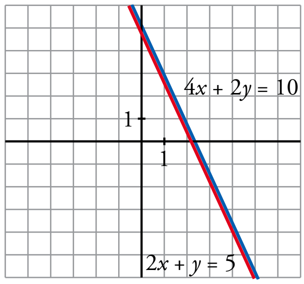
Resol

Pàgina 33

Equacions i incògnites

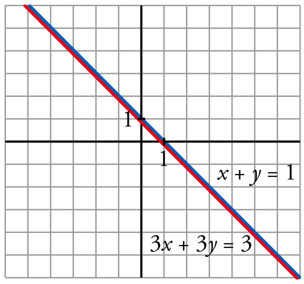
1. ***Podem dir que les equacions següents són «dues dades diferents»? No és cert que la segona diu el mateix que la primera?***

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$



- **Representa-les gràficament i observa que es tracta de la mateixa recta.**

  Es tracta de la mateixa recta.



- **Escriu un altre sistema de dues equacions amb dues incògnites en què la segona equació sigui, en essència, igual que la primera. Interpreta'l gràficament.**

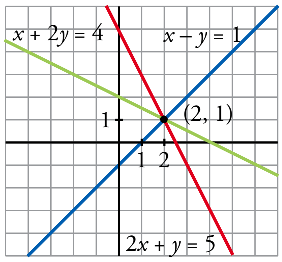
  $$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$ Gràficament són la mateixa recta.

2. Observa les equacions següents: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

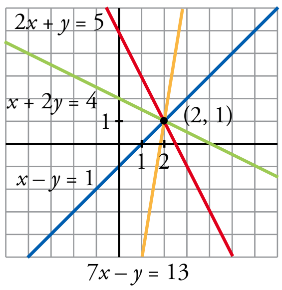
La tercera equació s'ha obtingut restant, membre a membre, les dues anteriors:

(3a) = (1a) – (2a)

Per tant, *el que diu la tercera equació es dedueix del que diuen les dues anteriors: no aporta res de nou.*



- **Representa-les gràficament i observa que les dues primeres rectes determinen un punt (amb aquestes dues dades es respon a les dues preguntes: $x = 2$, $y = 1$). Comprova que la tercera recta també passa per aquest punt.**



- **Dona una altra equació que també sigui *conseqüència* de les dues primeres.**

  Per exemple: 2 · (1a) + 3 · (2a)

  Representa-la i observa que també passa per $x = 2$, $y = 1$.

  2 · 1a + 3 · 2a $\rightarrow$ $7x - y = 13$

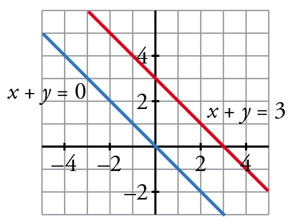
3. És possible que dues equacions diguin coses contradictòries?

- **Escriu dues equacions que es contradiguin i representa'n les rectes corresponents.**

  Sí és possible. Per exemple:

  $x + y = 0$

  $x + y = 3$



1 Sistemes d'equacions lineals

Pàgina 35

1 Cert o fals?

a) En un sistema d'equacions amb dues incògnites (x, y), l'equació $x + y = 4$ té, entre d'altres, la solució (3, 1).

b) En un sistema amb tres incògnites (x, y, z) l'equació $x + y = 4$ no té sentit.

c) En un sistema amb tres incògnites (x, y, z), l'equació $x + y = 4$ sí que té sentit. Representa un pla. Algunes solucions són (3, 1, 0), (3, 1, 7), (3, 1, –4).

d) Si som en el pla (dues incògnites, x, y) l'equació $y = 0$ representa l'eix X.

e) Si som en l'espai (tres incògnites, x, y, z) l'equació $y = 0$ representa el pla XZ.

a) Cert, perquè 3 + 1 = 4 i hi ha més solucions, com (4, 0).

b) Fals, (3, 1, 0) és solució d'aquesta equació. Podem posar qualsevol valor en la tercera coordenada.

c) Cert.

d) Cert, perquè els punts de l'eix X són de la forma $(a, 0)$.

e) Cert, perquè els punts del pla XZ són de la forma $(a, 0, b)$.

2 Sense resoldre'ls, explica per què són equivalents els parells de sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{cases}$

a) Hem substituït la segona equació pel resultat de sumar les dues que teníem.

b) Hem substituït la primera equació pel resultat de restar-li a la segona equació la primera.

c) En el primer sistema, la tercera equació s'obté sumant les dues primeres. La resta és igual que en b).

d) Hem substituït la segona equació pel resultat de restar-li a la segona equació la primera.

2 Possibles solucions d'un sistema d'equacions lineals

Pàgina 37

3 Resol i interpreta geomètricament els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ y = 1 - 2x \\ \\ \to\ y = 3 - x \end{array}\Bigg\}\ 1 - 2x = 3 - x \ \to\ x = -2,\ y = 3 - (-2) = 5$

Vegem si compleix la 2a equació:

$$3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$$

Solució: $x = -2$, $y = 5$. Són tres rectes que es tallen en el punt $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right\}$ La 3a equació s'obté sumant les dues primeres; podem prescindir-ne.

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$

Solució: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Són tres plans que es tallen en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$ Les dues primeres equacions es contradiuen. El sistema és incompatible.

Els dos primers plans són paral·lels i el tercer els talla.

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solució: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Són tres plans que es tallen en el punt $(3, 2, 1)$.

4 **a) Resol aquest sistema:**

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b) Afegeix una tercera equació de manera que continuï sent compatible.

c) Afegeix una tercera equació de manera que el sistema sigui incompatible.

d) Interpreta geomètricament el que has fet en cada cas.

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + y \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \;\rightarrow\; -1 = 3y \;\rightarrow\; y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$

Solució: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Per exemple: $2x + y = 7$ (suma de les dues anteriors).

c) Per exemple: $2x + y = 9$

d) En a) $\rightarrow$ són dues rectes que es tallen en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) $\rightarrow$ La nova recta també passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) $\rightarrow$ La nova recta no passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No hi ha cap punt comú a les tres rectes. Es tallen dos a dos.

3 Sistemes esgraonats

Pàgina 38

5 **Reconeix com a esgraonats els sistemes següents i resol-los:**

a) $\begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}$

Solució: $x = \dfrac{7}{3}$, $y = \dfrac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solució: $x = 3$, $y = -29$, $z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Solucions: $x = 3 + \lambda$, $y = -29 - 19\lambda$, $z = 11 + 6\lambda$, $t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$

Solució: $x = 1$, $y = \dfrac{16}{9}$, $z = \dfrac{-2}{3}$

6 **Són esgraonats aquests sistemes? Resol-los:**

a) $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solució: $x = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ 2x \quad -z=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x \quad =4+z \\ x+y=7-z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2+\dfrac{z}{2} \\ y=7-z-x=5-\dfrac{3z}{2} \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda,\ y = 5 - 3\lambda,\ z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y \quad =2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \quad =2+y \\ x+z=3-y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2+y \\ z=3-y-2-y=1-2y \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda,\ y = \lambda,\ z = 1 - 2\lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} z+\ t=3 \\ y+3z-2t=4 \\ 2z \quad =2 \\ x \ -\ z+2t=5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2z \quad =2 \\ z+\ t=3 \\ y+3z-2t=4 \\ x \ -\ z+2t=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=1 \\ t=3-z=2 \\ y=4-3z+2t=5 \\ x=5+z-2t=2 \end{array}$

Solució: $x = 2,\ y = 5,\ z = 1,\ t = 2$

Pàgina 39

7 Transforma en esgraonats i resol.

a) $\begin{cases} 2x-3y=21 \\ 3x+\ y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-\ y+3z=-4 \\ x+\ y+\ z=2 \\ x+2y-\ z=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-\ y+3z \quad =0 \\ 3x-2y-5z+7w=-32 \\ x+2y-\ z+3w=18 \\ x-3y+\ z+2w=-26 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x-3y=21 \\ 3x+\ y=4 \end{array}\right\}$ (1a) / 3 · (2a) + (1a) $\left.\begin{array}{l} 2x-3y=21 \\ 11x \quad =33 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=3 \\ y=\dfrac{21-2x}{-3}=-5 \end{array}$

Solució: $x = 3,\ y = -5$

b) $\left.\begin{array}{r} x-\ y+3z=-4 \\ x+\ y+\ z=2 \\ x+2y-\ z=6 \end{array}\right\}$ (1a) / (2a) – (1a) / (3a) – (1a) $\left.\begin{array}{r} x-\ y+3z=-4 \\ 2y-2z=6 \\ 3y-4z=10 \end{array}\right\}$ (1a) / (2a) : 2 / (3a) $\left.\begin{array}{r} x-\ y+3z=-4 \\ y-\ z=3 \\ 3y-4z=10 \end{array}\right\}$

(1a) / (2a) / (3a) – 3 · (2a) $\left.\begin{array}{r} x-y+3z=-4 \\ y-\ z=3 \\ -\ z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=-1 \\ y=3+z=2 \\ x=-4+y-3z=1 \end{array}$

Solució: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

c) $\left.\begin{array}{r} x+\ y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+\ y+z=8 \end{array}\right\}$ (1a) / (2a) – (1a) / (3a) – 3 · (1a) $\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=6 \\ -2y-2z=-10 \\ -2y-2z=-10 \end{array}\right\}$

Podem prescindir de la 3a equació, ja que és igual que la 2a.

