombre 4 545 és un múltiple de quatre xifres que comença i acaba per 45.

5 Quina és la suma de tots els nombres capicues compresos entre 60 000 i 70 000?

Els diferents capicues els obtenim posant nombres diferents en les tres primeres xifres; a més, la seva primera xifra ha de ser 6.

$$60\,006 + 60\,106 + \dots + 60\,906 = \frac{60\,006 + 60\,906}{2} \cdot 10 = 604\,560$$

$$61\,016 + 61\,116 + \dots + 61\,916 = \frac{61\,016 + 61\,916}{2} \cdot 10 = 614\,660$$

$$62\,026 + 62\,126 + \dots + 62\,926 = \frac{62\,026 + 62\,926}{2} \cdot 10 = 624\,760$$

$$63\,036 + 63\,136 + \dots + 63\,936 = \frac{63\,036 + 63\,936}{2} \cdot 10 = 634\,860$$

$$64\,046 + 64\,146 + \dots + 64\,946 = \frac{64\,046 + 64\,946}{2} \cdot 10 = 644\,960$$

$$65\,056 + 65\,156 + \dots + 65\,956 = \frac{65\,056 + 65\,956}{2} \cdot 10 = 655\,060$$

$$66\,066 + 66\,166 + \dots + 66\,966 = \frac{66\,066 + 66\,966}{2} \cdot 10 = 665\,160$$

$$67\,076 + 67\,176 + \dots + 67\,976 = \frac{67\,076 + 67\,976}{2} \cdot 10 = 675\,260$$

$$68\,086 + 68\,186 + \dots + 68\,986 = \frac{68\,086 + 68\,986}{2} \cdot 10 = 685\,360$$

$$69\,096 + 69\,196 + \dots + 69\,996 = \frac{69\,096 + 69\,996}{2} \cdot 10 = 695\,460$$

Cada una de les sèries anteriors és una progressió aritmètica de diferència 100.

Fent les sumes parcials obtenim que la suma total és 6 500 100.

6 Quants nombres més petits que 1 000 tenen la suma dels seus dígitos igual a 7?

Són nombres de 3 xifres, xyz , tals que $x + y + z = 7$ i $x, y, z > 0$.

Si $x = 0 \rightarrow y + z = 7 \rightarrow 007, 016, 025, 034, 043, 052, 061, 070 \rightarrow 8$ nombres

Si $x = 1 \rightarrow y + z = 6 \rightarrow 106, 115, 124, 133, 142, 151, 160 \rightarrow 7$ nombres

Si $x = 2 \rightarrow y + z = 5 \rightarrow 205, 214, 223, 232, 241, 250 \rightarrow 6$ nombres

Si $x = 3 \rightarrow y + z = 4 \rightarrow 304, 313, 322, 331, 340 \rightarrow 5$ nombres

Si $x = 4 \rightarrow 4$ nombres

Si $x = 5 \rightarrow 3$ nombres

Si $x = 6 \rightarrow 2$ nombres

Si $x = 7 \rightarrow 1$ nombre

En total hi ha $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{1+8}{2} \cdot 8 = 36$ nombres més petits que 1 000 la suma dels quals és 7.

7 Quin és el darrer dígit (xifra de les unitats) de 3857^{105} ?

$$7^0 = 1$$

$$7^1 = 7$$

$$7^2 = 49$$

$$7^3 = 343$$

$$7^4 = 2401$$

Cada 4 potències de 7, es repeteix la xifra final.

$$105 = 26 \cdot 4 + 1$$

El residu de dividir 105 entre 4 és 1 $\rightarrow$ l'última xifra de 3857^{105} és la mateixa que la de 7^1 , que és 7.

Pàgina 11**8 En el problema resolt anterior, quina distància recorrerà el director si la fila avança 40 m en tot el procés?**

Quan la fila avança d , el director avança $30 + d$. Quan la fila avança $40 - d$, el director retrocedeix $30 + d - 40$.

Anomenem x l'espai que recorre el músic del davant de tot fins que l'atrapa el director i fem servir la

$$\text{fórmula: } \text{temps} = \frac{\text{espai}}{\text{velocitat}}$$

El temps que tarda el director en atrapar al músic del davant t_1 és el mateix que el que tarda el músic del davant en recórrer x metres.

Anomenem v_{DIRECTOR} a la velocitat del director i $v_{\text{MÚSIC}}$ a la velocitat dels músics.

L'avantatge del músic de la capçalera és de 30 m.

t_1 = temps que tarda el director en atrapar al músic del davant

$$t_1 = \frac{30}{v_{\text{DIRECTOR}} - v_{\text{MÚSIC}}}$$

t_1 = temps que tarda el músic del davant en recórrer els x metres

$$t_1 = \frac{x}{v_{\text{MÚSIC}}}$$

Per tant tenim la igualtat:

$$\frac{30}{v_{\text{DIRECTOR}} - v_{\text{MÚSIC}}} = \frac{x}{v_{\text{MÚSIC}}} \quad (\text{I})$$

L'espai recorregut pel director quan avança amb els músics és $30 + x$.

L'espai recorregut pel director en tornar és $x - 10$, perquè al final es queda a 40 m del principi.

Per tant, l'espai total recorregut pel director és:

$$e = 30 + x + x - 10 = 20 + 2x$$

El temps total durant el qual avança la banda, t_2 , és el mateix que el temps que camina el director.

Per tant, el temps total durant el qual avança la banda és:

$$t_2 = \frac{40}{v_{\text{MÚSIC}}}$$

El temps total durant el qual camina el director és:

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{\text{DIRECTOR}}}$$

Per tant, tenim la igualtat:

$$\frac{20+2x}{v_{\text{DIRECTOR}}} = \frac{40}{v_{\text{MÚSIC}}} \rightarrow \frac{v_{\text{DIRECTOR}}}{v_{\text{MÚSIC}}} = \frac{20+2x}{40} \quad (\text{II})$$

Operem en la igualtat (I):

$$x(v_{\text{DIRECTOR}} - v_{\text{MÚSIC}}) = 30 \cdot v_{\text{MÚSIC}}$$

$$x \cdot v_{\text{DIRECTOR}} = 30 \cdot v_{\text{MÚSIC}} + x \cdot v_{\text{MÚSIC}}$$

$$x \cdot v_{\text{DIRECTOR}} = v_{\text{MÚSIC}}(30 + x)$$

$$v_{\text{DIRECTOR}} = v_{\text{MÚSIC}} \frac{30+x}{x}$$

$$\frac{v_{\text{DIRECTOR}}}{v_{\text{MÚSIC}}} = \frac{30}{x} + 1$$

Hem obtingut la relació entre les dues velocitats. La fem servir en la igualtat (II) i obtenim:

$$\frac{20+2x}{40} = \frac{30}{x} + 1$$

Operem i obtenim: $x = -20$, $x = 30$

Com que x no pot ser negativa, l'espai recorregut pel director és $e = 20 + 2x = 20 + 60 = 80$ m.

- 9 Un beduí vol travessar un desert de 150 km de llargada on no hi ha pous d'aigua. El dromedari que munta pot caminar 50 km al dia carregat amb el beduí i el seu avituallament, més un pes extra de 50 kg. Això sí, al vespre necessita beure 25 litres d'aigua.**

Per a recórrer 150 km necessitem 3 dies i 50 l en el punt de sortida.

Per a recórrer 200 km hem d'acumular 50 l en el quilòmetre 50.

Per a acumular 50 l en el quilòmetre 50 necessitem 3 dies:

1r dia: arribem al quilòmetre 50 i deixem 25 l d'aigua.

2n dia: tornem al punt de sortida, abeurant allí el camell.

3r dia: arribem al quilòmetre 50 amb 25 l més.

Per a recórrer 200 km es necessiten 6 dies.

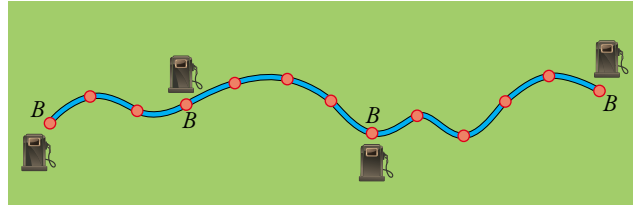
Hem necessitat 125 l perquè el camell begui durant el camí.

Per recórrer 250 km hem d'acumular 125 l en el quilòmetre 50, que suposen 9 dies.

Per acabar el viatge necessitarà 6 dies més, com hem vist en l'apartat anterior; és a dir, tardarà $9 + 6 = 15$ dies en total.

La seqüència de dies a mesura que afegim 50 km més al viatge és 3, 6, 15, ... Com que cada tram que afegim té 50 km i comencem per 150, anomenant $n = \frac{\text{distància} - 100}{50}$, obtenim que el nombre de dies ve donat per l'expressió $\frac{3^n + 3}{2}$.

- 10** Una moto gasta 5 l de benzina per recórrer un tram de carretera situat entre dos punts. En el dipòsit hi caben 10 l i pot dur un bidó de 5 l en el seient. Com ho faries per recórrer aquesta carretera amb la moto? (A les benzineres, B, pots omplir el dipòsit i comprar bidons de 5 l). Quants litres de benzina necessaries per arribar d'una benzinera a una altra que disti n trams? Per recórrer quatre trams, hauràs d'anar prèviament a deixar un bidó en algun punt intermedi de la carretera. Per resoldre el problema per a cinc trams, t'ajudaria haver-lo resolt primer per a quatre?



- Per a 3 trams:

S'omplen el dipòsit i el bidó. Són 15 l, els que calen.

- Per a 4 trams:

Cal disposar de 15 l en el primer punt vermell per poder arribar fins al final.

Per a això, portem un bidó al primer punt. Tornem a la benzinera inicial. Posem 15 l. Quan arribem de nou al primer punt tenim 15 l (5 del bidó que deixem + 5 del bidó que portem + 5 que queden al dipòsit). Amb aquesta benzina podem recórrer tres trams més. Hem necessitat 30 l.

- Per a 5 trams:

Cal disposar de 30 l en el primer punt vermell perquè des d'aquest punt falten 4 trams per al final.

Com que en l'últim viatge arribem al primer punt vermell amb 10 l, necessitem acumular 20 l (4 bidons) en aquest punt. Per a cada bidó en el punt 1 es necessiten 15 l, com s'ha dit.

En total es necessiten $4 \cdot 15 + 15 = 75$ l de benzina.

- Per a 6 trams:

Cal disposar de 75 l en el primer punt vermell perquè des d'aquest punt falten 5 trams per al final.

Com que en l'últim viatge arribem al primer punt vermell amb 10 l, necessitem acumular un total de 65 l (13 bidons) en aquest punt. Per a cada bidó en el primer punt es necessiten 15 l, com s'ha dit abans.

En total es necessiten $13 \cdot 15 + 15 = 210$ l de benzina.

La seqüència és: 15, 30, 75, 210, ...

En general, per a n trams es necessiten $15 \cdot \frac{3^{n-1} + 1}{2}$ litres de benzina.

- 11** Un pot conté una mescla d'alcohol i aigua en una proporció de 3 a 7. En un altre pot la proporció és de 2 a 3. Quantes cullerades hem de treure de cada pot per obtenir 12 cullerades d'una mescla en què la proporció alcohol-aigua sigui de 3 a 5?

	PROPORCIÓ D'ALCOHOL EN LA MESCLA	QUANTITAT (cullerades)	ALCOHOL
MESCLA A	$\frac{3}{10}$	x	$\frac{3x}{10}$
MESCLA B	$\frac{2}{5}$	y	$\frac{2y}{5}$
TOTAL	$\frac{3}{8}$	$x + y = 12$	$\frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{9}{2} = \frac{3x}{10} + \frac{2y}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ \frac{3x}{10} + \frac{2y}{5} = \frac{9}{2} \end{array} \right\} \rightarrow x = 3, y = 9$$

Cal posar 3 cullerades de la mescla A i 9 cullerades de la mescla B.

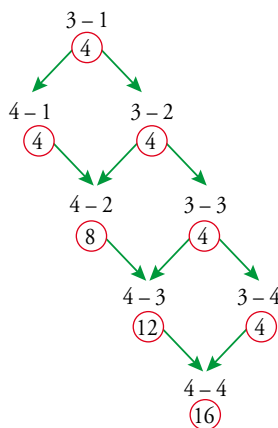
Pàgina 12

- 12** De quantes maneres es pot arribar al resultat 5-0? De quantes al resultat 4-1? Per tant, de quantes es pot arribar a 5-1?

Al resultat 5-0 es pot arribar d'1 manera. Al 4-1, de 5 maneres. Per tant, al 5-1, de $1 + 5 = 6$ maneres.

- 13** Si, a més de conèixer el resultat final del partit (4-4) sabem que s'hi va donar el resultat 3-1, de quantes maneres va poder evolucionar el marcador?

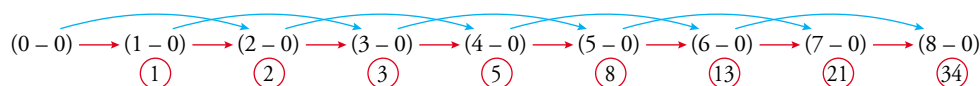
L'esquema ara seria així:



El resultat va poder evolucionar de 16 maneres diferents.

Pàgina 13

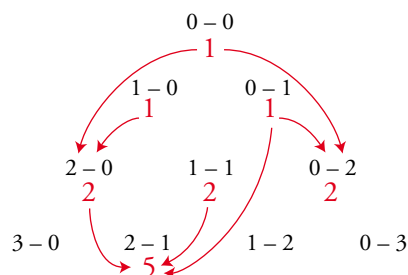
- 14** El resultat d'un d'un partit de bàsquet és en aquest moment 8-0. Si sabem que no s'ha marcat cap triple (tan sols cistelles d'1 i de 2), de quantes maneres s'ha pogut arribar a aquest resultat? (Comprova que en són 34).

