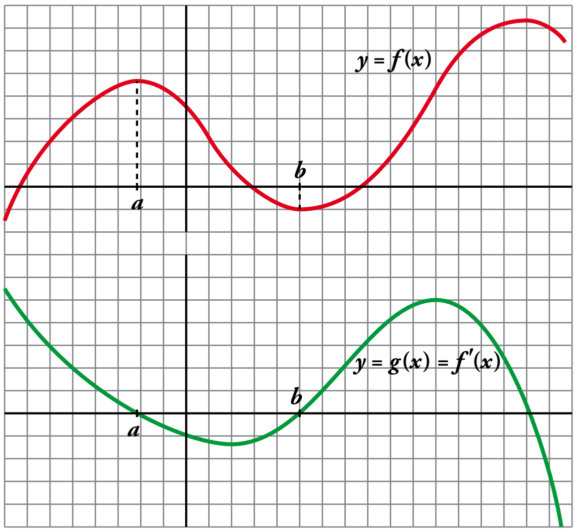
Resol

Pàgina 155

Funció derivada

■ **Continua escrivint les raons per les quals $g(x)$ és una funció amb un comportament que respon al de la derivada de $f(x)$.**



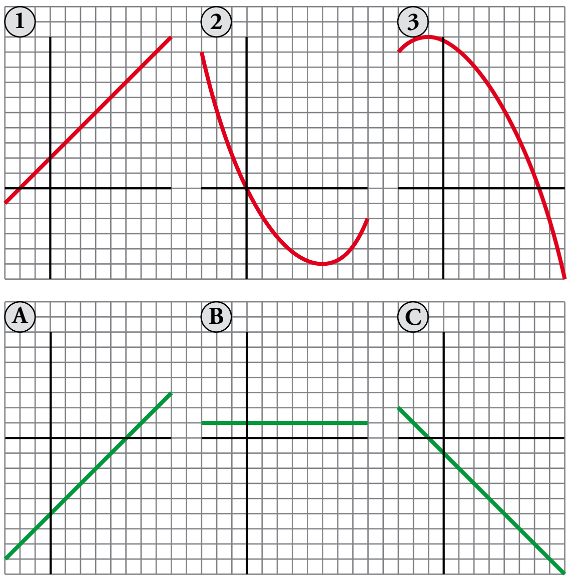
- En l'interval (a, b), $f(x)$ és decreixent. Per tant, la seva derivada és negativa. És el que li passa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f en b és 0: $f'(b) = 0$. I també és $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ on $f(x)$ té tangent horitzontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ on $f(x)$ és creixent.

  $g(x) = f'(x) < 0$ on $f(x)$ és decreixent.

■ **Les tres gràfiques de sota, A, B i C, són les funcions derivades de les gràfiques de sobre, 1, 2 i 3, però en un altre ordre. Explica raonadament quina és la de cada una.**



1) B

2) A

3) C

La derivada s'anul·la en els punts de tangent horitzontal, és positiva on la funció és creixent, i és negativa on la funció decreix.

1 Derivada d'una funció en un punt

Pàgina 157

1 Troba, pas a pas, les derivades següents:

a) $4x - x^2$ **en** $x_0 = 3$

b) x^3 **en** $x_0 = 2$

c) $\dfrac{1}{x}$ **en** $x_0 = 2$

d) $(x-3)^2$ **en** $x_0 = 1$

a) $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{4(3+h)-(3+h)^2-3}{h} = \dfrac{12+4h-9-6h-h^2-3}{h} = -h-2$

$f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-h-2) = -2$

b) $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^3-8}{h} = \dfrac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = h^2+6h+12$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h^2+6h+12) = 12$

c) $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2}}{h} = \dfrac{-1}{2(h+2)}$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2(h+2)} = -\dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h-3)^2-4}{h} = \dfrac{(h-2)^2-4}{h} = h-4$

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h-4) = -4$

2 Troba, pas a pas, la derivada lateral $f'(0^+)$ de $f(x) = \sqrt{x}$ i justifica'n la resposta.

Si $h > 0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \rightarrow$ No existeix $f'(0^+)$.

3 Quina condició ha de complir una funció, f, per tal de ser derivable en l'interval [1, 5)?

Perquè f sigui derivable en [1, 5), ha de ser-ho en l'interval obert (1, 5) i, a més, ha d'existir la derivada lateral $f'(1^+)$.

Pàgina 159

4 Estudia la derivabilitat en $x_0 = 3$ de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

- Continuïtat en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $x_0 = 3$.

- Derivabilitat en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\} \text{Les derivades laterals existeixen i coincideixen.}$$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $x_0 = 3$. A més, $f'(3) = 3$.

5 Estudia la derivabilitat en $x_0 = 0$ de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 3, & x \le 0 \\ -x^2 + 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

- Continuïtat en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 5x + 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 2x + 3) = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3. \text{ A més, } f(0) = 3.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $x_0 = 0$.

- Derivabilitat en $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 5) = -5 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x + 2) = 2 = f'(0^+) \end{cases}$$

Les derivades laterals són finites però no coincideixen. Per tant, no és derivable en $x_0 = 0$.

6 Estudia la derivabilitat de la funció següent en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

- Continuïtat en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-\sqrt{-x}) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x}) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0. \text{ A més, } f(0) = 0.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $x_0 = 0$.

- Derivabilitat en $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \end{cases}$$

Les derivades laterals no existeixen perquè els límits són infinits. Per tant, no és derivable en $x_0 = 0$.

7 Calcula m i n perquè $f(x)$ sigui derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la funció és contínua i derivable, ja que està formada per dos polinomis.
- Continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$.

- Derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -2x = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Perquè sigui derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \rightarrow m = 0$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $\mathbb{R}$ per a $m = 0$ i $n = 5$.

3 Regles de derivació

Pàgina 163

8 **Fes servir les regles de derivació per calcular la derivada de cada una d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\,\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log(sin\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = tg^2\,x + sin^2\,x$

j) $f(x) = sin\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = 7^{sin\,(x^2+1)}$

l) $f(x) = sin\,(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sin\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\,\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilitzem el resultat obtingut en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilitzem el resultat obtingut en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

D'una altra manera: Si agafem logaritmes prèviament:

$f(x) = ln\,(1-x) - ln\,(1+x)$. Derivem:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x) - (1-tg\,x) \cdot (1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)\,[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

D'una altra manera: Si tenim en compte el resultat obtingut en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) Tenint en compte el resultat obtingut en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-(1+tg^2\,x)}{\sqrt{(1-tg\,x)(1+tg\,x)^3}}$$

També podríem haver arribat a aquest resultat utilitzant els resultats de l'apartat en b).

f) $f(x) = ln\ \sqrt{e^{tg\ x}} = ln\ e^{(tg\ x)/2} = \dfrac{tg\ x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\ x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\ 3 = \dfrac{ln\ 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\ (sin\ x \cdot cos\ x)^2 = 2\,[log\ (sin\ x + log\ (cos\ x)]$

$f'(x) = 2\left[\dfrac{cos\ x}{sin\ x} \cdot \dfrac{1}{ln\,10} + \dfrac{-sin\ x}{cos\ x} \cdot \dfrac{1}{ln\,10}\right] = \dfrac{2}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos^2\ x - sin^2\ x}{sin\ x \cdot cos\ x} =$

$= \dfrac{4}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos^2\ x - sin^2\ x}{2\ sin\ x \cdot cos\ x} = \dfrac{4}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos\ 2x}{sin\ 2x} = \dfrac{4}{ln\,10 \cdot tg\ 2x}$

D'una altra manera:

$f(x) = log\ (sin\ x \cdot cos\ x)^2 = 2\ log\left(\dfrac{sin\ 2x}{2}\right)$

$f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos\ 2x}{(sin\ 2x)/2} = \dfrac{4}{ln\,10 \cdot tg\ 2x}$

i) $f'(x) = 2tg\ x \cdot D[tg\ x] + 2\ sin\ x \cdot D[sin\ x] = 2tg\ x \cdot (1 + tg^2\ x) + 2\ sin\ x \cdot cos\ x = 2\,(tg\ x + tg\ x) + 2\ sin\ x \cdot cos\ x$

j) $f'(x) = \dfrac{cos\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{sin\ \sqrt{x+1} \cdot (-\ sin\ \sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \dfrac{cos\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{sin\ \sqrt{x+1} \cdot sin\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

k) $f'(x) = 7^{sin\,(x^2+1)} \cdot ln\ 7 \cdot D[sin\,(x^2+1)] = 7^{sin\,(x^2+1)} \cdot ln\ 7 \cdot 2x \cdot cos\,(x^2+1)$

l) $f'(x) = cos\ (3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sin\ x + x^2 + 1}} \cdot (cos\ x + 2x) = \dfrac{cos\ x + 2x}{2\sqrt{sin\ x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2\ cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-\ sin\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2\,(3-x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3 - x^2))^2}} =$

$= \dfrac{-2\ cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\ sin\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{x + (3-x)^2)^2}} = \dfrac{(5 - 2x) \cdot sin\ (2\sqrt[3]{x + (3-x)^2})}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$

9 **Troba les derivades primera, segona i tercera d'aquestes funcions:**

a) $\boldsymbol{y = x^5}$ **b)** $\boldsymbol{y = x\ cos\ x}$ **c)** $\boldsymbol{y = sin^3\ x + cos^2\ x + x}$

a) $y = x^5 \ \rightarrow\ y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x \ \rightarrow\ y' = cos\ x - x\ sin\ x$

$y'' = -sin\ x - sin\ x - x\ cos\ x = -2sin\ x - x\ cos\ x$

$y''' = -2cos\ x - cos\ x + x\ sin\ x = -3cos\ x + x\ sin\ x$

c) $f'(x) = 3\ sin^2 x \cdot D[sin\ x] + 2cos\ x \cdot D[cos\ x] + 1 = 3sin^2 x \cdot cos\ x - 2cos\ x \cdot sin\ x + 1$

