Resol

Pàgina 81

■ **Resol els sistemes següents i calcula el determinant de cada matriu de coeficients:**

a) $\begin{cases} 2x+3y=29 \\ 3x-\ \ y=\ 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x-3y=\ \ 8 \\ -10x+6y=-16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x+\ \ y=17 \\ 5x+2y=19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x-6y=7 \\ -6x+4y=11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x+24y=6 \\ 15x+20y=5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x+11y=128 \\ 8x-\ 7y=\ 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 2x+3y=29 \\ 3x-\ \ y=\ 5 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ *Solució:* $x=4,\ y=7$

b) $\left.\begin{matrix} 5x-3y=\ \ 8 \\ -10x+6y=-16 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$ *Solució:* $x=\dfrac{8}{5}+\dfrac{3}{5}\lambda,\ y=\lambda$

c) $\left.\begin{matrix} 4x+\ \ y=17 \\ 5x+2y=19 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ *Solució:* $x=5,\ y=-3$

d) $\left.\begin{matrix} 9x-6y=7 \\ -6x+4y=11 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *Sistema incompatible*

e) $\left.\begin{matrix} 18x+24y=6 \\ 15x+20y=5 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$ *Solució:* $x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\lambda,\ y=\lambda$

f) $\left.\begin{matrix} 3x+11y=128 \\ 8x-\ 7y=\ 46 \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$ *Solució:* $x=\dfrac{1\,402}{109},\ y=\dfrac{886}{109}$

1 Determinants d'ordre dos

Pàgina 82

1 Sigui A és una matriu 2×2. Justifica si aquestes afirmacions són certes o falses:

a) Perquè $|A| = 0$ és necessari que els seus quatre elements siguin 0.

b) Si els dos elements de la segona columna de A són 0, llavors $|A| = 0$.

c) Si les dues files de A coincideixen, llavors $|A| = 0$.

d) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -15$, aleshores $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 15$.

e) Si $\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 43$, aleshores $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 430$.

a) Fals, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) Cert, perquè en els dos sumands del determinant apareix algun element de la segona fila.

c) Cert: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$

d) Cert: $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(-15) = 15$

e) Cert: $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 70m - 30n = 10\,(7m - 3n) = 10\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 10 \cdot 43 = 430$

2 Calcula el valor dels determinants següents i digues per què alguns són zero:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, perquè té una columna de zeros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, perquè té les dues files iguals.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, perquè les files són proporcionals: (1a) · 7 = (2a).

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, perquè les columnes són proporcionals: (2a) · (–20) = (1a).

3 Siguin $A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$ i $|A| = -13$. Calcula:

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix}$ **c)** $|3A|$ **d)** $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 7 \cdot (-13) = -91$

c) $|3A| = \begin{vmatrix} 3l & 3m \\ 3n & 3p \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 9 \cdot (-13) = -117$

d) $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = (-1) \cdot 15 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = (-15) \cdot (-13) = 195$

2 Determinants d'ordre tres

Pàgina 83

4 Calcula els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

5 Troba el valor d'aquests determinants:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Pàgina 85

6 Donats els determinants

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 18 \end{vmatrix}$$

justifica si les afirmacions següents són certes o falses:

a) $A = 0$ perquè la tercera columna és suma de les dues primeres.

b) $B = 0$ perquè la tercera columna és diferència de les dues primeres.

c) $C = 0$ perquè la tercera columna és producte de les dues primeres.

a) Cert per la propietat 9 dels determinants. Si una matriu té una línia que és combinació lineal de les altres paral·leles, aleshores el seu determinant és zero.

b) Cert per la propietat 9 dels determinants. Si una matriu té una línia que és combinació lineal de les altres paral·leles, aleshores el seu determinant és zero.

c) Fals, perquè el producte de dues línies no és una combinació lineal d'aquestes.

7 Justifica, sense desenvolupar, aquestes igualtats:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$

a) Té una fila de zeros (propietat 2).

b) La 3a fila és proporcional a la 1a:

(3a) = (–2) · (1a) (propietat 6)

c) La 3a fila és combinació lineal de les dues primeres:

(3a) = (1a) + 10 · (2a) (propietat 9)

8 **Sabent que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula sense desenvolupar els determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

3 Menor, menor complementari i adjunt

Pàgina 86

9 Troba dos menors d'ordre dos i dos menors d'ordre tres de la matriu M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menors d'ordre dos; per exemple:

$$M = \left(\begin{array}{cccc} \cline{1-2} \multicolumn{1}{|c}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3} & -1 & 5 \\ \multicolumn{1}{|c}{4} & \multicolumn{1}{c|}{6} & 2 & 7 \\ \cline{1-2} \cline{3-4} 5 & -1 & \multicolumn{1}{|c}{2} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ 4 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{1} & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menors d'ordre tres; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

10 Troba el menor complementari i l'adjunt dels elements a_{12}, a_{33} i a_{43} d'aquesta matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{(1+2)} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{(3+3)} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{(4+3)} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

4 Desenvolupament d'un determinant pels elements d'una línia

Pàgina 87

11 **Calcula el determinant següent aplicant la regla de Sarrus i desenvolupant-lo per cada una de les files i per cada una de les columnes:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprova que s'obté el mateix resultat en els set casos.

Aplicant la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desenvolupant per la 1a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) = -120 + 518 + 58 = 456$$

Desenvolupant per la 2a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) = 180 + 42 + 234 = 456$$

Desenvolupant per la 3a fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 = 396 - 104 + 164 = 456$$

Desenvolupant per la 1a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 = -120 + 180 + 396 = 456$$

Desenvolupant per la 2a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 518 + 42 - 104 = 456$$

Desenvolupant per la 3a columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 = 58 + 234 + 164 = 456$$

12 **Calcula aquests determinants:**

a) $$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

a) $$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$$

(1) Desenvolupant per la 2a columna.

b) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$$

(1) Desenvolupant per la 4a fila.

També podríem haver observat que la 4a columna és igual a la suma de les altres tres; i, per tant, el determinant val zero.

5 Rang d'una matriu a partir dels seus menors

Pàgina 88

13 **Calcula el rang de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc:cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hdashline 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.
La 3a fila és la suma de les dues primeres, i la 4a fila és la suma de la 2a i la 3a $\rightarrow$ $ran\,(A) = 2$.

$$B = \left(\begin{array}{cc:ccc} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ \hdashline 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{array}\right)$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.

Agafem menors d'ordre 3: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow$ Les 3 primeres files són linealment independents.

Agafem menors d'ordre 4: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\,(B) = 3$.

$$C = \left(\begin{array}{cc:c:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, aleshores $ran\,(C) = 4$.

$$D = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ \hdashline 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Agafem el menor d'ordre 2: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ i la 3a fila és la suma de les dues primeres, aleshores $ran\,(D) = 3$.

6 Criteri per saber si un sistema és compatible

Pàgina 89

14 Esbrina si aquests sistemes són compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \to ran\,(A) = 2 \\ |A'| = 0 \to ran\,(A') = 2 \end{array}\right\} \text{ El sistema és } \textit{compatible}.$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{array}\right)$$

$|A'| = 147 \neq 0 \to ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema és *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x \quad\; + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Calculem el rang de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ i $|A| = 0 \to ran\,(A) = 2$

Calculem el rang de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (perquè la 1a i la 3a columna són iguals) $\to ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$

Com que la 4a columna de A' i la 1a són iguals, necessàriament $ran\,(A') = ran\,(A)$; és a dir, el sistema és *compatible*.

d) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x \quad\; + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Sabem que $ran\,(A) = 2$ (veure l'apartat anterior).

Calculem el rang de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \to ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$

El sistema és *incompatible*.

7 Regla de Cramer

Pàgina 90

15 Resol per mitjà de la regla de Cramer:

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x-3y+5z=-24\\ 2x-y+4z=-8\\ x+y=9\end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2\\ x-y+z=8\\ 2x+3y=10\end{array}\right.$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} x-3y+5z=-24\\ 2x-y+4z=-8\\ x+y=9\end{array}\right\} \ |A|=\begin{vmatrix}1&-3&5\\2&-1&4\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix}-24&-3&5\\-8&-1&4\\9&1&0\end{vmatrix}=-7;\ |A_y|=\begin{vmatrix}1&-24&5\\2&-8&4\\1&9&0\end{vmatrix}=-2;\ |A_z|=\begin{vmatrix}1&-3&-24\\2&-1&-8\\1&1&9\end{vmatrix}=5$$

Per tant: $x=7,\ y=2,\ z=-5$

b)
$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=2\\ x-y+z=8\\ 2x+3y=10\end{array}\right\} \ |A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\2&3&0\end{vmatrix}=-6$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\8&-1&1\\10&3&0\end{vmatrix}=-30;\ |A_y|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&8&1\\2&10&0\end{vmatrix}=0;\ |A_z|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&8\\2&3&10\end{vmatrix}=-18$$

Per tant: $x=5,\ y=0,\ z=3$

16 Resol aplicant la regla de Cramer:

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} 2x-5y+3z=4\\ x-2y+z=3\\ 5x+y+7z=11\end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} 3x-4y-z=4\\ y+z=6\\ 2x+5y+7z=-1\end{array}\right.$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} 2x-5y+3z=4\\ x-2y+z=3\\ 5x+y+7z=11\end{array}\right\} \ |A|=\begin{vmatrix}2&-5&3\\1&-2&1\\5&1&7\end{vmatrix}=13$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix}4&-5&3\\3&-2&1\\11&1&7\end{vmatrix}=65;\ |A_y|=\begin{vmatrix}2&4&3\\1&3&1\\5&11&7\end{vmatrix}=0;\ |A_z|=\begin{vmatrix}2&-5&4\\1&-2&3\\5&1&11\end{vmatrix}=-26$$

Per tant: $x=5,\ y=0,\ z=-2$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 3x-4y-z=4\\ y+z=6\\ 2x+5y+7z=-1\end{array}\right\} \ |A|=\begin{vmatrix}3&-4&-1\\0&1&1\\2&5&7\end{vmatrix}=0$$

Per tant, $ran\ (A)<3$.

Com que hi ha menors d'ordre 2 diferents de zero, $ran\ (A)=2$.

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&-1&4\\0&1&1&6\\2&5&7&-1\end{array}\right)\to ran\ (A')=3$$

Per tant, aquest sistema és *incompatible*.

Pàgina 91

17 **Resol els sistemes d'equacions següents:**

a) $$\left\{\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ i } |A| = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (la 1a i la 3a columna són iguals)} \rightarrow ran(A') = 2$$

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 2a equació:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \rightarrow x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \rightarrow y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Solucions: $x = 1 + \lambda,\ y = 7\lambda,\ z = 2\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$$

Sabem, per l'apartat a), que $ran(A) = 2$.