(1a) / (2a) : (–2) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ y+z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=6-z \\ y=5-z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=6-z-y=6-z-5+z=1 \\ y=5-z \end{array}$

Solucions: $x = 1,\ y = 5 - \lambda,\ z = \lambda$

d) $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w &= -32 \\ x + 2y - z + 3w &= 18 \\ x - 3y + z + 2w &= -26 \end{aligned}\right\}$ $\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) - 3 \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \\ (4a) - (1a)}}$ $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 0 \\ y - 14z + 7w &= -32 \\ 3y - 4z + 3w &= 18 \\ -2y - 2z + 2w &= -26 \end{aligned}\right\}$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a) - 3 \cdot (2a) \\ (4a) + 2 \cdot (2a)}}$ $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 0 \\ y - 14z + 7w &= -32 \\ 38z - 18w &= 114 \\ -30z + 16w &= -90 \end{aligned}\right\}$ $\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (1/2) \cdot (3a) \\ (1/2) \cdot (4a)}}$ $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 0 \\ y - 14z + 7w &= -32 \\ 19z - 9w &= 57 \\ -15z + 8w &= -45 \end{aligned}\right\}$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ 19 \cdot (4a) + 15 \cdot (3a)}}$ $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 0 \\ y - 14z + 7w &= -32 \\ 19z - 9w &= 57 \\ 17w &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} & w = 0 \\ & z = \frac{57}{19} = 3 \\ & y = -32 + 14z = 10 \\ & x = y - 3z = 1 \end{aligned}$

Solució: $x = 1, \; y = 10, \; z = 3, \; w = 0$

4 Mètode de Gauss

Pàgina 40

8 Cert o fals?

a) En aplicar el mètode de Gauss, és possible que un sistema incompatible doni lloc a un d'esgraonat compatible. O viceversa.

b) En aplicar el mètode de Gauss, el sistema esgraonat al qual s'arriba finalment és del mateix tipus que el sistema inicial, ja que tots els passos que es donen transformen cada sistema en un altre d'equivalent a aquell.

a) Fals. Les solucions d'un sistema no depenen del mètode fet servir per resoldre'l.

b) Cert. Les solucions d'un sistema no depenen del mètode fet servir per resoldre'l.

Pàgina 42

9 Resol aquests sistemes d'equacions fent servir el mètode de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) - 3\cdot(1a) \\ (3a) + 2\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)\cdot(-1) \\ (3a)\cdot 5 + (2a)\cdot 3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \\ 2z = 24 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 3 \\ y = \dfrac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}$

Solució: $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) - 2\cdot(3a) \\ (2a) - (3a) \\ (3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Les dues primeres equacions es contradiuen. El sistema és *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y \quad = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) + 2\cdot(1a) \\ (3a) - 2\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a) + 5\cdot(2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y \quad = -3 \\ -y + z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{array}$

Solucions: $x = -3 + 2\lambda,\ y = \lambda,\ z = -2 + \lambda$

10 **Resol per mitjà del mètode de Gauss:**

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{l} x-\ y+2z=2\\ -x+3y+\ z=3\\ x+\ y+5z=7\end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x-\ y\qquad+\ w=0\\ x-2y+z\qquad=0\\ 5x-\ y+z+\ w=0\\ 5x-2y-z+2w=0\end{array}\right. \qquad \text{c)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x-\ y\qquad+\ w=9\\ x-2y+z\qquad=11\\ 5x-\ y+z+\ w=24\\ 5x-2y-z+2w=0\end{array}\right.$$

a)
$$\left.\begin{array}{r} x-\ y+2z=2\\ -x+3y+\ z=3\\ x+\ y+5z=7\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 5 & 7\end{array}\right) \begin{array}{l}(1a)\\ (2a)+(1a)\\ (3a)-(1a)\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x-\ y+2z=2\\ 2y+3z=5\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x-\ y=2-2z\\ 2y=5-3z\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2-2z+y\\ y=\dfrac{5-3z}{2}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3z}{2}\end{array}$$

$$x=2-2z+\frac{5}{2}-\frac{3z}{2}=\frac{9}{2}-\frac{7z}{2}$$

Solucions: $x=\dfrac{9}{2}-7\lambda,\ \ y=\dfrac{5}{2}-3\lambda,\ \ z=2\lambda$

b)
$$\left.\begin{array}{r} 2x-\ y\qquad+\ w=0\\ x-2y+z\qquad=0\\ 5x-\ y+z+\ w=0\\ 5x-2y-z+2w=0\end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(1a)\\ (2a)\\ (3a)-(1a)\\ (4a)-2\cdot(1a)\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(1a)\\ (2a)\\ (3a)+(4a)\\ (4a)\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right) \left.\begin{array}{r} 2x-\ y\qquad+w=0\\ x-2y+z\qquad=0\\ 4x\qquad\qquad=0\\ x\qquad-z\qquad=0\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0\\ z=0\\ y=0\\ w=0\end{array}$$

Solució: $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ w=0$

c)
$$\left.\begin{array}{r} 2x-\ y\qquad+\ w=9\\ x-2y+z\qquad=11\\ 5x-\ y+z+\ w=24\\ 5x-2y-z+2w=0\end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11\\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24\\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(1a)\\ (2a)\\ (3a)-(1a)\\ (4a)-2\cdot(1a)\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15\\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}(1a)\\ (2a)\\ (3a)+(4a)\\ (4a)\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11\\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18\end{array}\right) \left.\begin{array}{r} 2x-\ y\qquad+w=9\\ x-2y+z\qquad=11\\ 4x\qquad\qquad=-3\\ x\qquad-z\qquad=-18\end{array}\right\}$$

$$x=\frac{-3}{4} \qquad z=x+18=\frac{69}{4} \qquad y=\frac{x+z-11}{2}=\frac{11}{4} \qquad w=9-2x+y=\frac{53}{4}$$

Solució: $x=\dfrac{-3}{4},\ \ y=\dfrac{11}{4},\ \ z=\dfrac{69}{4},\ \ w=\dfrac{53}{4}$

5 Discussió de sistemes d'equacions

Pàgina 43

11 **Discuteix, en funció de k, aquests sistemes d'equacions:**

a) $\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x = 3 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{3-2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3-2y}{4} - 2 + y = \frac{-5+2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *compatible indeterminat.*

Solucions: $x = \frac{3}{4} - \lambda,\ y = 2\lambda,\ z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- Si $k \neq 3$, és *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (3-k) \end{array}\right\} x = \frac{3-k}{k-3} = -1;\ y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solució: $x = -1,\ y = 2 + \frac{k}{2},\ z = -1 + \frac{k}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ El sistema és *incompatible*.

- Si $k \neq 3$, és *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (2-k) \end{array}\right\} x = \frac{2-k}{k-3};\ y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solució: $x = \frac{2-k}{k-3},\ y = \frac{k^2+k-8}{2k-6},\ z = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$

12 **Discuteix aquests sistemes d'equacions en funció de k:**

a) $\begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) - (2a) \\ (2a) \\ (3a) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) + 2 \cdot (3a) \\ (2a) \\ (3a) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$

- Si $k = -3$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*.

- Si $k \neq -3$, és *compatible determinat*. El resolem:

$\left.\begin{array}{r} (k+3)x = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\}$

$x = \dfrac{8+2k}{k+3}$

$z = k - 2x = \dfrac{k^2 - k - 16}{k+3}$

$y = -x - z = \dfrac{-k^2 - k + 8}{k+3}$

Solució: $x = \dfrac{8+2k}{k+3}$, $y = \dfrac{-k^2-k+8}{k+3}$, $z = \dfrac{k^2-k-16}{k+3}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$

- Si $k = -1$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*.