$f''(x) = 6\ sin\ x \cdot cos\ x - 3\ sin^2 x \cdot sin\ x + 2\ sin^2 x - 2cos^2 x = 6\ sin\ x \cdot cos^2 x - 3\ sin^3 x + 2\ sin\ x$

$f'''(x) = 6cos\ x \cdot cos^2 x + 6\ sin\ x \cdot 2cos\ x \cdot D[cos\ x] - 9\ sin^2 x \cdot D[sin\ x] + 4\ sin\ x \cdot D[sin\ x] - 4cos\ x =$

$= 6cos^3 x - 12\ sin^2 x \cdot cos\ x - 9\ sin^2 x \cdot cos\ x + 4\ sin\ x \cdot cos\ x + 4cos\ x \cdot sin\ x =$

$= 6cos^3 x - 21cos\ x \cdot sin^2 x + 8cos\ x \cdot sin\ x$

10 **Calcula $f'(1)$ si:**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\, x^{-17/30} = \frac{13\ \sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\ \sqrt[30]{x^{17}}$$

Per tant: $f'(1) = \dfrac{13\ \sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

11 **Calcula $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ si:**

$$f(x) = (cos^2 3x - sin^2 3x) \cdot sin\ 6x$$

$$f(x) = (cos^2 3x - sin^2 3x) \cdot sin\ 6x = cos\ 6x \cdot sin\ 6x = \frac{sin\ 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12\ cos\ 12x}{2} = 6cos\ 12x$$

Per tant: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\ \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos\ (2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

12 **Calcula $f'(0)$ si:**

$$f(x) = ln\ \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$$

$$f(x) = ln\ \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1)^2 = \frac{1}{2}\ ln\ (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2 = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{4(2x + 1)}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{8x + 4}{\sqrt{3}} = \frac{-16x^3 - 24x^2 + (2\sqrt{3} - 24)x + \sqrt{3} - 8}{\sqrt{3}\,(2x^2 + 2x + 2)}$$

Per tant: $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3} - 8}{2\sqrt{3}}$

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 164

1. Funció derivada a partir de la definició de derivada

Fes-ho tu. **Obtén la funció derivada de la funció següent fent servir la definició de derivada:**

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

Representa les gràfiques de f i de f'.

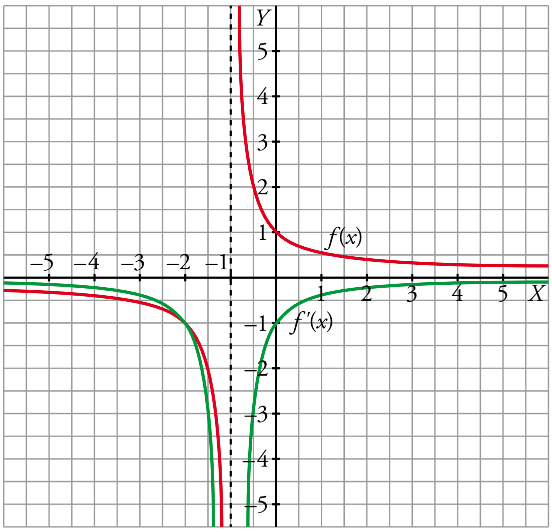
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x+h)=\frac{1}{x+h+1}$$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x-h-1}{(x+h+1)(x+1)}=\frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$



2. Estudi de la derivabilitat d'una funció definida a trossos

Fes-ho tu. **Estudia la derivabilitat de la funció següent:**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2 & \text{si } x<-1 \\ x^3 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 3x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Representa les gràfiques de f i f'.

$f(x)$ està definida per funcions polinòmiques en els intervals $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, +\infty)$. Per tant, és contínua i derivable en aquests.

En $x=-1$ és contínua perquè $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=-1$.

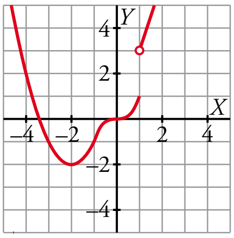
En $x = 1$ no ho és perquè no existeix $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ja que els límits laterals són diferents:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} x^3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 3x = 3 \end{cases}$$

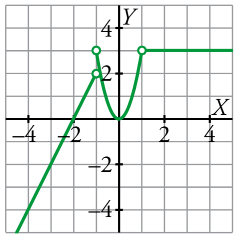
No pot ser derivable en $x = 1$ perquè no és contínua.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \end{cases} \to \begin{cases} f'(-1^-) = 2 \\ f'(-1+) = 3 \end{cases} \to \text{No és derivable en } x = -1.$$

Gràfica de $f(x)$:



Gràfica de $f'(x)$:



Pàgina 165

3. Regles de derivació

Fes-ho tu. **Calcula les derivades de les funcions següents:**

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{(2x - 3)^2}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3}$

c) $f(x) = -x^3 e^{2x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{2}$

e) $f(x) = \ln \left(\dfrac{3 - 2x^2}{(3x + 1)^2 \cdot 3^x} \right)$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x - 3)^2 - (x - 1) \cdot 2(2x - 3) \cdot 2}{(2x - 3)^4} = \dfrac{(2x - 3) - 4(x - 1)}{(2x - 3)^3} = \dfrac{-2x + 1}{(2x - 3)^3}$

b) $f(x) = (3 - x^3)^{1/5} \to f'(x) = \dfrac{1}{5}(3 - x^3)^{(1/5) - 1}(-3x^2) = \dfrac{-3x^2}{5}(3 - x^3)^{-4/5} = \dfrac{-3x^2}{5\sqrt[5]{(3 - x^3)^4}}$

c) $f'(x) = -3x^2 e^{2x} - x^3 e^{2x} \cdot 2 = -e^{2x} x^2 (2x + 3)$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \cos 3x \cdot 3 = \dfrac{3}{2} \cos 3x$

e) $f(x) = \ln(3 - 2x^2) - 2\ln(3x + 1) - x \ln 3 \to f'(x) = \dfrac{-4x}{3 - 2x^2} - \dfrac{6}{3x + 1} - \ln 3$

4. Funció contínua i derivable

Fes-ho tu. Calcula el valor de a i b perquè f sigui derivable.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2ax & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x \neq 1$, la funció és derivable. Estudiem ara la seva derivabilitat en $x = 1$.

- f ha de ser contínua en $x = 1$:

  $$f(1) = a + b; \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^3 - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (ax^2 + b) = a + b \end{cases}$$

  Perquè f sigui contínua en $x = 1$, ha de complir-se que $a + b = 1$.

- f ha de ser derivable en $x = 1$:

  $f'(1^-) = 6$

  $f'(1^+) = 2a$

  Perquè f sigui derivable en $x = 1$, ha de complir-se que $2a = 6$.

Resolent el sistema $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a = 6 \end{cases}$, obtenim els valors demanats:

$$2a = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow 3 + b = 1 \rightarrow b = -2$$

Per tant, si $a = 3$ i $b = -2$ la funció és derivable.

Pàgina 166

5. Funció derivada

Fes-ho tu. Calcula la funció derivada de la funció següent i representa f i f'.

$$f(x) = |2 - x| + |x + 1|$$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ -2 + x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

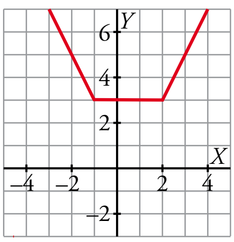
$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ -1 + 2x & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \rightarrow \text{És una funció contínua perquè és suma de funcions contínues.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

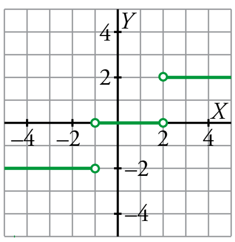
$f'(-1^-) = -2,\ f'(-1^+) = 0 \rightarrow$ No és derivable en $x = -1$.

$f'(2^-) = 0,\ f'(2^+) = 2 \rightarrow$ No és derivable en $x = 2$.

Gràfica de $f(x)$:



Gràfica de $f'(x)$:



6. Valor d'un paràmetre perquè f sigui derivable

Fes-ho tu. Calcula el valor que ha de tenir a perquè la funció $f(x)$ sigui derivable en tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^4 - 2x^2 - 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ està definida per funcions polinòmiques en els intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$. Per tant, és contínua i derivable en aquests.

Continuïtat en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -2 \to \text{La funció és contínua per a qualsevol valor de } a.$$

Derivabilitat en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax^3 - 4x & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = 0 \end{cases} \to f(x) \text{ és derivable per a qualsevol valor de } a.$$

Per tant, la funció és derivable en $\mathbb{R}$ per a qualsevol valor de a.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 167

1. Obtenció dels valors de dos paràmetres perquè la funció sigui derivable

Calcula els paràmetres a i b perquè la funció següent sigui derivable en x = 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{a}{x} + b \cdot e^{x-1} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Com que volem que la funció sigui derivable en $x = 1$, primer ha de ser contínua en aquest punt.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + \dfrac{a}{x} + b \cdot e^{x-1}\right) = 1 + a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x+1} = 1 \end{cases} \to 1 + a + b = 1 \to a + b = 0$$

A més, com que $f(1) = 1 + a + b$, la relació anterior garantitza la continuïtat en $x = 1$.