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema és *incompatible*.

18 **Resol aquests sistemes:**

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$

Calculem el rang de A':

$|A'| = 0 \rightarrow ran(A') = 3$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de l'última equació i aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solució: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Com que $|A'| = -309 \neq 0$, aleshores $ran(A') = 3 \neq ran(A)$.

El sistema és *incompatible.*

8 Sistemes homogenis

Pàgina 92

19 **Resol els sistemes d'equacions següents:**

a) $\begin{cases}3x-5y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-y-z=0\\ x+y+3z=0\\ x-5y-9z=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+11y-4z=0\\ -2x+4y+z=0\\ x+y-2z=0\\ 2x-16y+5z=0\end{cases}$ d) $\begin{cases}x+y+5z=0\\ 3x-y-2t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l}3x-5y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y=0\end{array}\right\}\quad |A|=\begin{vmatrix}3&-5&1\\1&-2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-5\neq 0\ \to\ ran(A)=3=\textit{nre. d'incògnites}$

El sistema només té la solució trivial: $x=0,\ y=0,\ z=0$

b) $\left.\begin{array}{l}x-y-z=0\\ x+y+3z=0\\ x-5y-9z=0\end{array}\right\}\quad |A|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&3\\1&-5&-9\end{vmatrix}=0$

Seleccionem el menor $\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\neq 0\ \to\ ran(A)=2$

Podem suprimir la 3a equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l}x-y=z\\ x+y=-3z\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}x=-z\\ y=-2z\end{array}$$

Solucions: $x=-\lambda,\ y=-2\lambda,\ z=\lambda$

c) $\left.\begin{array}{l}x+11y-4z=0\\ -2x+4y+z=0\\ x+y-2z=0\\ 2x-16y+5z=0\end{array}\right\}\quad \begin{vmatrix}1&11&-4\\-2&4&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=-18\ \to\ ran(A)=3=\textit{nre. d'incògnites}$

El sistema només té la solució trivial: $x=0,\ y=0,\ z=0$

d) $\left.\begin{array}{l}x+y+5z=0\\ 3x-y-2t=0\\ x-y+z-t=0\end{array}\right\}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&5&0\\3&-1&0&-2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&1&5\\3&-1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=-14\neq 0\ \to\ ran(A)=3$

Per resoldre'l, passem la t al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+5z=0\\ 3x-y=2t\\ x-y+z=t\end{array}\right\}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&1&5\\2t&-1&0\\t&-1&1\end{vmatrix}}{-14}=\frac{-7t}{-14}=\frac{t}{2};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&0&5\\3&2t&0\\1&t&1\end{vmatrix}}{-14}=\frac{7t}{-14}=\frac{-t}{2};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\3&-1&2t\\1&-1&t\end{vmatrix}}{-14}=\frac{0}{-14}=0$$

Solucions: $x=\lambda,\ y=-\lambda,\ z=0,\ t=2\lambda$

20 **Resol aquests sistemes:**

a) $$\left\{\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ -x + 5y &= 0 \end{aligned}\right.$$

b) $$\left\{\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ -x + 5y + 3z &= 0 \end{aligned}\right.$$

c) $$\left\{\begin{aligned} x + 3z &= 0 \\ y - t &= 0 \\ x + y + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + t &= 0 \end{aligned}\right.$$

d) $$\left\{\begin{aligned} x + 3z &= 0 \\ y - t &= 0 \\ x + y + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + 9t &= 0 \end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ -x + 5y &= 0 \end{aligned}\right\} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $ran(A) = 2$. El sistema és *compatible indeterminat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de les dues últimes equacions i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -3z \\ y &= -z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = -3z + 2y = -3z - 2z = -5z \\ &y = -z \end{aligned}$$

Solucions: $x = -5\lambda, \ y = -\lambda, \ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ -x + 5y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

El menor associat a les 1a, 2a i 4a equacions és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = 3 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema té solució única, que és la solució trivial perquè és homogeni.

Solució: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

c) $\left.\begin{array}{rcl} x \phantom{{}+y} + 3z \phantom{{}+t} &=& 0 \\ y \phantom{{}+3z} - t &=& 0 \\ x + y \phantom{{}+3z} + 2t &=& 0 \\ 2x + 2y + 3z + t &=& 0 \end{array}\right\} \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\; |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3 < nre.\ d'incògnites$$

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació i passar la t al segon membre:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 3z &=& 0 \\ y &=& t \\ x + y &=& -2t \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \dfrac{-x}{3} = \dfrac{3t}{3} = t \\ y = t \\ x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{array}$$

Solucions: $x = -3\lambda,\ y = \lambda,\ z = \lambda,\ t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{rcl} x \phantom{{}+y} + 3z \phantom{{}+9t} &=& 0 \\ y \phantom{{}+3z} - t &=& 0 \\ x + y \phantom{{}+3z} + 2t &=& 0 \\ 2x + 2y + 3z + 9t &=& 0 \end{array}\right\} \; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 4 = nre.\ d'incògnites$

El sistema té solució única, que és la solució trivial perquè és homogeni.

Solució: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ t = 0$

9 Discussió de sistemes per mitjà de determinants

Pàgina 94

21 Discuteix i resol:

a) $\begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix};\ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \quad \text{Agafem el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A) \rightarrow \text{El sistema és } \textit{incompatible.}$$

- Si $a = -\frac{3}{4}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \quad \text{Agafem el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A) \rightarrow \text{El sistema és } \textit{incompatible.}$$

- Si $a \neq 2$ i $a \neq -3/4 \rightarrow ran(A) = ran(A') = \textit{nre. d'incògnites} = 3$, el sistema és *compatible determinat*. El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solució: $x = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}$, $y = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$, $z = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y=k \\ kx-\ \ y=13 \\ 5x+3y=16 \end{array}\right\}\ A'=\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)}_{A}$

$$|A'|=3k^2-11k+10=0\ \rightarrow\ k=\frac{11\pm\sqrt{121-120}}{6}=\frac{11\pm1}{6}\ \begin{cases} k=2 \\ k=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

- Si $k=2$, queda:

$$A'=\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)}_{A}$$

Agafem el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq0\ \rightarrow\ ran(A)=ran(A')=2=nre.\ d'incògnites$

El sistema és *compatible determinat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x-y=13 \end{array}\right\}$ Sumant: $3x=15\ \rightarrow\ x=5$

$y=2-x=2-5=-3$

Solució: $x=5,\ y=-3$

- Si $k=\frac{5}{3}$, queda:

$$A'=\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)}_{A}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix}=\frac{-8}{3}\neq0\ \rightarrow\ ran(A)=ran(A')=2=nre.\ d'incògnites$

El sistema és *compatible determinat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$\left.\begin{array}{r} x+y=\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x-y=13 \end{array}\right\}$ Sumant: $\frac{8}{3}x=\frac{44}{3}\ \rightarrow\ x=\frac{44}{8}=\frac{11}{2}$

$y=\frac{5}{3}-x=\frac{5}{3}-\frac{11}{2}=\frac{-23}{6}$

Solució: $x=\frac{11}{2},\ y=\frac{-23}{6}$

- Si $k\neq2$ i $k\neq\frac{5}{3}\ \rightarrow\ ran(A')=3\neq ran(A)$, el sistema és *incompatible.*

22 Discuteix i resol, en funció del paràmetre a, el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases}(a-1)x + y = 0\\(a-1)x + (a+1)y = 0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}(a-1)x + y = 0\\(a-1)x + (a+1)y = 0\end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} a-1 & 1\\ a-1 & a+1\end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & a+1\end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 < \begin{array}{l}a=0\\a=1\end{array}$$

- Si $a = 0$, queda:

  $$\left.\begin{array}{r}-x+y=0\\-x+y=0\end{array}\right\} \; y = x \;\rightarrow\; \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Solucions: $x = \lambda,\ y = \lambda$

- Si $a = 1$, queda:

  $$\left.\begin{array}{r}y=0\\2y=0\end{array}\right\} \; \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Solucions: $x = \lambda,\ y = 0$

- Si $a \neq 0$ i $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2$

  El sistema té només la solució trivial: $x = 0,\ y = 0$

10 Càlcul de la inversa d'una matriu

Pàgina 95

23 Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow$ existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24 Calcula la inversa d'aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$|B| = 3 \neq 0 \rightarrow$ existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 96

1. Rang de matrius a partir dels seus menors

Fes-ho tu. Estudia el rang d'aquestes matrius segons els valors del paràmetre k:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ b) $N = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & k \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) El menor format per les tres primeres columnes és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ k & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9k^2 - 36k + 36 \rightarrow 9k^2 - 36k + 36 = 0 \rightarrow k = 2$$

- Si $k \neq 2 \rightarrow ran(M) = 3$
- Si $k = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Totes les columnes són proporcionals; per tant, $ran(M) = 1$.

b) Trobem els valors que anul·len el determinant de N:

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

- Si $k \neq 2$ i $k \neq 1 \rightarrow ran\ (N) = 3$
- Si $k = 2$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran\ (N) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\ (N) = 2$$

c) Resolem l'equació $|P| = 0$:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & k \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1a) \\ (2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) + (1a) \\ (4a) + (1a) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & k+1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & k+1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8k - 16 = 0 \rightarrow k = 2$$

- Si $k \neq 2 \rightarrow ran\ (P) = 4$
- Si $k = 2 \rightarrow ran\ (P) < 4$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran\ (P) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \rightarrow ran\ (P) = 3$$

Pàgina 97

2. Regla de Cramer

Fes-ho tu. Resol aquests sistemes fent servir la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 7x - 5y = 8 \\ -3x + 2y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 5x + y - 3z = 18 \end{cases}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = -29; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -39$

$x = \dfrac{-29}{-1} = 29, \quad y = \dfrac{-39}{-1} = 39$

Solució: (29, 39)

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to ran\,(A) = 2$

Traiem la 3a equació perquè és combinació lineal de les anteriors:

$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Passem z al segon membre per tenir el mateix nombre d'incògnites que d'equacions. Fem $z = \lambda$ (paràmetre).

$\begin{cases} x + y = 4 + \lambda \\ x - y = 3 \end{cases}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 4+\lambda & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4+\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\lambda - 1$

Solucions: $\left(\dfrac{\lambda + 7}{2}, \dfrac{\lambda + 1}{2} \right)$

3. Estudi de la compatibilitat d'un sistema

Fes-ho tu. Estudia el sistema següent segons els valors de *k* i resol-lo quan sigui possible:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ x + z = 1 \\ 3x + 4y + z = k \end{cases}$$

Busquem el valor de k per al qual $|A'| = 0$.