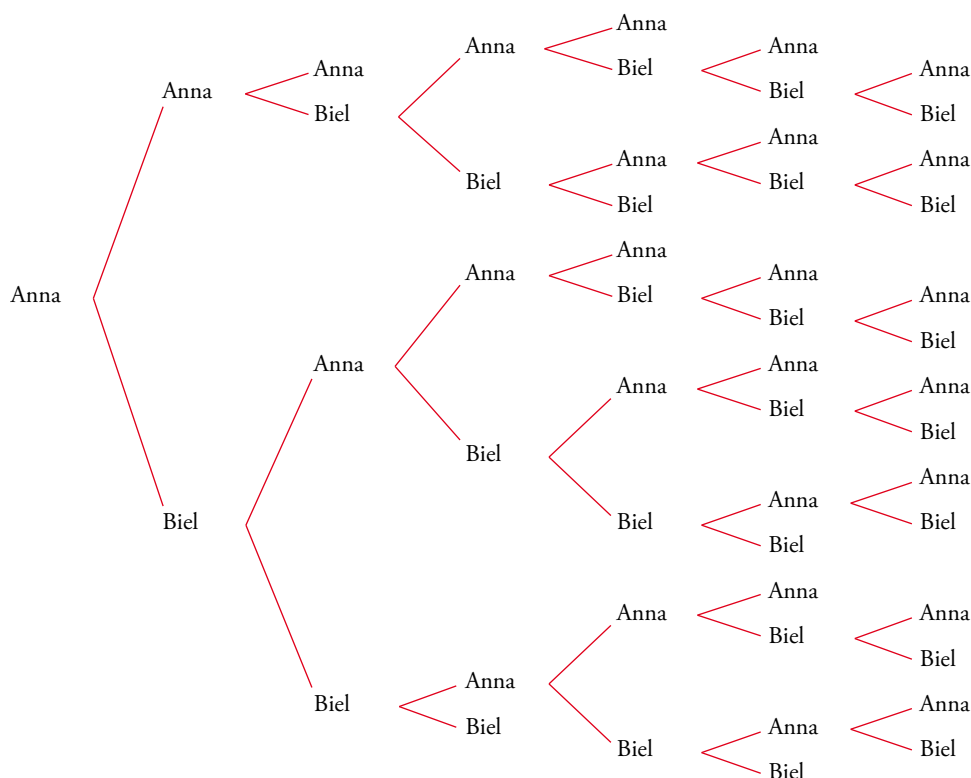


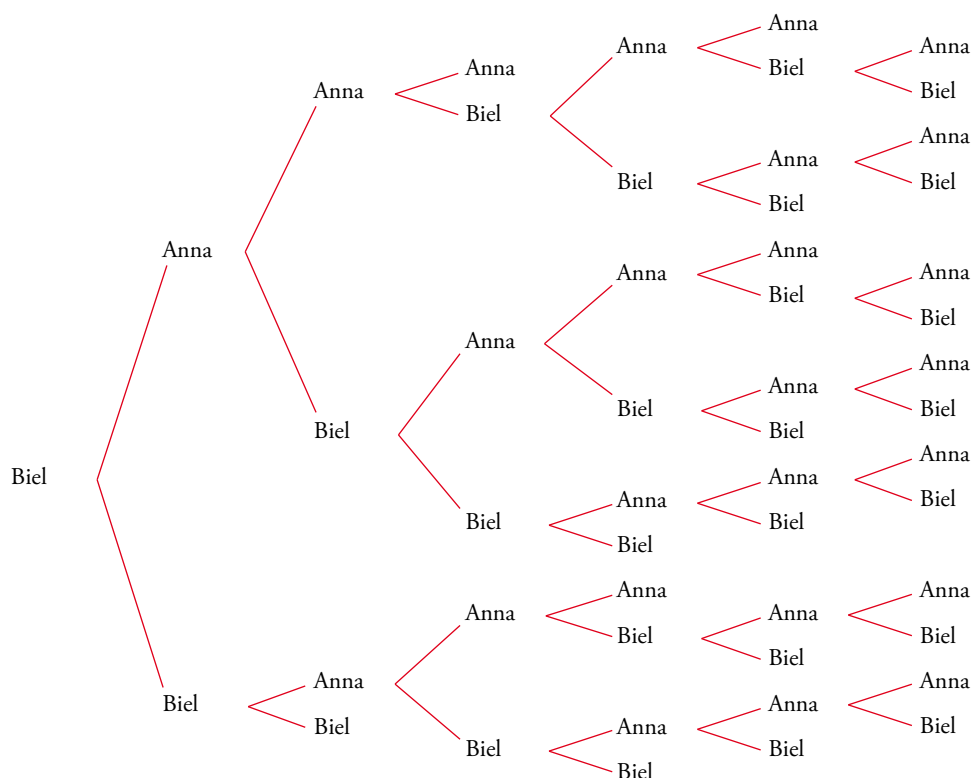
El nombre de maneres que ens porta a cada resultat s'obté sumant els dos anteriors.

- 15** Esbrina de quantes maneres es pot arribar al resultat 4-4 en un partit de bàsquet sense marcar triples. Aquest és el començament del recompte:

Continua'l tu i comprova que hi ha 556 maneres, encara que sembli sorprenent.







Pàgina 14

- 19** En una certa escala mecànica, la velocitat de pujada de l'Andrea és 10 vegades la de la seva germana petita, la Marta. L'Andrea arriba a dalt pujant 40 esglaons, mentre que la Marta ho fa pujant 10 esglaons.

Quants esglaons visibles té el tram d'escala en qüestió?

Velocitat de l'Andrea = $10a$

Velocitat de la Marta = a

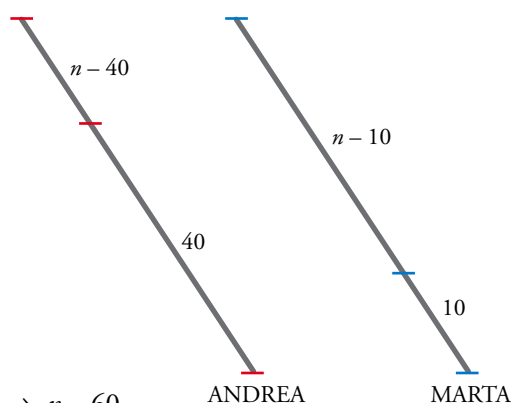
Velocitat de l'escala = b

$$\text{Andrea: } \frac{40}{10a} = \frac{n-40}{b} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n-40}{4}$$

$$\text{Marta: } \frac{10}{a} = \frac{n-10}{b} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n-10}{10}$$

Per tant:

$$\frac{n-40}{4} = \frac{n-10}{10} \rightarrow 5n-200 = 2n-20 \rightarrow 3n = 180 \rightarrow n = 60$$



- 20** Resol el sistema d'equacions següent efectuant un canvi de variables adequat:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 8 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

Fem els canvis de variable: $t = \frac{1}{x}$, $z = \frac{1}{y}$

El sistema queda:

$$\begin{cases} t + 2z = 8 \\ 3t - z = 3 \end{cases} \rightarrow t = 2, z = 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$$

Pàgina 15

- 21** La Letícia tarda 10 s a baixar 50 esglaons i completar, així, un tram d'escala mecànica. L'Eva, més pausada, tarda 20 s i baixa 30 esglaons en el mateix tram. Quants esglaons té aquest tram d'escala?

Quant tardaria cadascuna d'elles a baixar-la si estigués espatllat el mecanisme?

Anomenem v la velocitat (en esglaons per segon) del mecanisme de l'escala.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Letícia: } 50 \text{ esg. en } 10 \text{ s} \rightarrow \text{nre. d'esglaons visibles} = 50 + 10v \\ \text{Eva: } 30 \text{ esg. en } 20 \text{ s} \rightarrow \text{nre. d'esglaons visibles} = 30 + 20v \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 50 + 10v = 30 + 20v \rightarrow 10v = 20 \rightarrow v = 2 \text{ esg./s}$$

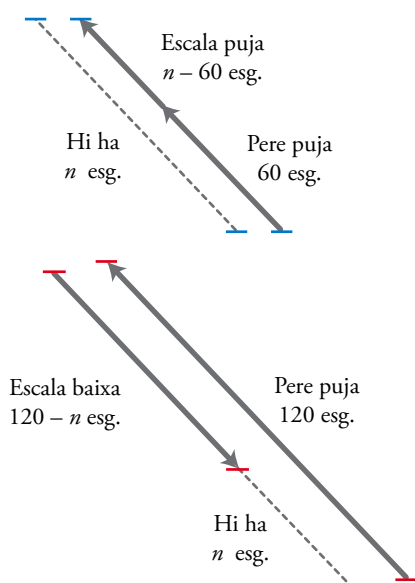
$$\text{nre. d'esglaons visibles} = 50 + 10 \cdot 2 = 70$$

$$\text{Velocitat de la Letícia} = \frac{50}{10} = 5 \text{ esg./s} \xrightarrow[\text{70 ESGLAONS}]{\text{TARDA EN BAIXAR}} \frac{70}{5} = 14 \text{ segons}$$

$$\text{Velocitat de l'Eva} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ esg./s} \xrightarrow[\text{70 ESGLAONS}]{\text{TARDA EN BAIXAR}} \frac{70}{1,5} = 46,7 \text{ segons}$$

- 22** En Pere puja per l'escala mecànica que va cap amunt i recorre un total de 60 esglaons. Però si puja per la de baixada, recorre 120 esglaons.

Quants esglaons visibles tenen aquests trams? (Se suposa que ambdós trams tenen la mateixa longitud i que les seves velocitats són iguals.)



$$\text{Velocitat del Pere} = a$$

$$\text{Velocitat de l'escala} = b$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{60}{a} = \frac{n-60}{b} \text{ i } \frac{b}{a} = \frac{n-60}{60} \\ \frac{120}{a} = \frac{120-n}{b} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{120-n}{120} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n-60}{60} = \frac{120-n}{120} \rightarrow 2(n-60) = 120-n \rightarrow$$

$$\rightarrow 3n = 120 + 120 \rightarrow n = 80$$

L'escala té 80 esglaons visibles.

- 23** L'Ester fa 20 passes travessant una cinta transportadora que es mou a velocitat constant. Anant a la mateixa velocitat però en sentit contrari a la cinta, n'ha de fer 60. Quantes passes haurà de fer si la cinta està aturada? Compara les velocitats de l'Ester i la cinta.

Anomenem x l'espai que recorre Ester en un pas i anomenem y l'espai que recorre la cinta en donar un pas l'Ester. La longitud total és l .

$$\text{Com que dona 20 passes per atravesar la cinta transportadora} \rightarrow 20x + 20y = l$$

$$\text{Com que ha de donar 60 passes en sentit contrari} \rightarrow 60x - 20y = l$$

$$\text{Per tant: } 20x + 20y = 60x - 20y \rightarrow 80y = 40x \rightarrow x = 2y$$

L'Ester recorre el doble de distància que la cinta transportadora en el mateix temps; per tant, la velocitat de l'Ester és el doble que la de la cinta.

$$20x + 20 \frac{x}{2} = l \rightarrow 30x = l$$

Ha de donar 30 passes si la cinta està aturada.

24 Resol aquest sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - \frac{5}{y+1} = 1 \\ \frac{5}{x-2} + \frac{2}{y+1} = 12 \end{cases}$$

Fem un canvi de variable anomenant: $\frac{1}{x-2} = X$, $\frac{1}{y+1} = Y$

Resolem el sistema que obtenim:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = 1 \\ 5X + 2Y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 2 \\ Y = 1 \end{cases}$$

Desfem el canvi:

$$\frac{1}{x-2} = 2 \rightarrow 1 = 2x - 4 \rightarrow 5 = 2x \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{y+1} = 1 \rightarrow 1 = y + 1 \rightarrow y = 0$$

Solució: $x = \frac{5}{2}$, $y = 0$

25 Resol l'equació següent, fent el canvi de variable que sigui més adequat:

$$(x^2 - 2x + 1)^2 - 2(x - 1)^2 - 15 = 0$$

L'equació l'expressem així:

$$[(x - 1)^2]^2 - 2(x - 1)^2 - 15 = 0$$

Fem el canvi de variable $z = (x - 1)^2$ i obtenim:

$$z^2 - 2z - 15 = 0 \rightarrow z_1 = -3, z_2 = 5$$

Desfem el canvi:

$$z_1 = -3 \rightarrow (x - 1)^2 = -3. \text{ Impossible}$$

$$z_2 = 5 \rightarrow (x - 1)^2 = 5 \rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{5} \rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{5}, x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$\text{Solucions: } x_1 = 1 + \sqrt{5}; x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

26 Tots els nombres capicues de 4 xifres tenen un divisor comú diferent d'1. Quin és?

Els nombres són de la forma: $a b b a$

Fem servir el criteri de divisibilitat de l'11:

$$(a + b) - (b + a) = 0 = 0 \cdot 11$$

Per tant, són múltiples d'11.

27 Observa:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 5^2 - 1$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 11^2 - 1$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360 = 19^2 - 1$$

És veritat que el producte de quatre nombres naturals consecutius és sempre un quadrat perfecte menys 1? Si és així, expressa aquest quadrat en funció dels factors.

** Observa que es tracta d'escollir una notació adequada per demostrar que el producte de quatre nombres naturals consecutius més 1 és un quadrat perfecte.*

Si m és el valor central dels quatre nombres, els nombres són:

$$\left(m - \frac{3}{2}\right), \left(m - \frac{1}{2}\right), \left(m + \frac{1}{2}\right), \left(m + \frac{3}{2}\right)$$

El producte és:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(m - \frac{3}{2}\right) \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{3}{2}\right) = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \left(m^2 - \frac{9}{4}\right) = \\
 &= m^4 - \frac{5}{2}m^2 + \frac{9}{16} = m^4 - \frac{5}{2}m^2 + \frac{9}{16} + 1 - 1 = \\
 &= m^4 - \frac{5}{2}m^2 + \frac{25}{16} - 1 = \left(m^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1
 \end{aligned}$$

P és sempre un quadrat perfecte menys 1.

Pàgina 16

28 Per 100 l·laminadures he pagat 5 euros. Les regalèssies gegants costen 50 cèntims; les gominoles, 10 cèntims, i les píndoles de regalèssia, 1 cèntim. Quantes l·laminadures de cada classe he comprat?

x = quantitat de regalèssies gegants

y = quantitat de gominoles

z = quantitat de píndoles de regalèssia

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 0,5x + 0,1y + 0,01z = 5 \end{array} \right\} \rightarrow x = 100 - y - z$$

Substituïnt en la 2a equació obtenim:

$$0,4y + 0,49z = 45 \rightarrow 40y + 49z = 4500 \rightarrow 49z = 4500 - 40y$$

Per tant, $4500 - 40y$ és múltiple de 49; aleshores, $y = 39$.

$$4500 - 40 \cdot 39 = 2940 = 49 \cdot 60$$

Per tant:

$$z = 60$$

$$x = 100 - 39 - 60 = 1$$

He comprat 1 regalèssia gegant, 39 gominoles i 60 píndoles de regalèssia.