Per altra banda, perquè sigui derivable en $x = 1$, les derivades laterals en aquest punt han de ser iguals.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{a}{x^2} + b \cdot e^{x-1} & \text{si } x < 1 \to f'(1^-) = 2 - a + b \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \to f'(1^+) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to 2 - a + b = -\dfrac{1}{2}$$

Resolem el sistema i s'obtenen els valors buscats:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -a + b &= -\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \to a = \frac{5}{4},\ b = -\frac{5}{4}$$

2. Simplificació de la funció abans de derivar-la fent servir les propietats dels logaritmes

Calcula la derivada de cada una de les funcions següents:

a) $y = \ln\sqrt{3^x \cdot \cos^3 x}$ **b)** $y = \ln \dfrac{4^x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \ln(3^x \cos^3 x)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(x \ln 3 + 3\ln \cos x) \to y' = \dfrac{1}{2}\left(\ln 3 - 3\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{\ln 3}{2} - \dfrac{3}{2}\,tg\, x$

b) $y = \ln 4^x - \ln(x^2 - 1)^{1/2} = x\ln 4 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 - 1) \to y' = \ln 4 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x}{x^2 - 1} = \ln 4 - \dfrac{x}{x^2 - 1}$

3. Punts de derivada nul·la

Calcula els punts d'aquesta funció en què la derivada s'anul·la:

$$f(x) = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{4x^2(100 - x^2)} = \sqrt{400x^2 - 4x^4} \to f'(x) = \dfrac{800x - 16x^3}{2\sqrt{400x^2 - 4x^4}} = \dfrac{400x - 8x^3}{\sqrt{400x^2 - 4x^4}}$

$f'(x) = 0 \to 400x - 8x^3 = 0 \to x = \sqrt{50},\ x = -\sqrt{50},\ x = 0$ (no és vàlid perquè en aquest punt s'anul·la el denominador de la derivada).

$x = \sqrt{50} \to f(\sqrt{50}) = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{100 - 50} = 2 \cdot 50 = 100$

$x = -\sqrt{50} \to f(-\sqrt{50}) = 2 \cdot (-\sqrt{50}) \cdot \sqrt{100 - 50} = -2 \cdot 50 = -100$

Els punts són $(-\sqrt{50}, -100)$ i $(\sqrt{50}, 100)$.

4. Equacions de les rectes tangents a una funció en diversos punts

Calcula les equacions de les rectes tangents a la funció següent en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 3$:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^x}$$

$f(0) = 1$

$f(3) = \frac{4}{e^3}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\,e^x - (x-1)^2\,e^x}{e^{2x}} = \frac{2(x-1) - (x-1)^2}{e^x} = \frac{2x - 2 - x^2 + 2x - 1}{e^x} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$$

$f'(0) = -3$

$f'(3) = 0$

En $x = 0$ la recta tangent és $y = 1 - 3x$.

En $x = 3$ la recta tangent és $y = \frac{4}{e^3}$.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 168

Per practicar

Definició de derivada

1 **Troba la taxa de variació mitjana (TVM) o quocient incremental de les funcions següents en els intervals: [–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h].**

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7x - 5$ **c)** $f(x) = 3$ **d)** $f(x) = 2^x$

En quines d'aquestes és constant la TVM? Quin tipus de funcions són?

a) $f(x) = x^2 + 1$

En $[-3, -1] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En $[0, 2] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En $[2, 5] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$

b) $f(x) = 7x - 5$

En $[-3, -1] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En $[0, 2] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En $[2, 5] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{7h}{h} = 7$

c) $f(x) = 3$

En $[-3, -1] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En $[0, 2] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En $[2, 5] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 0$

En $[1, 1 + h] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$

d) $f(x) = 2^x$

En $[-3, -1] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = \dfrac{3}{16}$

En $[0, 2] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{3}{2}$

En $[2, 5] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = \dfrac{28}{3}$

En $[1, 1 + h] \rightarrow \text{TVM} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2^{1+h} - 2}{h} = \dfrac{2(2^h - 1)}{h}$

La funció b) $f(x) = 7x - 5$ és una funció lineal i la TVM és constant.

La funció c) $f(x) = 3$ és una funció lineal i la TVM és 0 (constant).

2 **Troba amb calculadora el quocient incremental $\frac{\Delta f}{h}$ per a $x_0 = 2$ i $h = 0{,}1$ de:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Compara els resultats amb les derivades d'aquestes funcions en el punt d'abscissa 2.

a) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \frac{\sqrt{2,1} - \sqrt{2}}{0,1} = 0,349$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,354$

b) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \frac{2,1^2 - 5 \cdot 2,1 + 1 - (-5)}{0,1} = -0,9$

$f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1$

c) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \frac{\frac{1}{2,1} - \frac{1}{2}}{0,1} = -0,238$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{-1}{2^2} = -0,25$

3 **Troba amb la calculadora el quocient incremental $\frac{\Delta f}{h}$ per a $x_0 = \pi/3$ i $h = 0{,}01$ de:**

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = tg\, x$

Compara resultats amb les derivades d'aquestes funcions en el punt d'abscissa $\pi/3$.

a) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - \sin\frac{\pi}{3}}{0,01} = 0,496$

$f'(x) = \cos x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 0,5$

b) $\frac{\Delta f}{h} = = \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - \cos\frac{\pi}{3}}{0,01} = -0,869$

$f'(x) = -\sin x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -0,866$

c) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \frac{tg\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - tg\frac{\pi}{3}}{0,01} = 4,07$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}} = 4,0$

4 **El límit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{sin\,(\pi + h) - sin\,\pi}{h}$ és la derivada de la funció *sinus* en el punt d'abscissa π, és a dir, $sin'(\pi)$. Per tant, el límit és:**

$$sin'(\pi) = cos\,(\pi) = -1$$

Calcula anàlogament, és a dir, a partir de les regles de derivació que ja coneixes, aquests límits:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$ **b)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{2+h} - e^2}{h}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 - 3x + 1) - 1}{x - 3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{2+h} - e^2}{h} = e^2$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 - 3x + 1) - 1}{x - 3} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 64}{x - 4} = 3 \cdot 4^2 = 48$

5 **Fes servir la definició de derivada per trobar:**

a) $f'(3)$ en cada cas:

$$f(x) = \frac{3x - 2}{7} \qquad f(x) = x^2 - 4 \qquad f(x) = \frac{2 + x}{x}$$

b) $f'(2)$ en cada cas:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \qquad f(x) = \sqrt{x + 2} \qquad f(x) = (x - 5)^2$$

a) • $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3h/7)}{h} = \dfrac{3}{7}$

• $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h}{h} = 6$

• $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{9h + 3h^2} = \dfrac{-2}{9}$

b) • $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2}{3h + 9} = \dfrac{2}{9}$

• $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \dfrac{1}{4}$

• $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h - 6) = -6$

6 **Aplica la definició de derivada per trobar $f'(x)$.**

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2}$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 1$ **c)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **e)** $f(x) = x^2 - x$ **f)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{5(x+h) + 1}{2} - \dfrac{5x + 1}{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{5h}{2}}{h} = \dfrac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[3(x+h)^2-1]-(3x^2-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h^2+6xh}{h} = 6x$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h+\dfrac{1}{x+h}-x-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2+hx-1}{x(h+x)} = 1-\dfrac{1}{x^2}$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h-2}-\dfrac{1}{x-2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{(x-2)\cdot(x+h-2)\cdot h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(x-2)\cdot(x+h-2)} = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

e) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(x+h)^2-(x+h)]-(x^2-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2+2xh-h}{h} = 2x-1$

f) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2xh+h^2}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Regles de derivació

7 Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$ **b)** $\dfrac{x+1}{(2-x)^2}$ **c)** $y = \dfrac{3x^2}{x+\sqrt{x}}$

d) $y = \left(0,5-\dfrac{x}{10}\right)^4$ **e)** $y = \sqrt[3]{3x^2}$ **f)** $y = (2\sqrt{x}-3)^7$

a) $y' = \dfrac{2x\cdot(x^2+3)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$

b) $y' = \dfrac{(2-x)^2+(x+1)\cdot 2(2-x)}{(2-x)^4} = \dfrac{x+4}{(2-x)^3}$

c) $y' = \dfrac{6x\cdot(x+\sqrt{x})-3x^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2} = \dfrac{15x^2+6x^2\cdot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot(x+\sqrt{x})^2}$

d) $y' = \dfrac{-4}{10}\cdot\left(0,5-\dfrac{x}{10}\right)^3 = \dfrac{-2}{5}\cdot\left(0,5-\dfrac{x}{10}\right)^3$

e) $y' = D(\sqrt[3]{3}\,x^{2/3}) = \sqrt[3]{3}\cdot\dfrac{2}{3}\,x^{-1/3} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

f) $y' = 7(2\sqrt{x}-3)^6\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x}-3)^6$

8 **Troba la derivada d'aquestes funcions:**

a) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

b) $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$

c) $y = \dfrac{x}{(2x+1)^3}$

d) $y = \dfrac{1-x^2}{x^2-4x+4}$

e) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}$

f) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{3x^2 \cdot (x+1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{x^2 \cdot (x+3)}{(x+1)^3}$

b) $y' = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2}$

c) $y' = \dfrac{(2x+1)^3 - x \cdot 3\,(2x+1)^2}{(2x+1)^6} = \dfrac{(2x+1) - 6x}{(2x+1)^4} = \dfrac{1-4x}{(2x+1)^4}$

d) $y' = \dfrac{-2x(x^2-4x+4) - (1-x^2)\,(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2} = \dfrac{-2x(x-2)^2 - (1-x^2) \cdot 2\,(x-2)}{(x-2)^4} =$

$= \dfrac{-2x(x-2) - (1-x^2) \cdot 2}{(x-2)^3} = \dfrac{4x-2}{(x-2)^3}$

e) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{2}{3} \dfrac{-2}{(1-x)^{1/3} \cdot (1+x)^{5/3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)\,(1+x)^5}}$

f) $y' = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot 2x = -\dfrac{2}{x^2} + x$