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} (1a) \\ (2a)-(1a) \\ (3a)-(1a) \\ (4a)-3\cdot(1a) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & k-12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & k-12 \end{vmatrix} = 15 - 3k = 0 \to k = 5$$

- Si $k \neq 5 \to ran\,(A') = 4 \to$ el sistema és *incompatible*.
- Si $k = 5 \to ran\,(A) = ran\,(A') = 3$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, eliminem la quarta equació i apliquem la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{-3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{-3}$$

Solució: $\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

Pàgina 98

4. Discussió de sistemes aplicant el teorema de Rouché

Fes-ho tu. Discuteix els sistemes d'equacions següents i resol-los quan siguin compatibles.

a) $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \to |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 = 0 < \begin{matrix} a = 2 \\ a = 1 \end{matrix}$

- Si $a \neq 2$ i $a \neq -1 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema és *compatible determinat*.

  Per a cada valor de a diferent de –1 i 2, tenim un sistema amb solució única, que per la regla de Cramer és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}$$

  Solució: $\left(a + 1, \frac{2 - a}{a - 1}, -\frac{a}{a - 1}\right)$

  Són tres plans que es tallen en un punt.

- Si $a = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A') = 3 \end{array}\right\} \text{El sistema és } \textit{incompatible}.$$

  Són tres plans que es tallen dos a dos.

- Si $a = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Com que la columna de termes independents és igual a la columna de coeficients de z, tenim que $ran(A') = 2 = ran(A)$: el sistema és *compatible indeterminat.*

Per resoldre'l, agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$$

Els plans es tallen en una recta.

b) Comencem estudiant el rang de A', ja que pot ser 4:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ m & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 12m = 0 \rightarrow m = 1$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A') = 4 \neq ran(A)$, el sistema és *incompatible.*
- Si $m = 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A') \rightarrow \text{el sistema és } \textit{compatible determinat.}$$

Traient la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right\} \text{Apliquem la regla de Cramer i obtenim: } x = 2,\ y = 1,\ z = 1$$

Els plans es tallen en un punt.

Pàgina 99

5. Càlcul de la matriu inversa

Fes-ho tu. Donada aquesta matriu:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}}$$

a) Troba els valors de a per als quals A és regular.

b) Per a $a = 2$, troba la matriu inversa de A.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 \rightarrow -a^2 + 4a - 3 = 0 \begin{array}{l} a = 3 \\ a = 1 \end{array}$

A és regular per a $a \neq 3$ i $a \neq 1$.

b) $a = 2$:

$|A| = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Sistemes homogenis

Fes-ho tu. **Discuteix i resol:**

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$$

És un sistema homogeni; per tant, sempre és compatible. Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = 20 - 2a \rightarrow 20 - 2a = 0 \rightarrow a = 10$$

- Si $a \neq 10 \rightarrow ran(A) = 3 = ran(A')$ → el sistema és *compatible determinat.*

  Per a cada valor de a diferent de 10, tenim un sistema amb solució única: (0, 0, 0), la solució trivial.

- Si $a = 10 \rightarrow ran(A) = 2 = ran(A')$ → el sistema és *compatible indeterminat.*

  Per resoldre'l, agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre:

  $$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x + 3y &= -z \end{aligned}\right\}$$

  Solucions: $x = 2\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 100

1. Propietats dels determinants

Si c_1, c_2 i c_3 són les columnes 1a, 2a i 3a d'una matriu quadrada d'ordre 3 tal que $|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 7$, calcula:

a) $|c_3\ \ c_1\ \ c_2|$ **b)** $|3c_1\ \ c_2 + c_1\ \ -c_3|$ **c)** $|c_1 + 2c_3\ \ c_2\ \ 2c_3 - c_1|$

a) $|c_3\ \ c_1\ \ c_2| = (-1)^2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 7$

b) $|3c_1\ \ c_2 + c_1\ \ -c_3| = 3(-1)|c_1\ \ c_2 + c_1\ \ c_3| = -3|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = -21$

c) $|c_1 + 2c_3\ \ c_2\ \ 2c_3 - c_1| = |c_1\ \ c_2 + c_1\ \ 4c_3| = 4|c_1\ \ c_2 + c_1\ \ c_3| = 28$

2. Resoldre una equació

Troba el valor de x per al qual $|2B| = 160$ si B és la matriu:

$$B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|2B| = 2^3|B| \to 2^3|B| = 160 \to |B| = 20$$

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + x - 1 = 20 \to x^3 - x^2 + x - 21 = 0 \to$$

$$\to (x-3)(x^2 + 2x + 7) = 0 \to x = 3$$

3. Sistema compatible per a qualsevol valor del paràmetre

Sigui el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} ax + y + z = a + 2 \\ 2x - ay + z = -2 \\ x - y + az = a \end{cases}$$

a) Comprova que és compatible per a qualsevol valor de a.

b) Calcula'n la solució en forma matricial en el cas $a = 0$.

c) Resol per a $a = 1$ fent servir el mètode de Gauss.

a) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 1 = 0 \to a = -1$

- Si $a \neq -1 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema és *compatible determinat*, té solució única.
- Si $a = -1$:

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Afegim la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema és *compatible indeterminat*, té infinites solucions.

Per tant, el sistema és *compatible* per a qualsevol valor de a.

b) $a = 0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}}_{B}\;\rightarrow\; X=A^{-1}\,B$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-2\\2&-1&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-2\\2&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\6\end{pmatrix}$$

c) $a = 1$:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=\ \ 3\\2x-y+z=-2\\x-y+z=\ \ 1\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&1&-2\\1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)-2\cdot(1a)\\(3a)-(1a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-8\\0&-2&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1a)\\(2a)\\3\cdot(3a)-2\cdot(2a)\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-8\\0&0&2&10\end{array}\right)\rightarrow\ x=-3,\ \ y=1,\ \ z=5$$

4. Resoldre una equació matricial

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}-2&m&0\\0&0&m\\1&-1&0\end{pmatrix}$**:**

a) Calcula els valors de m ***per als quals*** A ***té inversa.***

b) Per a $m = 1$***, calcula la matriu*** X ***que verifica*** $XA + X - 2A = 0$**.**

a) $|A|=\begin{vmatrix}-2&m&0\\0&0&m\\1&-1&0\end{vmatrix}=m^2-2m\ \rightarrow\ m^2-2m=0 \begin{array}{l}\nearrow m=0\\ \searrow m=2\end{array}$

A té inversa si $m \neq 0$ i $m \neq 2$.

b) $XA + X - 2A = 0 \ \rightarrow\ X(A+I) = 2A \ \rightarrow\ X = 2A\,(A+I)^{-1}$

Per comprovar que aquest pas és vàlid, veiem si $(A+I)^{-1}$ existeix.

$$A+I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$|A+I|=-1$; per tant, té inversa.

$$(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=2A\,(A+I)^{-1}=2\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&2\\2&0&2\\-2&0&0\end{pmatrix}$$

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 101

Per practicar

Determinants.

1 **Calcula el valor d'aquests determinants:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$

2 **Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, quin és el valor de cada un dels determinants següents? Justifica les respostes.**

a) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{m+3n} & \boldsymbol{p+3q} \\ \boldsymbol{n} & \boldsymbol{q} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{q} & \boldsymbol{n} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{3n} & \boldsymbol{-m} \\ \boldsymbol{3q} & \boldsymbol{-p} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{2m} \\ \boldsymbol{q} & \boldsymbol{2n} \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{n/m} \\ \boldsymbol{mp} & \boldsymbol{mq} \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{5m} \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{5p} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, perquè les dues columnes són proporcionals.

(1) Si a una fila li sumem una altra multiplicada per un nombre, el determinant no varia.

(2) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

(3) Si canviem d'ordre dues files o dues columnes, el determinant canvia de signe.

(4) Si multipliquem una fila o una columna per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

3 Resol:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 7 - 7a = 0 \rightarrow a = 1$$

b) $$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow a = 1,\ a = -3$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a = \sqrt{3},\ a = -\sqrt{3}$$

d) $$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 6a = 0 \rightarrow a = -3,\ a = 0,\ a = 2$$

4 Quin valor de a anul·la aquests determinants?:

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-1) = (a-1)^2 = 0 \rightarrow a = 1$$

b) $$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a-2) + a + a(a-2) = 2(a-1)(a-2) + a(a-1) =$$

$$= (a-1)(3a-4) = 0 \left\langle \begin{matrix} a = 1 \\ a = \dfrac{4}{3} \end{matrix} \right.$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = (1-a)(-2-2a) = -2(1-a)(1+a) = 0 \left\langle \begin{matrix} a = 1 \\ a = -1 \end{matrix} \right.$$

d) $$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2-a) =$$

$$= a(a+1)(a-1) = 0 \left\langle \begin{matrix} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{matrix} \right.$$

5 **Sabent que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, **calcula el valor dels determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -x & -z & -y \\ a & c & b \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

(1) Descomponem el determinant en suma de dos.

(2) Traiem $\frac{1}{2}$ factor comú de la 3a fila. El 2n determinant és 0, perquè les dues primeres files són proporcionals.

b) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|}\hline \text{COLUMNES} \\ \hline (1a)-(3a) \\ (2a)+(3a) \\ (3a) \\ \hline \end{array} \blacktriangleright \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a & b & c \\ -x & y & z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5$$

(1) Traiem –1 factor comú de la 1a columna.

c) $$\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|}\hline \text{FILES} \\ \hline (1a) \\ (2a)-(3a) \\ (3a) \\ \hline \end{array} \blacktriangleright \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{|c|}\hline \text{FILES} \\ \hline (1a)+(3a) \\ (2a) \\ (3a) \\ \hline \end{array} \blacktriangleright 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$$

(1) Traiem factor comú el 2 de la 3a fila.

d) $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -x & -z & -y \\ a & c & b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -x & -z & -y \\ a & c & b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & b \\ x & z & y \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

Rang d'una matriu

6 **Estudia el rang de les matrius següents:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) El rang és 3, ja que el determinant $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$.

b) 4a fila = 2a fila – 1a fila.

3a fila = 1a fila + 2a fila.

Per tant: $$ran\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} = ran\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rang és 2.

7 **Troba el rang d'aquestes matrius:**

a) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 6 & 10 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}}$

b) $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}}$

c) $\boldsymbol{C = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}}$

d) $\boldsymbol{D = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 2 & 7 & -3 & 0\end{pmatrix}}$

a) $A = \begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 6 & 10 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran(A) \geq 2$

Les dues últimes files són linealment independents.