- Si $k \neq -1$, és *compatible determinat*. El resolem:

$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ (-1-k)z = k - 2 \end{array}\right\}$

$z = \dfrac{k-2}{-1-k} = \dfrac{2-k}{1+k}$

$y + k\left(\dfrac{2-k}{1+k}\right) = 1 \to y = 1 - \dfrac{2k-k^2}{1+k} = \dfrac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \dfrac{1-k+k^2}{1+k}$

$x = 1 - y - z = 1 - \dfrac{1-k+k^2}{1+k} - \dfrac{2-k}{1+k} = \dfrac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} = \dfrac{-2+3k-k^2}{1+k}$

Solució: $x = \dfrac{-2+3k-k^2}{1+k}$, $y = \dfrac{1-k+k^2}{1+k}$, $z = \dfrac{2-k}{1+k}$

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 44

1. Mètode de Gauss

Fes-ho tu. Resol aquests dos sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y + z - 2t = -5 \\ 2x - y - t = 0 \\ x + z - 3t = -2 \\ -x + y - 2z + t = 0 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + (1a) \\ (3a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - y \quad = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -y + z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Solucions: $(-1,\ 1 + \lambda,\ \lambda)$

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \\ (3a) + (1a) \\ (4a) - (1a) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \\ (4a) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

La tercera equació no es pot complir mai. El sistema no té solució.

Pàgina 45

2. Discussió de sistemes aplicant el mètode de Gauss

Fes-ho tu. Discuteix i resol, en funció de cada paràmetre, aplicant el mètode de Gauss.

a) $\begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 1$, el sistema és *compatible determinat.*

$$\left.\begin{array}{r} -x \qquad - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ (m-1)y \qquad = 0 \end{array}\right\} \textit{Solució: } x = -1,\ y = 0,\ z = 1$$

- Si $m = 1$, el sistema és *compatible indeterminat.*

$$\left.\begin{array}{r} -x \qquad - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ 0y \qquad = 0 \end{array}\right\} \textit{Solucions: } x = 2 - 3\lambda,\ y = 4 - 4\lambda,\ z = \lambda$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-3\cdot(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array}\right)$

- Si $a \neq 2$, el sistema és *compatible determinat.*

  $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\}$ *Solució:* $x = 3,\ y = -\dfrac{3a-4}{a-2},\ z = \dfrac{2}{a-2}$

  Els tres plans es tallen en un punt.

- Si $a = 2$, la matriu queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$

  El sistema és *incompatible*. Els plans es tallen dos a dos.

Pàgina 46

3. Sistemes amb més incògnites que equacions

Fes-ho tu. **Resol els dos sistemes d'equacions següents i interpreta'ls geomètricament:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 4y + 6z = 2 \\ x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$

a) Passem z al segon membre i fem $z = \lambda$ (paràmetre). Així el sistema tindrà tantes equacions com incògnites.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Les solucions del sistema són $(2, \lambda, \lambda)$. Són dos plans que es tallen en una recta.

b) Les dues equacions representen el mateix pla perquè una és el doble de l'altra. Ens quedem només amb la segona equació, passem y i z al segon membre i fem $y = \lambda$ i $z = \mu$.

Les solucions del sistema són $(1 + 2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu)$. Són dos plans coincidents.

4. Plantejament i discussió d'un problema

Fes-ho tu. **Els diners que tenen entre A, B i C són el 150 % dels que tenen entre A i B, i, a la vegada, són el doble dels que tenen entre A i C. Si C té el doble que A, podem saber quants diners té cadascú?**

Anomenem x, y, z els diners que tenen A, B i C, respectivament.

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{150}{100}(x + y) \\ x + y + z = 2(x + z) \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 15x + 15y \\ x + y + z = 2x + 2z \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x - 5y + 10z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema és compatible indeterminat; per tant, no podem saber quants diners té cada un.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 47

1. Afegir una equació a un sistema

Afegeix una equació al sistema $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$ ***de manera que sigui:***

a) Incompatible.

b) Compatible determinat.

c) Compatible indeterminat.

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

Fem $2 \cdot (1a) + (2a) \ \rightarrow \ 5x - y + 3z = 5$

Canviem el terme independent $\rightarrow \ 5x - y + 3z = 0$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 5x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

és *incompatible*.

b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \rightarrow \ x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda, \ y = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\lambda, \ z = \lambda$

Una solució és: $x = 1, \ y = 3, \ z = 1$

Afegim l'equació $x + y + z = 5$.

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

és *compatible determinat*.

c) Fem $2 \cdot (1a) + 3 \cdot (2a) \ \rightarrow \ 7x + y + z = 11$

Posem aquesta nova equació que és combinació lineal de les anteriors.

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 7x + y + z = 11 \end{cases}$$

és *compatible indeterminat*.

2. Sistemes amb infinites solucions

Siguin S i S' dos sistemes d'equacions amb dues incògnites que difereixen només en els termes independents. Si S és compatible indeterminat, ho serà també S'?

Si S és compatible indeterminat, significa que la columna de termes independents és linealment dependent de les columnes dels coeficients.

En canviar els termes independents, canviem la columna corresponent i potser que sigui linealment independent amb les anteriors; per tant, pot ser que el sistema resulti ser incompatible.

3. Sistema compatible

Discuteix el sistema d'equacions següent segons els valors de a i resol-lo en tots els casos en què sigui possible:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y + az = a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+(1a) \\ (3a)+2\cdot(1a) \\ (4a)+(1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array}\right)$$

- Si $a = -1$, el sistema és *compatible indeterminat*:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= 1 - \lambda \\ 3y &= 4 - 3\lambda \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solucions: } x = \frac{1}{3},\ y = \frac{4}{3} - \lambda,\ z = \lambda$$

- Si $a \neq -1$, el sistema és *compatible determinat*:

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 3y + 3z &= 4 \\ (a+1)z &= (a+1) \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solució: } x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{3},\ z = 1$$

4. Sistema de dues equacions i dues incògnites

Estudia per a quins valors de m el sistema següent té solució i resol-lo quan aquesta solució sigui única:

$$\begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ -mx + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)+m\cdot(1a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ 0 & 1-m^2 & -1-m \end{array}\right)$$

$1 - m^2 = 0 \rightarrow m = 1,\ m = -1$

- Si $m \neq \pm 1$, el sistema és *compatible determinat*:

$$\left.\begin{aligned} x - my &= -1 \\ (1-m^2)y &= -(1+m) \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solució: } x = -\frac{1}{1-m},\ y = -\frac{1}{1-m}$$

- Si $m = 1$:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 0y &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $m = -1$, el sistema és *compatible indeterminat*:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 0y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solucions: } x = -1 - \lambda,\ y = \lambda$$

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 48

Per practicar

Resolució i interpretació geomètrica de sistemes d'equacions lineals

1 **Resol i interpreta geomètricament els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -5 \\ (3/2)\,x - 3y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \\ (2/3) \cdot (3a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (1a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2y = -2 \\ y = -1 \end{array}$$

Solució: $(-2, -1)$

Geomètricament, són tres rectes que es tallen en el punt $(-2, -1)$.

b) Si dividim la 3a equació entre 2, obtenim: $x + 2y = 0$. La 1a equació és $x + 2y = 5$. Es contradiuen; per tant, el sistema és *incompatible*.

La 1a i la 3a equació representen dues rectes paral·leles; la 2a les talla.

c) $$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2a) \\ (1a) \\ (3a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 3 \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) : 5 \\ (3a) : 2 \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ -y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -y = 1 \\ y = -1 \end{array}$$

Solució: $(1, -1)$

Són tres rectes que es tallen en el punt $(1, -1)$.

d) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - (1a) \\ (3a) - 2 \cdot (1a) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

La 2a i 3a files es contradiuen. No té solució.

Són tres rectes que es tallen dos a dos.

2 Resol i interpreta geomètricament:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) - 3 \cdot (2a) \\ (2a) \\ (3a) - 5 \cdot (2a) \\ (4a) - 2 \cdot (2a) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podem prescindir de les dues últimes files, ja que coincideixen amb la primera.

Quedaria:

$$4y = -1 \ \rightarrow \ y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \ \rightarrow \ x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solució: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa quatre rectes que es tallen en el punt $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 5 \cdot (1a) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -9 & 13 \end{array}\right)$

De la 2a equació, obtenim $y = -1$; de la 3a equació, obtenim $y = \frac{-13}{9}$.