9 **Deriva les funcions següents:**

a) $y = e^{4x}\,(x-1)$

b) $y = \dfrac{(1-x)^2}{e^x}$

c) $y = \sqrt{2^x}$

d) $y = ln\,(2x-1)$

e) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

f) $y = 7e^{-x}$

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$

b) $y' = \dfrac{-2 \cdot (1-x) \cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2 \cdot (1-x) - (1-x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot ln\,2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot ln\,2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

e) $y' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{3^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

f) $y' = -7e^{-x}$

10 **Deriva aquestes funcions:**

a) $y = ln\,(x^2 - 1)$

b) $y = ln\,\sqrt{1-x}$

c) $y = \dfrac{ln\,x}{e^x}$

d) $y = e^{x^2+1}$

e) $y = ln\left(tg\,\dfrac{3}{x}\right)$

f) $y = ln\left(ln\,\dfrac{1}{x}\right)$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2\,(1-x)}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot e^x - ln\,x\cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - ln\,x}{e^x} = \dfrac{1 - x\cdot ln\,x}{x\cdot e^x}$

d) $y' = 2x\,e^{x^2+1}$

e) $y' = \dfrac{1}{tg\,\dfrac{3}{x}}\cdot\left(1 + tg^2\,\dfrac{3}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{3\left(1 + tg^2\,\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\,tg\,\dfrac{3}{x}}$

f) $y' = \dfrac{1}{ln\,\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x\,ln\,\dfrac{1}{x}}$

11 **Calcula la derivada d'aquestes funcions:**

a) $y = sin^2\,x$

b) $y = sin\,x^2$

c) $y = sin\,x\,cos^2\,x$

d) $y = \dfrac{sin^2\,x}{1 + cos^2\,x}$

e) $y = sin^2\,x^2$

f) $y = cos^3\,(2x+1)$

a) $y' = 2\,sin\,x\cdot cos\,x = sin\,2x$

b) $y' = cos\,x^2\cdot 2x = 2x\,cos\,x^2$

c) $y' = cos\,x\cdot cos^2\,x - 2cos\,x\cdot sin\,x\cdot sin\,x = cos^3\,x - 2\,sin^2\,x\,cos\,x =$

$= cos^3\,x - 2\,(1 - cos^2\,x)\,cos\,x = cos^3\,x - 2cos\,x + 2cos^3\,x = 3cos^3\,x - 2cos\,x$

d) $y' = \dfrac{2\,sin\,x\,cos\,x\cdot(1 + cos^2\,x) + 2cos\,x\,sin\,x\cdot sin^2\,x}{(1 + cos^2\,x)^2} =$

$= \dfrac{2\,sin\,x\,cos\,x + 2\,sin\,x\,cos^3\,x + 2cos\,x\,sin^3\,x}{(1 + cos^2\,x)^2} =$

$= \dfrac{2\,sin\,x\,cos\,x\cdot(1 + cos^2\,x + sin^2\,x)}{(1 + cos^2\,x)^2} = \dfrac{4\,sin\,x\,cos\,x}{(1 + cos^2\,x)^2}$

e) $y' = 2\,sin\,x^2\cdot cos\,x^2\cdot 2x = 4x\,sin\,x^2\,cos\,x^2$

f) $y' = 3cos^2\,(2x+1)\cdot[-\,sin\,(2x+1)\cdot 2] = -6\,sin\,(2x+1)\,cos^2\,(2x+1)$

12 **Deriva les funcions següents:**

a) $y = \cos^5(7x^2)$ **b)** $y = tg\,\frac{x^2}{2}$ **c)** $y = \log_2 \frac{1}{x}$

d) $y = \sqrt[3]{\sin x^2}$ **e)** $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ **f)** $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

a) $y' = 5\cos^4(7x^2)\cdot(-\sin(7x^2))\cdot 14x = -70x\cos^4(7x^2)\sin(7x^2)$

b) $y' = \left(1 + tg^2\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{2x}{2} = x + x\,tg^2\frac{x^2}{2}$

c) $y = \log_2 1 - \log_2 x$

$y' = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 2} = \frac{-1}{x\ln 2}$

d) $y' = \frac{2x\cdot\cos x^2}{3\sqrt[3]{\sin^2 x^2}}$

e) $y' = \dfrac{\frac{2\cdot(1-2x)+(1+2x)\cdot 2}{(1-2x)^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \dfrac{\frac{4}{(1-2x)^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \dfrac{2}{(1-2x)^2\cdot\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{(1-2x)^4\cdot\frac{1+2x}{1-2x}}} = \dfrac{2}{\sqrt{(1-2x)^3(1+2x)}}$

f) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

13 **Calcula la derivada d'aquestes funcions, aplicant prèviament les propietats dels logaritmes:**

a) $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ **b)** $y = \ln(x\,tg\,x)^2$ **c)** $y = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)$

d) $y = \ln(2^x\cdot\sin^2 x)$ **e)** $y = \ln\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ **f)** $y = \ln(\sin\sqrt{e^x})$

a) $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}[\ln(1-x) - \ln(1+x)]$

$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2}$

b) $y = \ln(x\,tg\,x)^2 = 2[\ln x + \ln(tg\,x)]$

$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2 x}{tg\,x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{2}{tg\,x} + tg\,x\right] = \frac{2}{x} + 2\,cotg\,x + 2tg\,x$

c) $y = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right) = \ln\sqrt[3]{x^2-1} - \ln x^2 = \frac{1}{3}\ln(x^2-1) - 2\ln x$

$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{(x^2-1)} - 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x}{3(x^2-1)} - \frac{2}{x}$

d) $y = \ln (2^x \sin^2 x) = \ln 2^x + \ln (\sin^2 x) = x \ln 2 + 2 \ln (\sin x)$

$$y' = \ln 2 + 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \ln 2 + \frac{2}{tg\ x}$$

e) $y = \frac{1}{2} \cdot (\ln x - \ln (x+1))$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

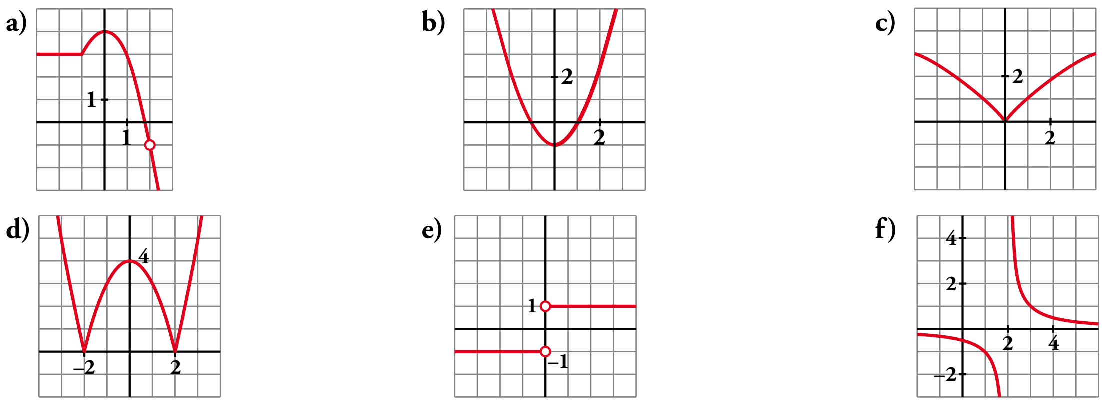
f) $y = \ln (\sin e^{x/2})$

$$y' = \frac{\frac{1}{2} e^{x/2} \cdot \cos e^{x/2}}{\sin e^{x/2}} = \frac{e^{x/2} \cdot \cos \sqrt{e^x}}{2\ \sin \sqrt{e^x}}$$

Pàgina 169

Derivabilitat

14 **Observa les gràfiques de les funcions i indica en quins punts no són derivables:**



Alguna d'aquestes és derivable en tot $\mathbb{R}$?

a) No és derivable en $x = -1$ (té un punt «angulós»), ni en $x = 2$ (no està definida la funció).

b) És derivable en tot $\mathbb{R}$.

c) No és derivable en $x = 0$ (té un punt «angulós»).

d) La funció no és derivable ni en $x = -2$ ni en $x = 2$ perquè en aquests valors té punts angulosos.

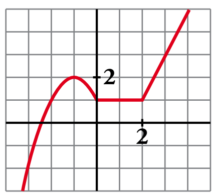
e) La funció no és derivable en $x = 0$ perquè no està definida en aquest punt.

f) La funció no és derivable en $x = 2$ perquè no està definida en aquest punt.

L'única funció derivable en tot $\mathbb{R}$ és la de l'apartat b).

15 **Aquesta és la gràfica d'una funció $y = f(x)$. Observa-la i calcula: $f'(-1)$, $f'(1)$ i $f'(3)$.**

En quins punts no és derivable?