Veiem si la 2a fila depèn linealment de les dues últimes:

$\begin{vmatrix}6 & 10 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ La 2a fila depèn linealment de les dues últimes.

Veiem si la 1a fila depèn de les dues últimes:

$\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Per tant, $ran\ (A) = 3$.

b) $B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Les dues primeres columnes són linealment independents. Per tant, $ran\ (B) \geq 2$.

Veiem si la 3a columna depèn linealment de les dues primeres:

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Per tant, $ran\ (B) = 3$.

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculem $|C|$:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ (1a) \\ (2a) \\ (3a) \\ (4a)-(1a) \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2-1) = 2 \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 4$$

(1) Desenvolupem per la 1a columna.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Agafem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Les dues primeres files són linealment independents.

Veiem si la 3a fila depèn linealment de les dues primeres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -3-4+7=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -8-6+14=0$$

La 3a fila depèn linealment de les altres dues.

Per tant, $ran\,(D) = 2$.

8 Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2}\boldsymbol{a} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **d)** $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a-6+4-a = a-2 = 0 \rightarrow a = 2$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$
- Si $a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2-2-2a+2 = 4a^2-2a = 0 \rightarrow 2a(2a-1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$

Observem que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\,(B) \geq 2$

- Si $a = 0 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran(B) = 2$
- Si $a = \frac{1}{2} \rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran(B) = 2$
- Si $a \neq 0$ i $a \neq \frac{1}{2} \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow ran(B) = 3$

c) $$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$$

Observem que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow ran(C) \geq 2$

Per tant:

- Si $a = 1 \rightarrow |C| = 0 \rightarrow ran(C) = 2$
- Si $a = -8 \rightarrow |C| = 0 \rightarrow ran(C) = 2$
- Si $a \neq 1$ i $a \neq -8 \rightarrow |C| \neq 0 \rightarrow ran(C) = 3$

d) $$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

- Si $a = 1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$
- Si $a = -1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$
- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1 \rightarrow |D| \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

Teorema de Rouché. Regla de Cramer

9 Aplica el teorema de Rouché per esbrinar si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 6 \\ -1 \\ -5 \end{array}\right.\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$, tenim que: $ran(A) = ran(A') = 2 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{Sumant: } 5x = 5 \rightarrow x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\} \textit{Solució: } x = 1,\ y = -5$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=-2\\ 2x-y-3z=-3\\ x-2y-2z=0\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&1&-1\\2&-1&-3\\1&-2&-2\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}-2\\-3\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Tenim que $|A|=0$ i que $\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow ran(A)=2$

Com que $\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&-1&-3\\1&-2&0\end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow ran(A')=3\neq ran(A)=2$

Per tant, el sistema és *incompatible.*

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=3\\ -x-5y+z=0\\ 3x+y-z=6\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}2&3&-1\\-1&-5&1\\3&1&-1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3\\0\\6\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}2&3\\-1&-5\end{vmatrix}=-7\neq 0$, tenim que $ran(A)=2$.

A més, $\begin{vmatrix}2&3&3\\-1&-5&0\\3&1&6\end{vmatrix}=0$. Per tant, $ran(A')=2=ran(A)<$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=3\\ -x-5y+z=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} 2x-z=3-3y\\ -x+z=5y\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Sumant: } x=3+2y\\ z=5y+x=5y+3+2y=3+7t\end{array}$$

Solucions: $x=3+2\lambda,\ y=\lambda,\ z=3+7\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=2\\ 2x+y+3z=1\\ 3x\quad+z=5\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-1&-2\\2&1&3\\3&0&1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\1\\5\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=-3\neq 0$, tenim que $ran(A)=2$.

Com que $\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\3&0&3\end{vmatrix}=6\neq 0 \rightarrow ran(A')=3\neq ran(A)=2$

Per tant, el sistema és *incompatible.*

e) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2\\ x-2y-7z=0\\ y+z=-1\\ 2x+3y\quad=0\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\1&-2&-7\\0&1&1\\2&3&0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\0\\-1\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&-7\\0&1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$ i $|A'|=0$, tenim que $ran(A)=ran(A')=3=$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible determinat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació. Apliquem la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solució: $x = 3,\ y = -2,\ z = 1$

f) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Com que $|A| = -14 \neq 0$, tenim que $ran(A) = ran(A') = 3 = nre.\ d'incògnites$.

El sistema és *compatible determinat*.

El resolem per mitjà de la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solució: $x = 0,\ y = -1,\ z = 2$

10 **Resol aquests sistemes aplicant la regla de Cramer:**

a) $$\begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y \quad\ - t = 2 \\ \qquad\quad z - t = 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 3x - y \qquad = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ \qquad 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 8 & 14 \\ 3 & -5 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \end{array}\right) \rightarrow |A| = -82 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solució: $x = 2,\ y = -1$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y \quad - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \rightarrow \text{tenim que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t$$

Solucions: $x = \dfrac{3+\lambda}{2}$, $y = \dfrac{-1-\lambda}{2}$, $z = \lambda$, $t = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} \; A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right.}_{A}\left.\begin{array}{|c} 2 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right) \to |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solució: $x = -1$, $y = -5$, $z = 7$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y = 4 + z - t \\ x + y = 2 - z + t \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z-t & -1 \\ 2-z+t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z-t \\ 1 & 2-z+t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-2z+2t}{2} = -1 - z + t$$

Solucions: $x = 3$, $y = -1 - \lambda + \mu$, $z = \lambda$, $t = \mu$

Pàgina 102

11 Estudia i resol, quan sigui possible, aquests sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ - y - z = -1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \; A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right.}_{A}\left.\begin{array}{|c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$

Com que $|A| = -6 \neq 0$, tenim que: $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible determinat*. El resolem per mitjà de la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solució: $x = \dfrac{-1}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2\\ -2x+y+z=-2\\ x+y-2z=-2\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}-2\\-2\\-2\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}=-3$ i $|A|=0$, tenim que $ran(A)=2$.

A més, $\begin{vmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\1&1&-2\end{vmatrix}=18\neq 0$. Per tant, $ran(A')=3\neq ran(A)=2$.

Per tant, el sistema és *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0\\ -x-y=1\\ -y-z=-1\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&2&1\\-1&-1&0\\0&-1&-1\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}0\\1\\-1\end{matrix}\end{array}\right)$$

Com que $|A|=0$, $\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$ i $\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&-1&1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=0$, tenim que:

$$ran(A)=ran(A')=2<\textit{nre. d'incògnites}$$

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la primera equació i fer-ho en funció de y:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y=1\\ -y-z=-1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=-1-y\\ z=1-y\end{array}\right\}$$

Solucions: $x=-1-\lambda,\ y=\lambda,\ z=1-\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+y=5\\ x+z=6\\ y+z=7\\ 2x+y+z=11\end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\2&1&1\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}5\\6\\7\\11\end{matrix}\end{array}\right)$$

Tenim que $|A'|=0$ i $\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$. Per tant, $ran(A)=ran(A')=3=\textit{nre. d'incògnites}$.

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la quarta equació:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&1&0\\6&0&1\\7&1&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-4}{-2}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&5&0\\1&6&1\\0&7&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-6}{-2}=3;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&5\\1&0&6\\0&1&7\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-8}{-2}=4$$

Solució: $x=2,\ y=3,\ z=4$

12 **Estudia i resol els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\;\; + z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ \quad\;\; y + z = -1 \\ 2x + 3y \quad\;\; = 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y - 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 1 \\ 3x \quad + z &= 3 \end{aligned}\right\} \; A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right)$$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenim que *ran* $(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Per tant, *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de la primera equació:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ 3x \quad + z &= 3 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x + y &= 1 - 3z \\ 3x \quad &= 3 - z \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= \frac{3 - z}{3} = 1 - \frac{z}{3} \\ y &= 1 - 3z - 2x = -1 - \frac{7z}{3} \end{aligned}\right\} \text{Fem } z = 3\lambda.$$

Solucions: $x = 1 - \lambda,\ y = -1 - 7\lambda,\ z = 3\lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - 2y - 7z &= 0 \\ y + z &= -1 \\ 2x + 3y \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \; A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$, tenim que:

ran $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nre. d'incògnites* $= 3$

El sistema és *compatible determinat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació. Apliquem la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solució: $x = 3,\ y = -2,\ z = 1$

13 **Resol aquests sistemes homogenis:**

a) $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 12 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, aleshores, $ran(A) = 2$.

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & z-2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Solucions: $x = \frac{\lambda}{3}$, $y = \frac{2\lambda}{3}$, $z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, aleshores $ran(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites*.

El sistema només té la solució trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Càlcul de la matriu inversa amb determinants

14 **Troba la matriu inversa de les matrius següents:**

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|M| = 2 \neq 0 \rightarrow$ la matriu M té inversa. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (M_{ij}) \longrightarrow (M_{ji}) \longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|}(M_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu inversa.

b) $|N| = 6 \neq 0 \rightarrow$ la matriu N té inversa. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (N_{ij}) \longrightarrow (N_{ji}) \longrightarrow N^{-1} = \frac{1}{|N|}(N_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow N^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ és la matriu inversa.

15 **a) Calcula la inversa de cada una d'aquestes matrius:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Resol les equacions $AX = B$ i $XB = A$ si A i B són les matrius de l'apartat anterior.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}.

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix B^{-1}.

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$XB = A \rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \rightarrow X = AB^{-1}$

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

16 Calcula la inversa de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

17 Troba els valors del paràmetre $\boldsymbol{t}$ per als quals les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ no són regulars i calcula:

a) $\boldsymbol{A^{-1}}$ si $\boldsymbol{t = 1}$.

b) $\boldsymbol{B^{-1}}$ si $\boldsymbol{t = 2}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{t} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \;\rightarrow\; t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

A no és invertible per a $t = 2$ ni per a $t = -6$.

Calculem A^{-1} per a $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no és invertible per a $t = 1$ ni per a $t = -1$.

Calculem B^{-1} per a $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per resoldre

18 Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre *m*:

a) $\begin{cases} 7y + 5z = -7 \\ 3x + 4y + mz = -1 \\ 7x + 5z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + mz = 6 \\ mx = 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} 7y + 5z &= -7 \\ 3x + 4y + mz &= -1 \\ 7x + 5z &= 7 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\begin{matrix} -7 \\ -1 \\ 7 \end{matrix}\right)$$

El sistema tindrà solució si $ran\ (A) = ran\ (A')$, segons el teorema de Rouché.