29 L'Anna gasta 100 euros a comprar 40 productes en un basar. Si només venen productes a 1 €, 4 € i 12 €, quants productes de cada classe s'ha endut l'Anna?

x = quantitat de productes a 1 €

y = quantitat de productes a 4 €

z = quantitat de productes a 12 €

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ x + 4y + 12z = 100 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 40 - y - z \\ 40 - y - z + 4y + 12z = 100 \end{array} \rightarrow 3y + 11z = 60 \rightarrow$$

$$\rightarrow 11z = 60 - 3y \rightarrow 60 - 3y \text{ és múltiple de 11}$$

Si comprovem $y = 9 \rightarrow 60 - 3 \cdot 9 = 33$, veiem que és múltiple de 11.

Per tant:

$$y = 9$$

$$z = \frac{33}{11} = 3$$

$$x = 40 - 9 - 3 = 28$$

- 30** En Toni només té a la cartera bitllets de 3 pesos i a la botiga d'il·luminació únicament hi ha bitllets de 5 pesos. Com ho ha de fer per adquirir un llum de 19 pesos?

x = bitllets de 3 pesos

y = bitllets de 5 pesos

$$3x - 5y = 19 \rightarrow 3x = 19 + 5y \rightarrow 19 + 5y \text{ ha de ser múltiple de 3.}$$

Per a $y = 1$:

$$19 + 5 \cdot 1 = 24, \text{ que és múltiple de 3.}$$

Per tant:

$$x = \frac{19 + 5 \cdot 1}{3} = 8$$

Ha de donar 8 bitllets de 3 pesos i li tornaran 1 bitllet de 5 pesos.

- 31** La Mireia compra 10 paquets de llapis de colors: uns són de 5 unitats, uns altres de 10 unitats i uns altres de 25. Si en total té 90 llapis de colors, quants paquets de cada classe ha comprat?

x = paquets de 5 unitats

y = paquets de 10 unitats

z = paquets de 25 unitats

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 5x + 10y + 25z = 90 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 10 - y - z \\ 50 - 5y - 5z + 10y + 25z = 90 \rightarrow 5y + 20z = 40 \rightarrow \\ \rightarrow 40 - 20z \text{ ha de ser múltiple de 5, i ho és sempre.} \end{array}$$

z tan sols pot valer 0, 1 o 2 perquè y no sigui negatiu.

$$\text{Si } z = 0 \rightarrow y = 8, x = 2$$

$$\text{Si } z = 1 \rightarrow y = 4, x = 5$$

$$\text{Si } z = 2 \rightarrow y = 0, x = 8$$

- 32** A la butxaca tenim monedes de tres classes: de 5 cèntims, de 20 i de 50. En total, 12 monedes amb un valor de 2 euros i 85 cèntims (285 cèntims). Quantes monedes hi ha de cada classe?

x = monedes de 5 unitats

y = monedes de 20 unitats

z = monedes de 50 unitats

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 5x + 20y + 50z = 285 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 12 - y - z \\ 60 - 5y - 5z + 20y + 50z = 285 \rightarrow \\ \rightarrow 15y + 45z = 225 \rightarrow 225 - 15y \text{ ha de ser múltiple de 45.} \end{array}$$

Per a $y = 3$ comprovem que $225 - 15 \cdot 3 = 180$ és múltiple de 45.

Per tant:

$$y = 3$$

$$z = \frac{180}{45} = 4$$

$$x = 5$$

Les altres solucions són: $x_1 = 1, y_1 = 9, z_1 = 2; x_2 = 3, y_2 = 6, z_3 = 3$.

33 El producte de quatre nombres és igual que la seva suma, 6,75. Si un d'aquests és 1, quant valen els altres?

• Els nombres són: 1; x ; y ; $z = 5,75 - x - y$.

• $6,75 = 3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

(Observa que hi ha un 4 en el denominador).

• Per treballar amb nombres enters podem posar: $x' = 4x$, $y' = 4y$, $z' = 4z = 23 - x' - y'$

• El seu producte és $x' \cdot y' \cdot (23 - x' - y') = 24 \cdot 33$; a partir d'aquí és un problema diofàntic.

Suposem que els nombres són 1; x ; y ; $5,75 - x - y$.

Llavors:

$$1 \cdot x \cdot y \cdot (5,75 - x - y) = 6,75 \rightarrow x \cdot y \cdot (5,75 - x - y) = 6,75$$

Per altra banda, $6,75 = \frac{675}{100} = \frac{27}{4}$ i $5,75 = \frac{575}{100} = \frac{23}{4}$.

$$x \cdot y \cdot \left(\frac{23}{4} - x - y\right) = \frac{27}{4} \rightarrow x \cdot y \cdot (23 - 4x - 4y) = 27$$

Si anomenem $x' = 4x$ i $y' = 4y$ tenim la relació $x' \cdot y' \cdot (23 - x' - y') = 2^4 \cdot 3^3$ amb nombres naturals.

2 i 3 són divisors d'almenys un dels tres factors i $23 - x' - y'$ ha de ser un nombre natural. Per tant, provant, tenim que $x' = 6$, $y' = 9$ i $23 - x' - y' = 8$.

Llavors: $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $y = \frac{9}{4}$, $z = \frac{23}{4} - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = 2$.

El procés deductiu

Pàgina 19

- 1** Dedueix, pas a pas i justificadament, una fórmula per aïllar x en les equacions del tipus $x^2 - mx + n = 0$.

$$\begin{aligned}
 x^2 - mx + n &= 0 \\
 \Downarrow \\
 4x^2 - 4mx + 4n &= 0 \\
 \Downarrow \\
 (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot m + m^2 + 4n &= 0 \\
 \Downarrow \\
 (2x - m)^2 &= m^2 - 4n \\
 \Downarrow \\
 2x - m &= \pm \sqrt{m^2 - 4n} \\
 \Downarrow \\
 x &= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}
 \end{aligned}$$

- 2** Demuestra que si x_1 i x_2 són les dues arrels de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, llavors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Les dues arrels de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ són:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per tant:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\
 &= \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}
 \end{aligned}$$

- 3** Si $\bar{x}$ és la mitjana aritmètica de n nombres, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, prova que:

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$A = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} + \frac{\sum (-2x_i\bar{x})}{n} + \frac{\sum \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} + \frac{-2\bar{x} \sum x_i}{n} + \frac{\sum \bar{x}^2}{n}$$

Observem que:

$$\frac{k \sum x_i}{n} = k \frac{\sum x_i}{n} = k \bar{x}$$

$\sum k = nk$, perquè és el resultat de sumar n vegades el nombre k .

Per tant:

$$A = \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\bar{x}\bar{x} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

4 Observa les igualtats següents:

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

$$4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$$

...

a) Generalitza el resultat.

b) Verifica'n la validesa.

a) $n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2 = (n(n+1)+1)^2$

b) Desenvolupem el quadrat del segon membre:

$$(n(n+1)+1)^2 = (n(n+1))^2 + 1 + 2n(n+1)$$

Observant l'expressió veiem que seria suficient demostrar:

$$1 + 2n(n+1) = n^2 + (n+1)^2$$

Per a fer-ho desenvolupem el primer membre:

$$1 + 2n(n+1) = 2n^2 + 2n + 1 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2 + (n^2 + 2n + 1) = n^2 + (n+1)^2$$

que és allò que preteníem demostrar.

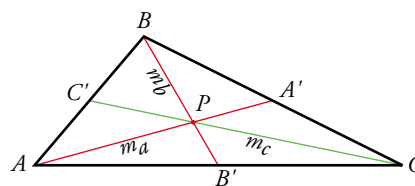
5 Demostra que les tres mitjanes d'un triangle es tallen en un punt.

La mitjana m_a talla m_b en un punt P tal que $\overline{PB} = 2\overline{PB'}$.

La mitjana m_c talla m_b en un punt Q tal que $\overline{QB} = 2\overline{QB'}$.

Per tant, P i Q són el mateix punt.

És a dir, les tres mitjanes es tallen en un punt.



6 Justifica que la suma dels angles interiors d'un triangle és sempre 180°.

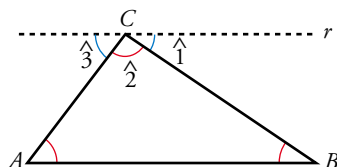
Tracem una recta que passa per C i és paral·lela a AB .

$\hat{1} = \hat{B}$ perquè són angles alterns interns (la recta CB talla un parell de paral·leles).

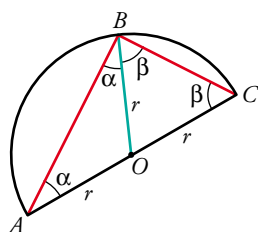
$\hat{3} = \hat{A}$ perquè són angles alterns interns (la recta AC talla un parell de paral·leles).

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$, evidentment.

Per tant, $\hat{C} + \hat{B} + \hat{A} = 180^\circ$.



7 Prova que un angle inscrit en una semicircumferència és necessàriament recte.

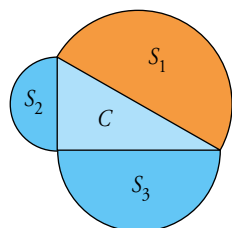


Els triangles AOB i BOC són isòsceles, perquè cada un d'ells té dos costats iguals a un radi de la circumferència. Cada un d'ells té un parell d'angles iguals.

Observem que l'angle $\hat{B}$ del triangle ABC mesura $\alpha + \beta$, el mateix que la suma dels altres dos.

Com que entre els tres sumen 180° , $\hat{B} = 90^\circ$.

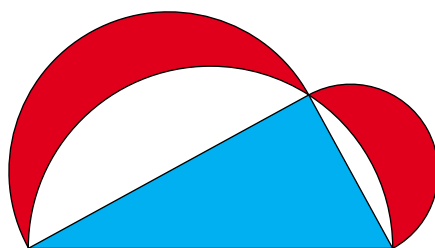
8 Demostra sobre aquesta figura que:



$$S_1 = S_2 + S_3$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\pi \cdot \left(\frac{l_1}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{(l_1)^2}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(l_1)^2}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_2^2 + l_3^2}{4} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{l_2^2}{4} + \frac{l_3^2}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_2^2}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_3^2}{4} = S_2 + S_3 \end{aligned}$$

9 Prova que la superfície pintada de vermell coincideix amb la blava:



S_1 = Àrea del semicercle corresponent a la hipotenusa.

S_2 = Àrea del semicercle corresponent al catet més gran.

S_3 = Àrea del semicercle corresponent al catet més petit.

Àrea en blanc = S_1 - Àrea del triangle

$$\begin{aligned} \text{Àrea en vermell} &= S_2 + S_3 - \text{Àrea en blanc} = S_2 + S_3 - (S_1 - \text{Àrea del triangle}) = \\ &= S_2 + S_3 - S_1 + \text{Àrea del triangle} = \end{aligned}$$

(i com que $S_1 = S_2 + S_3$)

$$= \text{Àrea del triangle} = \text{Àrea en blau}$$

10 En un triangle rectangle, a i b són els catets i c la hipotenusa. Anomena h l'altura.

Demostra que el triangle de costats h , $(c + h)$ i $(a + b)$ és rectangle.

La hipotenusa és $c + h$. Veiem que compleix el teorema de Pitàgores:

$$\text{Hipotenusa al quadrat: } (c + h)^2 = c^2 + 2ch + h^2$$

$$\text{Suma dels quadrats dels catets: } (a + b)^2 + h^2 = a^2 + 2ab + b^2 + h^2$$

Però $a^2 + b^2 = c^2$ i $ab = ch$ perquè tots dos són el doble de l'àrea del triangle original; per tant:

$$(a + b)^2 + h^2 = a^2 + 2ab + b^2 + h^2 = c^2 + 2ch + h^2 = (c + h)^2$$

El triangle de costats h , $(c + h)$ i $(a + b)$ és un triangle rectangle perquè verifica el teorema de Pitàgores.

Pàgina 20

11 Demostra: $\frac{m^2}{1+m^4} \leq \frac{1}{2}$

Si $m = 0$, la desigualtat es compleix, evidentment.

Si $m \neq 0$, podem invertir els dos membres, canviant el sentit de la desigualtat:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m^2}{1+m^4} \leq \frac{1}{2}, m \neq 0 \right) &\Leftrightarrow \frac{1+m^4}{m^2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1+m^4}{m^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1+m^4-2m^2}{m^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(m^2)^2 - 2m^2 + 1}{m^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(m^2 - 1)^2}{m^2} \geq 0 \end{aligned}$$

L'última desigualtat és certa (un quocient de quadrats és nul si ho és el numerador, o és positiu). Per tant, la primera desigualtat és certa, perquè són equivalents.

12 Prova: $\frac{m^2+3}{\sqrt{m^2+2}} > 2$

Com que tant el numerador com el denominador són positius, podem elevar-los al quadrat sense que es produeixin alteracions:

$$\begin{aligned} \frac{m^2+3}{\sqrt{m^2+2}} > 2 &\Leftrightarrow \frac{m^4+6m^2+9}{m^2+2} > 4 \Leftrightarrow \frac{m^4+6m^2+9}{m^2+2} - 4 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{m^4+6m^2+9-4m^2-8}{m^2+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{m^4+2m^2+1}{m^2+2} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(m^2+1)^2}{m^2+2} > 0, \text{ fet que és evident.} \end{aligned}$$

Per tant, es compleix la primera desigualtat.

Mètode de reducció a l'absurd

Pàgina 21

1 Demostra que si a i b són enters i es compleix que $a + a^2 + a^3 = b + b^2$, llavors a és parell.

$$a + a^2 + a^3 = b + b^2$$

Si b és parell $\rightarrow b^2$ és parell i $b + b^2$ és parell.

Si b és imparell $\rightarrow b^2$ és imparell i $b + b^2$ és parell.

Per tant $a + a^2 + a^3$ és parell.

Si a és imparell $\rightarrow a^2$ i a^3 són imparells $\rightarrow a + a^2 + a^3$ és imparell, fet que és impossible perquè ha de coincidir amb un nombre parell.

Per tant, a és parell.

2 Si dues rectes coplanàries (no coincidents) són perpendiculars a una tercera recta, aleshores són paral·leles.

Suposem r i s que són perpendiculars a t amb r i s no paral·leles. En aquest cas, r i s es tallen.

Sigui $P = r \cap s$.

Per altra banda, sigui $Q = s \cap t$, $R = r \cap t$.

Els angles del triangle PQR sumen $90^\circ + 90^\circ + \alpha > 180^\circ$, que és impossible; per tant, les rectes han de ser paral·leles.