Per tant, el sistema és *incompatible*.

El sistema representa tres rectes que es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú a totes tres.

3 Resol i interpreta geomètricament aquests sistemes:

a) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - z = 5 \\ -y + z = 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$

La 2a equació contradiu la 1a. No té solució.

Geomètricament, es tracta de tres plans que es tallen dos a dos.

b) La 1a i la 2a equació es contradiuen. No té solució.

Geomètricament, es tracta de dos plans paral·lels que són tallats per un tercer.

4 Argumenta si aquests sistemes tenen solució i interpreta'ls geomètricament:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividim la 2a equació entre 2, obtenim:

$x + 2y - z = \frac{1}{2}$, que contradiu la 1a.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multipliquem per $-\frac{2}{3}$ la 1a equació, obtenim:

$\frac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradiu la 2a equació.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

5 Resol els sistemes esgraonats següents:

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = \dfrac{7 + y}{2} = 2 \end{array}\right\}$

Solució: (2, –3)

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} z = \frac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \qquad x = \frac{3 + y - z}{3} = \frac{2}{3}$

Solució: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 5 \\ x = 2 - z + y = 7 - z \end{array}$

Solucions: $(7 - \lambda, 5, \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 - z \\ y = 2 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2 - z \\ x = \dfrac{4 - z - y}{2} = \dfrac{4 - z - 2 + z}{2} = 1 \end{array}$

Solucions: $(1, 2 - \lambda, \lambda)$

6 Resol els sistemes esgraonats següents:

a) $\begin{cases} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ y + z - t = 3 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{array}\right\}$ $x = 0 \qquad z = x - 2 = -2 \qquad y = 9 + z - x = 7$

Solució: $(0, 7, -2)$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right\}$ $y = \dfrac{1}{2} \qquad x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6} \qquad z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solució: $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y - z + t = 4 \\ y + z - t = 3 \\ z + 2t = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 4 - t \\ y + z = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{array}\right\}$

$z = 1 - 2t \qquad y = 3 + t - z = 2 + 3t \qquad x = 4 - t + z - y = 3 - 6t$

Solucions: $(3 - 6\lambda, 2 + 3\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Solucions: $(-5 + 3\lambda, 4 - \lambda, \lambda, -3 + 2\lambda)$

Mètode de Gauss

7 Resol els sistemes següents aplicant-hi el mètode de Gauss.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} - \text{(1a)} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} + \text{(2a)} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = 0 \end{array}\right\}$ $z = 0 \qquad y = -2 - z = -2 \qquad x = 1 - y = 3$

Solució: $(3, -2, 0)$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $y = -\dfrac{z}{2}$ $\quad x = -y - z = -\dfrac{z}{2}$

Solucions: $\left(-\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

c) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)-3\cdot(1a)\\(3a)-5\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)\\(3a)-2\cdot(2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 4z &= -2 \end{aligned}\right\}$

$y = 4z + 2$

$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$

$z = \lambda$

Solucions: $(-1 - 3\lambda, 2 + 4\lambda, \lambda)$

d) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 3 \\ 6x - 6y + 2z &= -16 \\ x - y + 2z &= -6 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3a)\\(2a):2\\(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)-3\cdot(1a)\\(3a)-3\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a):(-5)\\(3a):7}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} x - y + 2z &= -6 \\ z &= -2 \\ y - z &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ &x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{aligned}$

Solució: $(-1, 1, -2)$

8 Resol aquests sistemes aplicant-hi el mètode de Gauss:

a) $\left\{\begin{aligned} 2x + 5y \phantom{{}-2z} &= 16 \\ x + 3y - 2z &= -2 \\ x \phantom{{}+3y} + z &= 4 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 3 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right.$

c) $\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x \phantom{{}+y} + z &= 2 \\ x - y \phantom{{}-z} &= 0 \end{aligned}\right.$ **d)** $\left\{\begin{aligned} 2x + y \phantom{{}+z} &= 3 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x \phantom{{}-y} + z &= 4 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y \phantom{{}-2z} &= 16 \\ x + 3y - 2z &= -2 \\ x \phantom{{}+3y} + z &= 4 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a)+2\cdot(3a)\\(3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a)\\(2a):3\\(3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a)-5\cdot(2a)\\(2a)\\(3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} -3x \phantom{{}+y+z} &= 6 \\ x + y \phantom{{}+z} &= 2 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 4 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &x = -2 \\ &y = 2 - x = 4 \\ &z = 4 - x = 6 \end{aligned}$

Solució: $(-2, 4, 6)$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (1a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-5\cdot(1a) \\ (3a)-3\cdot(1a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ -2\cdot(3a)+(2a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -2y-2z=3 \\ 2z=1 \end{array}\right\}$ $z=\dfrac{1}{2}$ $\qquad y=\dfrac{3+2z}{-2}=-2$ $\qquad x=-y-z=\dfrac{3}{2}$

Solució: $\left(\dfrac{3}{2}, -2, \dfrac{1}{2}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ 2x \qquad +z=2 \\ x-y \qquad =0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-2\cdot(1a) \\ (3a)-(1a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a)-(2a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-2 \\ -2z=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-2 \\ z=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y \qquad =2 \\ -2y \qquad =-2 \\ z=0 \end{array}\right\}$ $z=0 \qquad y=1 \qquad x=2-y=1$

Solució: (1, 1, 0)

d) $\left.\begin{array}{r} 2x+y \qquad =3 \\ x-y+z=1 \\ 3x \qquad +z=4 \end{array}\right\}$

Observem que la 3a equació és la suma de la 1a i la 2a: podem prescindir-ne.

$\left.\begin{array}{r} 2x+y \qquad =3 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2x=3-y \\ x+z=1+y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3-y}{2} \\ z=1+y-x=1+y-\dfrac{3-y}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3y}{2} \end{array}\right.$

Agafem $y=2\lambda$.

Solució: $\left(x=\dfrac{3}{2}-\lambda,\ y=2\lambda,\ z=-\dfrac{1}{2}+3\lambda\right)$

9 **Resol, si és possible, els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - \ y - z = -10 \\ 2x - \ y + z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - \ y + z = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y - \ z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + \ y + \ z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ y = 0 \\ 4x + \ y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ -(2a)+(1a) \\ (3a)-2\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (2a)+2\cdot(3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{array}\right\} \ y = 1 \quad z = \dfrac{19 - 3y}{2} = 8 \quad x = 9 - 2y - z = -1$

Solució: $(-1, 1, 8)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ -(2a)+2\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \dfrac{14}{5} + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3z}{5} \end{array}$

Si agafem $z = 5\lambda$, les *solucions* són: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda,\ \dfrac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3a) \\ (2a) \\ (1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)-2\cdot(1a) \\ (3a)+(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)+2\cdot(3a) \\ (3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

La segona equació és impossible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema és *incompatible.*

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a)+(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a)-2\cdot(2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\} \ y = 3x \quad z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \quad x = \lambda$

Solucions: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 **Estudia i resol pel mètode de Gauss.**

a) $\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) + 4 \cdot (1a) \\ (3a) + 2 \cdot (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

El resolem:

$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad y = -\dfrac{1}{2} \qquad x = y + 3z + 2 = \dfrac{3}{2}$

Solució: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2a) \\ (1a) \\ (3a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - 3 \cdot (2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \quad x = 1 + y \qquad z = -1 - y \qquad y = \lambda$

Solucions: $(1 + \lambda, \lambda, -1 - \lambda)$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3a) \\ (2a) \\ (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 5 \cdot (1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) : 3 \\ (3a) - 2 \cdot (2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinat*. El resolem:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$

Solució: $(1, 1, -1)$

d) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-3\cdot(1a)\end{array}}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\-4\cdot(2a)+3\cdot(3a)\end{array}}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\}$ $t = 0 \qquad z = 0 \qquad x = y \qquad y = \lambda$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

11 Classifica aquests sistemes en compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ *Compatible indeterminat*

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$ *Compatible determinat*

12 Estudia i resol pel mètode de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+6\cdot(2a)\end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 3 \\ y = 7 - 3z = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}$

El sistema és *compatible determinat*, amb *solució* $(1, -2, 3)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)+(1a)\end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-2\cdot(2a)\end{array}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{array}$

El sistema és *compatible indeterminat*, amb *solucions* $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$.

