Resol

Pàgina 131

Pensa i troba límits

1. Fes servir el teu sentit comú per assignar valor als límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-5x^2}{x^2+1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5} = -\infty$

2. Temptejant amb la calculadora, dona el valor d'aquests límits:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln(x-3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

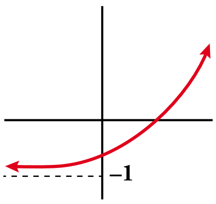
b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln(x-3) = 0$

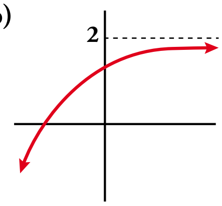
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \approx 403,43$

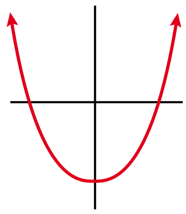
1 Idea gràfica dels límits de funcions

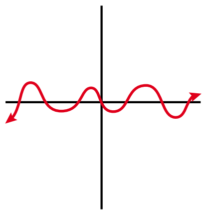
Pàgina 132

1 Descriu per mitjà d'un límit cada una de les branques següents:

a)


b)


c)


d)


a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existeix; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existeix

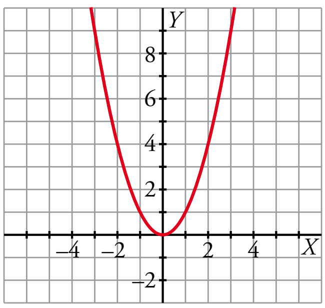
2 Assigna $\lim\limits_{x \to -\infty}$ i $\lim\limits_{x \to +\infty}$ a cada una d'aquestes funcions conegudes (dibuixa'n esquemàticament la gràfica):

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = -x^2$ **c)** $f(x) = x^3$

d) $f(x) = -x^3$ **e)** $f(x) = sin\ x$ **f)** $f(x) = tg\ x$

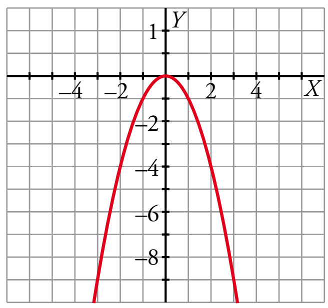
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



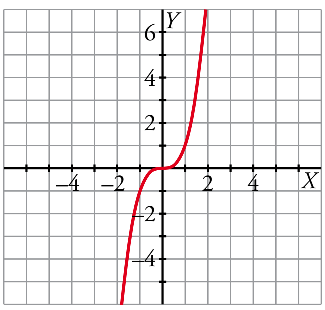
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



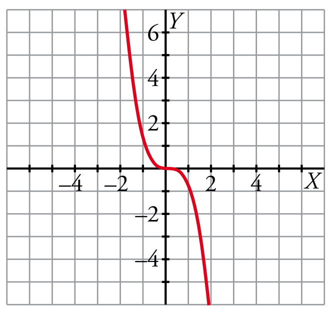
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



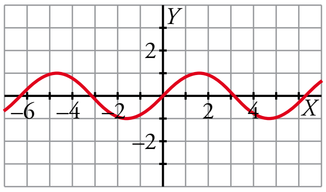
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



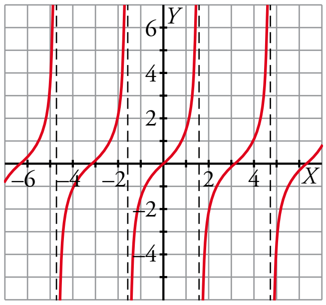
e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ no existeix

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ no existeix



f) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ no existeix

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ no existeix



3 **Dibuixa, en cada cas, una funció que compleixi:**

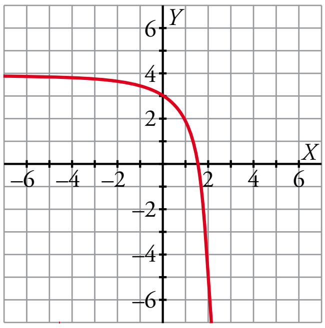
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

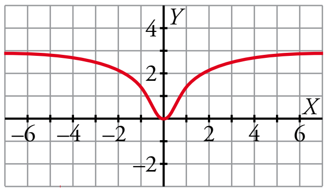
c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

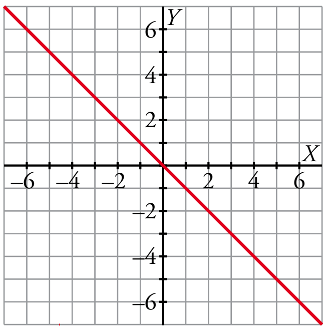
a)



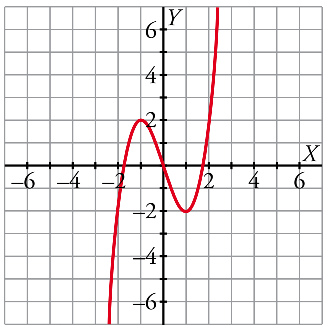
b)



c)

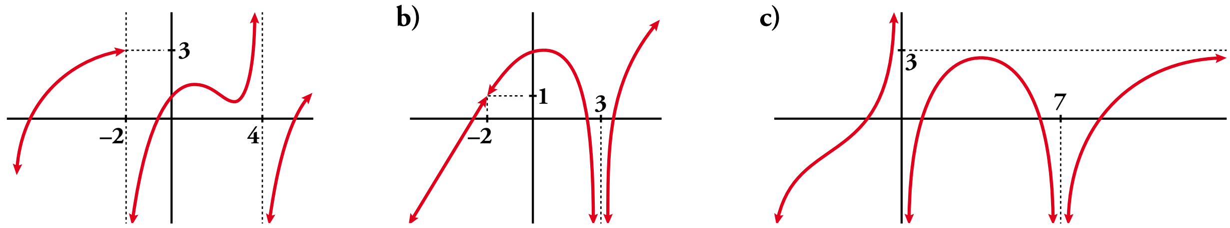


d)



Pàgina 133

4 **Descriu amb límits les branques següents:**



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

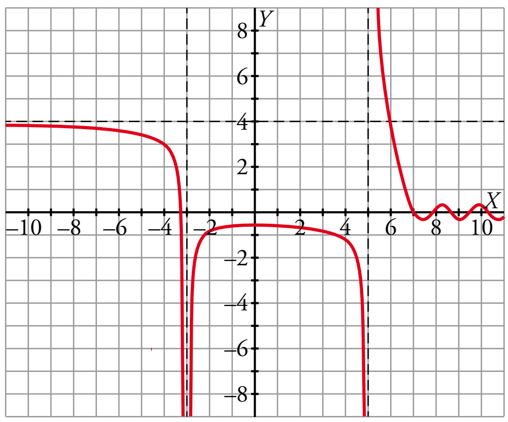
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

5 **Representa una corba que compleixi aquestes sis condicions:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$ $\quad \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **no existeix**



2 Operacions senzilles amb límits

Pàgina 134

6 **Totes les propietats que acabem de presentar són molt senzilles i raonables, i poden enunciar-se en els termes següents:**

1. *El límit de la suma de dues funcions és igual a la suma dels seus límits.*

Fes el mateix amb les propietats 2 a 7 i reflexiona sobre les restriccions que s'imposen en algunes d'aquestes, de manera que les vegis raonables (per exemple: per què $b \neq 0$ en la propietat 4?, per què $f(x) \neq 0$ en la propietat 5?…).

2. El límit de la diferència de dues funcions és igual a la diferència dels seus límits.
3. El límit del producte de dues funcions és igual al producte dels seus límits.
4. El límit del quocient de dues funcions és igual al quocient dels seus límits, sempre que el límit del denominador no sigui 0 (perquè no es produeixi una divisió entre 0).
5. El límit de la potència de dues funcions és igual a la potència dels seus límits, sempre que la base de la potència sigui positiva (perquè tingui sentit la potència d'exponent real).
6. El límit de l'arrel d'una funció és igual a l'arrel del seu límit. En cas que la potència sigui d'índex parell, a més, la funció ha de ser no negativa (perquè es pugui trobar aquesta potència).
7. El límit del logaritme d'una funció és igual al logaritme del seu límit (perquè tingui sentit el límit i el resultat, és necessari que tant la funció com el seu límit siguin positius).