3 a) Prova que si a i b són racionals i c és irracional, llavors $a + b \cdot c$ és irracional.

b) Demostra que $\sqrt{5}$ és irracional i que, per tant, $3 - 2\sqrt{5}$ també ho és.

a) Suposem que $a + b \cdot c = m$ és racional $\rightarrow b \cdot c = m - a \rightarrow c = \frac{m - a}{b}$

Però $\frac{m - a}{b}$ és racional en ser-ho a , b i m . Contradicció! $\rightarrow a + b \cdot c$ és irracional.

b) Suposem que $\sqrt{5}$ és racional:

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$$

Amb p i q sencers i la fracció irreductible:

$$q\sqrt{5} = p$$

Elevem al quadrat:

$$5q^2 = p^2 \rightarrow p^2 \text{ és múltiple de } 5 \rightarrow p \text{ és múltiple de } 5 \rightarrow p = 5k$$

$$5q^2 = (5k)^2 = 25k^2 \rightarrow q^2 = 5k^2$$

q és múltiple de 5, fet que contradiu que la fracció que havíem agafat fos irreductible.

Mètode d'inducció completa

Pàgina 22

1 Fes servir el mètode d'inducció completa per demostrar les igualtats següents:

a) $(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

b) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ és múltiple de 7.

c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $n \cdot (n^2 + 20)$ és múltiple de 48, si n és parell.

a) Per a $n = 1$, queda: $1 = 1 \rightarrow$ La igualtat és certa.

Suposem que és certa per a $n = k$; és a dir, que:

$$(1 + 2 + \dots + k)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3$$

Veiem si, en aquest cas, és certa per a $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (1 + 2 + \dots + k + (k + 1))^2 &= (1 + 2 + \dots + k)^2 + (k + 1)^2 + 2(1 + 2 + \dots + k)(k + 1) \stackrel{(*)}{=} \\ &= 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^2 + 2(k + 1)(1 + 2 + \dots + k) \stackrel{(**)}{=} \\ &= 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^2 + 2(k + 1) \left(\frac{(k + 1)k}{2} \right) = \\ &= 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^2 + (k + 1)^2 k \stackrel{(***)}{=} \\ &= 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3, \text{ com volíem demostrar.} \end{aligned}$$

(*) Fem servir la hipòtesi d'inducció per resoldre el quadrat.

(**) Hem fet servir $1 + 2 + \dots + k = \frac{(k + 1)k}{2}$, que és la suma de k termes d'una progressió aritmètica de $a_1 = 1$ i $d = 1$.

(***) En els dos últims sumands hem tret factor comú $(k + 1)^2$.

b) Veiem que és cert per a $n = 1$:

$$2^3 + 3^3 = 35 \text{ que és múltiple de 7}$$

Suposem que és cert per a n i ho demostrem per a $n + 1$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1+2} + 3^{2(n+1)+1} &= 2 \cdot 2^{n+2} + 3^2 3^{2n+1} = 2 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{2n+1} + 7 \cdot 3^{2n+1} = \\ &= 2(2^{n+2} + 3^{2n+1}) + 7 \cdot 3^{2n+1} \end{aligned}$$

Tant el primer sumand com el segon són múltiples de 7.

El primer és el que suposem en el mètode d'inducció.

Si els dos sumands són múltiples de 7, la seva suma també ho és; per tant, es verifica per a qualsevol nombre natural.

c) Ho farem, també, per inducció completa:

- Per a $n = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{PRIMER MEMBRE: } 1^3 = 1 \\ \text{SEGON MEMBRE: } \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1 \end{array} \right\} \text{Coincideixen}$$

La igualtat és certa per a $n = 1$.

- La suposem certa per a n . Ho serà per a $n + 1$?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1) \right] = \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4} \end{aligned}$$

I aquest és el segon membre de la igualtat, però canviant n per $n + 1$.

d) Veiem que és cert per a $n = 2$.

$$2 \cdot (2^2 + 20) = 48$$

Suposem que és cert per a n i provem-ho per a $n + 2$, on n és parell:

$$\begin{aligned} (n+2) \cdot [(n+2)^2 + 20] &= (n+2) \cdot (n^2 + 4n + 24) = n^3 + 6n^2 + 32n + 48 = \\ &= n \cdot (n^2 + 20) + 6n^2 + 12n + 48 = n \cdot (n^2 + 20) + 6n \cdot (n+2) + 48 \end{aligned}$$

En l'expressió anterior el primer i l'últim sumand són múltiples de 48.

Per altra banda, $6n \cdot (n+2)$ també ho és perquè, en ser n parell, n i $n+2$ són dos parells consecutius; consegüentment, un és múltiple de 2 i l'altre, de 4. Per tant, és múltiple de $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$.

Principi del colomar

Pàgina 23

- 1** En un institut de 450 estudiants n'hi ha almenys dos amb la mateixa data de naixement. **Demosta-ho.**

Apliquem el principi del colomar:

Hi ha 365 (o 366) dates possibles per a l'aniversari; si hi ha 450 persones, han de coincidir, almenys, dues d'elles.

- 2** Els *nombres secrets* de les targetes de crèdit consten de quatre dígit. Per exemple, 2704, 0012 i 9461 són possibles nombres. Demosta que al nostre país, amb seguretat, hi ha dues targetes de crèdit que tenen el mateix codi.

El nombre de targetes de crèdit existents és més gran que 10 000, que és el nombre de possibles *nombres secrets*. Aplicant el principi del colomar, amb seguretat, hi ha 2 targetes que tenen el mateix *nombre secret*.

- 3** Podries assegurar que a Catalunya hi ha, almenys, dues persones amb el mateix nombre de cabells? **Argumenta la resposta.**

El nombre de cabells al cap d'una persona no supera els 200 000; el nombre d'habitants de Catalunya, sí. Pel principi del colomar, hi haurà, almenys, dues persones amb el mateix nombre de cabells al cap.

- 4** Sigui ABC un triangle equilàter de costat 2 cm. Demosta que si es trien cinc punts de l'interior, llavors hi ha, com a mínim, dos d'aquests punts que disten menys d'1 cm.

Podríem dibuixar centenars de configuracions de cinc punts interiors i comprovaríem que sempre es verifica.

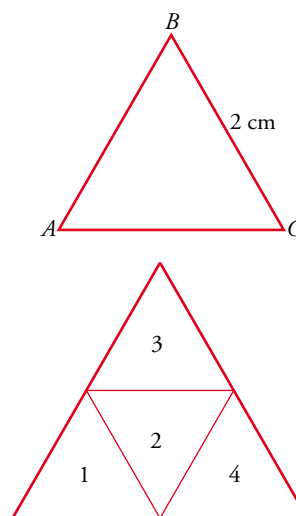
Però això no és suficient.

Per demostrar allò que se'ns demana, dividim el triangle en quatre triangles equilàters, tal com s'indica en la figura.

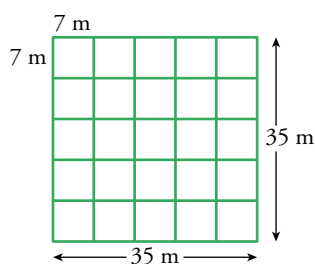
Els costats de cada triangle tenen 1 cm de costat.

Si escollim 5 punts qualssevol, necessàriament en un dels triangles petits hi haurà, almenys, dos dels punts. Per tant, la distància entre ells és més petita que 1 cm.

Com pot veure's, hem aplicat el principi del colomar (5 punts s'havien de col·locar en 4 triangles).



- 5** Introduïm 26 ovelles en un camp quadrat de 35 m de costat perquè hi pasturin. Demosta que sempre hi ha, almenys, 2 ovelles que estan a menys de 10 m l'una de l'altra.



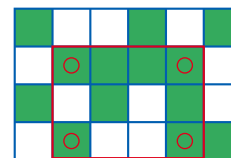
Dividim el quadrat de costat 35 m en 25 quadradets de 7 m de costat cadascun.

En haver-hi 26 ovelles, necessàriament han d'estar, almenys, dues, en un mateix quadradet. I la distància màxima dins del quadradet és la seva diagonal, que mesura:

$$\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} < 10 \text{ m}$$

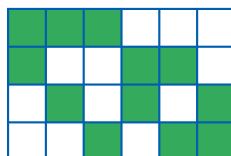
- 6** En la quadrícula 4×6 que apareix més avall hem acolorit alguns dels quadrats i d'altres els hem deixat en blanc.

Això es pot fer de moltes maneres. Busca'n una en la qual no es pugui trobar cap rectangle amb els quatre vèrtexs del mateix color (en la que hem dibuixat, per exemple, no ocorre això, com es veu en els quatre quadrats assenyalats en vermell).



No obstant això, si la quadrícula fos de 4×7 , llavors no seria possible trobar una configuració en la qual no hi hagués un rectangle amb els quatre vèrtexs del mateix color. Demostra-ho.

- Veiem una manera en la que no es pot trobar un rectangle amb els quatre vèrtexs del mateix color:



- Hi ha 6 maneres diferents d'acolorir dos quadrats en una columna de 4. Si la quadrícula fos de 4×7 , tindríem 7 columnes per a només 6 possibilitats; per tant, almenys una hauria de repetir-se.
- Si acolorim només un quadrat, tindríem 4 maneres diferents; i acolorir 3 quadrats és equivalent a acolorir-ne tan sols un.
- Si acolorim un nombre diferent de quadrats en cada columna, augmentem les possibilitats de coincidència.

Problemes per practicar

Pàgina 24

- 1** Al calaix del meu armari tinc 6 mitjons grisos i 8 de negres, tots desparellats. Una nit que s'ha fos el llum, necessito uns mitjons del mateix color, però no hi veig. Quants mitjons he d'agafar per estar absolutament segura que en tinc dos del mateix color?

He d'agafar 3 mitjons; si els 2 primers fossin de color diferent, el següent hauria de ser d'un color repetit.

- 2** D'una bossa que conté vint boles vermelles, 10 de verdes i 5 de negres, es van agafant boles, una a una. Quantes extraccions s'han de fer per tenir la seguretat d'haver tret quatre boles del mateix color?

Cal fer almenys 10 extraccions, perquè en el cas més desfavorable, ens surt cada vegada una bola de color diferent. Com que hi ha tres colors, en la novena extracció tinc tres boles de cada color i en la següent hi haurà un color que es repeteixi 4 vegades.

- 3** Enmig d'una selva hi ha dos pobles, que anomenarem V i M. Els habitants de V diuen sempre la veritat i els de M sempre menteixen. Com que són pobles pròxims, és molt freqüent trobar habitants de V a M i de M a V. Una exploradora perduda arriba a un dels pobles, però ignora quin és. Atura un transeünt i li pregunta:

— Vostè és d'aquí?

Per què amb la resposta que rebi sabrà, amb seguretat, si es troba a V o a M? Descriu el procés que has seguit per arribar a la solució, i justifica'n els passos.

Si contesta "sí" i és de V, com que diuen la veritat, es troba a V.

Si contesta "sí" i és de M, com que menteixen, es troba a V.

Si contesta "no" i és de V, com que diuen la veritat, es troba a M.

Si contesta "no" i és de M, com que menteixen, es troba a M.

Per tant, si responen "sí", es troba en V i si responen "no", es troba a M.

- 4** Sis robots dialoguen a la sala d'espera del psiquiatre. Estan afectats d'un mal estrany: només diuen mentides o només diuen veritats. Tots es coneixen perfectament. Parlen els sis, per torns, i afirmen:

— Aquí només n'hi ha un de veraç.

— Almenys n'hi ha un de veraç.

— Només n'hi ha dos de veraços.

— Almenys dos són veraços.

— Només n'hi ha tres de veraços.

— Almenys n'hi ha tres de veraços.

Quins són els veraços i quins els mentiders?

- Si el primer diu la veritat, el segon també la diu. Contradicció amb el fet que el primer digui la veritat. És a dir, el primer menteix.
- Si el tercer diu la veritat, el segon i el quart també la diuen. Contradicció amb el fet que el tercer digui la veritat.
- Si el cinquè diu la veritat, el segon, el quart i el sisè també la diuen. Contradicció amb el fet que el cinquè digui la veritat.

Per tant, com a màxim hi ha tres que diuen la veritat:

- Si n'hagués un, el primer diria la veritat. Contradicció perquè hem vist que menteix.
- Si n'haguessin dos, el tercer diria la veritat. Contradicció perquè hem vist que menteix.

Per la mateixa raó, no pot haver-hi tres que diguin la veritat.

Hem vist que tres menteixen i que no pot haver-hi ni només un, ni només dos, ni només tres que diguin la veritat. Per tant, tots menteixen.

5 Cinc esportistes comenten al seu entrenador el resultat de la darrera cursa:

CARME: Aquesta vegada he arribat davant de l'Aina.

AINA: La Tina ha arribat darrere de la Rosa.

TINA: La Rosa no ha guanyat.

ROSA: La Carme ha arribat quarta.

LLUÏSA: Avui feia un dia fantàstic per córrer.

Quin ha estat l'ordre d'arribada?

Lluïsa, Rosa, Tina, Carme, Aina.

6 Estic jugant al punyet amb sis amics i, valent-me dels meus fabulosos dots psicològics, he arribat a aquestes conclusions:

- Hi ha quatre jugadors amb dues monedes.
- L'Antoni duu les mateixes que la Beatriu, i el David, les mateixes que l'Elena.
- La Carme n'ha tret més que l'Elena, però menys que la Beatriu.

Quantes n'he de demanar jo, que soc el de la mà oberta, per encertar el joc?



Les possibilitats són:

1	2	3
Elena	Carme	Antoni
David		Beatriu

0	1	2
Elena	Carme	Antoni
David		Beatriu

Si la Carme té 2 monedes, llavors tan sols poden tenir 2 monedes ella, el 6è amic que juga i jo. No hi ha 4 persones amb 2 monedes.

Per tant, la Carme té 1 moneda, l'Antoni, la Beatriu, el 6è amic i jo tenim 2 monedes i l'Elena i el David no en tenen cap; he de demanar 9 monedes.

7 Al més gran de tres germans li toca la loteria, de manera que, generós, decideix doblar el capital dels dos menors. Després de fer-ho, s'adonen que el més ric és el mitjà, que, també generós, dobla el capital dels altres dos. Però ara resulta que el més ric és el menut, que, per no ser menys, dobla el capital dels dos grans. Per fi!, ara estan igualats, ja que cada un té 16 000 €. Quants diners tenia cada germà al principi?