Busquem els valors que fan $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 49m - 245 = 0 \rightarrow m = 5$$

- Si $m = 5 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$

  $$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -49 + 196 - 147 = 0 \rightarrow ran\ (A') = 2$$

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- Si $m \neq 5 \rightarrow ran\ (A) = ran\ (A') = 3$, el sistema és *compatible determinat.*

b) $$\left.\begin{aligned} mx + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4m - 4 + 3 - 6 - 4m + 2 = -5$$

Com que $|A| \neq 0$ per a qualsevol valor de m, $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. El sistema és *compatible determinat* per a tot m.

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x+\ y-\ z=1\\ x-2y+\ z=3\\ 5x-5y+2z=m \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}2&1&-1\\1&-2&1\\5&-5&2\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}1\\3\\m\end{matrix}\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-2&1\\5&-5&2\end{vmatrix}=-8+5+5-10+10-2=0$$

$$\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0\ \rightarrow\ ran\ (A)=2$$

$$\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-2&3\\5&-5&m\end{vmatrix}=-4m-5+15+10+30-m=-5m+50=0\ \rightarrow\ m=10$$

- Si $m=10\ \rightarrow\ ran\ (A)=ran\ (A')=2$. El sistema és *compatible indeterminat.*
- Si $m\neq 10\ \rightarrow\ ran\ (A)=2\neq ran\ (A')=3$. El sistema és *incompatible.*

d) $$\left.\begin{array}{l} \ \ x+\ y+\ \ z=6\\ 2x+2y+mz=6\\ mx\qquad\qquad\ =0 \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\2&2&m\\m&0&0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}6\\6\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&m\\m&0&0\end{vmatrix}=m\,(m-2)=0\ <\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}$$

- Si $m=0\ \rightarrow\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&2&0&6\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}\neq 0\ \rightarrow\ ran\ (A)=ran\ (A')=2\ \rightarrow$$ El sistema és *compatible indeterminat.*

- Si $m=2\ \rightarrow\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&2&2&6\\2&0&0&0\end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix}2&2\\2&0\end{vmatrix}\neq 0;\ \begin{vmatrix}1&1&6\\2&2&6\\2&0&0\end{vmatrix}\neq 0\ \rightarrow\ ran\ (A)=2\neq ran\ (A')=3\ \rightarrow$$ El sistema és *incompatible.*

- Si $m\neq 0$ i $m\neq 2\ \rightarrow\ ran\ (A)=ran\ (A')=3\ \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

19 Discuteix els sistemes homogenis següents en funció del paràmetre *a*:

a) $$\begin{cases} 2x-ay+\ 4z=0\\ \ x+\ y+\ 7z=0\\ \ x-\ y+12z=0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x\qquad\ -\ z=0\\ \qquad ay+3z=0\\ 4x+\ y-az=0 \end{cases}$$

a) Els sistemes homogenis són sempre compatibles perquè $ran\ (A)=ran\ (A')$. Poden tenir solució única o infinites solucions. Estudiem el rang de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-a&4\\1&1&7\\1&-1&12\end{vmatrix}=24-4-7a-4+14+12a=5a+30=0\ \rightarrow\ a=-6$$

- Si $a = -6 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2$, perquè $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

  El sistema és *compatible indeterminat*.
- Si $a \neq -6 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema és *compatible determinat*.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \end{cases}$

- Si $a = 1 \rightarrow A = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hdashline 4 & 1 & -1 \end{array}\right)$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.
- Si $a = 3 \rightarrow A = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ \hdashline 4 & 1 & -1 \end{array}\right)$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.
- Si $a \neq 1$ i $a \neq 3 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3$

  El sistema és *compatible determinat*.

20 Existeix algun valor de a per al qual aquests sistemes tinguin infinites solucions?

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 2 \\ -4 \\ 2 \end{array}\right.\right)$

$|A| = 9a + 27 = 0 \rightarrow a = -3$

- Si $a = -3$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

  Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ i $\left|\begin{array}{cc:c} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 20$, aleshores $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$.

  El sistema és *incompatible*.
- Si $a \neq -3 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat*.

Per tant, no existeix cap valor de a per al qual el sistema tingui infinites solucions.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} a - 1 \\ a \\ 1 \end{array}\right.\right)$

$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

- Si $a = 1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  La 1a i la 3a equacions són contradictòries; per tant, el sistema és *incompatible*.

- Si $a = 2$, queda:

  $$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{A} \text{ Les columnes 1a, 3a i 4a són iguals, i } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

  Per tant, $ran(A) = ran(A') = 2$. El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$ → $ran(A) = ran(A') = 3$ → El sistema és *compatible determinat*.

Per tant, el sistema té infinites solucions per a $a = 2$.

21 **Discuteix els sistemes homogenis següents en funció del paràmetre a:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$$

Com que és homogeni, sabem que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \to a = -5$

- Si $a = -5$ → Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq -5$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

  El sistema és *compatible determinat*, només té la solució trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax \qquad + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Com que és homogeni, sabem que $ran(A) = ran(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \to a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -3$ o $a = 2$ → Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq -3$ i $a \neq 2$ → $ran(A) = ran(A') = 3$.

  El sistema és *compatible determinat*, només té la solució trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

c) $\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que $ran(A) = ran(A')$.

$$|A| = -2a - 5 = 0 \rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

- Si $a = -\dfrac{5}{2} \rightarrow$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$

  El sistema és *compatible determinat*, només té la solució trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3a - 46 = 0 \rightarrow a = \dfrac{46}{3}$

- Si $a = \dfrac{46}{3} \rightarrow$ Com que $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq \dfrac{46}{3} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$.

  El sistema és *compatible determinat*, només té la solució trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

22 Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:

a) $\left\{\begin{array}{r} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right.$ **e)** $\left\{\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 4 \\ m \\ 2 \end{array}\right.\right)$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Si $m = 1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictòries → Sistema *incompatible*.

- Si $m = -1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictòries → Sistema *incompatible*.

- Si $m \neq 1$ i $m \neq -1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

  El sistema és *compatible determinat*.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = m-1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\2&1&m\\1&m&1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}m-1\\m\\1\end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \left< \begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix}1&1&1\\2&1&1\\1&1&1\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right.\right) \quad \text{Contradictòries} \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $m = 2$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right.\right).$$ Les columnes 1a, 3a i 4a són iguals.

Com que $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = ran(A) = 2 <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.*

- Si $m \neq 1$ i $m \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible determinat.*

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1&2&3\\1&m&1\\2&3&4\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}0\\0\\2\end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix}1&2&3\\1&1&1\\2&3&4\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\2\end{matrix}\right.\right)$$

Com que $\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} = -1$ i $\begin{vmatrix}1&2&0\\1&1&0\\2&3&2\end{vmatrix} = -2 \neq 0$, aleshores: $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

El sistema és *incompatible.*

- Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible determinat.*

d) $$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1&m&1\\1&3&1\\m&1&1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}4\\5\\4\end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \left< \begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

- Si $m = 3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Contradictòries → Sistema *incompatible.*

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

La 1a i la 3a fila són iguals.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Per tant, $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.*

- Si $m \neq 3$ i $m \neq 1 \to ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible determinat.*

Pàgina 103

23 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$, troba:

a) Els valors de x per als quals la matriu A té inversa.

b) La inversa de A per a $x = 2$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 = 0 \to x = 3, \ x = 1$

A té inversa si $x \neq 3$ i $x \neq 1$.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $A(2I - A)$.

b) Justifica si existeixen les matrius inverses de A i $2I - A$.

c) Per a quin valor de k es verifica $A^{-1} = kI - A$?

a) $A(2I - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2I - A) = I \to A$ i $2I - A$ tenen inversa i cada una és la inversa de l'altra:

$A^{-1} = 2I - A$

$(2I - A)^{-1} = A$

c) $k = 2$

25 **Donada** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$**, troba** $\boldsymbol{X}$ **tal que** $\boldsymbol{AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$**.**

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}A^{-1}$$

Calculem A^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

26 **Donades les matrius** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ **i** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$**, troba la matriu** $\boldsymbol{X}$ **tal que** $\boldsymbol{AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$**.**

$$AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B^{-1} \rightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B^{-1}$$

Calculem A^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem B^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

27 **Resol l'equació** $\boldsymbol{AXB = C}$ **si:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$AXB = C \rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Calculem A^{-1} i B^{-1} ($|A| = 1$ i $|B| = 1$ $\rightarrow$ existeixen A^{-1} i B^{-1}):

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

28 Donades les matrius:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

troba la matriu X que verifica $(AB^t + C)X = D$.

$$(AB^t + C)X = D \rightarrow (AB^t + C)^{-1}(AB^t + C)X = (AB^t + C)^{-1}D \rightarrow X = (AB^t + C)^{-1}D$$

- Sigui $E = AB^t + \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- Calculem E^{-1} $(|E| = 6 \neq 0 \rightarrow$ existeix $E^{-1})$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow (E_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow (E_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow E^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

- Per tant:

$$X = (AB^t + C)^{-1}D = E^{-1}D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

29 Troba X tal que $3AX = B$, si:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3AX = B \rightarrow X = \frac{1}{3}A^{-1}B$$

Calculem A^{-1} $(|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix $A^{-1})$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

30 Donades les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Per a quins valors de m existeix A^{-1}?

b) Per a $m = 1$, troba la matriu X tal que $XA + B = C$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m$

Existeix A^{-1} si $m \neq 0$.

b) $XA + B = C \rightarrow XA = C - B \rightarrow X = (C - B)A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (C-B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

31 **Siguin les matrius** $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina per a quins valors de k la matriu AB té inversa.

b) Resol l'equació $ABX = 3I$ per a $k = 0$, on I és la matriu unitat d'ordre 2.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3k - 2 = 0 \ \rightarrow \ k = -\frac{2}{3}$$

Existeix $(AB)^{-1}$ per a $k \neq -\dfrac{2}{3}$.

b) $ABX = 3I \ \rightarrow \ X = 3(AB)^{-1}$

$$k = 0 \ \rightarrow \ AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = 3\begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

32 **Escriu en la forma habitual aquests sistemes i resol-los si és possible:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y + 2x &= 4 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + 3y &= 4 - 2\lambda \\ x - y &= \lambda \end{aligned}\right\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-2\lambda & 3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4-\lambda}{-4} = \frac{4+\lambda}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-2\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4+3\lambda}{-4} = \frac{4-3\lambda}{4}$$

Solucions: $x = \dfrac{4+\lambda}{4}$, $y = \dfrac{4-3\lambda}{4}$, $z = \lambda$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x - y &= 0 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A') = 3$$

Com que $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema és *incompatible*.