- En $x = -1$, la recta tangent a f és horitzontal; el seu pendent és 0. Per tant, $f'(-1) = 0$.
- En $x = 1$, f és una funció constant. Per tant, $f'(1) = 0$.
- En $x = 3$, f és una recta que passa pels punts (2, 1) i (4, 5). Calculem el seu pendent:

$$m = \frac{5-1}{4-2} = 2. \text{ Per tant, } f'(3) = 2.$$

- No és derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$, ja que en aquests veiem que $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ i $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

16 **Estudia la continuïtat i la derivabilitat de les funcions següents en els punts que s'indiquen i representa-les:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **en** $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **en** $x = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

a) Continuïtat en $x = 1$:

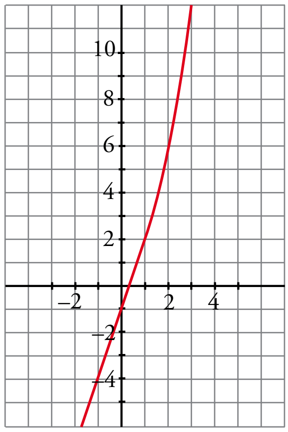
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 1.$$

Derivabilitat en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 3 \end{array}\right\} f(x) \text{ és derivable en } x = 1 \text{ i } f'(1) = 3.$$

Gràfica:



b) Continuïtat en $x = 0$:

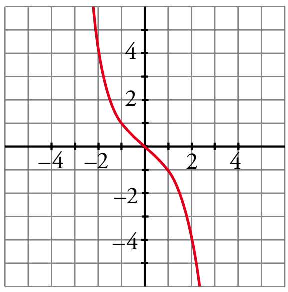
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

Derivabilitat en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ és derivable en } x = 0 \text{ i } f'(0) = 0.$$

Gràfica:



c) Continuïtat en $x = 3$:

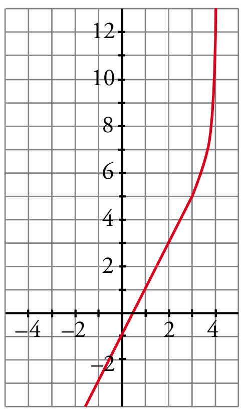
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5 \\ \displaystyle\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 - 4) = 5 \\ f(3) = 5 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 3.$$

Derivabilitat en $x = 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 2 \\ f'(3^+) = 6 \end{array}\right\} f(x) \text{ no és derivable en } x = 3.$$

Gràfica:



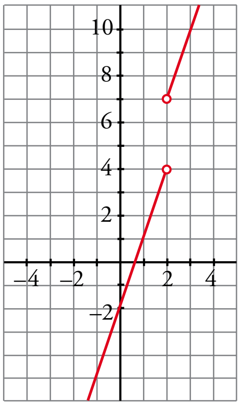
d) Continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x + 1) = 7 \end{array}\right\} f(x) \text{ no és contínua en } x = 2 \text{ (té una discontinuïtat de salt finit).}$$

Derivabilitat en $x = 2$:

Com que $f(x)$ no és contínua en $x = 2$, tampoc és derivable en aquest punt.

Gràfica:



17 Comprova que la funció $f(x)$ és contínua però no és derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x \neq 2$, la funció és contínua i derivable.
- Continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 2.$$

- Derivabilitat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\} \text{Hi ha derivades laterals però no coincideixen.}$$

$f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

18 Estudia la continuïtat i la derivabilitat de les funcions següents:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Si $x \neq 0$ i $x \neq 3$, la funció és contínua i derivable.

Continuïtat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

Continuïtat en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$ Els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen. La funció no és contínua en $x = 3$.

Derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$ Les derivades laterals existeixen però no coincideixen, $f(x)$ no és derivable en $x = 0$.

Derivabilitat en $x = 3$:

Com que $f(x)$ no és contínua en $x = 3$, $f(x)$ no és derivable en $x = 3$.

b) Si $x \neq -1$ i $x \neq 2$, $f(x)$ és contínua i derivable.

Continuïtat en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\}$$ $f(x)$ és contínua en $x = -1$.

Continuïtat en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen, $f(x)$ no és contínua en $x = 2$.

Derivabilitat en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Les derivades laterals existeixen però no coincideixen, $f(x)$ no és derivable en $x = -1$.

Derivabilitat en $x = 2$:

$f(x)$ no és contínua en $x = 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

19 Estudia la continuïtat i la derivabilitat d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Continuïtat:

- Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$ $\rightarrow$ És contínua, ja que està formada per funcions contínues.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Per tant, la funció és contínua en $x = 0$.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x = 1) \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$\rightarrow$ La funció és contínua en $x = 1$ i, per tant, és contínua en $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- Si $x \neq 0$ i $x \neq 1$ $\rightarrow$ La funció és derivable. La seva derivada és, en aquests punts:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 0$; i $f'(0) = 0$.

- En $x = 1$:

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Per tant, $f(x)$ no és derivable en $x = 1$.

La funció és derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. La seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Continuïtat:

- En $x \neq 0$ $\rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per dues funcions contínues.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$\rightarrow$ La funció és contínua en $x = 0$ i, per tant, és contínua en tot $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- Si $x \neq 0$ $\rightarrow$ La funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 0$ i $f'(0) = -1$. La funció és derivable en tot $\mathbb{R}$. La seva derivada seria:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

20 **a) Calcula els valors de m i n perquè f sigui derivable en tot $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) En quins punts és $f'(x) = 0$?

a) Perquè sigui derivable, en primer lloc ha de ser contínua.

- Si $x \neq 1$, la funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua en $x = 1$, ha de ser $-4 + m = -1 + n$; és a dir: $m = n + 3$.

Derivabilitat:

- Si $x \neq 1$, la funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$

Perquè sigui derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, és a dir, $n = -1$.

Per tant, la funció serà derivable en tot $\mathbb{R}$ si $m = 2$ i $n = -1$. En aquest cas, la derivada seria:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ però } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}; \text{ però } -\frac{1}{2} < 1$$

Per tant, $f'(x)$ no s'anul·la en cap punt.

21 Calcula a i b perquè aquestes funcions siguin derivables en tot $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Perquè sigui derivable, en primer lloc, ha de ser contínua.

- Si $x \neq 2 \rightarrow$ La funció és contínua, ja que està formada per dos polinomis.
- En $x = 2$ ha de complir-se que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua, ha de ser $4a + 6 = -2b$; és a dir, $2a + 3 = -b$ o bé $b = -2a - 3$.

Derivabilitat:

- Si $x \neq 2 \rightarrow$ la funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- En $x = 2$ ha de complir-se que $f'(2^-) = f'(2^+)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$

Perquè sigui derivable, ha de ser $4a + 3 = 4 - b$; és a dir, $b = -4a + 1$.

Tenint en compte les dues condicions obtingudes:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\rightarrow\; 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Per tant, perquè $f(x)$ sigui derivable en tot $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ i $b = -7$.

b) Continuïtat:

- En $x \neq 0 \;\rightarrow$ La funció és contínua ja que està formada per dos polinomis.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 - x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Perquè sigui contínua ha de ser $b = 0$.

Derivabilitat:

- Si $x \neq 0 \;\rightarrow$ La funció és derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\}$$

Perquè sigui derivable, ha de ser $a = -1$.

Per tant, $f(x)$ serà contínua i derivable si $a = -1$ i $b = 0$.

22 Prova que la funció $f(x) = |x + 1|$ no és derivable en $x = -1$.

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$f(x)$ és una funció contínua, ja que està formada per dues funcions contínues, si $x \neq -1$.

- En $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-x - 1) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 1) = b \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} f \text{ és contínua en } x = -1.$$

- La seva derivada, si $x \neq -1$, és:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Les derivades laterals en $x = -1$ són:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^+) = 1 \\ f'(-1^-) = -1 \end{array}\right\} \text{No coincideixen; per tant, } f(x) \text{ no és derivable en } x = -1.$$

23 **Digues si és derivable cada una de les funcions següents en els punts que s'indiquen. Calcula'n les derivades laterals en aquests punts.**

a) $f(x) = |x|$ **en** $x_0 = 0$

b) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ **en** $x_0 = -2$ **i** $x_1 = 3$

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudiem primer la continuïtat en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \ \rightarrow \text{ És contínua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \ \rightarrow \ f'(0^-) = -1 \\ 1 & \text{si } x > 0 \ \rightarrow \ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \ \rightarrow$ No és derivable en $x_0 = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

La funció és contínua en $\mathbb{R}$ perquè és el valor absolut d'una funció polinòmica.

Calculem les derivades laterals en cada punt:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < -2 \\ -2x + 1 & \text{si } -2 < x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -5 \\ f'(-2^+) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow f'(-2^-) \neq f'(-2^+) \ \rightarrow \text{ No és derivable en } x_0 = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -5 \\ f'(3^+) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow f'(3^-) \neq f'(3^+) \ \rightarrow \text{ No és derivable en } x_1 = 3.$$

24 **Indica en quins punts no són derivables les funcions següents:**

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

b) $f(x) = |2x - 3|$

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

$f(x)$ és una funció contínua, ja que és una composició de funcions contínues. La definim a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si $x \neq -2$ i $x \neq 2$, $f'(x)$ és derivable i la seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$: Trobem les derivades laterals:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array}\right\} f(x) \text{ no és derivable en } x = -2.$$

En $x = 2$: Trobem les derivades laterals:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ no és derivable en } x = 2.$$

Per tant, $f(x)$ no és derivable en els punts (–2, 0) i (2, 0).

b) $f(x) = |2x - 3| = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 3/2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3/2 \end{cases}$

$f(x)$ és una funció contínua ja que és la composició de dues funcions contínues ($y = 2x - 3$ i $y = |x|$).

En $x \neq \frac{3}{2}$, $f(x)$ és derivable i la seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3/2 \\ 2 & \text{si } x \geq 3/2 \end{cases}$$

En $x = \frac{3}{2}$, f no és derivable perquè $f'\left(\frac{3}{2}\right)^- = -2$ i $f'\left(\frac{3}{2}\right)^+ = 2$.

25 Quants punts que no tinguin derivada hi ha en la funció $y = |x^2 - 6x - 8|$?

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La funció és contínua, ja que és el valor absolut d'una funció contínua.

En $x = -4 \;\rightarrow\; y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \;\rightarrow\; y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$

La funció no és derivable ni en $x = -4$ ni en $x = -2$; és a dir, en (–4, 0) i en (–2, 0).

Són dos punts «angulosos».