Expressem les condicions en una taula:

MÉS GRAN → x	$x - y - z$	$2(x - y - z) = 2x - 2y - 2z$	$2(2x - 2y - 2z) = 4x - 4y - 4z$
MITJÀ → y	$2y$	$2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$	$2(3y - x - z) = 6y - 2x - 2z$
MÉS PETIT → z	$2z$	$4z$	$4z - (2x - 2y - 2z) - (3y - x - z) = 7z - y - x$

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 4y - 4z = 16\,000 \\ 6y - 2x - 2z = 16\,000 \\ 7z - y - x = 16\,000 \end{array} \right\} \rightarrow x = 26\,000, y = 14\,000, z = 8\,000$$

- 8 En una sala de ball hi ha un cert nombre de persones (nois i noies). Ballen per parelles noia-noi: en un cert moment els 6/11 dels nois ballen amb els 4/5 de les noies. Quina proporció de persones hi ha sense ballar en aquest moment? Quina proporció hi ha de nois i de noies?**

Expressem les condicions en una taula:

	TOTAL	BALLEN	NO BALLEN
NOIS	x	$\frac{6}{11}x$	$\frac{5}{11}x = \frac{5}{11} \cdot \frac{22}{15}y = \frac{2}{3}y$
NOIES	y	$\frac{4}{5}y$	$\frac{1}{5}y$
TOTAL	$x + y$	$\frac{6}{11}x + \frac{4}{5}y$	$\frac{5}{11} \cdot \frac{22}{15}y + \frac{1}{5}y = \frac{13}{15}y$

$$\frac{6}{11}x = \frac{4}{5}y \rightarrow x = \frac{11}{6} \cdot \frac{4}{5}y = \frac{22}{15}y$$

La proporció entre els que no ballen i el total és: $\frac{\frac{13}{15}y}{x + y} = \frac{\frac{13}{15}y}{\frac{22}{15}y + y} = \frac{13}{37}$

Per a la proporció entre nois i noies fem servir la mateixa igualtat anterior, però aïllem la proporció que ens interessa:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{11}} = \frac{22}{15}$$

La proporció entre nois i noies és de 22 nois per cada 15 noies.

Nois: $\frac{22}{37}$ del total. Noies: $\frac{15}{37}$ del total.

- 9 Disposem d'un nombre de llapis comprès entre 300 i 400, i d'un cert nombre de capsos. En cada capsa hi caben 7 llapis. En un cert moment hem omplert les 5/6 parts de les capsos amb les 3/5 parts dels llapis. Quantes capsos més necessitem perquè es puguin guardar tots els llapis?**

Expressem la condició de la manera següent:

x = nombre de caixes que tenim

y = nombre de llapis

Hem omplert $\frac{5}{6}x$ caixes i hem guardat $7 \cdot \frac{3}{5}x = \frac{3}{5}y$ llapis.

$$7 \cdot \frac{5}{6}x = \frac{3}{5}y \rightarrow \frac{35}{6}x = \frac{3}{5}y \rightarrow x = \frac{6}{35} \cdot \frac{3}{5}y = \frac{18}{175}y$$

Com que y és sencer i 18 és primer amb 175 = $5^2 \cdot 7$, y és múltiple de 175 entre 300 i 400; per tant:

$$y = 2 \cdot 175 = 350$$

El nombre de llapis guardats és: $\frac{3}{5}350 = 210$

El nombre de caixes és: $7 \cdot \frac{5}{6}x = 210 \rightarrow x = 36$

Hem omplert: $\frac{5}{6}x = \frac{5}{6} \cdot 36 = 30$

Ens queden per guardar $350 - 210 = 140$ llapis i tenim $36 - 30 = 6$ caixes buides. Per guardar

140 llapis calen $\frac{140}{7} = 20$ caixes, així que calen $20 - 6 = 14$ caixes més per guardar tots els llapis.

Pàgina 25

- 10** Una colla de segadors ha de segar dos prats. Un prat té el doble de superfície que l'altre. Durant mig dia treballen tots al gran. La resta del dia treballen la meitat al gran i l'altra meitat al petit. L'endemà, el que quedava del prat petit el sega un únic treballador en jornada completa.

TARDA	TARDA
MATÍ	

Quants segadors té la colla?

x = nombre de segadors

En el prat gran treballen $\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$ jornades i en el prat petit treballen $\frac{x}{4} + 1$ jornades.

Com que el prat gran és el doble que el petit:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 2\left(\frac{x}{4} + 1\right) \rightarrow x = 8$$

Hi ha 8 segadors a la colla.

- 11** Una guineu, que fa 2 salts més $\frac{1}{3}$ per segon, duu fets 30 salts més $\frac{3}{4}$ quan un gos, que fa 4 salts més $\frac{1}{2}$ per segon, es llança darrere d'aquella. En quant de temps atraparà el gos a la guineu, sabent que 3 salts del gos equivalen a 2 salts de la guineu?

L'avantatge que li porta la guineu al gos és:

$$\frac{30 + \frac{3}{4}}{2} \cdot 3 = \frac{369}{8} = 46 + \frac{1}{8} \text{ (expressat en salts del gos)}$$

La velocitat de la guineu, també expressada en salts de gos, és:

$$\frac{2 + \frac{1}{3}}{2} \cdot 3 = \frac{7}{2}$$

La velocitat a que se li apropa el gos és la diferència entre les velocitats expressades en salts de gos:

$$4 + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = 1$$

Per tant, tardarà en atrapar-lo:

$$\frac{46 + \frac{1}{8}}{1} = 46,125 \text{ segons}$$

- 12** L'Anna i en Miquel concerten una cita a les vuit del vespre. El rellotge de l'Anna està endarrerit 10 minuts, però ella creu que està avançat 5 minuts. El rellotge d'en Miquel està avançat 5 minuts, però ell creu que està endarrerit 10 minuts. A quina hora real arriba cada un a la cita?

L'Anna arribarà a un quart de nou, perquè pensa que quan el seu rellotge marca les 8:05 arriba a temps. En Miquel arribarà a tres quarts de vuit, perquè ho farà quan el seu rellotge marqui les 7:50.

- 13** Un venedor de teles guanya el 44 % sobre el preu de cost. Però un dia descobreix un metre defectuós que fa que els seus beneficis augmentin un 50 %. Quant fa en realitat el metre trampós?

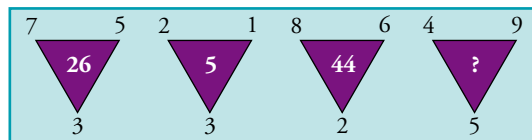
L'índex de variació inicial era 1,44.

En fer servir el metre defectuós, l'índex de variació és de 1,5.

L'índex de variació que es produeix pel metre defectuós és $\frac{1,5}{1,44} = 1,0417$.

Per cada metre es cobren 1,042 m.

El metre defectuós fa $\frac{1}{1,042} = 0,96$ m.

14 Quin és el nombre que falta en el darrer triangle?

El nombre central del darrer triangle és el producte dels dos més grans menys el quadrat del més petit:

$$9 \cdot 5 - 4^2 = 29$$

15 Troba les solucions del sistema següent:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{y^2+1} = -0,3 \\ \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = 0,9 \end{cases}$$

Sumant ambdues equacions:

$$\frac{3}{x^2+1} = 0,6 = \frac{6}{10} \rightarrow 5 = x^2 + 1 \rightarrow x = \pm 2$$

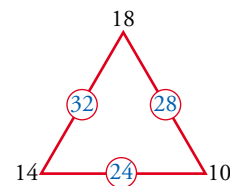
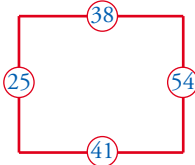
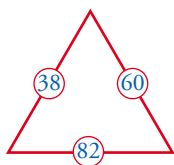
Substituint:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{y^2+1} = 0,9 = \frac{9}{10} \rightarrow \frac{1}{y^2+1} = \frac{9}{10} - \frac{2}{5} \rightarrow y^2 + 1 = 2 \rightarrow y = \pm 1$$

Solucions: $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ (les quatre combinacions són vàlides).

16 En aquest triangle, el nombre tancat en un cercle és la suma dels vèrtexs corresponents.

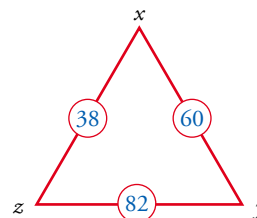
Seguint aquesta mateixa llei, quin és el valor dels vèrtexs en aquest altre triangle? I en aquest rectangle?



$$\left. \begin{aligned} x + y &= 60 \\ y + z &= 82 \\ x + z &= 38 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow y = 60 - x \\ 60 - x + z &= 82 \rightarrow -x + z = 22 \\ x + z &= 38 \end{aligned}$$

Sumant aquestes dues últimes:

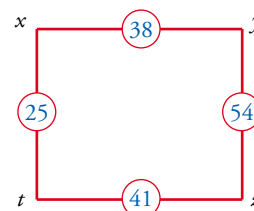
$$\left. \begin{aligned} 2z &= 60 \rightarrow z = 30 \\ x &= 38 - z = 38 - 30 = 8 \\ y &= 60 - x = 60 - 8 = 52 \end{aligned} \right\} x = 8, y = 52, z = 30$$



$$\left. \begin{aligned} x + y &= 38 \\ y + z &= 54 \\ z + t &= 41 \\ t + x &= 25 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &y = 38 - x \\ z &= 54 - y = 54 - 38 + x = 16 + x \\ z &= 41 - t \\ x &= 25 - t \end{aligned}$$

$$y = 38 - (25 - t) = 13 + t$$

$$z = 16 + x = 16 + 25 - t = 41 - t$$



Hi ha infinites solucions. Totes les de la forma $x = 25 - \lambda$; $y = 13 + \lambda$; $z = 41 - \lambda$; i $t = \lambda$, on λ és qualsevol nombre real.

17 Resol l'equació següent fent un canvi de variable adequat:

$$(x^2 - 6x + 9)^2 - 10(x - 3)^2 + 9 = 0$$

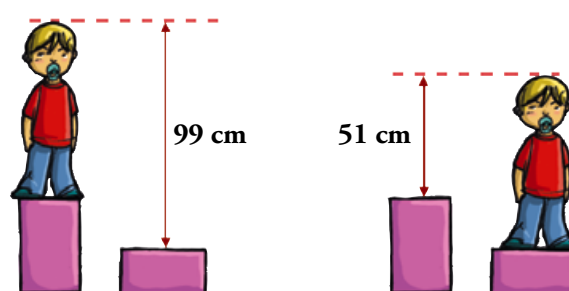
$$((x - 3)^2)^2 - 10(x - 3)^2 + 9 = 0$$

Anomenem $t = (x - 3)^2$.

$$t^2 - 10t + 9 = 0, \text{ les solucions de la qual són } t = 9 \text{ i } t = 1$$

$$\text{Si } t = 9 \rightarrow (x - 3)^2 = 9 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$$

$$\text{Si } t = 1 \rightarrow (x - 3)^2 = 1 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2$$

18 Calcula l'alçada del petit Pauet:

x = alçada del petit Pauet

y = altura del podi alt

z = altura del podi baix

$$\text{PRIMER DIBUIX} \rightarrow x + y = z + 99$$

$$\text{SEGON DIBUIX} \rightarrow x + z = y + 51$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 99 \\ x - y + z = 51 \end{array} \right\} \text{Sumant} \rightarrow 2x = 150 \rightarrow x = 75 \text{ cm}$$

19 En una classe de ball hi ha 20 persones. Ballen per parelles noi-noia. L'Anna balla amb 7, la Llúcia amb 8, la Sònia amb 9, ... i la Pepa amb tots. Quants nois i quantes noies hi ha?

Com a mínim hi ha 10 nois; en aquest cas, hi hauria 4 noies (l'Anna, la Llúcia, la Sònia i la Pepa), però llavors $10 + 4 = 14$, i no pot ser perquè hi ha 20 persones.

A partir de aquí:

Si hi ha 11 nois, hauria d'haver-hi 5 noies (les de l'enunciat més la que balla amb 10).

$$11 + 5 = 16$$

$$12 + 6 = 18$$

Seguint aquest raonament, (dues vegades més: $12 + 6 = 18$, $13 + 7 = 20$) arribem a la conclusió de que ha d'haver-hi 13 nois i 7 noies.

20 Un pastor va repartir entre els seus fills un ramat d'ovelles.

- El més gran es va endur una ovella més $\frac{1}{7}$ de les restants.
- Al segon li van correspondre dues ovelles més $\frac{1}{7}$ de les restants.
- El tercer va rebre tres ovelles més $\frac{1}{7}$ de les que quedaven.
- I així successivament fins a arribar al més petit.

D'aquesta manera, tots van rebre la mateixa herència i no va sobrar cap ovella. Quants germans eren? Quantes ovelles hi havia al ramat?

Anomenem x el nombre d'ovelles del ramat.

El primer fill rep $1 + \frac{x-1}{7} = \frac{x+6}{7}$ ovelles.

El segon fill rep $2 + \frac{x - \frac{x+6}{7} - 2}{7} = \frac{6x+78}{49}$ ovelles.

Com que tots els germans reben el mateix nombre d'ovelles:

$$\frac{x+6}{7} = \frac{6x+78}{49} \rightarrow x = 36$$

És a dir, es van repartir 36 ovelles.

Cadascun dels germans va rebre $\frac{36+6}{7} = 6$ ovelles i, en total, hi havia $\frac{36}{6} = 6$ germans.

21 La Virgínia compra 17 capses de llapis de colors: unes són de 12 unitats, unes altres de 8 unitats i unes altres de 5. Si en total té 121 llapis de colors, quantes capses de cada classe va comprar?

x = caixes de 12 unitats

y = caixes de 8 unitats

z = caixes de 5 unitats

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 17 \\ 12x + 8y + 5z = 121 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 17 - y - z \\ 12 \cdot (17 - y - z) + 8y + 5z = 204 - 7z - 4y \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow 204 - 7z - 4y = 121 \rightarrow 4y + 7z = 83 \rightarrow z = \frac{83 - 4y}{7}$$

$83 - 4y$ ha de ser múltiple de 7.

y	1	2	3	4	5
$83 - 4y$	79	75	71	67	63

Per tant $y = 5$ perquè l'altra opció vàlida, $y = 12$, ens dona com a solució $z = 5$ i $x = 0$, impossible.

Així, $y = 5$, $z = 9$ i $x = 3$.

Ha comprat 3 caixes de 12 llapis, 5 caixes de 8 llapis i 9 caixes de 5 llapis.