Pàgina 135

7 **Si, quan $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, assigna, sempre que puguis, límit quan $x \to +\infty$ a aquestes expressions:**

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$	**d)** $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$
f) $u(x)^{u(x)}$	**g)** $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$	**j)** $u(x)/h(x)$
k) $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$	**m)** $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**o)** $f(x)^{h(x)}$
p) $x + h(x)$	**q)** $h(x)^{h(x)}$	**r)** x^{-x}	**s)** $f^2(x) + h^2(x)$	**t)** $f^2(x) - h^2(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - h(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indeterminació.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot h(x)) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \to$ Indeterminació.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \to$ Indeterminació.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + f(x)) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indeterminació.

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \to$ No existeix.

r) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = \dfrac{1}{\infty^{\infty}} = 0$

s) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f^2(x) + h^2(x)) = (+\infty)^2 + (-\infty)^2 = +\infty$

t) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f^2(x) - h^2(x)) = (+\infty)^2 - (-\infty)^2 = (+\infty) - (+\infty) \to$ Indeterminació.

3 Indeterminacions

Pàgina 136

8 **Per a $x \to 4$ es donen aquests resultats:**

$$f(x) \to +\infty,\ g(x) \to 4,\ h(x) \to -\infty,\ u(x) \to 0$$

Quines de les funcions següents són indeterminacions quan $x \to 4$? En cada cas, si és indeterminació, digues de quin tipus; si no ho és, digues quin n'és el límit:

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$ **c)** $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$ **g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 4} [f(x) + h(x)] = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indeterminació.

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \to$ Indeterminació.

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)} \to$ Indeterminació

f) $\lim\limits_{x \to 4} u(x)^{h(x)} = (0)^{(-\infty)} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)} \to$ Indeterminació

h) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)^{f(x)} = (4)^{(+\infty)} = +\infty$

4 Comparació d'infinits. Aplicació als límits quan $x \to \pm\infty$

Pàgina 137

9 Indica quines de les expressions següents són infinits $(\pm\infty)$ quan $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $log_2\, x$ **e)** $\dfrac{1}{x^3+1}$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

Són infinits quan $x \to +\infty$ les expressions a), c), d), f), g) i i).

No ho són les expressions b), e) i h).

10 a) Ordena de més petit a més gran els ordres dels infinits següents:

$log_2\, x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1{,}5^x \qquad 4^x$

b) Tenint en compte el resultat anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2\, x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $4^x;\ 1{,}5^x;\ 3x^5;\ x^2;\ \sqrt{x};\ log_2 x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log_2\, x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

5 Càlcul de límits quan $x \to +\infty$

Pàgina 139

11 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \dfrac{5}{3}$

12 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 (x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 x}{x^3 - 10x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3} - 5x}{3x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 (x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{x^3 - (x^3 + 9x^2 + 27x + 27)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{-9x^2 - 27x - 27} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 x}{x^3 - 10x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^3 + 6x^2 + x}{x^3 - 10x} = 9$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3} - 5x}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

13 **Sense fer operacions, digues el límit, quan $x \to +\infty$, de les expressions següents:**

a) $\left(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}\right)$

b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$

f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \log_5 x^4) = +\infty$

14 **Calcula el límit, quan $x \to +\infty$, d'aquestes expressions:**

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3+5}{x+2}-\frac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^3+5)(x-2)-(4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-6x^3+5x-10-4x^4-8x^3+x^2+2x}{x^2-4} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4-14x^3+x^2+7x-10}{x^2-4} = -\infty$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+1}-\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^3-x}{4x^2+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{4x^2+2} = 0$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{2}-\frac{x^2-2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+x}\right)}{2x+\sqrt{x^2+x}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x^2-x}{2x+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x}{2x+\sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

f) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = 0$$

6 Càlcul de límits quan $x \to -\infty$

Pàgina 140

15 **Troba el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ d'aquestes expressions:**

a) $\dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$

b) $\dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 + 6x + 2}{3x^4 - x - 1} = \dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{-x^3 + 5x + 3}}{x^2 + 2x}$

No existeix, ja que el radicand agafa valors negatius quan $x \to -\infty$.

16 **Troba el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de les expressions següents:**

a) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2}$

b) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$

c) 3^x

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 3}}{-3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-3x} = -\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2} \right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3^x} = 0$

8 Càlcul de límits quan $x \to c$

Pàgina 142

17 **Troba els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3+2x}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2-5x+4}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (3 - \sin 2x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} e^{3x+4}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3+2x}{x-3} = -7$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2-5x+4} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (3 - \sin 2x) = 3$

d) $\lim\limits_{x \to -1} e^{3x+4} = e$

18 **Troba el límit d'aquestes funcions quan $x \to 5$:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-5x+1, & x \le 5 \\ x-4, & x > 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 5 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, & x \ge 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (x^2-5x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} (x-4) = 1 \end{array}\right\} \to$ els límits laterals coincideixen i $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (2^x) = 32 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{(x-1)^2}{2} = 8 \end{array}\right\} \to$ els límits laterals no coincideixen i no existeix $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$.

Pàgina 143

19 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-3x+5)}{(x+1)(x-7)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-3x+5}{x-7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

20 **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \dfrac{x^3+2x+1}{x^3+x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \frac{x^3+2x+1}{x^3+x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x(x+2)} - \frac{x^3+2x+1}{x(x^2+1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)(x^2-5x+2)-(x+2)(x^3+2x+1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4-5x^3+2x^2+x^2-5x+2-x^4-2x^2-x-2x^3-4x-2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3+x^2-10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2+x-10)}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2+x-10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 144

1. Operacions amb límits

Fes-ho tu. Si f, g, h, u i v són les funcions anteriors, calcula el límit de les següents quan $x \to +\infty$:

a) $v(x)^{u(x)}$ **b)** $u(x)^{g(x)}$ **c)** $g(x) \cdot u(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x)^{u(x)} = (0{,}4)^{(+\infty)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{g(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) \cdot u(x)] = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

3. Comparació d'infinits

Fes-ho tu. Comparant els ordres d'infinit, assigna límit a aquestes expressions:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{10x^2 - 5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{10x^2 - 5} = +\infty$ perquè qualsevol funció exponencial de base més gran que 1 és un infinit d'ordre superior a qualsevol potència.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5} = +\infty$ perquè el numerador té grau més gran que el denominador.

Pàgina 145

4. Límit en un punt

Fes-ho tu. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2 - 2x} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **si:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2 - 2x} \right) = (+\infty) - (+\infty) \to$ Indeterminació.

Fem la resta:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x+1}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x(x-2)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-1}{x(x-2)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-1}{x(x-2)} = +\infty \end{cases}$$

b) Com que la funció està definida per mitjà de diferents expressions a l'esquerra i a la dreta de $x = 0$, en calculem els límits laterals:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-3)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + 3) = 3$$

Com que els límits laterals coincideixen, el límit existeix i val 3.

5. Discontinuïtats

Fes-ho tu. Determina els punts de discontinuïtat de $f(x)$ i classifica'ls.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21}$$

Trobem les arrels del denominador: $x^2 + 4x - 21 = 0 \to x = 3,\ x = -7$. En aquests punts la funció no està definida. Estudiem els límits en aquests punts:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+7)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x+7} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -7} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} \left\langle \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -7^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -7^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = -\infty \end{array} \right.$$

En $x = 3$ té una discontinuïtat evitable perquè el límit és finit.

En $x = -7$ té una discontinuïtat de salt infinit i, per tant, una asímptota vertical.

Pàgina 146

6. Càlcul de límits

Fes-ho tu. Calcula aquests límits:

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\log x)^{1-3x}$ c) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{(+\infty)} = +\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\log x)^{1-3x} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)} \to$ Indeterminació.

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{-x+1} = +\infty$ (quan $x \to -\infty$, $x - 1 < 0$).

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ Indeterminació.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

7. Límits amb radicals

Fes-ho tu. Calcula.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2-2} - x)$

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{1-x} = \lim_{x \to 1} [-(2+\sqrt{x+3})] = -4$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 - 2} - x) = (+\infty) - (+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{3x^2 - 2} - x)(\sqrt{3x^2 - 2} + x)}{\sqrt{3x^2 - 2} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2 - x^2}{\sqrt{3x^2 - 2} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 2}{\sqrt{3x^2 - 2} + x} = +\infty$ ja que el denominador equival a un polinomi de grau 1 i, per tant, el numerador té grau més elevat que el denominador.