26 Estudia la continuïtat i la derivabilitat de les funcions següents:

a) $y = |x - 2|$

b) $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x + |x - 3|$

d) $y = x^2 + |x|$

a) Definim la funció per intervals:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Derivem:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \; f'(2^-) \neq f'(2^+) \;\rightarrow\; \text{No existeix } f'(2)$$

La funció és derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Definim la funció per intervals. Per a això, calculem els punts en els quals $y = 0$:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Derivem:

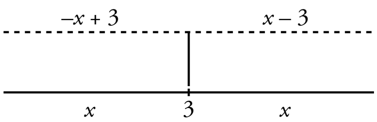
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-4^-) = 2(-4) + 6 = -2 \\ f'(-4^+) = -2(-4) - 6 = 2 \end{array} \right\} f'(-4^-) \ne f'(-4^+) \rightarrow \text{No existeix } f'(-4)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-2^-) = -2(-2) - 6 = -2 \\ f'(-2^+) = -2(-2) + 6 = 2 \end{array} \right\} f'(-2^-) \ne f'(-2^+) \rightarrow \text{No existeix } f'(-2)$$

La funció és derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$.

c) Analitzem el signe de $x - 3$ per definir la funció per intervals:



$$x + (-x + 3) = 3$$
$$x + x - 3 = 2x - 3$$

Així:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Derivem:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = 2 \end{array} \right\} f'(3^-) \ne f'(3^+) \rightarrow \text{No existeix } f'(3)$$

La funció és derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) Definim la funció per intervals.

Recordem que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

Així:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivem:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f'(0^+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array} \right\} f'(0^-) \ne f'(0^+) \rightarrow \text{No existeix } f'(0)$$

La funció és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

27 **a) Comprova que la funció següent és derivable i troba $f'(0)$, $f'(3)$ i $f'(1)$:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Quina és la seva funció derivada?

c) En quin punt es compleix que $f'(x) = 5$?

d) Hi ha algun punt en el qual $f'(x) = -1$?

a) Si $x \neq 1$, la funció és contínua i derivable, ja que està formada per dos polinomis.

Continuïtat en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ és contínua en } x = 1.$$

Derivabilitat en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\} \; \text{Les derivades laterals existeixen i coincideixen.}$$

Per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 1$. A més, $f'(1) = 3$.

Així, $f(x)$ és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, llavors $x \geq 1$. És a dir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

d) $f'(x) = -1 \;\rightarrow\; 2x + 1 = -1 \;\rightarrow\; x = -1$ (No és vàlid perquè no pertany a l'interval de definició.)

No hi ha cap punt en el qual la derivada sigui -1.

Pàgina 170

Per resoldre

28 **Calcula el valor de la derivada en $x = 0$ de cada una de les funcions següents:**

a) $g(x) = e^{\sin f(x)}$ si $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$

b) $h(x) = [\sin f(x)]^3$ si $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ i $f'(0) = 1$

c) $j(x) = \sqrt{\ln f(x)}$ si $f(0) = e$ i $f'(0) = 1$

a) Apliquem la regla de la cadena:

$g'(x) = D[\sin f(x)] \cdot e^{\sin f(x)} = f'(x) \cdot \cos f(x) \cdot e^{\sin f(x)}$

$g'(0) = f'(0) \cdot \cos f(0) \cdot e^{\sin f(0)} = 1 \cdot \cos 0 \cdot e^{\sin f(0)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

b) Apliquem la regla de la cadena:

$$h'(x) = 3[\sin f(x)]^2 \cdot D[\sin f(x)] = 3[\sin f(x)]^2 \cdot f'(x) \cos f(x)$$

$$h'(0) = 3[\sin f(0)]^2 \cdot f'(0) \cdot \cos f(0) = 3\left[\sin \frac{\pi}{4}\right]^2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) Apliquem la regla de la cadena:

$$j'(x) = \frac{D[\ln f(x)]}{2\sqrt{\ln f(x)}} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln f(x)}}$$

$$j'(0) = \frac{f'(0)}{2f(0)\sqrt{\ln f(0)}} = \frac{1}{2e\sqrt{\ln e}} = \frac{1}{2e\sqrt{1}} = \frac{1}{2e}$$

29 **Considera aquestes funcions polinòmiques:**

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 3x + 1$$

Calcula:

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(g \circ f)'(x)$

c) $f \circ g'(x)$

d) $f' \circ g(x)$

a) $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$

Com que $f(x) = x^2$ i $g(x) = 3x + 1 \rightarrow f'(x) = 2x,\ g'(x) = 3$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3 = 6(3x + 1) = 18x + 6$

També podem fer:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot 3(3x + 1) = 18x + 6$

b) $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]\, f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

O bé:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 3x^2 + 1 \rightarrow (g \circ f)'(x) = 6x$

c) $(f \circ g')(x) = f[g'(x)] = f(3) = 9$

d) $(f' \circ g)(x) = 2 \cdot g(x) = 6x + 2$, ja que $f'(x) = 2x$.

30 **Siguin f i g dues funcions tals que: $f(x) = x^2 + 1$, $g'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ i $g(0) = 4$. Calcula:**

a) $(f \circ g)'(0)$

b) $(g \circ f)'(0)$

c) $(g^{-1})'(4)$

d) $(f^{-1})'(5)$

a) $(f \circ g)'(0) = f'[g(0)] \cdot g'(0) = 2 \cdot g(0) \cdot g'(0) = 2 \cdot 4 \cdot \cos 0 = 8$

b) $(g \circ f)'(0) = g'[f(0)] \cdot f'(0) = g'(1) \cdot 2 \cdot 0 = 0$

c) $(g^{-1})'(4) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(4))} = \dfrac{1}{g'(0)} = \dfrac{1}{\cos 0} = 1$

d) Perquè f sigui injectiva i es pugui determinar la funció recíproca, suposarem que $x > 0$.

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

31 **Considera les funcions següents:**

$$f(x) = (x+1)^2 \qquad g(x) = x^2$$

a) Calcula:

$$f'(x^2) \qquad (f \circ g)'(x) \qquad g'[f(x)] \qquad (g \circ f)'(x)$$

b) Si h és una funció qualsevol, troba, en funció de h' i de h, les derivades de:

$$f[h(x)] \qquad f[x + h(x)] \qquad g[f(x + h(x))]$$

a) $f'(x) = 2(x+1)$, $g'(x) = 2x$

$f'(x^2) = 2(x^2+1)$

$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'(x^2) \cdot g'(x) = 2(x^2+1) \cdot 2x = 4x(x^2+1)$

$g'[f(x)] = g'[(x+1)^2] = 2(x+1)^2$

$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = 2(x+1)^2 \cdot 2(x+1) = 4(x+1)^3$

b) $f[h(x)]' = f'[h(x)] \cdot h'(x) = 2[h(x)+1] \cdot h'(x)$

$f[x+h(x)]' = f'[x+h(x)] \cdot [1+h'(x)] = 2[x+h(x)+1] \cdot [1+h'(x)]$

$g[f[x+h(x)]]' = g'[f[x+h(x)]] \cdot (f[x+h(x)])'[1+h'(x)] =$

$= g'[(x+h(x)+1)^2] \cdot (f[x+h(x)])'[1+h'(x)] =$

$= 2(x+h(x)+1)^2 \cdot 2[x+h(x)+1] \cdot [1+h'(x)] =$

$= 4(x+h(x)+1)^3 \cdot [1+h'(x)]$

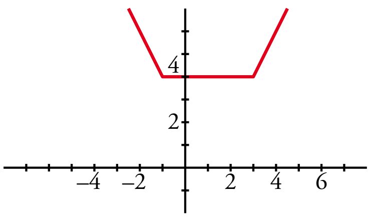
32 **a) Representa la funció $f(x) = |x+1| + |x-3|$.**

Mirant la gràfica, digues en quins punts no és derivable.

b) Representa $f'(x)$.

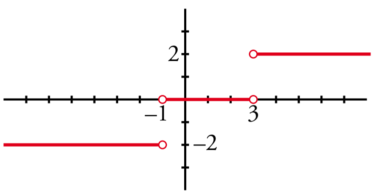
* ***Ajuda't de l'exercici resolt 5.***

a) $f(x) = \begin{cases} -x-1-x+3 & \text{si } x < -1 \\ x+1-x+3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x+1+x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



No és derivable ni en $x = -1$ ni en $x = 3$. (Són punts «angulosos».)

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



33 Sigui la funció $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula $f'(x)$.

b) Troba $f''(x)$.

Representa gràficament els resultats.

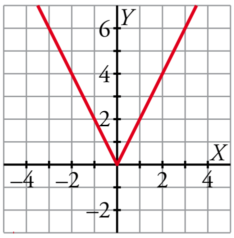
a) La funció donada és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Clarament, les derivades laterals coincideixen en $x = 0$.

Per tant, és derivable i $f'(0) = 0$.

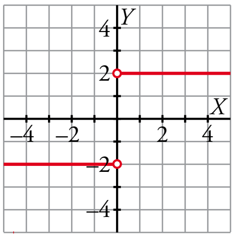
Gràfica de $f'(x)$:



b) Com es pot veure en la gràfica anterior, $f'(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Clarament, les derivades laterals no coincideixen en $x = 0$. Per tant, no existeix $f''(0)$.



34 Les funcions següents tenen algun punt on la derivada no existeix. Troba'ls en cada cas:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = |x - 3|$

e) $f(x) = \left|\dfrac{4x - 5}{2}\right|$

f) $f(x) = |x^2 - 2x|$

a) $f(x) = x^{2/3}$; $Dom\, f = \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ no existeix si $x = 0$; és a dir, $f(x)$ no és derivable en $x = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x)$ no existeix si $x = -2$; el domini de $f(x)$ és $[-2, +\infty)$.

Per tant, en els punts en els quals la funció està definida, no és derivable en $x = -2$.

c) El domini de la funció és $(-\infty, -1]$ Ø $[1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

En els punts en els quals $f(x)$ està definida, no és derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$.

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x<3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<3 \\ 1 & \text{si } x>3 \end{cases}$

$f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$; però no és derivable en $x = 3$, ja que les seves derivades laterals no coincideixen.

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right\}$ Són diferents.

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x+5}{2} & \text{si } x<\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{4x-5}{2} & \text{si } x \geq \dfrac{5}{4} \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<5/4 \\ 2 & \text{si } x>5/4 \end{cases}$

$f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$; però no és derivable en $x = \dfrac{5}{4}$, ja que les seves derivades laterals no coincideixen.