Pàgina 49

Per resoldre

Discussió de sistemes d'equacions

13 **Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ y &= 1 \\ 2y &= m - 2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a) - 2 \cdot (2a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 \end{array}\right)$

- Si $m = 4 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*
- Si $m \neq 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ y + 2z &= 0 \\ 3y + 7z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a) - 3 \cdot (1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinat* per a tot m.

c) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -2y + 8z &= 3 \\ mz &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array}\right)$

- Si $m = 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*
- Si $m \neq 0 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

d) $\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3x + z &= 0 \\ (m-5)z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 5 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat.*
- Si $m \neq 5 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat* amb *solució* $(0, 0, 0)$.

14 **Discuteix els sistemes següents i resol-los quan sigui possible:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -x + (y/2) &= -2 \\ x + ky &= 2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\2 \cdot (2a) + (1a)\\2 \cdot (3a) - (1a)\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

$2x - y = 4 \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases}$

Solucions: $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2}$ $\longrightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

$$\left.\begin{aligned} 2x - \quad y &= 4 \\ (2k+1)y &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Solució: (2, 0)

b) $$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(2a)\\(1a)\\(3a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-5\cdot(1a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$$

- Si $m = 10$ $\longrightarrow$ Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 5y - 3z &= -5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y = \frac{-5+3z}{5} = -1 + \frac{3z}{5} \\ &x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \frac{6z}{5} - z = 1 + \frac{z}{5} \end{aligned}$$

Agafem $z = 5\lambda$.

Solucions: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10$ $\longrightarrow$ Sistema *incompatible.*

15 **Resol cadascun dels sistemes següents per als valors de m que els fan compatibles:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 1 \\ 4x + 3y &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-4\cdot(1a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a):(-5)\\(3a)-(2a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7$ $\longrightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} x = 3 - 2y = 1$$

Solució: (1, 1)

- Si $m \neq 7$ $\longrightarrow$ Sistema *incompatible.*

b) $$\left.\begin{aligned} x - y - 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 1 \\ 3x + z &= 3 \\ x + 2y + 5z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-3\cdot(1a)\\(4a)-(1a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)\\(4a)-(2a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat.*

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3-7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Agafem $z = 3\lambda$.

Solucions: $(1 - \lambda,\ -1 - 7\lambda,\ 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*

16 Discuteix aquests sistemes i resol-los quan sigui possible:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ 2\cdot(2a)-(1a) \\ 2\cdot(3a)-5\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2k+3 & -7 & 0 \\ 0 & 19 & -7 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)-(3a) \\ (3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2k-16 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & -7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -2k - 16 = 0 \rightarrow k = -8$

- Si $k \neq -8 \rightarrow$ el sistema és *compatible determinat*; com que és un sistema homogeni, només té la *solució trivial*: $(0, 0, 0)$.
- Si $k = -8 \rightarrow$ el sistema és *compatible indeterminat*. Eliminem la 2a equació i el resolem en funció de $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -z \\ 19y = 7z \end{array}\right\} \quad \textit{Solucions: } \left(\frac{1}{19}\lambda,\ \frac{7}{19}\lambda,\ \lambda\right)$$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{array}\right\}$ Canviem l'ordre de les dues primeres equacions:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)-3\cdot(1a) \\ (3a)-2\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & k+2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a)-(2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right) \rightarrow k = 0$

- Si $k \neq 0 \rightarrow$ el sistema és *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \\ kz = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 0 \\ y = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

- Si $k = 0 \rightarrow$ el sistema és *compatible indeterminat*. Eliminem la 3a equació per resoldre'l:

$$\left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = -1 - z \end{array}$$

Solucions: $(1 + \lambda,\ -1 - \lambda,\ \lambda)$

17 **Discuteix els sistemes d'equacions següents:**

a) $\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) - (1a) \\ (3a) - 2 \cdot (1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinat* per a tot k.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) - (1a) \\ (3a) - 3 \cdot (1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) : 2 \\ (3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a) - 7 \cdot (2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $a = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*.
- Si $a \neq 10 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*.

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (3a) \\ (2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) + 2 \cdot (1a) \\ (3a) + (1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Compatible determinat per a tot m.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3a) \\ (2a) \\ (1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) - 5 \cdot (1a) \\ (3a) - 3 \cdot (1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ -2 \cdot (3a) + (2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$

$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.
- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*.

18 **Discuteix i resol cada cas en funció del paràmetre a:**

a) $\begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(3a)\\(2a)\\(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a) + 2 \cdot (1a)\\(3a) - (1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a) + (2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m \neq 1 \longrightarrow$ el sistema és *compatible determinat.*

$\left.\begin{array}{l} -x - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ (m-1)y = 0 \end{array}\right\}$ *Solució:* $(-1, 0, 1)$

- Si $m = 1 \longrightarrow$ el sistema és *compatible indeterminat.*

$\left.\begin{array}{l} -x - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ 0y = 0 \end{array}\right\}$ *Solucions:* $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a) - 3 \cdot (1a)\\(3a) - 2 \cdot (1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a) - (1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array}\right)$

- Si $a \neq 2 \longrightarrow$ el sistema és *compatible determinat.*

$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -y + (a-3)z = 5 \\ (2-a)z = -2 \end{array}\right\}$ *Solució:* $\left(3, -\dfrac{3a-4}{a-2}, \dfrac{2}{a-2}\right)$

- Si $a = 2$, la matriu queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema és *incompatible.*

19 **Estudia els sistemes d'equacions següents. Resol-los quan siguin compatibles i interpreta les solucions obtingudes geomètricament.**

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \begin{matrix} (2a) \\ (1a) \\ (3a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$

$\begin{matrix} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 5 \cdot (1a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \begin{matrix} (1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10 \rightarrow$ el sistema és *compatible indeterminat*.

$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 5y - 3z &= -5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 2y - z + 3 = \frac{z+5}{5} \\ y &= \frac{3z-5}{5} \end{aligned}$

Agafem $z = 5\lambda$.

Solucions: $(\lambda + 1, 3\lambda - 1, 5\lambda)$

Són tres plans que es tallen en una recta.

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ el sistema és *incompatible*.

Són tres plans que es tallen dos a dos.

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ mx + y + (m-1)z &= 2 \\ x + my + z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & 2 \\ 1 & m & 1 & m \end{array}\right)$

$\begin{matrix} (1a) \\ (2a) - m \cdot (1a) \\ (3a) - (1a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & -1 & 2-m \\ 0 & m-1 & 0 & m-1 \end{array}\right) \begin{matrix} (1a) \\ (2a) \\ (3a) + (2a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & -1 & 2-m \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

De la 3a equació es dedueix que $z = -1$. El sistema quedaria així:

$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ (1-m)y &= 1-m \end{aligned}\right\}$

- Si $m = 1 \rightarrow$ el sistema és *compatible indeterminat*.

$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 0y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solucions: $(2 - \lambda, \lambda, -1)$

Són tres plans que es tallen en una recta.

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ el sistema és *compatible determinat*.

$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ (1-m)y &= 1-m \end{aligned}\right\} y = \frac{1-m}{1-m} = 1 \qquad x = 2 - 1 = 1$

Solució: $(1, 1, -1)$

Són tres plans que es tallen en un punt.

20 **Discuteix els sistemes següents segons els valors de α i interpreta'ls geomètricament:**

a) $\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\substack{(1a) \\ (2a)\cdot\alpha - (1a)}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$

- Si $\alpha = 1$, queda:

  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sistema *compatible indeterminat*. Són dues rectes coincidents.

- Si $\alpha = -1$, queda:

  $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*. Són dues rectes paral·leles.

- Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són dues rectes secants.

b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + 3y - 5z &= -16 \\ x + \alpha y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) - 2\cdot(1a) \\ (3a) - (1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ 5\cdot(3a) - (2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$

- Si $\alpha \neq 0$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són tres plans que es tallen en un punt.
- Si $\alpha = 0$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*. Els plans es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú als tres.

21 **Considera el sistema d'equacions següent:**

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 6y + az = 0 \end{cases}$$

a) Dedueix per a quins valors de a el sistema només té la solució (0, 0, 0).

b) Resol el sistema en el cas en què tingui infinites solucions.

$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 5x + 6y + az &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) - 2\cdot(1a) \\ (3a) - 5\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a - 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a) - (2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a - 7 & 0 \end{array}\right)$

a) Com que el sistema és homogeni, quan $a \neq 7$ només té la solució trivial (0, 0, 0).

b) Si $a = 7$ $\rightarrow$ el sistema és *compatible indeterminat*.