- 22** En un butxaca tenim monedes de tres classes: de 5, de 20 i de 50 cèntims. En total, 20 monedes amb un valor de 4 euros i 15 cèntims (415 cèntims). Quantes monedes hi ha de cada classe?

x = monedes de 5 cèntims

y = monedes de 20 cèntims

z = monedes de 50 cèntims

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 5x + 20y + 50z = 415 \end{array} \right\} \rightarrow x = 20 - y - z$$

$$\rightarrow 5 \cdot (20 - y - z) + 20y + 50z = 15y + 45z + 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 15y + 45z + 100 = 415 \rightarrow$$

$$\rightarrow 15y + 45z = 315 \rightarrow$$

$$\rightarrow y + 3z = 21 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 21 - 3z$$

Les solucions possibles són:

z	1	2	3	4	5	6
$y = 21 - 3z$	18	15	12	9	6	3
x	1	3	5	7	9	11

- 23** En un viatge dos turistes volen comprar pernils i formatges. El conductor de l'autobús els demana que les seves compres no excedeixin de 40 kg cada una. Cada turista aconsegueix comprar exactament 40 kg. Entre tots dos duen 5 pernils, tots del mateix pes, i 5 formatges, també d'igual pes. El primer ha comprat el triple de pernils que de formatges, i el segon, el doble de formatges que de pernils. Quant pesa cada perril i cada formatge?

x = pes d'un perril

y = pes d'un formatge

z = pernils del 1er turista

$\frac{z}{3}$ = formatges del 1er turista

$5 - z$ = pernils del 2n turista

$5 - \frac{z}{3}$ = formatges del 2n turista

$$5 - \frac{z}{3} = 2(5 - z) \rightarrow z = 3$$

El primer turista porta 3 pernils i 1 formatge. El segon turista porta 2 pernils i 4 formatges.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 40 \\ 2x + 4y = 40 \end{array} \right\} \rightarrow x = 12, y = 4$$

Cada perril pesa 12 kg i cada formatge, 4 kg.

Pàgina 26

24 Dues grangeres han venut les seves gallines al mercat, i han obtingut les dues la mateixa quantitat de diners.

— Si jo hagués venut les meves —diu la primera— al preu que tu has posat les teves, n'hauria obtingut 100 escuts.

— Si jo hagués posat el mateix preu que tu, només hauria obtingut 36 escuts —diu la segona.

Quantes gallines va vendre cadascuna si en total no van arribar a la dotzena?

x = gallines de la 1a

y = gallines de la 2a

z = preu de la 1a

Diners de totes dues: $x \cdot z$

La segona té un preu de $\frac{x \cdot z}{y}$.

Si jo hagués venut les meves —diu la primera— al preu que tu has posat les teves, n'hauria obtingut 100 escuts:

$$x \cdot \frac{x \cdot z}{y} = \frac{x^2 z}{y} = 100 \rightarrow x = \sqrt{100 \frac{y}{z}} = 10 \sqrt{\frac{y}{z}} \text{ que ha de ser un nombre sencer.}$$

Si jo hagués posat el mateix preu que tu, només hauria obtingut 36 escuts —diu la segona:

$$z \cdot y = 36 \rightarrow z = \frac{36}{y} \rightarrow y \text{ és un divisor de 36 més petit que 12.}$$

Els divisors de 36 més petits que 12 són: 1, 2, 3, 4, 6, 9.

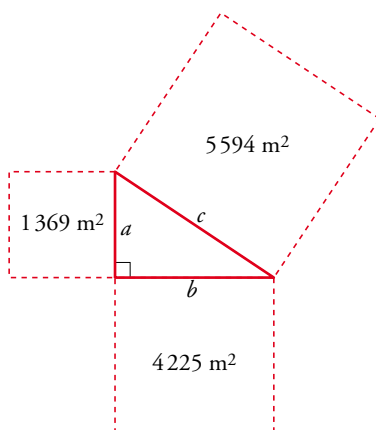
NRE. DE GALLINES DE LA 2A	y	1	2	3	4	6	9
PREU DE LA 1A	z	36	18	12	9	6	4
$10 \cdot \sqrt{y/z}$ ENTER	$x = 10 \sqrt{\frac{y}{z}}$	no enter	no enter	5 enter	no enter	10 enter	15 enter

La solució $y = 9$ ens torna $x = 15$, que és massa alt. Així que només hi ha dues solucions:

- La 1a va vendre 10 gallines a 6 escuts cada una i la 2a va vendre 6 gallines a 10 escuts cada una.
- La 1a va vendre 5 gallines a 12 escuts cada una i la 2a va vendre 3 gallines a 20 escuts cada una.

25 Un granger té un camp triangular envoltat de tres camps quadrats de manera que cada un d'aquests té un costat comú amb el triangle. Les superfícies dels camps quadrats són $4\,225 \text{ m}^2$, $1\,369 \text{ m}^2$ i $5\,594 \text{ m}^2$. Quina superfície té el camp triangular?

Fem un dibuix:



Observem que:

$$5\,594 = 1\,369 + 4\,225$$

És a dir, que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Per tant, el triangle és rectangle. La seva àrea serà:

$$\begin{aligned} A &= \frac{b \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{4\,225} \cdot \sqrt{1\,369}}{2} = \\ &= \frac{65 \cdot 37}{2} = 1\,202,5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

26 Les àrees de tres de les cares d'un ortoedre són 35 cm^2 , 60 cm^2 i 84 cm^2 .

a) Quin volum té?

b) Quina longitud té la diagonal?

$$\left. \begin{array}{l} xy = 35 \\ xz = 60 \\ yz = 84 \end{array} \right\}$$

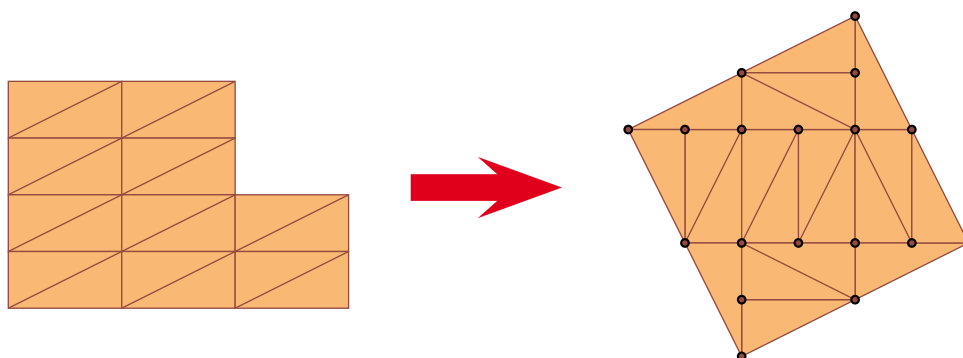
Possibles solucions: $x_1 = -5$, $y_1 = -7$, $z_1 = -12$; $x_2 = 5$, $y_2 = 7$, $z_2 = 12$

Com que la mesura dels costats no pot ser negativa, la solució és: $x = 5$, $y = 7$, $z = 12$.

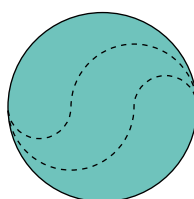
a) $V = 5 \cdot 7 \cdot 12 = 420 \text{ cm}^3$

b) $d = \sqrt{25 + 49 + 144} = \sqrt{218} \text{ cm}$

27 Imagina que talles 20 triangles rectangles iguals amb catets de longituds 2 cm i 1 cm. El problema consisteix a posar-los els uns al costat dels altres, de manera que entre tots formin un quadrat. La cosa no és tant fàcil com sembla.



28 Tres amics decideixen compartir una pizza. Un d'ells, un expert geòmetra, la fa trossos seguint el procediment de la figura després d'haver dividit el diàmetre en tres parts iguals. És equitatiu el repartiment? Justifica-ho.



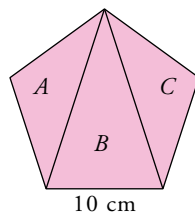
El tros de sobre i el de sota tenen la mateixa superfície $\rightarrow S_1 = S_3$

S = superfície del cercle. Suposem que el radi del cercle és 1 $\rightarrow S = \pi$

$$S_1 = S_3 = \frac{\pi}{2} - \pi \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^2}{2} + \pi \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^2}{2} = \frac{1}{3}\pi \rightarrow S_2 = \frac{1}{3}\pi$$

Per tant, les tres superfícies són iguals i cadascuna és un terç de la superfície total del cercle.

- 29** Calcula l'àrea de cadascun dels tres triangles en què s'ha dividit un pentàgon regular de 10 cm de costat.



Calculem el radi del pentàgon:

$$10^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 72^\circ \rightarrow 100 = 2r^2(1 - \cos 72^\circ) \rightarrow r = \sqrt{\frac{100}{2(1 - \cos \frac{2\pi}{5})}} = 8,51 \text{ cm}$$

L'altura del triangle central és:

$$h = r + \sqrt{8,51^2 - 25} = 8,51 + 6,8862 = 15,396 \text{ cm}$$

Àrea del triangle central:

$$\frac{10 \cdot 15,396}{2} = 76,98 \text{ cm}^2$$

Àrea del pentàgon:

$$5 \cdot \frac{6,8862 \cdot 10}{2} = 172,16 \text{ cm}^2$$

Àrea de cada un dels triangles laterals:

$$\frac{172,16 - 76,98}{2} = 47,59 \text{ cm}^2$$

- 30** En un quadrat de costat 4 cm s'inscriu un cercle. Després, en el cercle s'inscriu un quadrat, i en aquest, un altre cercle, i així successivament i indefinidament.

Calcula l'àrea de la zona ombrejada i la de la zona en blanc.

Calculem l'àrea que hi ha ombrejada entre un quadrat de costat l i el cercle inscrit en ell:

$$A = l^2 - \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right)$$

Calculem el costat de cada quadrat en funció del anterior:

$$2l_1^2 = l^2 \rightarrow l_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Per tant:

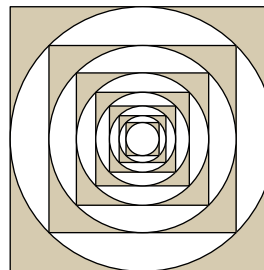
$$A_1 = \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) = l^2 \frac{1}{2} \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right)$$

i així successivament.

Per tant:

$$\begin{aligned} \text{ÀREA OMBREJADA} &= l^2 \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) + l^2 \frac{1}{2} \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) + l^2 \frac{1}{4} \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) + \dots = \\ &= l^2 \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = l^2 \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2l^2 \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) = \\ &= 2 \cdot 16 \left(1 - \pi \frac{1}{4}\right) = 32 - 8\pi = 32 - 25,133 = 6,867 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

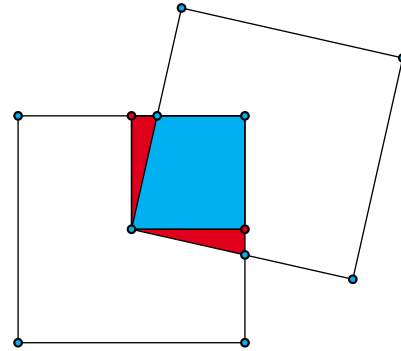
$$\text{ÀREA BLANCA} = 16 - 6,867 = 9,133 \text{ cm}^2$$



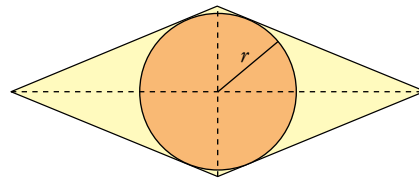
- 31** Dos quadrats iguals en el pla es mouen de manera que un dels vèrtexs d'un és el centre de l'altre quadrat. Per a quina posició l'àrea de la intersecció dels quadrats és màxima?

L'àrea de la intersecció és sempre constant i és la quarta part de l'àrea de cada quadrat.

En girar el quadrat, les àrees de les zones vermelles són iguals; per tant, l'àrea de la intersecció és sempre la mateixa.



- 32** Un rombe té una superfície de 120 cm^2 i el quocient entre les seves diagonals és $2,4$. Calcula l'àrea del cercle inscrit.



Superfície del rombe:

$$120 \text{ cm}^2 = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{2,4d \cdot d}{2} = d^2 \cdot 1,2 \rightarrow d = \sqrt{\frac{120}{1,2}} = 10 \text{ cm} \rightarrow D = 24 \text{ cm}$$

Costat del rombe:

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}$$

Àrea de cada triangle:

$$\frac{120}{4} = 30 \text{ cm}^2$$

Per altra banda, l'àrea de cada triangle és: $\frac{l \cdot r}{2} = \frac{13r}{2}$

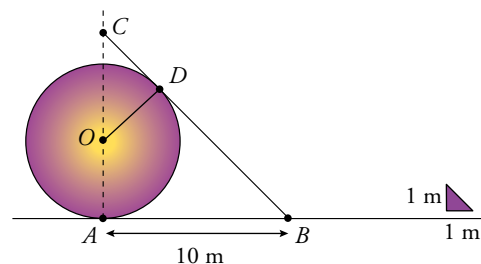
Per tant:

$$\frac{13r}{2} = 30 \rightarrow r = \frac{60}{13}$$

Àrea del cercle:

$$\pi \left(\frac{60}{13} \right)^2 = \pi \frac{3600}{169} = 66,92 \text{ cm}^2$$

- 33** Una esfera recolzada a terra projecta una ombra que arriba fins a 10 m del punt on l'esfera toca el terra. En aquest moment, un pal vertical d'1 m d'alt produeix una ombra d'1 m. Calcula el radi de l'esfera.



El triangle ABC és semblant al generat pel pal perquè té costats paral·lels.

Calculem $AC = 10 \text{ m}$ amb la semblança.

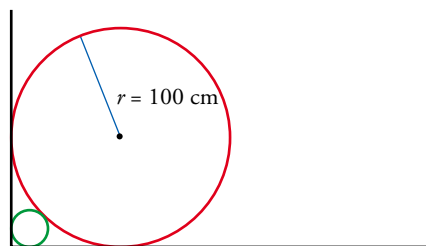
$$BC = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

Els triangles ABC i ODC són semblants perquè són rectangles i tenen un angle comú.

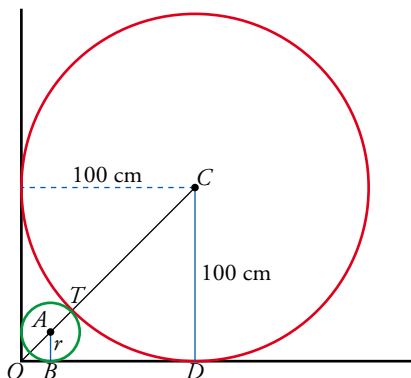
$$\begin{aligned} \frac{OD}{AB} &= \frac{OC}{BC} \rightarrow \frac{r}{10} = \frac{10-r}{10\sqrt{2}} \rightarrow 100 - 10r = 10\sqrt{2}r \rightarrow r(10\sqrt{2} + 10) = 100 \rightarrow \\ &\rightarrow r = \frac{100}{10\sqrt{2} + 10} = 4,14 \text{ cm} \end{aligned}$$

- 34** Una pilota de platja enorme, de 100 cm de radi, està recolzada sobre una paret que forma un angle recte amb el terra.