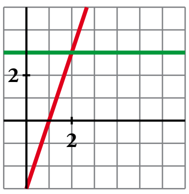
$\left.\begin{array}{l} f'(5/4^-) = -2 \\ f'(5/4^+) = 2 \end{array}\right\}$ Són diferents.

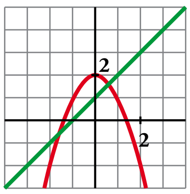
f) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x<0 \\ -x^2+2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-2x & \text{si } x>2 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x<0 \\ -2x+2 & \text{si } 0<x<2 \\ 2x-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

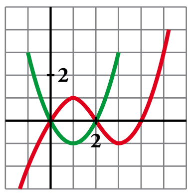
$f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$; però no és derivable en $x = 0$, ni en $x = 2$, ja que les seves derivades laterals no coincideixen:

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -2 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\}$ Són diferents. $\quad \left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{array}\right\}$ Són diferents.

35 Quin dels apartats següents representa la gràfica d'una funció f i la de la seva derivada f'? Justifica la resposta.

a)


b)


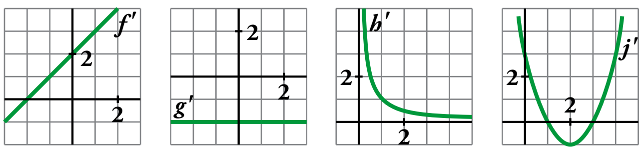
c)


a) La funció en vermell és una recta que té pendent 3. Per tant, la seva derivada és $y = 3$ (la recta verda). Conseqüentment, aquestes gràfiques sí representen una funció i la seva derivada.

b) La funció en vermell és un polinomi de 2n grau, una paràbola. La derivada és una recta. En $x = 0$, la funció té un màxim; la derivada s'anul·la. Perquè la recta fos la derivada, hauria de passar per (0, 0). No representen, per tant, una funció i la seva derivada.

c) La funció ha de ser un polinomi de 3r grau perquè té dos extrems relatius. La seva derivada serà un polinomi de 2n grau, una paràbola. En $x = 1$, la funció té un màxim; la derivada s'anul·la, $f'(1) = 0$, i hauria de passar per (1, 0). Aquestes tampoc representen una funció i la seva derivada.

36 Aquestes gràfiques són les funcions derivades de f, g, h i j:



a) Quines d'aquestes funcions (f, g, h i j) tenen punts de tangent horitzontal?

b) Quina d'aquestes gràfiques és la funció derivada d'una funció polinòmica de primer grau?

c) Quina d'aquestes correspon a una funció polinòmica de segon grau?

d) Alguna pot ser polinòmica de tercer grau?

e) Alguna de les funcions pot ser $y = ln\, x$?

a) Els punts de tangent horitzontal són els punts en els quals s'anul·la la derivada.

f té un punt de tangent horitzontal en $x = -2$, ja que $f'(-2) = 0$.

j té dos punts de tangent horitzontal en $x = 1$ i en $x = 3$, ja que $j'(1) = j'(3) = 0$.

g i h no tenen cap punt de tangent horitzontal.

b) La derivada d'una funció polinòmica de primer grau és una funció constant. Per tant, és g'.

c) La derivada d'una funció polinòmica de segon grau és una funció polinòmica de primer grau. Per tant, és f'.

d) Com que j' té forma de paràbola i és una funció polinòmica de segon grau, la funció j és polinòmica de tercer grau.

e) $D[ln\, x] = \dfrac{1}{x}$ i es correspon amb la funció h' ja que té forma d'hipèrbola.

Per tant, h pot ser la funció logaritme neperià.

37 **Esbrina per a quins valors de x és $f'(x) = 0$ en cada una d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2(3x-8)}{12}$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ **d)** $f(x) = e^x(x-1)$

a) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 8x^2}{12} \rightarrow f'(x) = \dfrac{9x^2 - 16x}{12}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 9x^2 - 16x = 0 \rightarrow x(9x-16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{16}{9} \end{cases}$

b) $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1)$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2+1) = 0 \rightarrow x = 0$

c) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

d) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x \cdot 1 = e^x(x - 1 + 1) = e^x x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

38 **Esbrina si en les funcions següents hi ha punts en els quals $f'(x) = 0$:**

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = ln(x+1)$ **d)** $f(x) = 10 - (x-2)^4$

a) $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x-3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x + 2 - 2x + 3}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2}$

$f'(x) \neq 0$ per a qualsevol valor de x.

b) $f'(x) = \dfrac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \rightarrow (-1, -3) \\ x = 1 \rightarrow (1, 3) \end{cases}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \neq 0$ per a qualsevol valor de x.

d) $f'(x) = -4(x-2)^3$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 10)$

39 **Troba el pendent de la recta tangent a les funcions següents en el punt d'abscissa que s'indica en cada cas:**

a) $y = sin\, x\, cos\, x$ **en** $x = \frac{\pi}{4}$

b) $y = x\, ln\, x$ **en** $x = e$

c) $y = \frac{x^2}{e^x}$ **en** $x = 0$ **i** $x = 1$

d) $y = e^{x^2 - 1}$ **en** $x = 1$

Hem de trobar la derivada en els punts indicats en cada cas:

a) $y' = cos\, x \cdot cos\, x + sin\, x(-\, sin\, x) = cos^2\, x - sin^2\, x$

$$y' = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

b) $y' = 1 \cdot ln\, x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\, x + 1;\;\; y'(e) = ln\, e + 1 = 1 + 1 = 2$

c) $y' = \frac{2xe^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

$$y'(0) = 0;\;\; y'(1) = \frac{1}{e}$$

d) $y' = 2x\, e^{x^2 - 1};\;\; y'(1) = 2$

Pàgina 171

Qüestions teòriques

40 **Quants punts de derivada nul·la pot tenir una funció polinòmica de tercer grau? És possible que no en tingui cap? És possible que només en tingui un?**

Com que la derivada d'una funció polinòmica de tercer grau és una funció polinòmica de segon grau, té un màxim de dos punts de derivada nul·la.

Pot ser que no tingui punts de derivada nul·la. Per exemple, la funció $f(x) = x^3 + x$ no té punts de derivada nul·la perquè $f'(x) = 3x^2 + 1$ mai s'anul·la.

També pot tenir un únic punt amb derivada nul·la. Per exemple, la funció $f(x) = (x - 2)^3$ només té un punt de derivada nul·la perquè $f'(x) = 3(x - 2)^2$ només s'anul·la quan $x = 2$.

41 **Justifica que una funció polinòmica de segon grau té sempre un punt de tangent horitzontal.**

La derivada d'una funció polinòmica de segon grau és una funció polinòmica de primer grau. Si $f(x)$ és la funció, aleshores $f'(x) = ax + b$ amb $a \neq 0$.

En tal cas, l'equació $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; ax + b = 0$ sempre té solució i és l'abscissa del punt de derivada nul·la.

42 **Si una funció té un punt angulós en** $x = a$, **què podem dir de** $f'(a)$**?**

$f'(a)$ no existeix.

43 **Si la derivada d'una funció és 0 en tot** $\mathbb{R}$, **llavors la funció és lineal, constant o zero?**

Si la derivada d'una funció en tot $\mathbb{R}$ és 0, aleshores la funció és constant. La derivada d'una funció lineal és el coeficient de x i, per tant, no val 0.

44 **Pot haver-hi dues funcions diferents que tinguin la mateixa funció derivada? Posa exemples de funcions que tinguin com a derivada** $f(x) = 2x$.

Sí. Per exemple, les funcions $g(x) = x^2$ i $h(x) = x^2 + 3$ tenen la mateixa derivada, que és la funció $f(x) = 2x$.

Si dues funcions es diferencien en una constant, aleshores les derivades són iguals.

45 **Suposem que existeix la derivada de f en a. Explica quines de les igualtats següents són certes. En el cas d'haver-hi alguna falsa, retoca-la perquè sigui certa:**

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{h} = -f'(a)$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(a)}{h-a} = f'(a)$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h} = 2f'(a)$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} = f'(a)$

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right) = -f'(a) \to$ Certa.

b) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(a)}{h-a} \to$ Aquesta igualtat és falsa perquè el resultat del límit anterior, si $a \neq 0$ i la funció està definida en 0, és $\dfrac{f(0)-f(a)}{-a}$. Perquè sigui certa, hem de sustituir h per $a+h$ i obtenim que $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

També seria certa substituint a per 0, ja que $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}$.

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(2 \cdot \dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\right) = 2 \cdot f'(a) \to$ Certa.

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h} - \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) =$

$= 2 \cdot f'(a) - f'(a) = f'(a) \to$ Certa.

Per aprofundir

46 **Determina, si és possible, el valor del paràmetre a per tal que la funció f sigui derivable en tot el seu domini de definició:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1-e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Perquè $f(x)$ sigui derivable, en primer lloc ha de ser contínua.

- Si $x > 0$, $x \neq 1$: La funció és contínua, ja que està formada per funcions contínues.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1-e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

Derivabilitat:

- Si $x > 0$, $x \neq 1$:

  És derivable. A més: $f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ és derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Per tant, perquè f sigui derivable en tot el seu domini de definició, ha de ser $a = 1$.

47 Estudia la continuïtat i la derivabilitat de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ **b)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$

a) Definim la funció per intervals:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Continuïtat:

- Si $x \neq 0$:

  És contínua, ja que està formada per dues funcions contínues en els intervals en els quals estan definides.

- Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ És contínua en } x = 0.$$

  Per tant, és una funció contínua en $\mathbb{R}$.

Derivabilitat:

- Si $x \neq 0$: És derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

  $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1 \rightarrow$ No és derivable en $x = 0$.

  Per tant, és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Definim la funció per intervals:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x}{x^2-1x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El domini de la funció és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Per tant, en $x = -1$ i en $x = 1$ la funció no és contínua (ni derivable).