$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad z = \lambda \qquad y = -2\lambda \qquad x = \lambda$

Solucions: $(\lambda, -2\lambda, \lambda)$

22 **Una botiga ha venut 225 memòries USB de tres models diferents, A, B, C, i ha ingressat un total de 10 500 €. La memòria A costa 50 €, i els models B i C són, respectivament, un 10 % i un 40 % més barats que el model A. La suma de les unitats venudes dels models B i C és la meitat de les venudes del model A. Calcula quantes unitats s'han venut de cada model.**

x = nre. de memòries venudes del model A

y = nre. de memòries venudes del model B

z = nre. de memòries venudes del model C

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=225 \\ 50x+0,9\cdot 50y+0,6\cdot 50z=10\,500 \\ y+z=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=225 \\ 50x+45y+30z=10\,500 \\ x-\ 2y-\ 2z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=225 \\ -x+2y+2z=0 \\ 10x+9y+6z=2\,100 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 10 & 9 & 6 & 2\,100 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)-10\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 3 & 3 & 225 \\ 0 & -1 & -4 & -150 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\3\cdot(3a)+(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 3 & 3 & 225 \\ 0 & 0 & -9 & -225 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=225 \\ y+z=75 \\ z=25 \end{array}\right.$$

S'han venut 150 memòries del model A, 50 del model B i 25 del model C.

23 **Un vaixell transporta 400 vehicles (cotxes, camions i motos). Per cada 2 motos hi ha 5 camions. Els cotxes representen les 9/7 parts dels altres vehicles. Quants vehicles de cada tipus transporta el vaixell?**

x = nre. de cotxes

y = nre. de camions

z = nre. de motos

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ \dfrac{z}{2}=\dfrac{y}{5} \\ x=\dfrac{9}{7}(y+z) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=400 \\ 2y-5z=0 \\ 7x-9y-9z=0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 7 & -9 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-7\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -16 & -16 & -2\,800 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+8\cdot(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -56 & -2\,800 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+\ z=400 \\ 2y-5z=0 \\ z=50 \end{array}\right.$$

El vaixell transporta 225 cotxes, 125 camions i 50 motos.

24 **a) Troba un nombre de tres xifres tal que la suma de les centenes i les unitats amb el doble de les desenes és 23; la diferència entre el doble de les centenes i la suma de les desenes més les unitats és 9, i la mitjana de les centenes i les desenes més el doble de les unitats és 15.**

b) És possible trobar un nombre de tres xifres si canviem l'última condició per «el triple de les centenes més les desenes és 25»?

a) Anomenem xyz el nombre buscat.

El sistema que expressa les condicions del problema és:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ \dfrac{x+y}{2}+2z=15 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y+z=23 \\ 2x-y-z=9 \\ x+y+4z=30 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 30 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-2\cdot(1a) \\ (3a)-(1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ 5\cdot(3a)-(2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & 0 & 18 & 72 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=23 \\ -5y-3z=-37 \\ z=4 \end{array}\right.$$

El nombre és 954.

b) El sistema resultant és:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ 3x+y=25 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ 2x-y-z=9 \\ 3x+y=25 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 25 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-2\cdot(1a) \\ (3a)-3\cdot(1a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & -5 & -3 & -44 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (1a) \\ (2a) \\ (3a)-(2a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & -5 & -3 & -37 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Aquest sistema no té solució; per tant, no hi ha cap nombre que verifiqui aquestes condicions.

Pàgina 50

25 **Les tones de combustible consumides en una fàbrica en el torn de matí són igual a m vegades les tones consumides en el torn de tarda.**

A més, se sap que el torn de tarda consumeix m tones menys que el torn de matí.

a) Planteja i discuteix el problema en funció de m.

b) És possible que el torn de matí consumeixi el doble de combustible que el de tarda?

c) Si se suposa que $m = 2$, quant consumeix el torn de tarda?

x = nre. de tones de combustible consumides en el torn de matí.

y = nre. de tones de combustible consumides en el torn de tarda.

a) $$\left.\begin{array}{l} x=my \\ y=x-m \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-my=0 \\ x-y=m \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & -1 & m \end{array}\right) \begin{array}{l} (1a) \\ (2a)-(1a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 0 & -1+m & m \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 1$, es poden aïllar totes les incògnites; per tant, el problema té solució única.

$$\left.\begin{array}{l} x-my=0 \\ (-1+m)y=m \end{array}\right\} \quad x=\frac{m^2}{m-1} \qquad y=\frac{m}{m-1}$$

Solució: $\left(\dfrac{m^2}{m-1}, \dfrac{m}{m-1}\right)$

- Si $m = 1$, la segona equació seria $0y = 1$, que és una expressió impossible; per tant, el sistema no té solució.

b) Sí, perquè $x = 2y$ per a $m = 2$.

c) Si $m = 2 \to y = \dfrac{m}{m-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$. El torn de tarda consumeix 2 tones de combustible.

26 **Un forn fa servir tres ingredients A, B i C per elaborar tres tipus de pastís.**

El pastís P_1 es fa amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C.

El pastís P_2 porta 4 unitats de A, 1 de B i 1 de C.

I el P_3, necessita 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C.

Els preus de venda al públic són 7,50 € el P_1; 6,50 € el P_2 i 7 € el P_3.

Sabent que el benefici que s'obté amb la venda de cada pastís és de 2 €, calcula quant li costa al forn cada unitat de A, B i C.

x = preu per unitat de A

y = preu per unitat de B

z = preu per unitat de C

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=5,50\\ 4x+y+z=4,50\\ 2x+y+2z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&2&5,50\\ 4&1&1&4,50\\ 2&1&2&5 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-4\cdot(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&2&5,50\\ 0&-7&-7&-17,50\\ 0&-3&-2&-6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\7\cdot(3a)-3\cdot(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&2&5,50\\ 0&-7&-7&-17,50\\ 0&0&7&10,5 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} x+2y+2z=5,50\\ -7y-7z=-17,50\\ z=1,50 \end{array}\right.$$

La unitat de A costa 0,50 €, la unitat de B costa 1 € i la unitat de C costa 1,50 €.

27 **Tres comerciants inverteixen en la compra d'ordinadors dels models A, B i C de la manera següent:**

El primer inverteix 50 000 € en els de tipus A, 25 000 € en els de tipus B i 25 000 € en els de tipus C.

El segon dedica 12 500 € als de tipus A, 25 000 € als de tipus B i 12 500 € als de tipus C.

I el tercer, 10 000 €, 10 000 € i 20 000 €, respectivament, en els models A, B i C.

Després de vendre'ls tots, la rendibilitat que obté el primer és del 15 %, el segon del 12 % i el tercer del 10 %. Determina la rendibilitat de cada un dels models venuts.

x = rendibilitat del model A

y = rendibilitat del model B

z = rendibilitat del model C

$$\left.\begin{array}{r} 50\,000x+25\,000y+25\,000z=0,15\cdot100\,000\\ 12\,500x+25\,000y+12\,500z=0,12\cdot50\,000\\ 10\,000x+10\,000y+20\,000z=0,10\cdot40\,000 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 50x+25y+25z=15\\ 12,5x+25y+12,5z=6\\ 10x+10y+20z=4 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 50&25&25&15\\ 12,5&25&12,5&6\\ 10&10&20&4 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\50\cdot(2a)-12,5\cdot(1a)\\5\cdot(3a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 50&25&25&15\\ 0&937,5&312,5&112,5\\ 0&25&75&5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(3a)\\25\cdot(2a)-937,5\cdot(3a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 50&25&25&15\\ 0&25&75&5\\ 0&0&-62\,500&-1\,875 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{r} 50x+25y+25z=15\\ 25y+75z=5\\ z=0,03 \end{array}\right.$$

La rendibilitat del model A és del 23 %, la rendibilitat del model B és del 11 % i la rendibilitat del model C és del 3 %.

28 **La suma de les tres xifres d'un nombre és 13. La xifra de les centenes excedeix en m unitats la de les desenes. Si s'intercanvien la xifra de les unitats i la de les centenes, llavors el nombre augmenta en 495.**

a) Planteja un sistema d'equacions i raona per a quins valors de m és compatible determinat.

b) Quins valors pot agafar m perquè el problema tingui solució? Calcula la solució per a $m = 4$.

Nombre: $xyz = 100x + 10y + z$

Si intercanviem unitats i centenes, el nombre és: $zxy = 100z + 10y + x$

a) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z+495 \\ x=y+m \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 13 \\ -99x+99z &= 495 \\ x-y &= m \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 13 \\ -x+z &= 5 \\ x-y &= m \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)+(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & -2 & -1 & m-13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)+2\cdot(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & m+23 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+y+z &= 13 \\ y+2z &= 18 \\ -3z &= m+23 \end{array}\right.$$

El sistema és sempre compatible determinat perquè es poden aïllar totes les incògnites.