Pàgina 147

8. Funció contínua definida en intervals

Fes-ho tu. Calcula a i b perquè aquesta funció sigui contínua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + a & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^2 + b & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

La funció és contínua, qualssevol que siguin a i b, sempre que $x \ne -1$ i $x \ne 1$, ja que està definida per mitjà de funcions contínues en els intervals de definició. Estudiem els límits en $x = -1$ i en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \left(\dfrac{1}{x^2} + a\right) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x^2 + 4) = 7 \end{array}\right\}$$ Perquè sigui contínua en $x = -1$, ha de ser $1 + a = 7 \to a = 6$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 + 4) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + b) = -1 + b \end{array}\right\}$$ Perquè sigui contínua en $x = 1$, ha de ser $7 = -1 + b \to b = 8$.

Si $a = 6$ i $b = 8$, la funció és contínua en $x = -1$ i en $x = 1$, perquè $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 7$ i $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 7$.

9. Tipus de discontinuïtats

Fes-ho tu. Estudia la continuïtat de la funció $f(x)$ segons els valors que agafi el paràmetre a:

$$f(x) = \frac{x + a}{x - 2} - \frac{4}{x}$$

La funció no està definida en $x = 2$ i en $x = 0$.

Com que el denominador de la primera fracció de $f(x)$ s'anul·la quan $x = 2$, distingirem dos casos:

- Cas $a = -2$:

$f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 2} - \dfrac{4}{x}$. Estudiem els límits en $x = 2$ i en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x - 2}{x - 2} - \frac{4}{x}\right) = \lim_{x \to 2} \left(1 - \frac{4}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - 2}{x - 2} - \frac{4}{x}\right) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 - \dfrac{4}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \dfrac{4}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

Té una discontinuïtat evitable quan $x = 2$ i una discontinuïtat de salt infinit quan $x = 0$.

- Cas $a \neq -2$:

$$f(x) = \frac{x+a}{x-2} - \frac{4}{x} = \frac{x^2+ax-4x+8}{x(x-2)}.$$ Estudiem els límits en $x = 2$ i en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax-4x+8}{x(x-2)} = \frac{(4+2a)}{(0)} = \pm\infty$$ ja que el numerador és diferent de 0 pel fet de ser $a \neq -2$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+ax-4x+8}{x(x-2)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+ax-4x+8}{x(x-2)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+ax-4x+8}{x(x-2)} = -\infty \end{cases}$$

En aquest cas té dues discontinuïtats de salt infinit en $x = 2$ i en $x = 0$.

Pàgina 148

10. Funció contínua

Fes-ho tu. **Calcula el valor de a i de b perquè la funció següent sigui contínua en $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-a}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ bx-6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

La funció serà contínua en $x = 3$ si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Comprovem això.

$f(3) = 3b - 6$

Per calcular $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, trobem els límits laterals en $x = 3$:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2-a}{x-3} = \dfrac{(9-a)}{(0)}$

  Perquè aquest límit sigui finit, el numerador ha de tendir a 0, i, per tant, $a = 9$. En tal cas:

  $$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} (x+3) = 6$$

- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (bx-6) = 3b-6$

  Perquè existeixi límit ha de ser $6 = 3b - 6 \ \to\ b = 4$.

  Si $a = 9$ i $b = 4$, la funció és contínua en $x = 3$ ja que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 6$.

11. Continuïtat en un punt

Fes-ho tu. **Estudia la continuïtat de la funció $f(x)$ i classifica'n les discontinuïtats.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Per a $x < 0$, $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{-x} = x^2 - 1$ és una funció contínua.

Per a $x > 0$, $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{x} = x^2 + 1$ és una funció contínua.

Estudiem la continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1 \end{array}\right\} \to$$ No existeix el límit perquè els límits laterals són diferents.

$f(0) = 1$

La funció presenta en $x = 0$ una discontinuïtat inevitable de salt finit.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 149

1. Límit d'una diferència de radicals

Calcula el valor de a perquè aquest límit sigui finit i troba'n el valor:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{ax^2 + 3x}\right)$$

Perquè el límit es pugui calcular, ha d'existir l'arrel i per a això, el radicand ha de ser positiu quan x és molt gran. Per tant, $a > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{ax^2 + 3x}\right) = (+\infty) - (+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{ax^2 + 3x}\right)\left(2x + \sqrt{ax^2 + 3x}\right)}{2x + \sqrt{ax^2 + 3x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - (ax^2 + 3x)}{2x + \sqrt{ax^2 + 3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(4 - a)x^2 - 3x}{2x + \sqrt{ax^2 + 3x}}$$

Perquè el límit existeixi, els graus del numerador i del denominador han de ser iguals. Com que el denominador té grau 1, el numerador també ha de tenir grau 1 i, per tant, ha de ser $a = 4$.

En tal cas, $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{2x + \sqrt{4x^2 + 3x}} = -\frac{3}{4}$.

2. Funció contínua

Estudia la continuïtat d'aquesta funció segons els valors de a:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - ax + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La funció és contínua quan $x \ne 1$ perquè les funcions que intervenen són contínues, ja que són funcions polinòmiques.

Vegem la continuïtat en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} (-2x + a) = -2 + a \qquad \lim_{x \to 1^+} (x^2 - ax + 5) = 6 - a$$

Perquè existeixi el límit, els límits laterals han de ser iguals. Per tant:

$$-2 + a = 6 - a \rightarrow a = 4$$

Per al valor obtingut de a la funció és contínua perquè $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Si $a \ne 4$, aleshores la funció té una discontinuïtat inevitable de salt finit en $x = 1$ pel fet d'existir els límits laterals en aquest punt i ser diferents.

3. Continuïtat en un punt

Donada la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2 - 2)/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Existeix algun valor de k per al qual f (x) sigui contínua?

b) Troba els límits quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ de la funció.

a) Vegem la continuïtat en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x^2 - 2}{x}} = e^{(+\infty)} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

No existeix cap valor de k ja que els límits laterals en el punt $x = 0$ no existeixen.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x^2-2}{x}} = e^{(-\infty)} = 0$$

4. Tipus de discontinuïtats

a) Determina el valor de k perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{|3-x|}{x} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

b) Té $f(x)$ alguna discontinuïtat? En cas afirmatiu, classifica-la.

a) La funció, definida per intervals, és:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{3-x}{x} & \text{si } x < 3 \\ k & \text{si } x = 3 \\ 2 - \dfrac{x-3}{x} & \text{si } 3 > x \end{cases}$$

Perquè la funció sigui contínua en $x = 3$, s'ha de complir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = k \\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \left(2 - \dfrac{3-x}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \left(2 - \dfrac{x-3}{x}\right) = 2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to k = 2$$

b) La funció no està definida quan $x = 0$ ja que s'anul·la el denominador de la fracció. Estudiem el tipus de discontinuïtat en aquest punt:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(2 - \frac{3-x}{x}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(2 - \dfrac{3-x}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \dfrac{3-x}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

En $x = 0$ té una discontinuïtat de salt infinit.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 150

Per practicar

Límits quan $x \to \pm\infty$

1 **Calcula els límits quan $x \to -\infty$ d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{2-x}$

b) $g(x) = \dfrac{10x-5}{x^2+1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2-4}{2x+3}$

d) $i(x) = \dfrac{x^3+2x}{7+5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+5}{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+5}{2+x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x-5}{x^2+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-4}{2x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-4}{-2x+3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+2x}{7+5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3-2x}{7-5x^3} = \dfrac{1}{5}$

2 **Calcula aquests límits comparant els exponents del numerador i del denominador:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2-7}{x+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x-3}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3+2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}x}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2-7}{x+1}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x-3} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3+2}} = 0$

3 **Calcula aquests límits comparant els ordres d'infinit:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7}) = +\infty$

4 **Calcula el límit d'aquestes funcions quan $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$

d) $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

e) $j(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}}$

f) $k(x) = \dfrac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

g) $l(x) = 2^x - 3^x$

h) $m(x) = \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{5-x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1\right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2}} = 1$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x - 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} -3^x = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{5-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - x^3 - x^3 + 3x^2}{(x-3)(5-x)} = -\infty$

5 **Calcula aquests límits:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - x^3)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x-3}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2x + 1} = 0$ perquè el numerador té grau més petit que el denominador.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - x^3) = +\infty$ perquè l'infinit d'una exponencial amb base de grau més gran que 1 és d'ordre superior al d'una potència.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x-3}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{x-3} = -3$ perquè el numerador té el mateix grau que el denominador.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{-2x} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x+2} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x})}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1} \right) = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5} \right)^{x-1} = \left(\dfrac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

6 **Calcula el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ d'aquestes funcions i representa gràficament els resultats.**

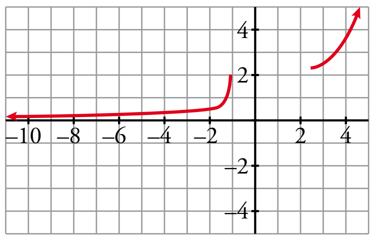
a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{\log x^2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$

d) $i(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x}$ **e)** $j(x) = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}}$ **f)** $k(x) = \dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 - 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2 - 1} = 0$

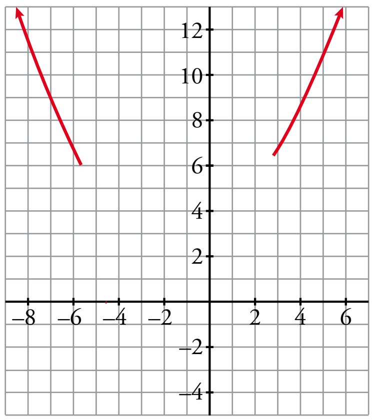
L'infinit d'una funció exponencial és d'ordre més gran que el d'una funció potencial.