Continuïtat:

- Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:

  La funció és contínua, ja que està formada per funcions contínues (en aquests punts).

- En $x = -1$ i en $x = 1$:

  No és contínua, ja que no està definida en aquests punts.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La funció és contínua en } x = 0.$$

  Per tant, és una funció contínua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilitat:

- Si $x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 1$: És derivable. A més:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$ i en $x = 1$: No és derivable, ja que no està definida la funció.
- En $x = 0$:

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1 \rightarrow$ No és derivable en $x = 0$.

Per tant, és derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

48 **Si $f(x) = x^2|x|$, troba f', f'' i f'''.**

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivant:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenim que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$.)

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenim que $f''(0^-) = f'(0^+) = f''(0) = 0$.)

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existeix f''', ja que $f'''(0^-) = -6 \neq f'''(0^+) = 6$.)

49 **Troba la derivada n-èsima de les funcions següents:**

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = ln(1 + x)$ **d)** $f(x) = x^n$

a) $y' = a\,e^{ax};\ y'' = a^2\,e^{ax};\ y''' = a^3\,e^{ax};\ \dots\ y^{n)} = a^n\,e^{ax}$

Ho demostrem per inducció: (per a $n = 1, 2, 3$ es compleix).

Si $y^{n-1)} = a^{n-1}\,e^{ax}$, derivant obtenim:

$y^{n)} = a \cdot a^{n-1}\,e^{ax} = a^n\,e^{ax}$, com volíem demostrar.

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2};\ y'' = \dfrac{2}{x^3};\ y''' = \dfrac{-6}{x^4};\ \dots\ y^{n)} = \dfrac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}$

Ho demostrem per inducció: (per a $n = 1, 2, 3$ es compleix).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$, derivant obtenim:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$, com volíem demostrar.

c) $y' = \dfrac{1}{1+x};\ y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2};\ y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3};\ \dots\ y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Ho demostrem per inducció: (per a $n = 1, 2, 3$ es compleix).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$, derivant obtenim:

$$y^{n)} = \frac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)\,(n-1)}{(1+x)^{n}} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^{n}},$$ com volíem demostrar.

d) $f'(x) = nx^{n-1}$

$f''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2}$

$f'''(x) = n\,(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$

…

$f^{n)}(x) = n\,(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(n-1)]\,x^{n-n} = n!$

50 **Calcula $f'(0)$ per a aquesta funció:**

$$f(x) = ln\sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{2x+1}}$$

* ***Aplica les propietats dels logaritmes abans de derivar.***

Trobem $f'(x)$ i després substituïm en $x = 0$.

$f(x) = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(e^x + e^{-x}) - ln\,(2x+1)]$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \dfrac{2}{2x+1}\right]$

$f'(0) = \dfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

51 **Prova, fent servir la definició de derivada, que la funció següent és derivable en $x = 1$ i no ho és en $x = -1$:**

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

El domini de definició és l'interval $[-1, 1]$. Per tant, l'enunciat es refereix a les derivades laterals en els punts indicats.

Vegem primer si existeix la derivada per l'esquerra en $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1-1-h)\sqrt{1-(1+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h\sqrt{-2h-h^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \left(-\sqrt{-2h-h^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; \text{Existeix la derivada i } f'(1^-) = 0.$$

Vegem ara l'existència de la derivada lateral per la dreta en $x = -1$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+1-h)\sqrt{1-(-1+h)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left[(2-h)\sqrt{\frac{2h-h^2}{h^2}}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left[(2-h)\sqrt{\frac{2}{h} - 1}\right] = +\infty \;\rightarrow\; \text{No existeix } f'(-1^+).$$

Autoavaluació

Pàgina 171

1 Troba la funció derivada de les funcions següents:

a) $y = 3x\sqrt{2x+1}$

b) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{x}{(x+2)^2}$

d) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$

e) $y = e^{2x+1}$

f) $y = ln\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$

a) $y' = 3\sqrt{2x+1} + 3x\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3(2x+1)+3x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{9x+3}{\sqrt{2x+1}}$

b) $y' = \dfrac{-5\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{-5}{2x\sqrt{x}}$

c) $y' = \dfrac{(x+2)^2 - x\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{x+2-2x}{(x+2)^3} = \dfrac{-x+2}{(x+2)^3}$

d) $y' = 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\dfrac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\dfrac{-2}{(1+x)^2} = \dfrac{-4(1-x)}{(1+x)^3}$

e) $y' = 2e^{2x+1}$

f) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{x}{3}+1} = \dfrac{1}{3} : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{1}{x+3}$

2 Aplica les propietats dels logaritmes per trobar la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x) = ln\sqrt[5]{x^2-5x}$

b) $f(x) = ln\dfrac{\sqrt{x^3+3x}}{cos^2 x^2}$

a) $f(x) = ln(x^2-5x)^{1/5} = \dfrac{1}{5}ln(x^2-5x) \to f'(x) = \dfrac{1}{5}\dfrac{2x-5}{x^2-5x} = \dfrac{2x-5}{5(x^2-5x)}$

b) $f(x) = ln\dfrac{(x^3+3x)^{1/2}}{cos^2 x^2} = \dfrac{1}{2}ln(x^3+3x) - 2ln\,cos\,x^2 \to$

$\to f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{3x^2+3}{x^3+3x} - 2\dfrac{-sin\,x^2\cdot 2x}{cos\,x^2} = \dfrac{3(x^2+1)}{2(x^3+3x)} + \dfrac{4x\,sin\,x^2}{cos\,x^2} = \dfrac{3(x^2+1)}{2(x^3+3x)} + 4x\,tg\,x^2$

3 Aplica la definició de derivada per trobar $f'(x)$ si:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f(x+h) - f(x) = \dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2\cdot x^2} = \dfrac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2h} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$

4 **Fixa't en la funció $f(x) = |x| + |x^2 + 2x|$, defineix-la per intervals i calcula:**

a) $f'(x)$

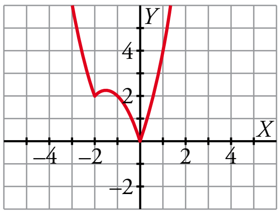
b) $f''(x)$

Després, representa $f(x)$, $f'(x)$ i $f''(x)$.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 2x & \text{si } -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

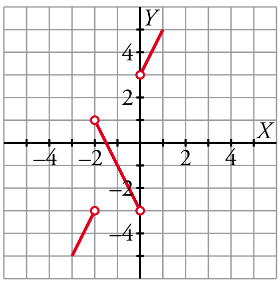
$$f(x) = |x| + |x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 3x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Gràfica de $f(x)$

$f(x)$ no és derivable en $x = -2$ i $x = 0$ ja que els punts són angulosos. La derivada és:

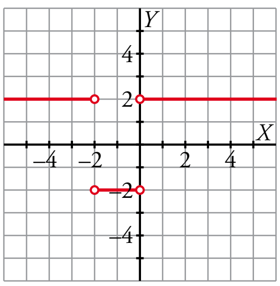
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ -2x - 3 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gràfica de $f'(x)$

Com que no existeixen $f'(-2)$ ni $f'(0)$, no existeixen $f''(-2)$ ni $f''(0)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gràfica de $f''(x)$

5 Estudia la continuïtat i la derivabilitat d'aquesta funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ és contínua si $x < 1$ i si $x > 1$, perquè les funcions que la defineixen ho són.

Estudiem la continuïtat en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4}{x+1} = 2 \end{cases}$$

$f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$

Com que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$, f és contínua en $x = 1$.

Per tant, f és contínua en $\mathbb{R}$.

Trobem $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f és derivable si $x < 1$ i si $x > 1$.

Estudiem la seva derivabilitat en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \\ f'(1^+) = \dfrac{-4}{(1+1)^2} = -1 \end{array} \right\} \text{Com que } f'(1^-) \ne f'(1^+), \text{ no existeix } f'(1).$$

f és derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

6 Calcula el valor dels paràmetres a i b perquè la funció següent sigui derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Representa la funció per als valors trobats de a i b.

Perquè f sigui derivable en $x = 0$, ha de ser contínua en aquest punt.

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2 \end{array} \right\}$$

Perquè $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2$, ha de ser $b = 2$.

Si $b = 2$, f és contínua en $\mathbb{R}$.

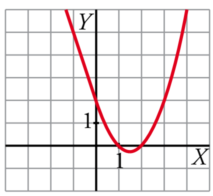
$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Vegem si f és derivable en $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = -3 \end{array} \right\} \text{Perquè existeixi } f'(0), \text{ ha de ser } a = -3.$$

Si $a = -3$, f és derivable en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$



7 **En quins punts no és derivable aquesta funció?**

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

Justifica'n la resposta.

Definim la funció per intervals. Per a això, fem:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \;\to\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Trobem $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiem la derivabilitat de f en $x = 1$ i en $x = 3$:

$$\left.\begin{aligned} f'(1^-) &= 2 \cdot 1 - 4 = -2 \\ f'(1^+) &= -2 \cdot 1 + 4 = 2 \end{aligned}\right\} \text{ Com que } f'(1^-) \ne f'(1^+), \text{ no existeix } f'(1).$$

$$\left.\begin{aligned} f'(3^-) &= -2 \cdot 3 + 4 = -2 \\ f'(3^+) &= 2 \cdot 3 - 4 = 2 \end{aligned}\right\} \text{ Com que } f'(3^-) \ne f'(3^+), \text{ no existeix } f'(3).$$

f no és derivable ni en $x = 1$, ni en $x = 3$.

8 **Troba els punts en els quals el pendent de la recta tangent és igual a 0 en cada una de les funcions següents:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x = 0 \;\to\; x = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3\,2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; x^4 - 3x^2 = 0 \;\to\; x^2(x^2-3) = 0 \;\to\; x = 0,\; x = \sqrt{3},\; x = -\sqrt{3}$