La solució seria: $x = \dfrac{m+8}{3}$, $y = \dfrac{8-2m}{3}$, $z = \dfrac{m+23}{3}$

b) Com que les xifres han de ser nombres naturals entre 0 i 9, ha de verificar-se que $m \le 4$ perquè $y > 0$. Per tant, els possibles valors de m seran:

$m = 1$, s'obtenen nombres naturals $\rightarrow$ $x = 3$, $y = 2$, $z = 8$

$m = 2$ o $m = 3$, no s'obtenen nombres naturals. No serveixen.

$m = 4$, s'obtenen nombres naturals $\rightarrow$ $x = 4$, $y = 0$, $z = 9$

Si $m = 4$, el nombre buscat és 409.

29 **Si comprem dues jaquetes i una brusa ens cobren 200 €. Però si comprem una jaqueta i uns pantalons i tornem la brusa, ens cobren 100 €.**

Quant ens cobraran per cinc jaquetes, uns pantalons i una brusa?

x = preu d'una jaqueta

y = preu d'una brusa

z = preu d'un pantaló

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=200 \\ x+z-y=100 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} y=200-2x & (1) \\ z=100-x+y & (2) \end{array}$$

Substituint (1) en (2), $z = 100 - x + 200 - 2x \rightarrow z = 300 - 3x$

Per tant:

$5x + z + y = 5x + 300 - 3x + 200 - 2x = 500$ euros

30 **Un país importa 21 000 cotxes de tres marques, A, B i C, al preu de 10 000, 15 000 i 20 000 euros cada un. El total de la importació és de 322 milions d'euros. Se sap que hi ha 21 000 cotxes comptant els de la marca B i k vegades els de la A.**

a) Planteja un sistema amb les condicions del problema en funció del nombre de cotxes de cada marca.

b) Resol el sistema en el cas $k = 3$.

c) Comprova que el sistema no té solució en el cas $k = 2$.

a) x = nre. de vehicles de la marca A

y = nre. de vehicles de la marca B

z = nre. de vehicles de la marca C

$$\begin{cases} x + y + z = 21\,000 \\ 10\,000x + 15\,000y + 20\,000z = 322\,000\,000 \\ kx + y = 21\,000 \end{cases}$$

b) Si $k = 3$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 21\,000 \\ 2x + 3y + 4z = 64\,400 \\ 3x + y = 21\,000 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 2 & 3 & 4 & 64\,400 \\ 3 & 1 & 0 & 21\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a) - 2 \cdot (1a)\\(3a) - 3 \cdot (1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & -2 & -3 & -42\,000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a) + 2 \cdot (2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & 0 & 1 & 2\,800 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{cases} z = 2\,800 \\ y + 2z = 22\,400 \to y = 22\,400 - 5\,600 \to y = 16\,800 \\ x + y + z = 21\,000 \to x = 21\,000 - 16\,800 - 2\,800 \to x = 1\,400 \end{cases}$$

Van importar-se 1 400 vehicles de la marca A, 16 800 de la marca B i 2 800 de la marca C.

c) Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 2 & 3 & 4 & 64\,400 \\ 2 & 1 & 0 & 21\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a) - 2 \cdot (1a)\\(3a) - 2 \cdot (1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & -1 & -2 & -21\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a) + (2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & 0 & 0 & 1\,400 \end{array}\right)$$

Sistema *incompatible*.

Qüestions teòriques

31 **Cert o fals? Justifica les respostes i posa'n exemples.**

a) A un sistema amb dues equacions i dues incògnites que és compatible indeterminat, podem afegir-li una equació que el transformi en incompatible.

b) Si S i S' són dos sistemes equivalents amb solució única que tenen iguals els termes independents, llavors els coeficients de les incògnites també són iguals.

c) El sistema $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 4y - 2z = 2a + 1 \end{cases}$ és incompatible qualsevol que sigui el valor de a.

d) El sistema $\begin{cases} 3x + 2y = a \\ x - y = b \end{cases}$ és compatible indeterminat per a qualssevol valors de a i b.

e) A un sistema de dues equacions amb dues incògnites que és compatible determinat, podem afegir-li una equació que el transformi en compatible indeterminat.

a) Cert.

Tenim el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2yz = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Compatible indeterminat.}$$

Li afegim l'equació: $x - y = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - 2yz = 4 \\ x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Incompatible.}$$

b) Fals. Els sistemes següents són equivalents, tenen iguals els termes independents i no tenen els mateixos coeficients en les incògnites.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ \ y = 1 \qquad \left.\begin{array}{l} 3y = 3 \\ \dfrac{x}{2} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ \ y = 1$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 & 2a+1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2a) - 2\cdot(1a)]{(1a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Cert. L'última fila indica que el sistema sempre és *incompatible*.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[(2a)]{(1a) - 3\cdot(2a)} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & a-3b \\ 1 & -1 & b \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5y = a - 3b \\ x - y = b \end{array}\right\} \ x = \dfrac{a+2b}{5},\ \ y = \dfrac{a-3b}{5}$

Fals. En tots els casos el sistema és *compatible determinat*.

e) Fals. Si afegim una equació més, pot passar que l'equació sigui incompatible amb les anteriors o que no aporti més informació. En el primer cas, el sistema es transforma en *incompatible* i en el segon, segueix sent *compatible determinat*.

32 És possible, canviant-hi un signe, convertir aquest sistema en compatible indeterminat?

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$$

Sí. Si canviem la 2a equació per $x + y + z = 1$, o bé, si canviem la 3a equació per $x + y + z = 1$, el sistema resultant serà *compatible indeterminat*.

33 Defineix quan dos sistemes d'equacions lineals són equivalents. Justifica si els sistemes següents són equivalents o no ho són:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Dos sistemes d'equacions lineals són equivalents quan totes les solucions del 1er sistema ho són també del 2on, i a l'inrevés.

Els dos sistemes donats no són equivalents, perquè el 1er és compatible indeterminat (té infinites solucions) i el 2on és determinat (només té una solució).

34 **Comprova que la solució del sistema d'equacions**

$$\begin{cases} ax + y = 2-2a \\ x + ay = a-1 \end{cases} \text{ és } (x, y) = \left(\frac{-2a-1}{a+1}, \frac{a+2}{a+1}\right) \text{ si } a \neq \pm 1.$$

Podem dir que el sistema és compatible indeterminat si $a \neq \pm 1$?

Substituïm la solució que ens donen en les equacions:

$$a\frac{-2a-1}{a+1} + \frac{a+2}{a+1} = \frac{-2a^2-a+a+2}{a+1} = \frac{2(1-a^2)}{a+1)} = \frac{2(1+a)(1-a)}{a+1} = 2-2a$$

$$\frac{-2a-1}{a+1} + a\frac{a+2}{a+1} = \frac{-2a-1+a^2+2a}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = a-1$$

No. El sistema és compatible determinat si $a \neq \pm 1$.

Pàgina 51

Per aprofundir

35 **Per a quin valor de a és incompatible aquest sistema?**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a-1)x = 1 \\ x + 3z = 2 \\ (a-2)z = 0 \end{cases}$$

- **Pot ser compatible indeterminat per al valor $a = 2$?**
- **Resol-lo si $a = 2$.**
- **Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$, pot ser compatible determinat?**

Per estudiar la compatibilitat d'aquest sistema, ens fixem en l'última equació. Si $a \neq 2$, llavors $z = 0$. I, per tant, de la tercera equació s'obté que $x = 2$. Però de la segona equació es dedueix que $x = \frac{1}{a-1}$. Igualant obtenim:

$$\frac{1}{a-1} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

En resum, si $a \neq 2$ i $a \neq \frac{3}{2}$, el sistema és incompatible. I si $a \neq 2$ i $a = \frac{3}{2}$, el sistema és compatible determinat.

- Si $a = 2$, l'última equació no dona informació; per tant, es pot suprimir. El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x = 1 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$$

  És un sistema esgraonat, per tant, *compatible determinat*. No pot ser compatible indeterminat.

- Resolem el sistema anterior per a $a = 2$:

$$x = 1, \; y = -\frac{5}{3}, \; z = \frac{1}{3}$$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$, com ja hem vist al principi, és un sistema *compatible determinat* només en el cas que $a = \frac{3}{2}$.