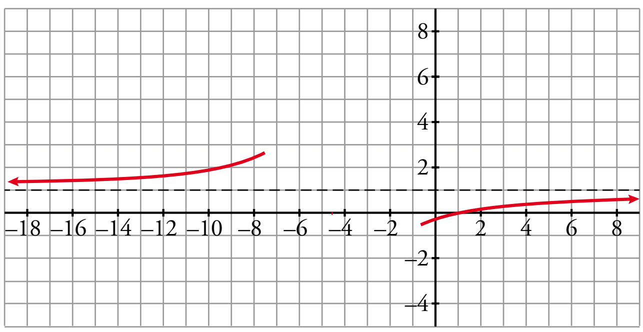
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{\log x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{\log x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{\log x^2} = +\infty$

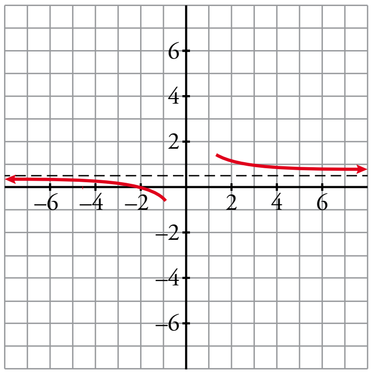
L'infinit d'una funció potencial és d'ordre més gran que el d'un logaritme.



c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = 1$

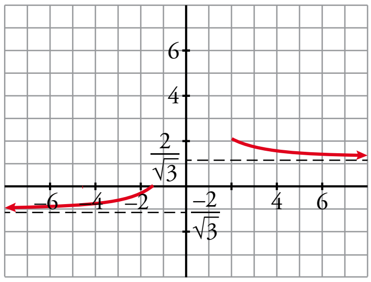


d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \dfrac{1}{2}$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{3}\,x} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

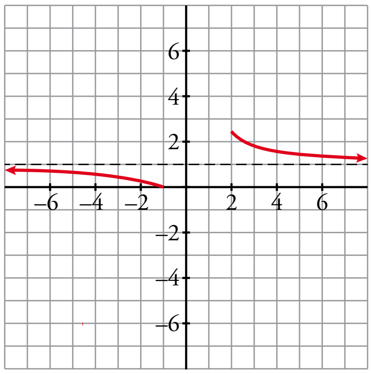


f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = (+\infty) - (+\infty) \;\rightarrow\;$ Indeterminació.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{-x - 1} + \dfrac{x^3}{x^2 + 1} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} = 1$



Límits en un punt

7 **Sabent que:**

$\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2} q(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$

digues, en els casos en què sigui possible, el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} |s(x) \cdot q(x)|$

d) $\lim\limits_{x \to 2} |p(x) - 2q(x)|$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 2} |s(x) \cdot q(x)| = (0) \cdot (-\infty) \;\rightarrow\;$ Indeterminat.

d) $\lim\limits_{x \to 2} |p(x) - 2q(x)| = +\infty - 2\,(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

8 **Calcula els límits següents. Si algun és infinit, calcula'n els límits laterals:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 5x^2}{3x^2 - 15x}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-6)}{1 - x} = \lim\limits_{x \to 1} [-(x-6)] = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)} = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 - 3x + 2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)(x - 2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x - 2)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 5x^2}{3x^2 - 15x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 5x}{3x - 15} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x^2 + x - 6)} =$

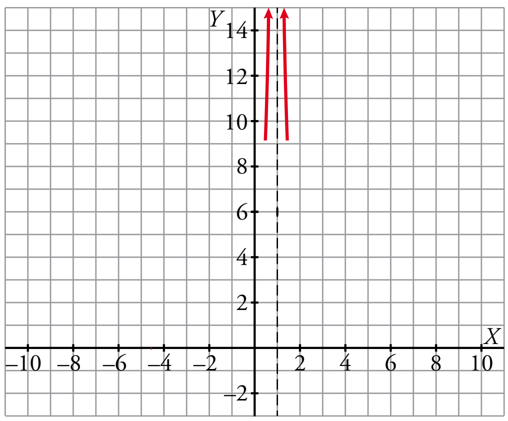
$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x^2 + x - 6} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+5}{x^2 + x - 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+5}{x^2 + x - 6} = +\infty \end{cases}$$

9 **Calcula aquests límits i representa els resultats obtinguts.**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

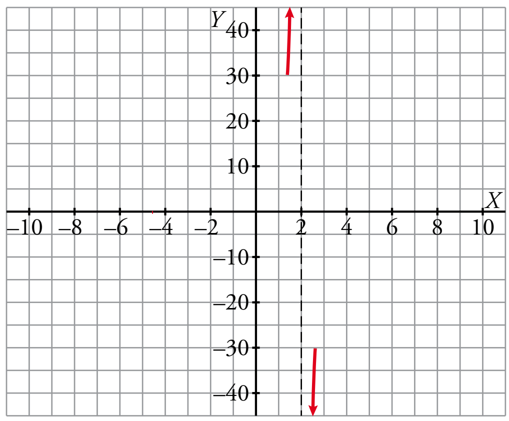
b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = +\infty$



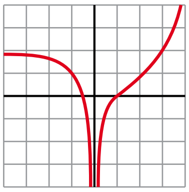
b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x + 15}{x^2 - 5x + 6} =$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x + 15}{x^2 - 5x + 6} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x + 15}{x^2 - 5x + 6} = -\infty \end{cases}$$

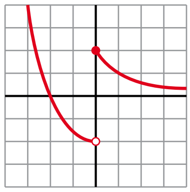


10 **Observa les gràfiques i digues, en cada cas, quin és el límit quan $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$.**

a)



b)



a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

11 **Estudia el límit de les funcions següents en els punts en els quals s'anul·la el seu denominador. Representa gràficament els resultats obtinguts:**

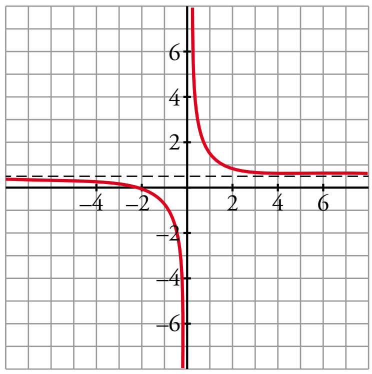
a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$ $\qquad$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x}$

a) $2x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = +\infty \end{cases}$$

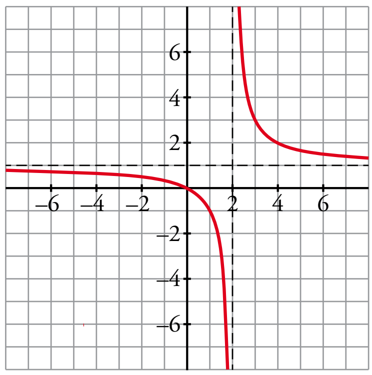
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{2x(x-1)} = $$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{2x} = \frac{3}{2}$$



b) $x^2 - 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 2,\; x = 4$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = +\infty \end{cases}$$

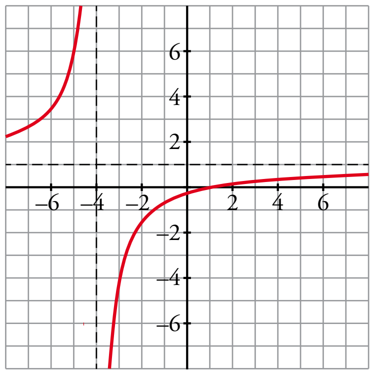
$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 4} \frac{x(x-4)}{(x-2)(x-4)} = $$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{x}{x-2} = 2$$



c) $x^2 + 5x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = -4,\; x = -1$

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+4)} = $$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+4} = -\frac{2}{3}$$



d) $x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \;\to\; x(x^2 - 3x - 10) = 0 \;\to\; x = -2,\; x = 0,\; x = 5$

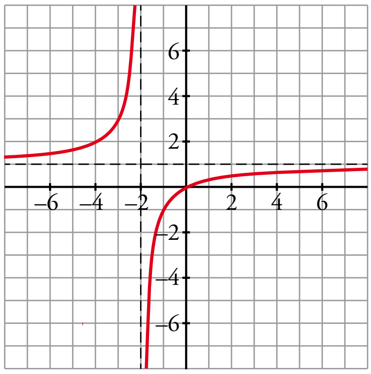
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x-5)}{x(x^2 - 3x - 10)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x-5)}{x^2 - 3x - 10} = 0$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2(x-5)}{x(x+2)(x-5)} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+2} = \frac{5}{7}$$



Pàgina 151

Continuïtat

12 **Estudia la continuïtat d'aquestes funcions i representa-les gràficament:**

$$\textbf{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

$$\textbf{b) } f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$$

a) • Continuïtat:

— Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$ $\to$ és contínua, ja que està formada per funcions contínues.