Quin és el radi de l'esfera més gran que pot situar-se entre la paret, el terra i la pilota de platja?



Fem un dibuix:



$$\overline{TC} = 100 \text{ cm}; \overline{CD} = 100 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = r; \overline{AT} = r; \overline{OB} = r$$

$$\overline{OC} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\overline{OA} = r \cdot \sqrt{2}$$

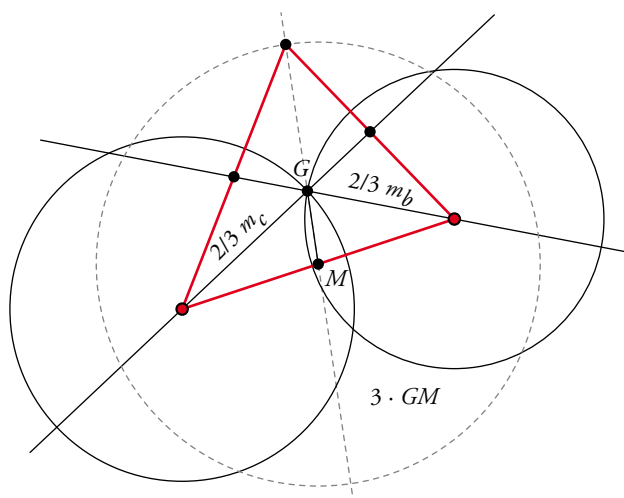
Per tant, com que: $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AT} + \overline{TC}$ tenim que:

$$100\sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2} + r + 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \frac{100(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)} = 100(3 - 2\sqrt{2}) \approx 17,16 \text{ cm}$$

Pàgina 27

- 35** Amb regle, compàs i cartabó, construeix un triangle del qual t'han donat la longitud del costat a i les de les dues mitjanes m_b i m_c que parteixen dels seus extrems.



- 36** a) Explica per què si escollim sis nombres naturals entre 1 i 10, amb seguretat, dos d'aquests sumaran 11.

b) Inventa un problema similar amb nombres naturals del 55 al 111 i resol-lo.

a) Les parelles que sumen 11 són: 1 i 10, 2 i 9, 3 i 8, 4 i 7, 5 i 6 (hi ha 5 parelles).

Si triem 6 nombres, obligatòriament hi haurà 2 nombres d'una de les parelles; per tant, hi haurà dos que sumin 11.

b) Si triem 29 nombres naturals qualssevol entre 55 i 111, amb seguretat, dos d'ells sumaran 166.

Hi ha 28 parelles que sumen 166 amb nombres compresos entre 55 i 111. Si triem 29 nombres, obligatòriament hi haurà 2 nombres d'una de les parelles; per tant, hi haurà dos que sumin 166.

37 El resultat de multiplicar $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50$ és un nombre enorme.

a) Quin lloc hi ocupa el primer dígit diferent de zero si comencem a comptar des de les unitats?

b) Quin és aquest dígit?

a) Comptem el nombre de vegades que apareix el factor 5 (el factor 2 apareixerà més vegades):

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{10} & + & \underbrace{2} = 12 \text{ vegades} \\ 5 \cdot 1 = 5 & & 5^2 \cdot 1 = 25 \\ 5 \cdot 2 = 10 & & 5^2 \cdot 2 = 50 \\ 5 \cdot 3 = 15 & & \\ \vdots & & \\ 5 \cdot 10 = 50 & & \end{array}$$

Per tant, el nombre donat acaba en 12 zeros; el primer dígit diferent de zero començant des de les unitats és el que ocupa el lloc número 13.

b) Per a saber-ho, s'ha de dividir $50!$ entre els 12 zeros, 10^{12} , i observar les unitats: el dígit és 2.

38 Indica quin és el darrer dígit (xifra de les unitats) de cada un d'aquests nombres:

a) 284^{559}

b) 328^{100}

c) 153^{153}

a) $4^1 = 4$ $4^2 = 16$ $4^3 = 64$

284^{559} acaba en 4 perquè 559 és imparell.

b) $8^1 = 8$ $8^2 = 64$ $8^3 = 512$ $8^4 = 4096$ $8^5 = 32768$

Es repeteix l'últim dígit cada 4 potències: 100 és múltiple de 4 $\rightarrow 328^{100}$ acaba en 6.

c) $3^1 = 3$ $3^2 = 9$ $3^3 = 27$ $3^4 = 81$ $3^5 = 243$

Es repeteix l'últim dígit cada 4 potències: 153 entre 4 té residu 1 $\rightarrow 153^{153}$ acaba en 3.

39 El nombre $2^{48} - 1$ és divisible per dos nombres compresos entre 60 i 70. Quins són aquests nombres?

Fent servir la propietat $a^{2n} - 1 = (a^n + 1)(a^n - 1)$, tenim que:

$$\begin{aligned} 2^{48} - 1 &= (2^{24} + 1) \cdot (2^{24} - 1) = (2^{24} + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{12} - 1) = \\ &= (2^{24} + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^6 + 1) \cdot (2^6 - 1) = (2^{24} + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot 63 \cdot 65 \end{aligned}$$

Per tant, els nombres buscats són 63 i 65.

40 El 1856 es va publicar un llibre (grossíssim) que contenia *els quadrats dels nombres des de l'u fins als mil milions*. Per a què? Per multiplicar! Et toca a tu esbrinar i explicar com. Per a això, relaciona el producte de dos nombres $m \cdot n$ amb la diferència dels quadrats de $m + n$ i $m - n$. Explica com es faria servir el llibre dels quadrats per fer el producte de dos nombres molt grans (per exemple, $57839 \cdot 8756$) per mitjà d'operacions més senzilles.

$$(m + n)^2 - (m - n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = 4mn \rightarrow mn = \frac{(m + n)^2 - (m - n)^2}{4}$$

Les potències $(m + n)^2$ i $(m - n)^2$ es miren en «el llibre dels quadrats».

Per exemple:

$$\begin{aligned} 57839 \cdot 8756 &= \frac{(57839 + 8756)^2 - (57839 - 8756)^2}{4} = \frac{66595^2 - 49083^2}{4} = \\ &= \frac{4438894025 - 240914089}{4} = 506438284 \end{aligned}$$

41 Què és més gran, $\log_3 108$ o $\log_5 375$?

* Descompon els nombres en factors.

$$108 = 2^2 \cdot 3^3 \rightarrow \log_3 108 = 3 + \log_3 4$$

$$375 = 3 \cdot 5^3 \rightarrow \log_5 375 = 3 + \log_5 3$$

$$\log_3 4 > 1 \text{ per ser } 4 > 3 \text{ i } \log_5 3 < 1 \text{ per ser } 3 < 5$$

Per tant, $\log_3 108 > \log_5 375$.**42** El nombre següent és enter. Quin és?

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

Elevem al quadrat:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}\right)^2 &= (-40\sqrt{2}+57) + (40\sqrt{2}+57) - 2\sqrt{57^2 - 1600 \cdot 2} = \\ &= 2 \cdot 57 - 2 \cdot 7 = 100 = 10^2 \end{aligned}$$

Per tant:

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} = -10$$

perquè el 2n radicand és més gran que el 1r.

Demostracions**43** Demostra que:a) Si m és imparell, llavors $m^2 + 1$ no és múltiple de 4.b) Si l, m, n són enters consecutius, llavors el resultat de $l^2 + m^2 + n^2$ no es múltiple de 24.a) $m = 2n + 1$ amb n sencer.

$$m^2 + 1 = (2n + 1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2$$

que no és múltiple de 4 perquè 2 no ho és.

b) $l^2 + m^2 + n^2 = (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = 3m^2 + 2$

que no és múltiple de 3; per tant, no és múltiple de 24.

44 Demostra que el nombre 365 és l'únic nombre natural que és suma dels quadrats de tres nombres consecutius i, a la vegada, suma dels quadrats dels dos següents.

$$365 = x^2 + (x-1)^2 + (x+1)^2 \rightarrow x = 11$$

L'equació té solució única en el conjunt dels nombres naturals.

$$365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$$

$$365 = x^2 + (x-1)^2 \rightarrow x = 13$$

L'equació té solució única en el conjunt dels nombres naturals.

$$365 = 13^2 + 14^2$$

45 a) Demostra que hi ha dos nombres primers consecutius la diferència dels quals és més gran que 1000.b) Demostra que, per molt gran que sigui m , hi ha dos nombres primers consecutius amb una diferència més gran que m . (És a dir, prova que hi ha m nombres compostos consecutius.)

a) Els nombres:

$1001! + 2, 1001! + 3, 1001! + 4, \dots, 1001! + 1001$ són sencers consecutius i tots són compostos.

Entre el primer més gran anterior a $1001!$ i el primer més petit posterior a $1001! + 1001$ hi ha una diferència més gran que 1000.

b) Agafem el primer més gran anterior a $(m+1)!$ i el primer més petit posterior a $(m+1)! + m + 1$.Entre ells hi ha una diferència més gran que m i hi ha m nombres consecutius compostos.

46 És veritat que sempre que $A, B, C, D > 0$ es verifica la desigualtat següent?

$$(1 + A)^2 \cdot (1 + B)^2 \cdot (1 + C)^2 \cdot (1 + D)^2 \geq 2^4 ABCD$$

$$\left. \begin{array}{l} (1 + C)^2 \cdot (1 + D)^2 > 2C \cdot 2D \geq 4CD \\ (1 + A)^2 \cdot (1 + B)^2 > 2A \cdot 2B \geq 4AB \end{array} \right\} \rightarrow (1 + A)^2 \cdot (1 + B)^2 \cdot (1 + C)^2 \cdot (1 + D)^2 \geq 4CD \cdot 4AB = 2^4 ABCD$$

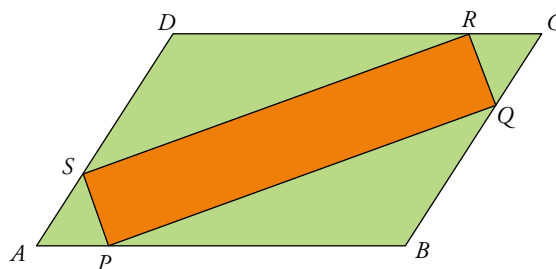
Per tant, la desigualtat és certa.

47 Si a i b són dos enters consecutius, llavors: $a^2 + b^2 + (ab)^2$ resulta ser sempre un quadrat perfecte. Per què?

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + (ab)^2 &= a^2 + (a + 1)^2 + a^2(a + 1)^2 = a^2 + (a + 1)^2 + a^4 + 2a^3 + a^2 = \\ &= a^4 + (a + 1)^2 + a^2 + 2a^3 + a^2 = a^4 + (a + 1)^2 + 2a^2 + 2a^3 = \\ &= a^4 + (a + 1)^2 + 2a^2(a + 1) = (a^2 + a + 1)^2 \end{aligned}$$

■ Demostracions geomètriques

48 En el paral·lelogram $ABCD$ següent, $\overline{AP} = \overline{CR}$, $\overline{BQ} = \overline{DS}$. Demostra que $PQRS$ també és un paral·lelogram.

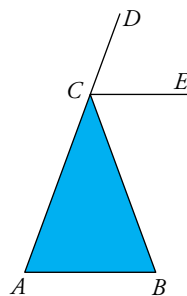


Els triangles APS i CQR són iguals perquè tenen un angle igual i els costats corresponents iguals; per tant, els costats RQ i SP són paral·lels.

Pel mateix raonament, RS i QP són paral·lels.

Per tant, $PQRS$ és un paral·lelogram.

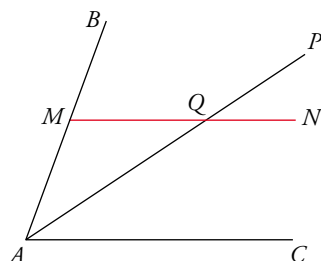
49 Demostra que en tot triangle isòsceles, la bisectriu de l'angle extern oposat als angles iguals és paral·lela al costat desigual.



L'angle extern mesura igual que la suma dels altres dos: $\widehat{CAB} + \widehat{CBA} = 2\widehat{CAB}$.

La bisectriu de l'angle extern forma amb la prolongació del costat AC la meitat de l'angle extern, és a dir, la mesura de $\widehat{CAB}$. Com que un costat és comú, l'altre costat ha de ser paral·lel a AB .

- 50** Demostra que si per un punt qualsevol de la bisectriu d'un angle es traça una paral·lela a un dels costats de l'angle, el triangle format així és isòsceles.



$\widehat{PQN} = \widehat{PAC}$ perquè les rectes MN i AC són paral·leles.

$\widehat{PQN} = \widehat{AQM}$ perquè són oposats pel vèrtex.

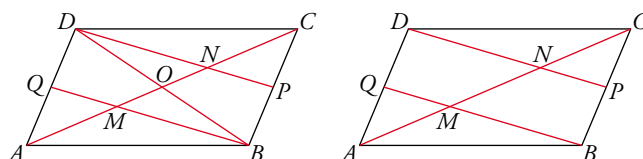
$\widehat{PAB} = \widehat{PAC}$ perquè AP és la bisectriu.

Per tant, $\widehat{PAB} = \widehat{AQM}$.

El triangle AQM és isòsceles perquè té dos angles iguals.

Pàgina 28

- 51** En un paral·lelogram $ABCD$, Q és el punt mitjà de AD i P el punt mitjà de CB . Demostra que BQ i DP trisequen AC .



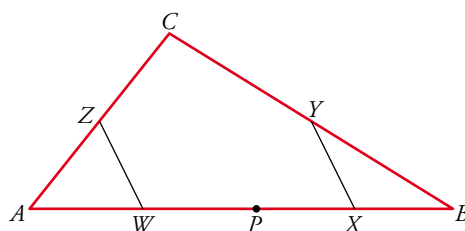
CPN i CBM són semblants. Com que $CP = PB$, perquè P és el punt mitjà $\rightarrow CN = NM$.

AQM i ADN són semblants. Com que $AQ = QD$, perquè Q és el punt mitjà $\rightarrow AM = MN$.

Per tant, $AM = MN = CN$.