36 **Discuteix aquests sistemes en funció de a i resol-los en el cas en què siguin compatibles indeterminats.**

a) $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} - 2 \cdot \text{(1a)} \\ \text{(3a)} - \text{(1a)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} + \text{(3a)} \\ \text{(3a)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

El resolem en aquest cas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + z = 1 \to x = 1 - z \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$ $\to$ Sistema *compatible determinat.*

b) $$\left.\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(3a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(1a)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ \text{(3a)} + \text{(1a)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} \\ -a \cdot \text{(3a)} + \text{(2a)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2 + a + 2 & 0 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \to a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{2} < \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(1a)} \\ \text{(2a)} : 2 \\ \text{(3a)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} -x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{array}$$

Sistema *compatible indeterminat.*

Solucions: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 2$ $\to$ Sistema *compatible determinat.*

37 **Troba raonadament dos valors del paràmetre a per als quals el sistema següent sigui incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)\\(4a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)\\(4a)-2\cdot(3a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema és *incompatible*.

38 **Resol el sistema següent:**

$$\begin{cases} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{cases}$$

* ***Si sumes les cinc igualtats, n'obtindràs una altra amb la qual es poden simplificar molt els càlculs.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\} \text{ Sumant les cinc igualtats, obtenim:}$$

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, és a dir: $4(x + y + z + t + w) = 76$, o bé: $x + y + z + t + w = 19$

Per tant: $(x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 \rightarrow w = 2$

$(x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 \rightarrow t = 3$

$(x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 \rightarrow z = 4$

$(x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 \rightarrow y = 5$

$(y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 \rightarrow x = 5$

39 **Una brigada de cinc jardiners havia de podar una plantació treballant de dilluns a divendres. Cada dia, quatre podaven i l'altre els ajudava.**

Cada jardiner va podar el mateix nombre d'arbres cada dia. Els resultats de la poda van ser:

— Dilluns, 35 arbres podats. **— Dimarts, 36.**

— Dimecres, 38. **— Dijous, 39**

— I el divendres no sabem si en van ser 36 o 38.

Calcula quants arbres diaris va podar cada un, sabent que van ser nombres enters i que cap no va podar els cinc dies.

Anomenem:

w = nre. d'arbres diaris que poda el jardiner que descansa el dilluns.

t = nre. d'arbres diaris que poda el jardiner que descansa el dimarts.

z = nre. d'arbres diaris que poda el jardiner que descansa el dimecres.

y = nre. d'arbres diaris que poda el jardiner que descansa el dijous.

x = nre. d'arbres diaris que poda el jardiner que descansa el divendres.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t \qquad = 35 \\ x+y+z \qquad +w = 36 \\ x+y \qquad +t+w = 38 \\ x \qquad +z+t+w = 39 \\ \qquad y+z+t+w = k \end{array}\right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, és a dir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bé:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{k}{4}$$

Si x, y, z, t, w són nombres enters, la seva suma també ho serà; per tant, k ha de ser múltiple de 4. Com que ens diuen que val 36 o 38, ha de ser $k = 36$ (ja que 38 no és múltiple de 4).

Resolem el sistema, ara que sabem que $k = 36$:

La suma de les cinc igualtats ens porta a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Per tant: $(x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \rightarrow w = 11$

$(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \rightarrow t = 10$

$(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \rightarrow z = 8$

$(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \rightarrow y = 7$

$(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \rightarrow x = 10$

Així, el jardiner que descansa el dilluns poda 11 arbres; el que descansa el dimarts, 10; el que descansa el dimecres, 8; el que descansa el dijous, 7, i el que descansa el divendres, 10.

Autoavaluació

Pàgina 51

1 Resol i interpreta geomètricament aquests sistemes:

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{array}\right\}$ Sumant la 1a fila amb 3 vegades la 2a: $\begin{array}{r} 2x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 33 \\ \hline 11x \quad = 33 \end{array} \to x = 3 \to y = -1$

Comprovem en la 3a equació:

$-3 + 3(-1) \neq 0$

El sistema és *incompatible*. Són tres rectes que es tallen dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$ Fem $y = \lambda$: $\begin{cases} 2x = 5 + \lambda \to x = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$

El sistema és *compatible indeterminat*.

Solució: $\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2}, \lambda, -3 + \lambda\right)$

Representa dos plans que es tallen en una recta.

2 La suma de les tres xifres d'un nombre és 9. Si al nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, la diferència és 198 i la suma de les xifres de les unitats i les centenes és el doble de les desenes. Quin és el nombre?

$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 198 \\ x + z = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 99x - 99z = 198 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x - z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + y + z = 9 \\ -y - 2z = -7 \\ -3y = -9 \end{cases}$

Sistema esgraonat amb solució $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$.

El nombre és el 432.

3 Discuteix aquest sistema i resol-lo quan sigui possible:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y + z &= 2 \\ x + my + 3z &= 7 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a)-(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a) \\ (3a)-2\cdot(2a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ (m-4)y = 0 \end{cases}$$

- Si $m \neq 4 \to$ Sistema *compatible determinat*. *Solució:* $(1, 0, 2)$
- Si $m = 4 \to$ Sistema *compatible indeterminat*. Passem z al segon membre com a paràmetre:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

Solucions: $(\lambda - 1, 2 - \lambda, \lambda)$

4 Una persona ha obtingut 6 000 € de benefici per invertir un total de 60 000 € en tres empreses: A, B i C. La inversió en A i B va ser m vegades la inversió en C, i els beneficis van ser del 5 % en A, del 10 % en B i del 20 % en C.

a) Planteja un sistema d'equacions per esbrinar la quantitat invertida a cada empresa.

b) Prova que si $m > 0$, el sistema és compatible determinat, i resol-lo per a $m = 5$.

a) Siguin x, y, z les quantitats invertides en A, B i C, respectivament. Plantegem el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 60\,000 \\ x + y &= mz \\ 0{,}05x + 0{,}1y + 0{,}2z &= 6\,000 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 60\,000 \\ x + y - mz &= 0 \\ 0{,}05x + 0{,}1y + 0{,}2z &= 6\,000 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 6\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-0{,}05\cdot(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 0 & 0 & -m-1 & -60\,000 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}15 & 3\,000 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \to$ El sistema és *incompatible*.
- Si $m \neq -1 \to$ El sistema és *compatible determinat*.

Per tant, si $m > 0$, el sistema és *compatible determinat*.

Per a $m = 5$ la solució és la següent: $x = 20\,000$ €, $y = 30\,000$ €, $z = 10\,000$ €.

5 **Siguin les equacions:** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$.

a) Afegeix una equació perquè el sistema sigui incompatible.

b) Afegeix una equació perquè sigui compatible determinat.

c) Afegeix una perquè sigui compatible indeterminat.

Justifica en cada cas el procediment seguit.

a) Perquè sigui *incompatible*, l'equació que afegim ha de ser de la forma:

$$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k, \text{ amb } k \neq 5a - 4b$$

Si agafem, per exemple, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$$3x - 2y + z = 1$$

Afegint aquesta equació, el sistema seria *incompatible*.

b) Per exemple, afegint $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array}\right\} \textit{Compatible determinat}$$

c) El sistema serà compatible indeterminat si afegim una equació proporcional a una de les que hi ha. Per exemple, afegim la 2a equació multiplicada per (–1):

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ -2x + 3y - z = 4 \end{array}\right\}$$

6 **Es considera el sistema d'equacions lineals:**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

a) Calcula un valor de a per al qual el sistema sigui incompatible.

b) Discuteix si hi ha algun valor de a per al qual el sistema sigui compatible determinat.

c) Resol el sistema per a $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-(1a)\\(3a)-2\cdot(1a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\(3a)-(2a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Si $a = 2$, la 2a equació no té solució: $0y = 1$. El sistema és *incompatible*.

b) No hi ha cap valor de a per al qual el sistema sigui *compatible determinat*, perquè la 3a equació es pot suprimir $(0x + 0y + 0z = 0)$ i el sistema queda amb dues equacions i tres incògnites.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \rightarrow x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

Solucions: $\left(2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$

7 Discuteix aquest sistema segons els valors de a. Interpreta'l geomètricament:

$$\begin{cases} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2a) \\ (1a) \\ (3a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

  Els dos primers plans són paral·lels i el tercer els talla.

- Si $a = -1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

  Els dos últims plans són paral·lels i el primer els talla.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ $\to$ Sistema *compatible determinat*. Són tres plans que es tallen en un punt.