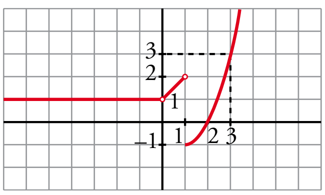
— En $x = 0$ $\to$ $\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \\ \text{No existeix } f(0). \end{cases}$

Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = 0$.

— En $x = 1$ $\to$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Discontinuïtat de salt finit en $x = 1$.

• Gràfica:



b) • Continuïtat:

— Si $x \neq 3$ i $x \neq 6$ $\rightarrow$ és contínua, ja que està formada per funcions contínues.

— En $x = 3$ $\rightarrow$ $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$f(x)$ és contínua en $x = 3$.

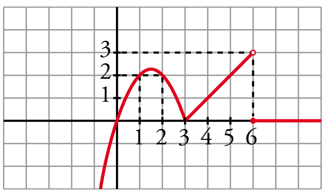
— En $x = 6$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} (x - 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} 0 = 0 \\ f(6) = 0 \end{cases}$

Discontinuïtat de salt finit en $x = 6$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

• Gràfica:



13 Estudia la continuïtat de les funcions següents:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{1 - x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{-1}{x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq -2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = -2 \end{cases}$

a) La funció és contínua quan $x \neq 0$ i $x \neq 1$ ja que les funcions que intervenen ho són.

Vegem la continuïtat en $x = 0$:

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (3x^2 + 1) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0) \rightarrow$ és contínua en $x = 0$.

Vegem la continuïtat en $x = 1$:

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 + 1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4 + \ln x) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1) \rightarrow$ és contínua en $x = 1$.

b) El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0\}$ ja que no està definida quan $x = 0$.

Quan $x \neq 0$ i $x \neq -1$ la funció és contínua perquè les funcions que intervenen ho són.

En $x = 0$ presenta una discontinuïtat inevitable de salt infinit.

Vegem la continuïtat en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} e^{1-x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-1}{x} = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1) \to \text{és contínua en } x = -1.$$

c) El domini de definició és $\mathbb{R} - \{2\}$ ja que no està definida quan $x = 2$.

Quan $x \neq -2$ i $x \neq 2$ la funció és contínua perquè la funció que intervé ho és.

En $x = 2$ té una discontinuïtat inevitable de salt infinit.

Vegem la continuïtat en $x = -2$:

$$f(-2) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

Com que existeix el límit pero no coincideix amb el valor de la funció, presenta una discontinuïtat evitable en $x = -2$.

14 **Calcula el valor de k perquè les funcions següents siguin contínues en tot el seu domini. Representa-les per al valor de k obtingut:**

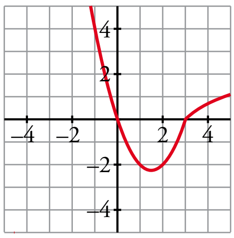
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} kx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ e^{x^2-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) La funció és contínua quan $x \neq 3$ ja que les funcions que intervenen ho són.

Vegem la continuïtat en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + kx) = 9 + 3k \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x-2) = 0 \end{array}\right\} \to 9 + 3k = 0 \to k = -3$$

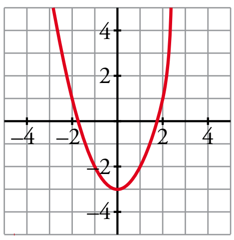


Quan $k = -3$ la funció també és contínua en $x = 3$.

b) La funció és contínua quan $x \neq 2$ ja que les funcions que intervenen ho són.

Vegem la continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} g(2) = 4k - 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (kx^2 - 3) = 4k - 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} e^{x^2-4} = 1 \end{array}\right\} \to 4k - 3 = 1 \to k = 1$$



Quan $k = 1$, la funció també és contínua en $x = 2$.

15 **Calcula el valor de a i b perquè $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

La funció és contínua quan $x \neq 0$ i $x \neq 1$ ja que les funcions que intervenen ho són.

Vegem la continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \end{array}\right\} \to b = -1$$

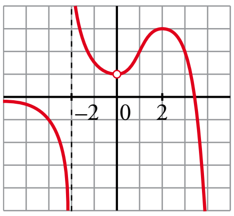
Vegem la continuïtat en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (ax - 1) = a - 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \end{array}\right\} \to a - 1 = 2 \to a = 3$$

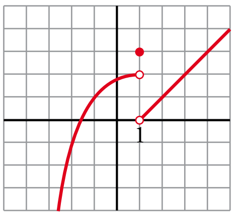
Quan $a = 2$ i $b = -1$ la funció és contínua en tot el seu domini.

16 **a) En quins punts són discontínues les funcions següents?**

I)



II)



b) Digues quin és el límit per la dreta i per l'esquerra en els punts de discontinuïtat.

a) I) En $x = -2$ té una discontinuïtat inevitable de salt infinit.

En $x = 0$ té una discontinuïtat evitable.

II) Presenta una discontinuïtat inevitable de salt finit.

b) I) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

II) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

Per resoldre

17 **Als jutjats centrals d'una regió determinada ha començat una campanya per estalviar paper. L'estalvi es concreta en aquesta funció:**

$$E(x) = \begin{cases} e^{0,02x} & \text{si } 1 \le x \le 100 \\ -\dfrac{1}{50}x + 8 & \text{si } 100 < x \le 390 \end{cases}$$

on x són els dies transcorreguts des que es va iniciar la campanya i $E(x)$ és el nombre de milers de fulls de paper estalviats.

a) Estudia la continuïtat de $E(x)$.

b) Què passa quan han transcorregut 100 dies des de l'inici de la campanya?

c) En quin moment l'estalvi és de 5 000 fulls?

a) La funció és contínua quan $x \ne 100$ ja que està definida per mitjà de funcions contínues en els seus intervals de definició.

Perquè sigui contínua en $x = 100$ ha de complir-se que $\lim\limits_{x \to 100} f(x) = f(100)$:

$f(100) = e^2 \approx 7{,}389$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 100^-} e^{0,02x} = e^2 \\ \lim\limits_{x \to 100^+} \left(-\dfrac{1}{50}x + 8\right) = 6 \end{array}\right\} \text{Per tant, no existeix límit.}$$

En conseqüència, la funció no és contínua en $x = 100$.

b) Quan transcorren 100 dies des de l'inici de la campanya, es produeix una caiguda brusca en l'estalvi de paper ja que disminueix des de més de 7 000 fulls a només 6 000.

c) Igualant cada una de les expressions a 5, obtenim que:

$$e^{0,02x} = 5 \ \rightarrow \ x = \frac{\ln 5}{0,02} \approx 80,47$$

$$-\frac{1}{50}x + 8 = 5 \ \rightarrow \ x = 150$$

S'estalvien 5 000 fulls en els dies 81 i 150 des de l'inici de la campanya.

18 **L'energia que produeix una placa solar en funció del temps transcorregut des que es fa de dia ve descrita per aquesta expressió (x en hores; $f(x)$ en unitats d'energia):**

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{1\,024}{x^2} & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$$

a) Estudia la continuïtat de $f(x)$. **b) Representa-la gràficament.**

a) La funció és contínua quan $x \ne 8$ ja que està definida per mitjà de funcions contínues en els seus intervals de definició.