33 **Escriu les equacions lineals del sistema $AX = B$ i resol-lo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.**

$$AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicant les matrius del primer terme:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 4z = 11 \\ 3x + y \quad\;\; = \;\;5 \\ -x + \quad\;\; z = \;\;2 \end{array}\right\}$$

Resolem el sistema:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}}_{B}\right)$$

$|A| = 8 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Sistema *compatible determinat*.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Solució: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

34 **Expressa en forma matricial i resol amb la matriu inversa:**

a) $\begin{cases} 2x + y \quad\;\; = 2 \\ \quad\;\; y + 3z = 0 \\ 2x + y + \;\; z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + \;\; y - \;\; z = 3 \\ 2x + \;\; y + \;\; z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y \quad\;\; = -1 \\ \quad\;\; y + z = -2 \\ x \quad\;\; + z = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y + \;\; z = 3 \\ \quad\;\; 3y + \;\; z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y \quad\;\; = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + \;\; z = 2 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tant: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $$\left.\begin{array}{l} x+y-z=3\\ 2x+y+z=-2\\ x-2y-3z=1\end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\1&-2&-3\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix}-1&-7&-5\\-5&-2&-3\\2&3&-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-1&7&-5\\5&-2&3\\2&-3&-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}$$

Per tant:

$$A\cdot X = B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11\\22\\-22\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Per tant: $x = -1,\ y = 2,\ z = -2$

c) $$\left.\begin{array}{l} x+y=-1\\ y+z=-2\\ x+z=3\end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Per tant:

$$A\cdot X = B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Per tant: $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3\\ 3y+z=4\\ x+2y+2z=4\end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 3 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix}4&-1&-3\\2&1&0\\-1&1&3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&1&0\\-1&-1&3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}$$

Per tant:

$$A\cdot X = B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Per tant: $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$

35 **Resol el sistema següent:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 16 \neq 0 \to$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$A \cdot X = B \to X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant: $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$

36 **Estudia els sistemes d'equacions següents. Resol-los quan siguin compatibles i interpreta geomètricament les solucions obtingudes:**

$$\textbf{a)} \begin{cases} \boldsymbol{x + ay - z = 1 + a} \\ \boldsymbol{x + y - az = a} \\ \boldsymbol{x - y - z = a} \end{cases}$$

$$\textbf{b)} \begin{cases} \boldsymbol{x + z = 1} \\ \boldsymbol{y + (a-1)z = 0} \\ \boldsymbol{x + (a-1)y + az = a} \end{cases}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \to 1 - a^2 = 0 \to a = \pm 1$

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 1 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema és *compatible determinat.*

  El resolem fent servir la regla de Cramer:

  $$x = \frac{-a + a^2 + 1}{a - 1};\quad y = \frac{1}{a+1};\quad z = \frac{2}{a^2 - 1}$$

- Si $a = -1$:

  $$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x + y + z &= -1 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

  Afegim la 4a columna i la 3a fila:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

  Per tant, $ran(A) \neq ran(A') \to$ El sistema és *incompatible.*

- Si $a = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la 4a columna i la 2a fila:

$$\left|\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 2 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Per tant, $ran(A) \neq ran(A') \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

Interpretació geomètrica:

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 1$, tenim tres plans que es tallen en un punt.
- Si $a = -1$, el primer i el tercer pla són paral·lels i el segon els talla.
- Si $a = 1$, el primer i el segon pla són paral·lels i el tercer els talla.

b) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = 2,\ a = 1$$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat*.

Fent servir la regla de Cramer:

$$x = \frac{a-1}{a-2};\quad y = \frac{a-1}{a-2};\quad z = -\frac{1}{a-2}$$

- Si $a = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad z = 1 \\ y \quad = 0 \\ x + \quad z = 1 \end{array}\right\}$$

Les equacions 1a i 3a són iguals. Agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre.

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad z = 1 \\ y \quad = 0 \end{array}\right\}$$

Solucions: $x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$

- Si $a = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x + \qquad z = 1 \\ y + \ z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la 4a columna i la 3a fila:

$$\left|\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Per tant, $ran\ (A) \neq ran\ (A') \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

Interpretació geomètrica:

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$, tenim tres plans que es tallen en un punt.
- Si $a = 1$, dos plans són coincidents i es tallen en una recta amb el tercer.
- Si $a = 2$, els plans es tallen dos a dos.

37 **Sigui la matriu:** $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Determina per a quins valors de m la matriu és singular.

b) Resol, si és possible, el sistema següent per a $m = 1$ i $m = -1$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m+2 & 2 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} =$

$$= (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1) = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

A és singular per a $m = -1$ i $m = 1$.

b) • Si $m = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ -2x + y + 2z &= 8 \\ -2x + y &= 8 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Afegim la 4a columna i la 3a fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

El sistema és *incompatible*.

• Si $m = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 \\ 3y + 2z &= 8 \\ 3y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\} \text{ Les equacions 2a i 3a són iguals.}$$

Ens quedem amb les dues primeres equacions i agafem x com a paràmetre.

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 \\ 3y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Solucions: $x = \lambda,\ y = 2,\ z = 1$

38 **a) Considera la matriu** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **i calcula el rang de les matrius** AA^t **i** A^tA**.**

b) Resol el sistema d'equacions lineals homogeni la matriu de coeficients del qual és A^tA**.**

c) Resol el sistema d'equacions lineals homogeni la matriu de coeficients del qual és AA^t**.**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \to ran\,(AA^t) = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to ran\,(A^tA) = 2$$

b) Com que el rang és 2, seleccionem el menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podem suprimir la 3a equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= -z \\ 2x + y &= -z \end{aligned}\right\} \to x = z, \; y = -3z$$

Solucions: $x = \lambda, \; y = -3\lambda, \; z = \lambda$

c) Com que $ran\,(AA^t) = 2 = nre.\ d'incògnites,$ el sistema només té la solució trivial: $x = 0, \; y = 0.$

Pàgina 104

39 **Donada la matriu:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

determina B **perquè es verifiqui** $B - I = A^tA^{-1}$**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = 4 \neq 0 \to$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculem $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^t \cdot A^{-1} + I = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

40 Estudia el rang de les matrius següents segons els valors del paràmetre que contenen:

a) $A=\begin{pmatrix} k & k & -1 & 2\\ 3 & -k & 0 & 0\\ 5 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1\\ k & k & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0\\ -1 & -1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{pmatrix}$ **d)** $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ -t & 6 & 3-t & 9-t\end{pmatrix}$

a) $$|A| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & -2\\ 3 & -k & 0 & 0\\ 5 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{array}{l}\text{FILES}\\ (1a)-2\cdot(4a)\\ (2a)\\ (3a)\\ (4a)\end{array} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 & 0\\ 3 & -k & 0 & 0\\ 5 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5\\ 3 & -k & 0\\ 5 & k & 0\end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= -5\begin{vmatrix} 3 & -k\\ 5 & k\end{vmatrix} = -40k = 0 \rightarrow k = 0$$

(1) Desenvolupem per la 4a columna.

(2) Desenvolupem per la 3a columna.

- Si $k = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2\\ 5 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$
- Si $k \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran(A) = 4$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3\\ k & k & 3\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix} = 6k - 18 \rightarrow 6k - 18 = 0 \rightarrow k = 3$

- Si $k = 3 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ 3 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow ran(B) = 3$
- Si $k \neq 3 \rightarrow ran(B) = 3$

Per tant, $ran(B) = 3$ per a qualsevol valor de k.

c) Observem que $ran\,(C) \leq 3$ perquè només hi ha tres files.

$\begin{vmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(C) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0\\ -1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3 = 0 < \begin{matrix} k=-1\\ k=3\end{matrix}$; $\begin{vmatrix} k & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix} = -k^2 + 1 = 0 < \begin{matrix} k=1\\ k=-1\end{matrix}$

- Si $k = -1 \rightarrow ran(C) = 2$
- Si $k \neq -1 \rightarrow ran(C) = 3$

d) Observem que $ran\,(D) \leq 3$ perquè només hi ha tres files.

$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\,(D) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -t & 6 & 3-t\end{vmatrix} = t - 9 = 0 \rightarrow t = 9;$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -t & 6 & 9-t\end{vmatrix} = t - 9 = 0 \rightarrow t = 9$

- Si $t \neq 9 \rightarrow ran\,(D) = 3$
- Si $t = 9 \rightarrow ran\,(D) = 2$

41 **Calcula el rang d'aquestes matrius en funció del paràmetre t:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -4 & 8 & t \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Observem que $ran\,(A) \le 3$ perquè només hi ha tres files.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ne 0 \rightarrow ran\,(A) \ge 2$$

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 - 5t + 2 = 0 \begin{cases} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^3 - 4t^2 - t + 2 = 0 \begin{cases} t = 2 \\ t = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

- Si $t = 2 \rightarrow ran\,(A) = 2$
- Si $t \ne 2 \rightarrow ran\,(A) = 3$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{vmatrix} = t(t^2 - 3t + 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

- Si $t = 0 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ne 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$
- Si $t = 1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \ne 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$
- Si $t = 2 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \ne 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$
- Si $t \ne 0$, $t \ne 1$ i $t \ne 2 \rightarrow ran\,(B) = 3$

c) Observem que $ran\,(C) \le 3$ perquè només hi ha tres columnes.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \ne 0 \rightarrow ran\,(C) \ge 2$$

$$\begin{vmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \end{vmatrix} = -9t + 18 = 0 \rightarrow t = 2; \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{vmatrix} = -3t + 6 = 0 \rightarrow t = 2$$

- Si $t = 2 \rightarrow ran\,(C) = 2$
- Si $t \ne 2 \rightarrow ran\,(C) = 3$

d) Observem que $ran\,(D) \le 3$ perquè només hi ha tres files.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -24 \ne 0 \rightarrow ran\,(D) \ge 2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & t \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 6t = 0 \rightarrow t = 4$$

- Si $t \ne 4 \rightarrow ran\,(D) = 3$
- Si $t = 4 \rightarrow ran\,(D) = 2$

42 **Donada la matriu** $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$**:**

a) Resol l'equació $|A| = 0$**.**

b) Calcula el rang de la matriu A **segons els valors de** x**.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$

b) Si $x = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A) = 1$

Si $x = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

Si $x \neq -1$ i $x \neq 2 \rightarrow ran(A) = 3$

43 **Donada la matriu** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**:**

a) Troba l'expressió general de A^n **on** n **és un nombre natural qualsevol.**

b) Raona que A^n **té inversa per a qualsevol** $n \geq 1$ **i calcula aquesta matriu inversa.**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow A^n$ té inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

44 **Discuteix els sistemes següents en funció del paràmetre i resol-los quan siguin compatibles:**

a) $\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{matrix}\right\}$ aquest sistema és *compatible* perquè és homogeni.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = -2a^3 - 2a = 0 \;\rightarrow\; a = 0$$

- Si $a \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3 \;\rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

  Solució: $x = 0,\; y = 0,\; z = 0$

- Si $a = 0$:

  $$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ -y &= 0 \\ -x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

  Les dues primeres equacions són equivalents. El sistema queda:

  $$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ -x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

  Solucions: $x = 0,\; y = 0,\; z = \lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 0 \\ x - my - z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 2,\; m = 1$$

- Si $m \neq 1$ i $m \neq 2 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3 \;\rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*

  Fent servir la regla de Cramer: $x = 0,\; y = -\dfrac{1}{m-1},\; z = \dfrac{1}{m-1}$

- Si $m = 1$:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

  Afegim l'última columna.