Els punts M i N trisequen AC .

- 52** Sobre el costat AB d'un triangle ABC s'agafa un punt qualsevol P . Després es disposen $\overline{AW} = \overline{WP}$, $\overline{PX} = \overline{XB}$, $\overline{AZ} = \overline{ZB}$, $\overline{BY} = \overline{YC}$. Demostra que $\overline{XY} = \overline{WZ}$.



Els triangles APC i AWZ són semblants amb raó de semblança $r = 2$ perquè $AP = 2AW$.

Per tant, $PC = 2WZ$.

Els triangles BPC i BXY són semblants amb raó de semblança $r = 2$ perquè $BP = 2BX$.

Per tant, $PC = 2XY$.

$$\left. \begin{array}{l} PC = 2WZ \\ PC = 2XY \end{array} \right\} \rightarrow WZ = XY$$

- 53** Demostra que si l'àrea d'un triangle rectangle és la quarta part del quadrat de la hipotenusa, llavors el triangle és isòsceles.

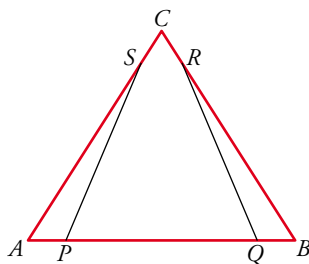
a = hipotenusa

$$A = \frac{a^2}{4} = \frac{a \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{a^2 \cdot 2}{4a} = \frac{1}{2}a$$

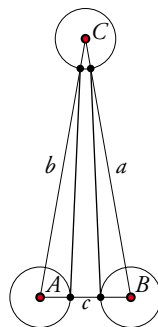
Tots els triangles rectangles amb hipotenusa a són inscrits en una circumferència de radi $\frac{1}{2}a$.

L'únic amb altura $h = \frac{1}{2}a$ és aquell en què l'altura coincideix amb el radi de la semicircumferència circumscrita; per tant, l'altura és també la mediatriu i el triangle és isòsceles.

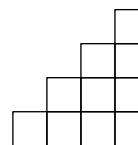
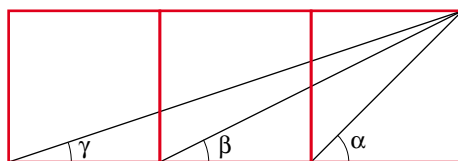
- 54** En la figura, $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ i $\overline{CS}$ són iguals. Demostra que $\overline{PQ} = \overline{RQ}$.



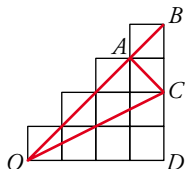
No és cert, com es veu en aquest dibuix:



- 55** Demostra que, en aquesta figura, $\alpha = \beta + \gamma$.



Intenta fer servir una quadrícula com la de la dreta per demostrar-ho.



$$\alpha = \widehat{BOD}; \beta = \widehat{COD}; \gamma = \widehat{AOC}$$

S'observa fàcilment que $\alpha = \beta + \gamma$.

■ Cadena d'equivalències

56 Demostra que per a tot x real es compleix el següent:

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

Per a tot x real es compleix que $(x-1)^2 \geq 0$.

Per tant, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0 \rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$

57 Prova que la mitjana aritmètica de dos nombres reals positius és més gran o igual que la mitjana geomètrica. És a dir:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Per a qualssevol x, y reals positius, es compleix que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

Per tant:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

58 Sabent que a i b són dos nombres diferents i tots dos positius, verifica la igualtat següent:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$$

Siguin a i b dos nombres reals positius. Calcularem expressions equivalents fins arribar a una que sigui certa:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b} &\rightarrow (a+b)^2 > 4ab \rightarrow (a+b)^2 - 4ab > 0 \rightarrow \\ &\rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab > 0 \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 > 0 \rightarrow (a-b)^2 > 0 \end{aligned}$$

que és cert perquè a i b són diferents.

59 Si $m \geq 0$ i $n \geq 0$, demostra $\frac{m+n}{2} \leq \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$.

Siguin $m, n \geq 0$.

Per una banda:

$$(m-n)^2 \geq 0 \rightarrow m^2 + n^2 \geq 2mn \rightarrow \frac{m^2+n^2}{4} \geq \frac{2mn}{4}$$

Per tant:

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \frac{m^2+n^2+2mn}{4} = \frac{m^2+n^2}{4} + \frac{2mn}{4} \leq \frac{m^2+n^2}{4} + \frac{m^2+n^2}{4} = \frac{m^2+n^2}{2}$$

De $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \leq \frac{m^2+n^2}{2}$ deduïm que $\frac{m+n}{2} \leq \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$, agafant arrels i aplicant el fet que tots dos nombres són no negatius.

■ Reducció a l'absurd i contrarecíproc

60 Prova per reducció a l'absurd el mateix que has demostrat en l'exercici anterior.

Suposem que existeixen nombres $m, n \geq 0$ per als quals $\frac{m+n}{2} > \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$.

Elevem al quadrat els dos membres de la desigualtat:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 > \frac{m^2+n^2}{2} &\rightarrow \frac{m^2+n^2+2mn}{4} > \frac{m^2+n^2}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow m^2 + n^2 + 2mn > 2m^2 + 2n^2 \rightarrow 0 > m^2 + n^2 - 2mn \rightarrow \\ &\rightarrow 0 > (m-n)^2 \text{ (contradicció)} \end{aligned}$$

61 Demostra que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ per a qualsevol nombre real positiu x .

Suposem que existeixi un nombre real positiu x tal que $x + \frac{1}{x} < 2$. Llavors:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = x + \frac{1}{x} - 2 < 0 \quad (\text{contradicció})$$

62 Si a, b són nombres reals positius tals que $\sqrt{ab} \neq \frac{a+b}{2}$, llavors $a \neq b$.

Siguin a, b nombres reals positius. Si $a = b$ llavors:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

i ambdues expressions serien iguals. Per tant, quan $a \neq b$, les dues expressions són diferents.

63 Demostra que si a, b, c són tres nombres imparells, llavors $ax^2 + bx + c = 0$ no pot tenir arrels racionals.

Suposem que existeixen tres nombres imparells a, b, c tals que l'equació donada té solucions racionals. Aleshores, el seu discriminant ha de ser el quadrat d'un nombre sencer, és a dir:

$$b^2 - 4ac = m^2$$

A més, m ha de ser imparell perquè b^2 és imparell i $4ac$ és parell. Per tant, per a h, i, j, k adequats, es complirà que:

$$(2h+1)^2 - 4(2i+1)(2j+1) = (2k+1)^2$$

Desenvolupant s'obté:

$$4h^2 + 4h + 1 - 4(4ij + 2i + 2j + 1) = 4k^2 + 4k + 1$$

Simplificant entre 4:

$$h^2 + h - 4ij - 2i - 2j - 1 = k^2 + k \quad (1)$$

Però l'expressió anterior és una contradicció perquè:

$$h^2 + h \text{ és parell}$$

$$4ij + 2i + 2j + 1 \text{ és imparell}$$

$$k^2 + k \text{ és parell}$$

És a dir, la igualtat (1) implica que "*parell* - *imparell* = *parell*" i això no és possible.

■ Mètode d'inducció

64 Demostra que $n^3 + 5n$ és múltiple de 6 per a qualsevol valor natural de n .

Veiem que és cert per a $n = 1$:

$$1 + 5 = 6, \text{ que és múltiple de } 6$$

Suposem que és cert per a n i ho demostrem per a $n + 1$:

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 5n) + 6 + 3(n^2 + n)$$

En aquesta expressió $n^3 + 5n$ és múltiple de 6 per hipòtesi.

$n^2 + n$ és múltiple de 2 perquè tant si n és parell com si és imparell, n i n^2 tenen la mateixa paritat, per tant la seva suma és parella.

Per tant, $3(n^2 + n)$ és múltiple de 3 i de 2, i per tant és múltiple de 6.

Tots els sumands són múltiples de 6 i, per tant, la seva suma també.

$$(n+1)^3 + 5(n+1) \text{ és múltiple de } 6.$$

Pel principi d'inducció completa, es verifica per a tot n natural.

65 Aplicant el mètode d'inducció completa, demostra:a) $2^n > 2n + 1$ per a qualsevol natural $n \geq 3$.b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n \cdot (n + 1)^2$ per a qualsevol n natural.a) Si $n = 3$, la desigualtat es compleix perquè $2^3 = 8 > 2 \cdot 2 + 1 = 5$.Suposem que és cert per a n i vegem si ho és per a $n + 1$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(2n + 1) = 4n + 2 = 2n + 2 + 2n = 2(n + 1) + 2n > 2(n + 1) + 1$$

b) Si $n = 1$ es compleix la igualtat ja que $1 \cdot 4 = 1 \cdot (1 + 1)^2$.Suposem que és cert per a n i vegem si ho és per a $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n \cdot (3n + 1) + (n + 1) \cdot [3(n + 1) + 1] &= \\ = n \cdot (n + 1)^2 + (n + 1) \cdot [3(n + 1) + 1] &= (n + 1) \cdot [n \cdot (n + 1) + (3n + 4)] = \\ = (n + 1) \cdot (n^2 + 4n + 4) &= (n + 1) \cdot (n + 2)^2 \end{aligned}$$

66 Fes servir el mètode d'inducció completa per demostrar aquestes igualtats per a n natural:

a) $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

a) Per a $n = 1 \rightarrow \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$; $\frac{1 \cdot (1+1)(1+2)}{6} = 1 \rightarrow$ és certa.Suposem que és certa per a $n = k$; és a dir, que:

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

Hem de provar que, en aquest cas, també és certa per a $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{hipòtesi d'inducció}} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \left(\frac{k}{3} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} \end{aligned}$$

Ho és, tal com volíem demostrar.

b) Per a $n = 1 \rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1} \rightarrow$ és certa.Suposem que es compleix per a $n = k$; és a dir, que:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Tenim que provar que, en aquest cas, també és certa per a $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{hipòtesi d'inducció}} &= \frac{1}{k+1} \left[k + \frac{1}{k+2} \right] = \frac{1}{k+1} \left[\frac{k^2 + 2k + 1}{k+2} \right] = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

Ho és, tal com volíem demostrar.

67 Observa que:

$$1 = 1$$

$$1 - 4 = -(1 + 2)$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$

...

Quina regla general segueixen aquestes igualtats? Expressa-ho en la notació convenient i demostra-ho.

Observem que:

$$1^2 = 1$$

$$1^2 - 2^2 = -(1 + 2)$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 = (1 + 2 + 3)$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

És a dir, en general:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n i$$

Per a demostrar-ho, aplicarem el mètode d'inducció. Donarem per certa la igualtat per a n i intentarem demostrar la igualtat per a $n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n i + (-1)^{n+2} (n+1)^2 \stackrel{(*)}{=} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n}{2} - (-1)^{n+1} (n+1)^2 = (-1)^{n+1} \left[\frac{(n+1)n}{2} - (n+1)^2 \right] = \\ &= (-1)^{n+2} \left[(n+1)^2 - \frac{(n+1)n}{2} \right] = (-1)^{n+2} (n+1) \left[(n+1) - \frac{n}{2} \right] = \\ &= (-1)^{n+2} (n+1) \frac{n+2}{2} \stackrel{(**)}{=} (-1)^{n+2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} i \quad \text{que és al que volíem arribar.} \end{aligned}$$

(*) Tenim en compte que: $(-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n i = (-1)^{n+1} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n}{2}$

(**) $(n+1) \frac{n+2}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)$

68 Demostra que $6^{2n} - 1$ és divisible per 35 per a qualsevol valor de n (natural).

Que $6^{2n} - 1$ sigui divisible per 35 significa que $6^{2n} - 1$ és múltiple de 35; és a dir, hem de provar que:

$$6^{2n} - 1 = \dot{3}5 \text{ per a qualsevol } n$$

Ho provem per mitjà del mètode d'inducció completa.

$$\text{Per a } n = 1 \rightarrow 6^2 - 1 = 35 = \dot{3}5$$

Suposem que és cert per a $n = k$; és a dir, que $6^{2k} - 1 = \dot{3}5$; veiem si també es compleix per a $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)} - 1 &= 6^{2k+2} - 1 = 6^{2k} \cdot 6^2 - 1 = 6^{2k} \cdot 36 - 1 = 6^{2k}(35 + 1) - 1 = \\ &= 6^{2k} \cdot 35 + (6^{2k} - 1) = \dot{3}5 + \dot{3}5 = \dot{3}5 \text{ com volíem provar.} \end{aligned}$$

69 Justifica que si $n \in \mathbb{N}$, llavors $n^5 - 5n^3 + 4n$ és múltiple de 120.

Si $n = 1$, és cert perquè $1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 = 0$, que és múltiple de 120.

Suposem que és cert per a n i vegem-ho per a $n + 1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - 5(n+1)^3 + 4(n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 4n = \\&= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - 5n^3 - 15n^2 - 15n - 5 + 4n + 4 = \\&= n^5 - 5n^3 + 4n + (5n^4 + 10n^3 - 5n^2 - 10n) = n^5 - 5n^3 + 4n + 5n(n^3 + 2n^2 - n - 2) = \\&= n^5 - 5n^3 + 4n + 5(n-1)n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

És a dir, s'obté un múltiple de 120 (per la hipòtesi d'inducció) més $5(n-1)n(n+1)(n+2)$.

Aquesta última expressió és el resultat de multiplicar 5 per quatre nombres consecutius. Entre aquests quatre nombres consecutius ha d'haver-hi necessàriament un múltiple de 3 (almenys), un múltiple de 4 i un altre nombre parell que no sigui múltiple de 4. Per tant, l'expressió és múltiple de 5, de 3 i de 8, és a dir, és múltiple de 120, com volíem demostrar.

70 Demosta per inducció:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}$$

Si $n = 1$, és cert perquè $1^2 = \frac{(2 \cdot 1 - 1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Suposem que és cert per a n i vegem-ho per a $n + 1$:

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + \dots + (2n+1)^2 + [2(n+2)-1]^2 &= \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6} + (2n+1)^2 = \\&= \frac{(2n-1)2n(2n+1) + 6(2n+1)^2}{6} = \frac{(2n+1)2[(2n-1)n + 3(2n+1)]}{6} = \\&= \frac{(2n+1)2(2n^2 - n + 6n + 3)}{6} = \frac{(2n+1)2(2n^2 + 5n + 3)}{6} = \\&= \frac{(2n+1)2(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{[2(n+1)-1]2(n+1)[2(n+1)+1]}{6}\end{aligned}$$