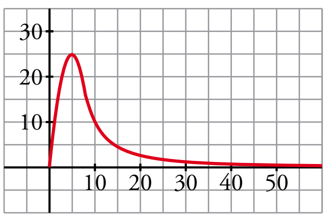
Perquè sigui contínua en $x = 8$, ha de complir-se que $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = f(8)$:

$f(8) = 16$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 8^-} (10x - x^2) = 16 \\ \lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{1\,024}{x^2} = 16 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 8} f(x) = 16$$

La funció és contínua també en $x = 8$.

b) La representació gràfica es mostra a la dreta:



19 **a) Calcula el límit de la funció $f(x)$ quan $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

b) Representa gràficament els resultats.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

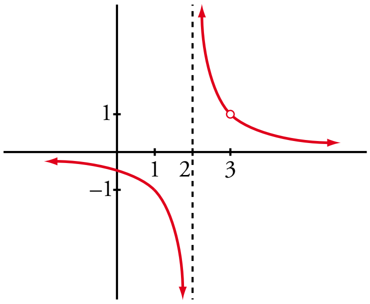
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

b)



20 **a) Calcula el límit de la funció $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ en aquells punts en què no està definida.**

b) Troba el seu límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$.

c) Representa la funció amb les dades que has obtingut.

a) El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0, 3\}$, ja que el denominador s'anul·la en:

$$x^2 - 3x = 0 \to x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

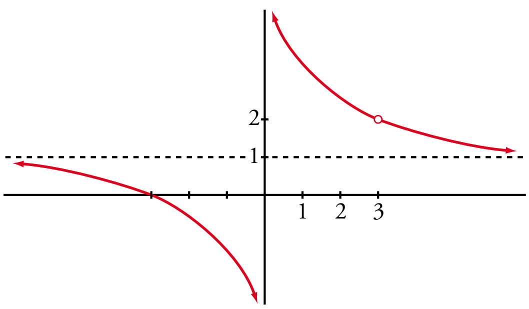
$$y = \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x+3}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+3}{x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$

c)



21 **Sigui la funció** $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$**.**

a) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Quina és la funció que coincideix amb $f(x)$ **excepte en** $x = 0$ **i en** $x = 1$**?**

c) En quins punts no és contínua $f(x)$**?**

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x-2)] = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [x(x-2)] = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

c) En $x = 0$ i en $x = 1$ la funció no està definida (hi ha discontinuïtats evitables).

22 **Considera la funció:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Estudia'n la continuïtat en $x = 3$**.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **i** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**.**

a) Per analitzar la continuïtat en $x = 3$ estudiem si es compleix que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$:

$f(3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{El límit no existeix.}$$

La funció és discontínua en $x = 3$ i té una discontinuïtat de salt infinit.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2-2x-3} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-3}{x^2-9x+20} = 0$

Pàgina 152

23 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1})$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(1-\sqrt{3-x})(1+\sqrt{3-x})}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-(3-x)}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-3+x}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1+\sqrt{3-x}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+9-9}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = +\infty \end{cases}$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2+2x})(x+\sqrt{x^2+2x})}{x+\sqrt{x^2+2x}} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}} = -1$$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4-1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2-\sqrt{x^4-1})(x^2+\sqrt{x^4-1})}{x^2+\sqrt{x^4-1}} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4-(x^4-1)}{x^2+\sqrt{x^4-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}} = 0$$

24 **Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$.**

a) Estudia'n la continuïtat, analitzant els diferents tipus de discontinuïtat que hi hagi.

b) En aquells punts on $f(x)$ no és contínua, és possible definir de nou la funció per tal d'evitar la discontinuïtat?

a) Calculem les arrels del denominador: $x^2+x-6=0 \to x=-3,\ x=2$

En $x=-3$ i $x=2$ la funció no és contínua ja que no està definida en aquests punts. Vegem els tipus de discontinuïtat:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-1}{x-2} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = +\infty \end{cases}$$

Per tant, en $x=-3$ té una discontinuïtat evitable i en $x=2$ té una discontinuïtat de salt infinit.

b) Només és possible en $x=-3$, definint-la amb el valor $\dfrac{4}{5}$.

25 **Classifica les discontinuïtats de les funcions següents:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$

a) $x^2-x-2=0 \to x=-1,\ x=2 \to$ El domini de definició és $\mathbb{R}-\{-1, 2\}$.

La funció és contínua quan $x \neq -1$ i $x \neq 2$.

En $x=-1$ i $x=2$ no és contínua perquè no hi és definida. Vegem el tipus de discontinuïtat en cada valor.

En $x=-1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = +\infty \end{cases}$$

En aquest cas és inevitable de salt infinit.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{3}$$

En aquest cas es tracta d'una discontinuïtat evitable.

b) $x^2 - x - 6 = 0 \to x = -2,\ x = 3 \to$ El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

La funció és contínua quan $x \neq -2$ i $x \neq 3$.

En $x = -2$ i $x = 3$ no és contínua perquè no hi és definida. Vegem el tipus de discontinuïtat en cada valor.

En $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = +\infty \end{cases}$$

Es tracta d'una discontinuïtat inevitable de salt infinit.

En $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+x)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{12}{5}$$

En aquest cas es tracta d'una discontinuïtat evitable.

26 Estudia la continuïtat d'aquestes funcions per als diferents valors del paràmetre a:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la funció és contínua.

• En $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Perquè sigui contínua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \to a = -8 \end{array}$$

Per tant, la funció és contínua si $a = -8$, i és discontínua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la funció és contínua.

• En $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \text{Perquè sigui contínua ha de ser: } 1 = 2a \to a = \frac{1}{2}$$

Per tant, la funció és contínua si $a = \frac{1}{2}$, i és discontínua (en $x = 0$) si $a \neq \frac{1}{2}$.

27 Sigui la funció

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ ax^2 - 6ax + 5 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

a) Estudia la continuïtat en $x = -1$.

b) Troba a perquè la funció sigui contínua en $x = 2$.

c) Representa la funció per a $a = 1$.

a) Analitzem si es compleix que $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} (3x+1) = -2 \\ \lim_{x \to -1^+} (x-1) = -2 \\ f(-1) = -2 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -2$$

La funció és contínua en $x = -1$.

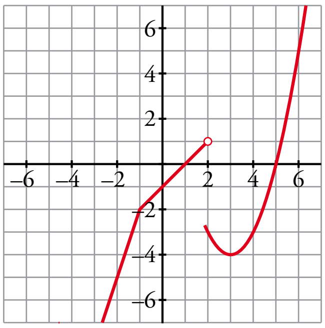
b) Perquè sigui contínua en $x = 2$ s'ha de complir que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} (x-1) = 1 \\ \lim_{x \to 2^+} (ax^2 - 6ax + 5) = -8a + 5 \\ f(2) = -8a + 5 \end{array}\right\} \to 1 = -8a + 5 \to a = \frac{1}{2}$$

Si $a = \frac{1}{2}$, els límits laterals coincideixen amb el valor de la funció i aquesta serà contínua en $x = 2$.

c) Per a $a = 1$ la funció és:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



28 Sabent que la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ **és contínua en $(-1, +\infty)$, troba el valor de a.**

La funció és contínua quan $x \neq 0$ ja que està definida per mitjà de funcions contínues en el seu domini.

Comprovem la continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = a \\ \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 4x + 3) = 3 \\ \lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x^2 + a}{x+1}\right) = a \end{array}\right\} \to a = 3$$

Quan $a = 3$, la funció és contínua també en $x = 0$ ja que $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ i, per tant, ho és en l'interval $(-1, +\infty)$.

29 **El rendiment físic d'un esportista, durant 60 minuts, varia amb el temps segons aquesta funció:**

$$f(x)=\begin{cases}-t(t-a) & \text{si } 0\le t<15\\ 3{,}5a+5 & \text{si } 15\le t<30\\ 100-bt & \text{si } 30\le t\le 60\end{cases}$$

Calcula a i b perquè la funció rendiment sigui contínua.

La funció és contínua quan $x \neq 15$ i $x \neq 30$ ja que està definida per mitjà de funcions contínues.

Comprovem la continuïtat en $x = 15$:

$$\left.\begin{array}{l} f(15)=3{,}5a+5\\ \lim\limits_{t\to 15^-}[-t(t-a)]=-225+15a\\ \lim\limits_{t\to 15^+}(3{,}5a+5)=3{,}5a+5\end{array}\right\} \to -225+15a=3{,}5a+5 \to a=20$$

Quan $a = 20$, la funció és contínua en $x = 15$, ja que $f(15) = \lim\limits_{x\to 15} f(x)$.