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 3 \;\rightarrow\; \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $m = 2$:

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

  Afegim l'última columna.

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 2$$

  Sistema *compatible indeterminat.* Agafem les dues primeres equacions i passem z al segon membre com a paràmetre.

  $$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

  Solucions: $x = \dfrac{1-\lambda}{5},\; y = -\dfrac{3\lambda - 2}{5},\; z = \lambda$

45 **Discuteix i resol els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} mx + y + z = 2 \\ 2x + my + m^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} \lambda x + \quad 2z &= 0 \\ \lambda y - z &= \lambda \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}\right\} \; |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1,\ \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq -1$ i $\lambda \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

  Fent servir la regla de Cramer obtenim la *solució*:

  $$x = -\frac{4}{\lambda + 1};\quad y = \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1};\quad z = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$$

- Si $\lambda = 0$:

  $$\left.\begin{aligned} 2z &= 0 \\ -\ z &= 0 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

  Les dues primeres equacions són equivalents.

  $$\left.\begin{aligned} -z &= 0 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

  Sistema *compatible indeterminat.*

  Passem y al segon membre com a paràmetre.

  Solucions: $x = -3\mu + 5,\ y = \mu,\ z = 0$

- Si $\lambda = -1$:

  $$\left.\begin{aligned} -x + \quad 2z &= 0 \\ -y - z &= -1 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}\right\} \; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

  Sistema *incompatible.*

b) $$\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 2 \\ 2x + my + m^2 z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \; |A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m & m^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 2m = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

- Si $m \neq 0,\ m \neq 1$ i $m \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

  Fem servir la regla de Cramer i obtenim la *solució*:

  $$x = 0;\quad y = -\frac{2m^2 - 1}{m - m^2};\quad z = \frac{2m - 1}{m - m^2}$$

- Per a $m = 0$, la matriu de coeficients és:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

  Sistema *incompatible.*

- Per a $m = 1$, la matriu de coeficients és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

Sistema *incompatible*.

- Per a $m = 2$, la matriu de coeficients és:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to ran(A') = 2$$

Sistema *compatible indeterminat*. Agafem les dues primeres files i passem z al segon membre com a paràmetre.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solucions: $x = \lambda + \dfrac{3}{2},\ y = -3\lambda - 1,\ z = \lambda$

46 Discuteix el sistema següent i resol-lo, si és possible, en el cas $a = 4$:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a(a-1) = 0 \to a = 0,\ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$ → $ran\ (A) = 3 = ran\ (A')$ → El sistema és *compatible determinat*.
- Si $a = 0 \to A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\ (A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to ran\ (A') = 2$$

El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a = 1 \to A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\ (A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\ (A') = 3$$

El sistema és *incompatible*.

- Si $a = 4$, es tracta d'un sistema *compatible determinat*. El resolem per Cramer:

Solució: $x = \dfrac{11}{3},\ y = \dfrac{-1}{3},\ z = \dfrac{1}{3}$

Qüestions teòriques

47 **Cert o fals? Justifica les respostes i posa'n exemples.**

a) Si c_1, c_2 i c_3 són les columnes 1a, 2a i 3a d'una matriu quadrada d'ordre 3 tal que $|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 5$, llavors:

I) $|c_2\ \ 2c_3\ \ c_1| = 10$

II) $|c_1 + c_2\ \ \ c_2 - c_1\ \ \ c_3| = 0$

III) $|c_1 + c_3\ \ \ c_2\ \ \ c_3 + c_1| = 5$

IV) $|-c_2\ \ \ 2c_1 - c_3\ \ \ c_3 + c_2| = 10$

b) El sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ és compatible indeterminat per a qualsevol valor de a i b.

c) Si el determinant de la matriu ampliada d'un sistema de quatre equacions i tres incògnites és diferent de zero, el sistema té solució única.

d) Si el rang de la matriu de coeficients d'un sistema és menor que el nombre d'incògnites, el sistema és compatible indeterminat.

a) I) Cert:

$$|c_2\ \ 2c_3\ \ c_1| = 2|c_2\ \ c_3\ \ c_1| = (-1)^2\, 2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$$

II) Fals:

$$|c_1 + c_2\ \ \ c_2 - c_1\ \ \ c_3| = |c_1 + c_2\ \ \ 2c_2\ \ \ c_3| = 2|c_1 + c_2\ \ \ c_2\ \ \ c_3| = 2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$$

III) Fals:

$$|c_1 + c_3\ \ \ c_2\ \ \ c_3 + c_1| = |c_1 + c_3\ \ \ c_2\ \ \ 0| = 0$$

IV) Cert:

$$|-c_2\ \ \ 2c_1 - c_3\ \ \ c_3 + c_2| = |-c_2\ \ \ 2c_1 - c_3\ \ \ c_3| = |-c_2\ \ \ 2c_1\ \ \ c_3| = 2|-c_2\ \ \ c_1\ \ \ c_3| =$$
$$= -2|c_2\ \ c_1\ \ c_3| = (-1)(-2)|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$$

b) Cert, $ran(A) = 2$, i com que només hi ha dues files, A' no pot tenir un rang més elevat. És *compatible determinat* per a qualsevol valor de a i b.

c) Fals, pot ser també *incompatible*. Per exemple:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x\ + & y\ + & z & = 0 \\ & 2y\ + & 2z & = 3 \\ & 3y\ + & 3z & = 1 \\ x\ - & y & & = -1 \end{array}\right\}$$

Té $|A'| = 7 \neq 0$, però $ran(A) = 3$ → El sistema és *incompatible*.

d) Fals, pot ser també *incompatible*. Per exemple:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x\ + & y\ + & z & = 3 \\ 2x\ + & 2y\ + & 2z & = 4 \\ 3x\ + & 3y\ + & 3z & = 5 \end{array}\right\}$$

$ran(A) = 1$, $ran(A') = 2$

48 **En un sistema d'igual nombre d'equacions que d'incògnites, el determinant de la matriu de coeficients és igual a 0. Respon raonadament les preguntes següents:**

a) Pot ser compatible?

b) Pot tenir solució única?

c) Es pot aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podria ser compatible indeterminat si $ran(A) = ran(A') < nre.\ d'incògnites$.

b) No, perquè com que $ran(A) < nre.\ d'incògnites$, el sistema no pot ser compatible determinat.

c) Sí, si és compatible, passant al segon membre les incògnites que sigui necessari.

49 **El rang de la matriu de coeficients d'un sistema homogeni de quatre equacions i tres incògnites és igual a 3. Què en pots dir de la solució? Argumenta la resposta.**

Com que el sistema homogeni té 3 incògnites, tenim que:

$$ran\ (A) = ran\ (A') = nre.\ d'incògnites = 3$$

El sistema seria *compatible determinat*. Per tant, tindria com a solució única la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Pàgina 105

50 **El rang de la matriu de coeficients d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és igual a 1. Quin rang, com a màxim, pot tenir la matriu ampliada?**

Com a màxim, la matriu ampliada podrà tenir rang 2.

51 **Si en un sistema de quatre equacions i quatre incògnites es verifica que $ran(A) = ran(A') = 2$, es pot aplicar la regla de Cramer? En cas afirmatiu, explica les transformacions que s'han de fer en el sistema per aplicar-la.**

Sí es pot aplicar la regla de Cramer. Per a això, ens hem de quedar només amb les dues equacions i les dues incògnites amb les quals hem format el menor d'ordre 2 diferent de zero. Les dues incògnites sobrants passen com a paràmetres al segon membre.

52 **Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} a+3 \\ b \\ c+3 \end{pmatrix}$.**

Justifica que si el sistema $AX = B$ és compatible determinat, llavors el sistema $AX = C$ també ho és.

Si $AX = B$ és compatible determinat, aleshores $ran(A) = ran(A') = 2$.

Per a això, el determinant següent ha de ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c = 0$$

Calculem el determinant de la matriu ampliada corresponent al sistema $AX = C$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c+3 \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c$$

Els dos determinants calculats tenen el mateix valor; per tant, aquest últim val zero. Consegüentment, el sistema $AX = C$ és *compatible determinat* ja que també verifica que $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

53 **a) Demostra que el sistema d'equacions següent té sempre solució per a qualsevol valor de α i β:**

$$\begin{cases} x - y + (\alpha + \beta) z = \alpha \\ x \quad + \quad\quad z = \beta \\ x \quad - \quad\quad z = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

b) És possible que tingui infinites solucions per a algun valor de α i β?

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y + (\alpha+\beta) z = \alpha \\ x \quad + \quad\quad z = \beta \\ x \quad - \quad\quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$$

El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de α i β.

b) Per l'apartat anterior sabem que el sistema serà sempre *compatible determinat*; per tant, la solució sempre serà única. No pot tenir infinites solucions.