Comprovem la continuïtat en $x = 30$:

$$\left.\begin{array}{l} f(30)=100-30b\\ \lim\limits_{t\to 30^-}75=75\\ \lim\limits_{t\to 30^+}(100-bt)=100-30b\end{array}\right\} \to 75=100-30b \to b=\frac{5}{6}$$

Quan $b=\frac{5}{6}$ la funció és contínua en $x = 30$, ja que $f(30) = \lim\limits_{x\to 30} f(x)$.

30 **Sabem que la funció $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^3+bx^2+8x-4}$ és discontínua en $x = 2$. Calcula b i estudia el comportament de la funció en les proximitats dels punts de discontinuïtat.**

Perquè la funció sigui discontínua en $x = 2$, aquest valor ha de ser una arrel del denominador. Per tant,

$$2^3+b\cdot 2^2+8\cdot 2-4=0 \to b=-5$$

d'on $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Trobem totes les arrels del denominador:

$$x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)^2$$

El domini de definició és $\mathbb{R}-\{1, 2\}$.

La funció no és contínua en $x = 1$ i en $x = 2$. Vegem ara el comportament de la funció en les proximitats d'aquests punts:

En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{(-1)}{(0)} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2}=-\infty\end{cases}$$

La discontinuïtat és inevitable de salt infinit.

En $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{(2)}{(0)}=+\infty$$ ja que la fracció és un quocient de nombres positius en les proximitats de $x = 2$.

31 **Estudia la continuïtat de $f(x)$ segons els diferents valors del paràmetre m.**

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La funció és contínua quan $x \neq 1$ perquè és definida per mitjà de funcions contínues.

Comprovem la continuïtat en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 3 - m \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - mx^2) = 3 - m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{mx} = \dfrac{2}{m} \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua en $x = 1$ ha de ser $3 - m = \dfrac{2}{m} \to m = 1, 2.$

Quan $m = 1$ o $m = 2$ la funció és contínua en $x = 1$.

Si $m \neq 1$ i $m \neq 2$ la funció té una discontinuïtat inevitable de salt finit en $x = 1$.

32 **Fixa't en aquesta funció: $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ amb $a \neq 0$.**

Calcula els valors de a i b perquè passi pel punt (2, 3) i $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -4$.

f passa per (2, 3) $\to f(2) = 3 \to \dfrac{4a + b}{a - 2} = 3$

Per altra banda,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{ax^2 + b}{a - x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = -a \to -a = -4 \to a = 4$$

Així:

$$\frac{16 + b}{2} = 3 \to b = -10$$

33 **Troba el valor de k per tal que cada una de les funcions següents sigui contínua. Alguna d'aquestes és contínua en tot $\mathbb{R}$?**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \ln k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Estudiem la continuïtat en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + x^2 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + x^2 + 1) = 3$$

$$f(1) = \ln k$$

Perquè sigui contínua $\ln k = 3 \to k = e^3$.

A més, és contínua en tot $\mathbb{R}$ ja que el quocient de polinomis només s'anul·la quan $x = 1$.

b) Estudiem la continuïtat en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = 2^k$$

Perquè sigui contínua $2^k = \dfrac{1}{2} \to k = -1$.

Aquesta funció també és contínua en tot $\mathbb{R}$ perquè el quocient només s'anul·la quan $x = 1$.

34 **Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \dfrac{1}{2-|x|}$ i classifica'n les discontinuïtats.**

El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. La funció hi és contínua.

En $x = -2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2-|x|} = \frac{(1)}{(0)} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2+x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2+x} = +\infty \end{cases}$$

Presenta una discontinuïtat inevitable de salt infinit.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2-|x|} = \frac{(1)}{(0)} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty \end{cases}$$

Té una discontinuïtat inevitable de salt infinit.

NOTA: Podríem haver fet servir la simetria de la funció respecte de l'eix Y (és una funció parella) per haver deduït el comportament en $x = 2$ a partir de l'estudi en $x = -2$.

35 **Estudia la continuïtat d'aquesta funció:**

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq -1$ i $x \neq 1 \to$ la funció és contínua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La funció és contínua en } x = -1.$$

- Si $x = 1 \to$ No és contínua, ja que no està definida en $x = 1$; no existeix $f(1)$.

  A més:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuïtat és de salt finit.}$$

36 **Calcula el valor de t perquè la funció següent sigui contínua en $x = 2$. Representa-la en el cas $t = 2$ i digues quin tipus de discontinuïtat té:**

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - t & \text{si } x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

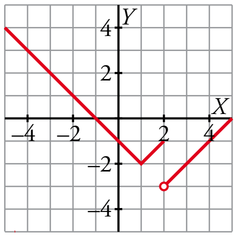
Estudiem la continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 - t \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (|x-1| - t) = 1 - t \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x-5) = -3 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua en $x = 2$ ha de ser $1 - t = -3 \to t = 4$.

Suposem ara que $t = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - 2 & \text{si } x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -(x-1) - 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 - 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



37 **Troba el límit de les funcions següents quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$, definint-les prèviament per intervals:**

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ **b)** $g(x) = |x-3| - |x|$ **c)** $h(x) = |2x-1| + x$ **d)** $i(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

b) $|x-3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ $\quad |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$g(x) = |x-3| - |x| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2x-3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x-3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x+3) = +\infty$$

c) $|2x-1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$h(x) = |2x-1| + x = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ 3x-1 & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x+1) = +\infty$$

d) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} i(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} i(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = -1$$

38 **Estudia la continuïtat en $x = 0$ d'aquesta funció: $f(x) = 2x + \dfrac{|x|}{x}$**

Quin tipus de discontinuïtat té?

En $x = 0$, la funció no està definida, perquè és discontínua. Com que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

aleshores: $\lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Per tant, hi ha una discontinuïtat de salt (finit) en $x = 0$.

Pàgina 153

Qüestions teòriques

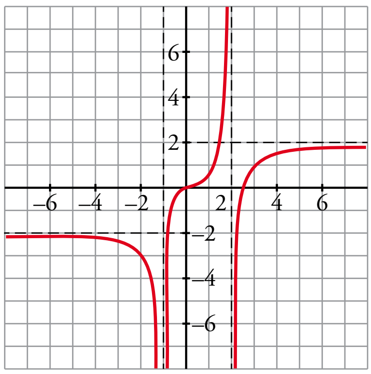
39 **Dibuixa, en cada cas, la gràfica d'una funció que verifiqui aquestes condicions:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 2 \\ -\infty & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

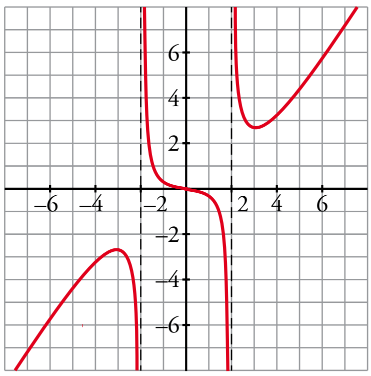


b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < 2 \\ +\infty & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < -2 \\ +\infty & \text{si } x > -2 \end{cases}$



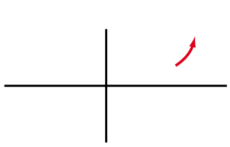
40 **Expressa simbòlicament cada una d'aquestes frases i fes-ne una representació gràfica en cada cas:**

a) Podem aconseguir que una funció $f(x)$ sigui més gran que qualsevol nombre K, per gran que sigui, donant a x valors tan grans com sigui necessari.

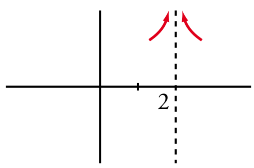
b) Si pretenem que els valors de la funció $g(x)$ siguin tan propers a 1 com vulguem, haurem de donar a x valors prou grans.

c) Podem aconseguir que la funció $h(x)$ sigui més gran que un nombre K, per gran que sigui, donant a x valors prou pròxims a 2.

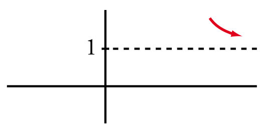
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$



c) $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = +\infty$



Per aprofundir

41 **Estudia els valors que poden agafar a i b perquè la funció $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2-2x}$ presenti una discontinuïtat evitable.**

Primer calculem el seu domini:

$$x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\;\; x = 2$$

El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

La funció pot tenir discontinuïtats evitables en $x = 0$ o $x = 2$.