Per aprofundir

54 **Discuteix, en funció dels paràmetres a i b, aquest sistema d'equacions:**

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 3a = 0 \rightarrow a = 2$$

- Si $a \neq 2 \rightarrow ran\,(A) = 3 = ran\,(A') \rightarrow$ Sistema *compatible determinat.*
- Si $a = 2$, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & b \end{vmatrix} = 25 - 5b = 0 \rightarrow b = 5$$

Si $b \neq 5 \rightarrow ran\,(A') = -3 \neq ran\,(A) = 2 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*

Si $b = 5 \rightarrow ran\,(A') = 2 = ran\,(A) \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat.*

55 **Discuteix els sistemes següents en funció del paràmetre i resol-los quan siguin compatibles:**

a) $$\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40k = 0 \to k = 0$$

- Si $k \neq 0 \to ran(A') = 4 \neq ran\ (A) \to$ Sistema *incompatible.*
- Si $k = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x \quad = 0 \\ 5x \quad = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Les equacions 2a i 3a són equivalents, ens queda:

$$\left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x \quad = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

El determinant de la matriu ampliada en aquest cas és:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

Com que $ran(A) < 3$, el sistema és *incompatible.*

Aquest sistema no té solució per a cap valor de k.

b) $$\left.\begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7m - m^2 = 0 \to m = 7,\ m = 0$$

- Si $m \neq 0$ i $m \neq 7 \to ran(A') = 4 \neq ran\ (A) \to$ Sistema *incompatible.*
- Si $m = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

Les equacions 2a i 3a són equivalents; per tant, el sistema és equivalent a:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+\ z=5 \\ 2z=0 \\ x-\ y+\ z=0 \end{array}\right\}$$

El determinant de la matriu de coeficients en aquest cas és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \ \rightarrow\ ran(A) = 3 = ran(A') \ \rightarrow\ \text{Sistema } \textit{compatible determinat.}$$

Fent servir la regla de Cramer obtenim la *solució*: $x = \frac{5}{4},\ y = \frac{5}{4},\ z = 0$

- Si $m = 7$:

$$\left.\begin{array}{rl} x+3y+\ z & =5 \\ 7x+\qquad 2z & =0 \\ 7y-\ z & =7 \\ x-\ y+\ z & =0 \end{array}\right\}$$

El menor format pels coeficients de les tres primeres equacions és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0 \ \rightarrow\ ran(A) = 3 = ran(A') \ \rightarrow\ \text{Sistema } \textit{compatible determinat.}$$

Ens quedem només amb les tres primeres equacions:

$$\left.\begin{array}{rl} x+3y+\ z & =5 \\ 7x+\qquad 2z & =0 \\ 7y-\ z & =7 \end{array}\right\}$$

Fent servir la regla de Cramer obtenim la *solució*: $x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{5}{4},\ z = \frac{7}{4}$

56 **Discuteix aquests sistemes:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - y + z = 2} \\ \mathbf{2x + 3y - 2z = -8} \\ \mathbf{4x + y + az = b} \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y + z = a - 1} \\ \mathbf{2x + y + az = a} \\ \mathbf{x + ay + z = b} \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - 3y + z = a} \\ \mathbf{x \qquad - z = b} \\ \mathbf{x \qquad + z = c} \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{ax + y - z = b - 1} \\ \mathbf{2x + ay \qquad = b + 1} \\ \mathbf{-x \qquad + z = b} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x-\ y+\ z=2 \\ 2x+3y-2z=-8 \\ 4x+\ y+az=b \end{array}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array}\right)$, with the first three columns $\underbrace{}_{A}$

$|A| = 5a = 0 \ \rightarrow\ a = 0$

- Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{array}\right);\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0;\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \ \rightarrow\ b = -4$$

  - Si $a = 0$ i $b = -4$ → $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* → El sistema és *compatible indeterminat.*
  - Si $a = 0$ i $b \neq -4$ → $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$ → El sistema és *incompatible.*

- Si $a \neq 0$ → $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites* → El sistema és *compatible determinat,* qualsevol que sigui el valor de b.

b) $$\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=a-1 \\ 2x+\ y+az=a \\ x+ay+\ z=b \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\2&1&a\\1&a&1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}a-1\\a\\b\end{matrix}\end{array}\right)$$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \end{array}\right.$$

- Si $a=1$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&1&b\end{array}\right)\quad \text{Contradictòries, a no ser que } b=0.$$

— Si $a=1$ i $b \neq 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

— Si $a=1$ i $b=0$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&1&0\end{array}\right)\quad \text{La 1a fila i la 3a són iguals.}$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 < nre.\ d'incògnites \rightarrow \textit{Compatible indeterminat.}$$

- Si $a=2$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&1&2&2\\1&2&1&b\end{array}\right)\quad \text{La 1a columna i la 3a són iguals.}$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2;\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&b\end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \rightarrow b=1$$

— Si $a=2$ i $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

— Si $a=2$ i $b=1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 < nre.\ d'incògnites \rightarrow$ El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 = nre.\ d'incògnites \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de b.

c) $$\left.\begin{array}{l} x-3y+z=a \\ x\qquad -z=b \\ x\qquad +z=c \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-3&1\\1&0&-1\\1&0&1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\end{array}\right)$$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 = nre.\ d'incògnites \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de a, b i c.

d) $$\left.\begin{array}{l} ax+\ y-z=b-1 \\ 2x+ay\qquad =b+1 \\ -x\qquad +z=b \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}a&1&-1\\2&a&0\\-1&0&1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}b-1\\b+1\\b\end{matrix}\end{array}\right)$$

$$|A| = a^2-a-2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$$

- Si $a=-1$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&b-1\\2&-1&0&b+1\\-1&0&1&b\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b-1 \\ 2 & -1 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = -3b = 0 \;\rightarrow\; b = 0$$

— Si $a = -1$ i $b \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

— Si $a = -1$ i $b = 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & 2 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \;\rightarrow\; b = 1$$

— Si $a = 2$ i $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *incompatible*.

— Si $a = 2$ i $b = 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema és *compatible indeterminat*.

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de b.

Autoavaluació

Pàgina 105

1 **Demostra que la matriu $B(y)$ no té inversa per a cap valor de y.**

$$B(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot y = 0$$

Per tant, $B(y)$ no té inversa per a cap valor de y.

2 **Discuteix en funció de a el sistema següent i resol-lo si $a = 3$:**

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - 2z = 6 \end{cases}$$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ 3a \\ 6 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -4 + a^2 + 2 - 4 + a - 2a = a^2 - a - 6 = 0 \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq -2$ i $a \neq 3 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*
- Si $a = -2$:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -2 \\ -6 \\ 6 \end{matrix}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3$$

Com que $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *incompatible.*

- Si $a = 3$:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{matrix}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\,(A') = 2$$

Com que $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema és *compatible indeterminat.*

- Resolem ara el sistema per a $a = 3$:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{array}\right\}$$

Sabem que el sistema és *compatible indeterminat.* Eliminem la 3a equació, passem z al segon membre com a paràmetre i resolem el sistema aplicant la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x - \;\; y &= 3 - z \\ 3x + 2y &= 9 + z \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15-z}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+z \end{vmatrix}}{5} = \frac{4z}{5}$$

Solucions: $x = \dfrac{15-\lambda}{5}$, $y = \dfrac{4\lambda}{5}$, $z = \lambda$

3 Determina per a quins valors de a existeix la matriu inversa de M. Calcula aquesta matriu inversa per a $a = 2$.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-a} \\ \boldsymbol{2a} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- La matriu tindrà inversa si el seu determinant és diferent de zero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -2(a^3 - a) = 0 \rightarrow -2a(a^2-1) = 0 \; \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

M té inversa si $a \neq 0$, $a \neq 1$ i $a \neq -1$.

- Per a $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \; |M| = -12$$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{12}\,(M_{ji}) = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

4 Troba la matriu X que verifica la igualtat en cada cas:

a) $A^{-1}XA = B$

b) $(A + X)B = 1$

si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^{-1}XA = B \rightarrow AA^{-1}XAA^{-1} = ABA^{-1} \rightarrow X = ABA^{-1}$

Calculem A^{-1} $(|A| = -3 + 2 = -1)$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $(A + X)B = I \rightarrow AB + XB = I \rightarrow XB = I - AB \rightarrow XBB^{-1} = (I - AB)\,B^{-1} \rightarrow$

$\rightarrow X = (I - AB)\,B^{-1} \rightarrow X = B^{-1} - A$

Calculem B^{-1} $(|B| = 1 + 2 = 3)$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

5 a) Discuteix, en funció de *a*, el sistema següent:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + ay + z = a + 2} \\ \boldsymbol{x + y + az = -2(a+1)} \\ \boldsymbol{ax + y + z = a} \end{cases}$$

b) Resol el sistema anterior per al cas *a* = –1.

a) $\left.\begin{array}{r} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right\} \; A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} a+2 \\ -2(a+1) \\ a \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a-1)^2(a+2) = 0 < \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}$$

- Si $a = 1$:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$ Les tres equacions resultants són contradictòries.

  El sistema és *incompatible.*

- Si $a = -2$:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

  Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, aleshores $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites.*

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema és *compatible determinat.*

b) Per a $a = -1$:

$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right)$ i sabem que $|A| = 4$.

El sistema en aquest cas és *compatible determinat.* El resolem aplicant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Solució: $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = 0$

6 **Demostra que no hi ha valors de m per als quals aquest sistema no tingui solució. Resol-lo:**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{matrix}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{matrix}}_{A}$$

$|A| = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$

- Si $m = 4$:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ \hdashline 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

La 4a columna s'obté sumant la 2a i la 3a. Per tant, $ran(A) = ran(A')$. El sistema és *compatible indeterminat* ja que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$$

El resolem en aquest cas. Podem prescindir de la 3a equació:

$$\left.\begin{matrix} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x + 2y = 3 - z \\ x + 3y = 5 - 2z \end{matrix}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 2 \\ 5 - 2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 1 & 5 - 2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

Solucions: $x = -1 + \lambda,\ y = 2 - \lambda,\ z = \lambda$

- Si $m \neq 4 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible determinat*.

El resolem en aquest cas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{4 - m}{4 - m} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{0}{4 - m} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{8 - 2m}{4 - m} = \frac{2(4 - m)}{4 - m} = 2$$

Solució: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2$

Per tant, no hi ha cap valor de m per al qual el sistema no tingui solució.

7 El rang de la matriu dels coeficients d'un sistema de quatre equacions amb tres incògnites és 3. Quin rang pot tenir la matriu ampliada? Partint d'això, quantes solucions té el sistema?

La matriu ampliada és una matriu quadrada d'ordre 4.

El seu rang pot ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $ran(A) = ran(A') = 3 = nre.\ d'incògnites \longrightarrow$ El sistema serà *compatible determinat*.
- Si $ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4 \longrightarrow$ El sistema serà *incompatible*.

8 En un sistema homogeni de tres equacions i dues incògnites, la matriu dels coeficients té rang 2. Digues, raonadament, quantes solucions tindrà el sistema.

En un sistema homogeni el rang de la matriu dels coeficients i el rang de la matriu ampliada sempre coincideixen ja que en afegir una columna de zeros no canvia el rang.

Per tant, tenim que $ran(A) = ran(A') = 2 = nre.\ d'incògnites$. El sistema serà *compatible determinat*. Només té una solució, que és la trivial: $x = 0$, $y = 0$.