Si $b = 0$ i $a \neq 0$ la funció té una discontinuïtat evitable en $x = 0$, ja que existeix el límit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{x-2} = -\frac{a}{2}$$

Si $b \neq 0$, només pot tenir una discontinuïtat evitable en $x = 2$. Per a això, $x = 2$ ha de ser una arrel del numerador de la fracció, és a dir:

$$2a + b = 0 \;\rightarrow\; a = -\frac{b}{2}$$

En tal cas:

$$\lim_{x\to 2} \frac{-\frac{b}{2}x + b}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-bx+2b}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{b(-x+2)}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-b}{2x} = -\frac{b}{4}$$

La discontinuïtat és evitable ja que existeix el límit.

En conclusió:

- Si $b = 0$ i $a \neq 0$, la funció té una discontinuïtat evitable en $x = 0$.
- Si $b \neq 0$ i $a = -\dfrac{b}{2}$, la funció té una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

42 **Troba el valor de a i de b perquè la funció següent sigui contínua en $\mathbb{R}$ i passi pel punt $(1, -2)$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| \le 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

La funció és parella, ja que està definida per mitjà de dues funcions parelles en intervals de definició simètrics respecte de l'origen. Per tant, la continuïtat en $x = 2$ garantitza la continuïtat en $x = -2$.

Com que passa pel punt $(1, -2)$, es compleix que $f(1) = -2 \;\rightarrow\; a + b = -2$.

Comprovem la continuïtat en $x = 2$:

$$f(2) = 4a + b$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2 + b) = 4a + b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Perquè sigui contínua en $x = 2$, ha de coincidir $4a + b = \dfrac{1}{4}$.

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= -2 \\ 4a + b &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \rightarrow\; a = \frac{3}{4},\;\; b = -\frac{11}{4}$$

43 **Defineix aquesta funció per intervals i calcula'n els límits quan $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$:**

$$f(x) = |x+3| - |x-3|$$

$$\left.\begin{array}{l} |x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases} \\ |x-3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \end{array}\right\} \to f(x) = |x+3| - |x-3| = \begin{cases} -6 & \text{si } x < -3 \\ 2x & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 6 = 6$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-6) = -6$$

44 **Troba els valors de a i b perquè la funció $f(x)$ sigui contínua.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x < 0 \\ \sin(ax) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ (x-\pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$$

La funció és contínua quan $x \neq 0$ i $x \neq \pi$, ja que està definida per mitjà de funcions contínues en els seus intervals de definició. Vegem ara la continuïtat en $x = 0$ i en $x = \pi$:

- $f(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \sin(ax) = 0 \end{array}\right\} \to b = 0$$

- $f(\pi) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi^-} \sin(ax) = \sin(a\pi) \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} [(x-\pi)^2 + 1] = 1 \end{array}\right\} \to \sin(a\pi) = 1 \to a\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ amb } k \in \mathbb{Z} \to a = \frac{1}{2} + 2k \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

Per als valors de a i b obtinguts, la funció és contínua en tot el seu domini.

45 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{tg\, x}{1 + \sin x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{tg\, x}{1 + \sin x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \frac{tg\, x}{1 + \sin x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} \frac{tg\, x}{1 + \sin x} = -\infty \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{2}{1} = 2$

Autoavaluació

Pàgina 153

1 Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + e^x)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2 + 0 = 2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

2 Troba el límit de la funció $f(x) = \left(\dfrac{2x^2+4}{x^2-1} - \dfrac{3}{x-1}\right)$ quan $x \to 1$, $x \to -1$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Representa gràficament la informació que obtinguis.

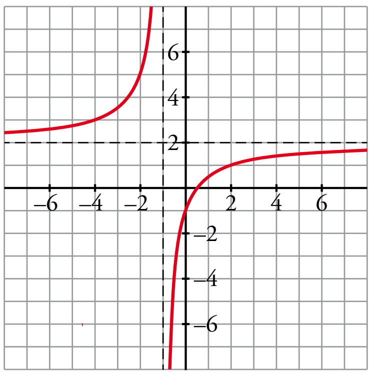
$$f(x) = \frac{2x^2+4}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{x-1} = \frac{2x^2+4}{(x+1)(x-1)} - \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2+4-3x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = 2$$



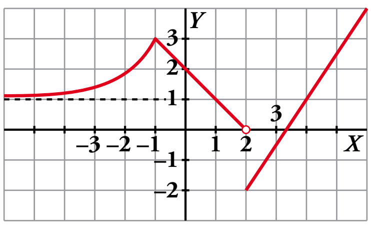
3 Observa la gràfica de la funció $y = f(x)$ i digues el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 \end{cases}$ f no té límit quan $x \to 2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

4 Considera la funció

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Troba a perquè la funció sigui contínua en $x = 1$.

b) És discontínua en algun punt?

c) Representa la funció per a $a = -2$.

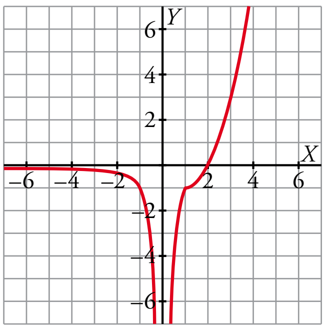
a) Perquè sigui contínua en $x = 1$ ha de complir-se que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + ax) = 1 + a \end{array}\right\} \to -1 = 1 + a \to a = -2$$

Si $a = -2$ la funció és contínua en $x = 1$.

b) La funció és discontínua en $x = 0$ ja que no està definida en aquest valor en anul·lar-se el denominador de la fracció. En $x = 0$ hi ha una discontinuïtat de salt infinit.

c) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



5 Es considera la funció $f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{ax - 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudia la continuïtat de f per als diferents valors del paràmetre a.

La funció està definida per intervals. Per analitzar la seva continuïtat hem d'estudiar la continuïtat quan $x < 0$, quan $x > 0$ i en el punt de ruptura $x = 0$.

- Perquè sigui contínua en $x = 0$, ha de complir-se que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ax - 3}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{-3}{3} = -1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = -1$$

  Per tant, la funció és contínua en $x = 0$ per a qualsevol valor del paràmetre a.

- Quan $x < 0$, la funció també és contínua ja que és de tipus exponencial.
- Vegem ara què passa quan $x > 0$. Per a això, comencem calculant les arrels del denominador:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = 1,\ x = 3$$

  — Quan $x \neq 1$ i $x \neq 3$ la funció és contínua pel fet de ser un quocient de polinomis el denominador del qual no s'anul·la.

  — En $x = 1$ i en $x = 3$ la funció no és contínua perquè no és definida. Analitzem el tipus de discontinuïtat en funció del paràmetre a.

- En $x = 1$:

$f(1)$ no existeix.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{ax - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{ax - 3}{(x-1)(x-3)} = \frac{(a-3)}{(0)} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{Si } a \neq 3 \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(a-3)}{(0)} = \pm\infty \\ \text{Si } a = 3 \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Per tant, si $a = 3$, $f(x)$ té en $x = 1$ una discontinuïtat evitable. Si $a \neq 3$, $f(x)$ té en $x = 1$ una discontinuïtat de salt infinit.

- En $x = 3$:

$f(3)$ no existeix.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{ax - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 3} \frac{ax - 3}{(x-1)(x-3)} = \frac{(3a-3)}{(0)} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{Si } a \neq 1 \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{(3a-3)}{(0)} = \pm\infty \\ \text{Si } a = 1 \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Per tant, si $a = 1$, $f(x)$ té en $x = 3$ una discontinuïtat evitable. Si $a \neq 1$, $f(x)$ té en $x = 3$ una discontinuïtat de salt infinit.

Resumint, la funció $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$; en $x = 1$ hi ha una discontinuïtat evitable si $a = 3$ o una discontinuïtat de salt infinit si $a \neq 3$, i en $x = 3$ hi ha una discontinuïtat evitable si $a = 1$ o una discontinuïtat de salt infinit si $a \neq 1$.

6 a) Calcula a i b perquè f sigui contínua:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

b) Representa la funció obtinguda.

a) • f és contínua si $x < -2$, si $-2 < x < 1$ i si $1 < x$, ja que està definida per funcions contínues.

- Perquè f sigui contínua en $x = -2$, ha de complir-se que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -2(-2) + a = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to -2^-} (-2x + a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - 5) = 4 - 5 = 1 \end{array}\right\} \text{Per tant: } 4 + a = -1 \to a = -5$$

- Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 1$, ha de ser $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = b \cdot 1 + 3 = b + 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 5) = -4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (bx + 3) = b + 3 \end{array}\right\} \text{Per tant: } b + 3 = -4 \to b = -7$$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

La representació gràfica es mostra a la dreta: