Resol

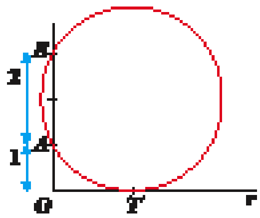
Pàgina 173

Optimització

- **Una persona s'acosta a una estàtua de 2 m d'alçària. Els ulls de la persona es troben 1 m per sota dels peus de l'escultura. A quina distància s'ha d'apropar perquè l'angle, φ, des del qual veu l'estàtua sigui màxim?**

  Hi ha una resolució ben bonica per mètodes geomètrics. Observa-la:

  Es traça una circumferència que passa pels punts A i B i és tangent a la recta r.

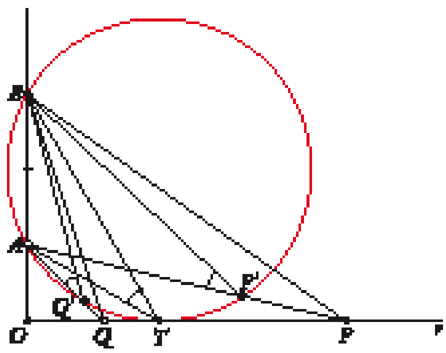


Demostra que el punt de tangència, T, és l'únic lloc de la recta r des del qual es veu el segment AB amb angle màxim.

Per provar que l'angle traçat des del punt de tangència T és el més gran possible entre tots els traçats des de punts de la recta farem servir la propietat següent:

«Tots els angles inscrits en una circumferència que comprenen el mateix arc són iguals».

Sigui P un punt qualsevol situat sobre la recta r (anàlogament es raonaria si es troba en la posició de Q). Unim el punt P amb A i B i obtenim el punt de tall P' amb la circumferència. L'angle $\widehat{APB}$ és més petit que l'angle $\widehat{AP'B}$ però $\widehat{AP'B} = \widehat{ATB}$, perquè tots dos són angles inscrits en una circumferència i comprenen el mateix arc AB. En conseqüència, l'angle traçat des de P és més petit que el traçat des del punt de tangència T. Així, qualsevol angle traçat des de punts de la recta diferents de T és més petit que $\widehat{ATB}$, d'on es dedueix que aquest és l'angle més gran possible.



1 Recta tangent a una corba

Pàgina 175

1 Troba les rectes tangents a cada corba que compleixen la condició que s'hi indica:

a) $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$

en els punts d'abscissa 0, 1, 3.

b) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x - 6$

paral·leles a la recta $y - x = 9$

c) $y = 2x - x^2$

que passen pel punt $P(2, 1)$.

d) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x - 2$

que passen pel punt $P(2, 0)$.

a) Calculem la derivada de la funció:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenades dels punts:

$$y(0) = 0; \ y(1) = 4; \ y(3) = 150$$

- Recta tangent en $(0, 0)$: $y'(0) = 8$

$$y = 8x$$

- Recta tangent en $(1, 4)$: $y'(1) = -9$

$$y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$$

- Recta tangent en $(3, 150)$: $y'(3) = 11$

$$y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$$

b) • Pendent de la recta:

$$y = 9 + x \rightarrow m = 1$$

- Resolem $f'(x) = 1$:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

- Punt de tangència:

$$y = \frac{1}{3} - 1 + 1 - 6 = \frac{-17}{3} \rightarrow \left(1, \frac{-17}{3}\right)$$

- Recta tangent:

$$y = \frac{-17}{3} + (x - 1) \rightarrow y = \frac{-20}{3} + x$$

c) • El punt T de tangència és de la corba, té aquestes coordenades: $(c, 2c - c^2)$. I sigui $P = (x_0, y_0) = (2, 1)$.

- El pendent de la recta PT ha de ser igual a la derivada de f en c:

$$\frac{f(c) - y_0}{c - x_0} = f'(c) \rightarrow \frac{2c - c^2 - 1}{c - 2} = 2 - 2c \rightarrow c^2 - 4c + 3 = 0 \rightarrow c_1 = 1, \ c_2 = 3$$

- Hi ha dues rectes tangents:

$$c_1 = 1, \ f(c_1) = 1, \ f'(c_1) = 0 \rightarrow y = 1$$

$$c_2 = 3, \ f(c_2) = -3, \ f'(c_2) = -4 \rightarrow y = -3 - 4(x - 3) \rightarrow y = 9 - 4x$$

d) El pendent de la recta tangent en $x = 2$, $y = 0$ és: $y'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$.

Aleshores, la recta tangent és: $y = x - 2$.

2 Creixement i decreixement d'una funció en un punt

Pàgina 176

1 Demostra que si una funció $y = f(x)$ és decreixent en x_0, aleshores:

$$f'(x_0) \leq 0$$

Si $f(x)$ és decreixent en x_0, existeix un entorn de x_0, $E = (x_0 - a, x_0 + a)$, tal que si $x \in E$ i $x \neq x_0$, aleshores:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Per tant, si $f(x)$ és derivable en x_0, tenim que $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

2 Fixa't en la funció $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:

a) On creix?

b) On decreix?

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \to y' > 0 \to f$ és creixent en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \to y' > 0 \to f$ és creixent en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \to y' < 0 \to f$ és decreixent en $(-1, 3)$

3 Màxims i mínims relatius d'una funció

Pàgina 177

1 Comprova que la funció $y = x^3/(x-2)^2$ té només dos punts singulars, en $x = 0$ i en $x = 6$.

Esbrina de quin tipus és cada un d'aquests dos punts singulars; per a això, has d'estudiar el signe de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)\big(3(x-2)-2x\big)}{(x-2)^4} = \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hi ha un punt d'inflexió.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hi ha un mínim relatiu.}$$

2 a) Troba tots els punts singulars (abscissa i ordenada) de la funció $y = -3x^4 + 4x^3$. Per mitjà d'una representació adequada, esbrina de quin tipus és cada punt.

b) Fes el mateix per a $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

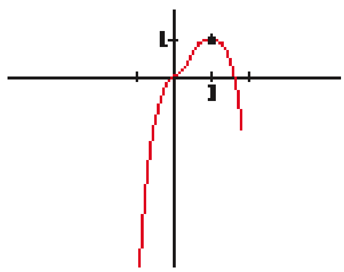
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punt } (0, 0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; \text{Punt } (1, 1) \end{array} \right. \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \text{ Dos punts singulars.}$$

Els dos punts estan en l'interval [–1; 1,5], on la funció és derivable.

A més, $f(-1) = -7$ i $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En (0, 0) hi ha un punt d'inflexió.
- En (1, 1) hi ha un màxim relatiu.



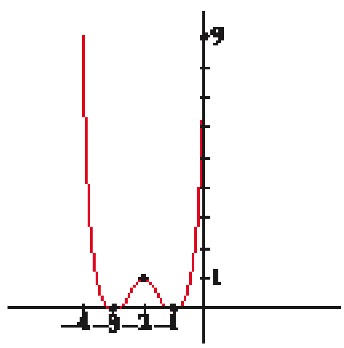
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$$y' = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \;\rightarrow\; \text{Punt } (-1, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punt } (-2, 1) \\ x = -3 \;\rightarrow\; \text{Punt } (-3, 0) \end{array} \right. \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}}\right\} \text{ Tres punts singulars.}$$

Els tres punts estan en el mateix interval [–4, 0], on la funció és derivable.

A més, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hi ha un mínim relatiu en (–3, 0), un màxim relatiu en (–2, 1) i un mínim relatiu en (–1, 0).



4 Informació extreta de la segona derivada

Pàgina 179

1 Estudia la curvatura d'aquesta funció:

$$\boldsymbol{y = 3x^4 - 8x^3 + 5}$$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2;\ f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \to 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \to \text{Punt } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \to \text{Punt } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\ f'''(0) \neq 0;\ f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Els punts $(0, 5)$ i $\left(\frac{4}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ són punts d'inflexió.

- La funció és còncava en $(-\infty, 0)$ Ø $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, ja que $f''(x) > 0$.
- La funció és convexa en l'interval $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, ja que $f''(x) < 0$.

2 Estudia la curvatura de la funció següent:

$$\boldsymbol{y = x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9;\ f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \to 6x - 12 = 0 \to x = 2 \to \text{Punt } (2, 2)$

$(f'''(x) = 6;\ f'''(2) \neq 0)$

El punt $(2, 2)$ és un punt d'inflexió.

- La funció és convexa en $(-\infty, 2)$, ja que $f''(x) < 0$.
- La funció és còncava en $(2, +\infty)$, ja que $f''(x) > 0$.

5 Optimització de funcions

Pàgina 181

1 Troba el nombre positiu la suma del qual amb vint-i-cinc vegades el seu invers sigui mínima.

Anomenem x el nombre que busquem. Ha de ser $x > 0$. Hem de minimitzar la funció:

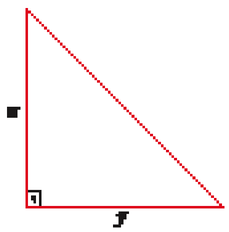
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 5 \;\rightarrow\; f(5) = 10 \\ x = -5 \;\rightarrow\; (\text{no val, ja que } x > 0) \end{cases}$$

(Com que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, i $f(x)$ és contínua en $(0, +\infty)$; hi ha un mínim en $x = 5$.)

Per tant, el nombre buscat és $x = 5$. El mínim és 10.

2 Entre tots els triangles rectangles amb catets que tenen longituds que sumen 10 cm, troba les dimensions d'aquell amb una àrea màxima.



$$x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x$$

$$\text{Àrea} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Hem de maximitzar la funció:

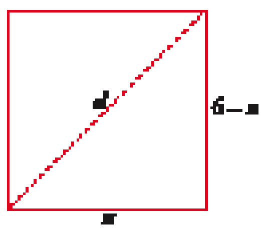
$$f(x) = x + \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \;\rightarrow\; x = 5 \;\rightarrow\; y = 10 - 5 = 5$$

$$\left(f(0) = 0;\; f(10) = 0;\; f(5) = \frac{25}{2};\; \text{i } f \text{ és contínua. Per tant, en } x = 5 \text{ està el màxim.} \right)$$

Els catets mesuren 5 cm cada un. L'àrea màxima és de 12,5 cm^2.

3 Entre tots els rectangles de perímetre 12 m, quin és el que té la diagonal més petita?



$$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Hem de minimitzar la funció:

$$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

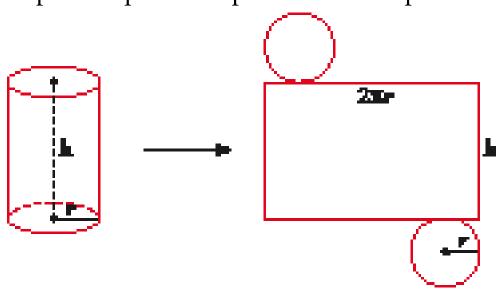
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -6 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$; i $f(x)$ és contínua. Per tant, en $x = 3$ hi ha un mínim).

El rectangle amb la diagonal més petita és el quadrat de costat 3 m.

4 Determina les dimensions que ha de tenir un recipient cilíndric de volum igual a 6,28 litres perquè es pugui construir amb el mínim possible de llauna.

Suposem que el recipient té dues tapes:



$$\text{Àrea total} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$V = 6{,}28 \; l = 6{,}28 \text{ dm}^3$$

Com que $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2}$

Així: $\textit{Àrea total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Hem de trobar el mínim de la funció:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = \left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Com que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(r) = +\infty$ i f és contínua en $(0, +\infty)$, en $r = 1$ hi ha un mínim.)

$$r = 1 \;\rightarrow\; \text{h} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindre tindrà radi 1 dm i altura 2 dm.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 182

1. Tangent en un punt de la corba

Fes-ho tu.

a) Troba l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = \dfrac{|x-2|}{e^x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Si és possible, troba la recta tangent a $f(x)$ en $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+2}{e^x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Derivem la funció per intervals:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{e^x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{-x+3}{e^x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$x = 0$, $f(0) = 2$, $f'(0) = -3 \to$ L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = 2 - 3x$.

b) Estudiem la derivabilitat en $x = 2$:

- En primer lloc, observem que la funció és contínua en $x = 2$, ja que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 0$$

- Trobem les derivades laterals:

$$f'(2^-) = \frac{-1}{e^2} \qquad f'(2^+) = \frac{1}{e^2}$$

Com que són diferents, la funció no és derivable en $x = 2$ i no és possible trobar la recta tangent en aquest valor.

2. Tangent que passa per un punt exterior

Fes-ho tu. **Troba els punts de la corba $f(x) = x^2 - 2x + 4$ on la recta tangent a aquesta passa per l'origen de coordenades.**

Els punts de tangència estan en la corba i són de la forma $(a, a^2 - 2a + 4)$.

El pendent de la recta que passa pel punt de tangència i per l'origen de coordenades és $\dfrac{a^2 - 2a + 4 - 0}{a - 0}$.

Per altra banda, el pendent de la recta tangent serà $f'(a) = 2a - 2$.

Per tant, $\dfrac{a^2 - 2a + 4}{a} = 2a - 2 \to a^2 - 2a + 4 = 2a^2 - 2a \to a = -2,\ a = 2$.

Hi ha dos punts de tangència que corresponen a dues rectes tangents:

$$x = -2,\ f(-2) = 12,\ f'(-2) = -6 \to y = 12 - 6(x + 2)$$

$$x = 2,\ f(2) = 4,\ f'(2) = 2 \to y = 4 + 2(x + 2)$$

3. Coeficients d'una funció

Fes-ho tu. **Troba els coeficients de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ sabent que la tangent a la corba en el punt (1, 0) és $y = -3x + 3$, i que aquest punt és un punt d'inflexió.**

Com que la funció passa pel punt (1, 0), es compleix que $f(1) = 0$.

El pendent de la recta tangent en aquest punt és –3, és a dir, $f'(1) = -3$.

Com que el punt d'abscissa $x = 1$ és un punt d'inflexió, aleshores $f''(1) = 0$.

Per altra banda,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Substituint obtenim:

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0$$

$$f'(1) = -3 \rightarrow 3a + 2b = -3$$

$$f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0$$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b = -3 \\ 6a + 2b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = -3,\ c = 2$$

Pàgina 183

4. Intervals de creixement

Fes-ho tu. **Estudia els intervals de creixement i de decreixement d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

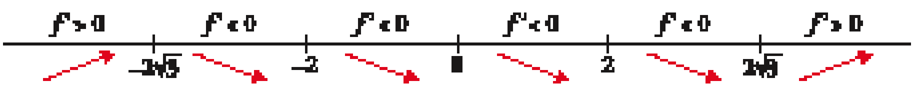
b) $f(x) = ln\,(x^2 + 4x - 5)$

a) El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = 2\sqrt{3},\ x = -2\sqrt{3},\ x = 0$$

Com que el denominador és un quadrat, el signe de $f'(x)$ depèn només del signe del numerador.



És creixent en $(-\infty, -2\sqrt{3})$ i $(2\sqrt{3}, +\infty)$.

És decreixent en $(-2\sqrt{3}, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$ i $(2, 2\sqrt{3})$.

b) El domini de definició és $(-\infty, -5)$ Ø $(1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$ (que no pertany al domini)

No té punts singulars.

És creixent en l'interval $(1, +\infty)$ i decreixent en $(-\infty, -5)$.

Pàgina 184

6. Màxims i mínims

Fes-ho tu. **Determina els màxims i mínims de les funcions següents:**

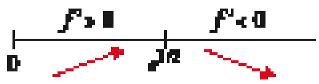
a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

b) $f(x) = 3x^2 e^x$

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

$f'(x) = 0 \;\to\; 1 - 2\ln x = 0 \;\to\; x = e^{1/2}$

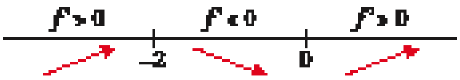
Estudiem el creixement. Per a això, hem de tenir en compte que el domini de la funció és $(0, +\infty)$.



$x = e^{1/2},\; f(e^{1/2}) = \dfrac{1}{2e} \;\to$ El punt $\left(e^{1/2}, \dfrac{1}{2e}\right)$ és un màxim.

b) $f'(x) = 6xe^x + 3x^2 e^x = 3xe^x(2 + x)$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3xe^x(2 + x) = 0 \;\to\; x = -2,\; x = 0$



$x = -2,\; f(-2) = 12e^{-2} \;\to$ El punt $(-2, 12e^{-2})$ és un màxim.

$x = 0,\; f(0) = 0 \;\to$ El punt $(0, 0)$ és un mínim.

7. Punts d'inflexió

Fes-ho tu.

a) Troba els punts d'inflexió de la funció $f(x) = x - 2\cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

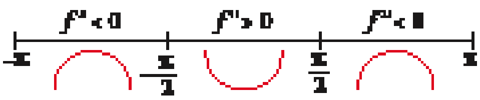
b) Té la funció f màxim o mínim en aquest interval?

a) $f'(x) = 1 + 2\sin x$

$f''(x) = 2\cos x$

$f''(x) = 0 \;\to\; 2\cos x = 0 \;\to\; x = -\dfrac{\pi}{2},\; x = \dfrac{\pi}{2}$

Estudiem el signe de la derivada segona.



$x = -\dfrac{\pi}{2},\; f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2},\; f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Els punts d'inflexió són $\left(-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ i $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) $f'(x) = 0 \rightarrow 1 + 2sin\, x = 0 \rightarrow sin\, x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$

Per esbrinar si en el punt d'abscissa $x = -\frac{\pi}{6}$ hi ha un màxim o un mínim, avaluem la segona derivada:

$$f''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} > 0$$

$$x = -\frac{\pi}{6},\ f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

El punt $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$ és un mínim.

Pàgina 185

8. Màxim absolut

Fes-ho tu. S'estima que el benefici d'una empresa ve donat per la funció:

$$B(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ 2t & \text{si } 6 \le t \le 10 \end{cases}$$

En els primers 6 anys, en quin moment s'obté el benefici màxim i quin és el seu valor? Aquest màxim és relatiu o absolut?

Per obtenir el benefici màxim en l'interval [0, 6], estudiem l'existència d'extrems relatius i avaluem tant en aquests com en els extrems de l'interval.

$$B'(t) = \begin{cases} 8 - 2t & \text{si } 0 < t < 6 \\ 2 & \text{si } 6 < t < 10 \end{cases} \rightarrow 8 - 2t = 0 \rightarrow t = 4$$

$$B(0) = 0,\ B(4) = 16,\ B(6) = 12$$

El benefici màxim en els sis primers anys l'aconsegueix en el quart any i el seu valor és 16.

Observem que la funció torna a créixer a partir del sisè any, ja que, per exemple, el benefici en el desè any és $B(10) = 20$. Per tant, el benefici en el quart any representa un màxim relatiu.

9. Inversió publicitària

Fes-ho tu. Troba dos nombres naturals la suma dels quals sigui 15 i tals que el producte d'un pel quadrat de l'altre sigui el més gran possible.

Siguin x i y els nombres naturals buscats. Compleixen que $x + y = 15$.

Per altra banda, $P = x^2y$ és la funció que volem optimitzar. Substituint $y = 15 - x$, obtenim:

$$P = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

$$P'(x) = 30x - 3x^2$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow 30x - 3x^2 = 0 \rightarrow 3x(10 - x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (no és vàlid)},\ x = 10$$

Ara fem servir la derivada segona per saber si és màxim o mínim:

$$P''(x) = 30 - 6x \rightarrow P''(10) = -30 < 0 \rightarrow \text{Hi ha un màxim en } x = 10.$$

Els nombres són $x = 10,\ y = 5$.

Pàgina 186

10. Àrea màxima

Fes-ho tu. Es vol construir un dipòsit de llautó amb forma de cilindre d'àrea total 54 cm². Determina el radi de la base i l'altura del cilindre perquè el seu volum sigui màxim.

Anomenem r el radi del cilindre i h l'altura.

L'àrea total és $S = 2\pi r^2 + 2\pi r\text{h}$.

$$2\pi r^2 + 2\pi r\text{h} = 54 \ \rightarrow \ \text{h} = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r}$$

El volum del cilindre és $V = \pi r^2 \text{h} = \pi r^2 \dfrac{27 - \pi r^2}{\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$.

Busquem les dimensions del cilindre de volum màxim.

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \ \rightarrow \ 27 - 3\pi r^2 = 0 \ \rightarrow \ r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$$

$$V''(r) = -6\pi r$$

$$V''(r) < 0 \ \rightarrow \ \text{En } r = \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) \text{ hi ha un màxim relatiu.}$$

Només falta calcular l'altura del cilindre, que és $\text{h} = \dfrac{27 - \pi \cdot 9/\pi}{\pi \cdot 3/\sqrt{\pi}} = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$ cm.

11. Problema de temps mínim

Fes-ho tu. La vela major d'un vaixell té forma de triangle rectangle. Si la hipotenusa ha de fer 6 m, calcula les dimensions perquè la superfície de la vela sigui màxima.

Anomenem x, y les mesures dels catets del triangle rectangle.

$$x^2 + y^2 = 36 \ \rightarrow \ y = \sqrt{36 - x^2}$$

La superfície de la vela és $S = \dfrac{xy}{2}$ ja que els catets fan de base i d'altura del triangle rectangle.

S'obté:

$$S(x) = \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{2}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{36 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}}\right) = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \ \rightarrow \ 18 - x^2 = 0 \ \rightarrow \ x = 3\sqrt{2}, \ x = -3\sqrt{2} \ \text{ (no val)}$$

El valor $x = 3\sqrt{2}$ és un màxim, com es pot comprovar estudiant el signe de f' a ambdós costats del mateix.

L'altre catet del triangle mesura $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$.

La vela és un triangle rectangle isòsceles i els seus catets fan $3\sqrt{2}$ m.

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 187

1. Tangent perpendicular a una recta

Escriu les equacions de les rectes tangents a la funció $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que són perpendiculars a la recta $x + y - 2 = 0$.

La recta $y = -x + 2$ té pendent -1. Qualsevol recta perpendicular a aquesta tindrà pendent $-\frac{1}{-1} = 1$. Per tant, hem de calcular els punts de la corba en què el pendent val 1.

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'(x) = 1 \to 12x^2 - 2 = 1 \to x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2},\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} \to y = \frac{3}{2} + 1\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = x + 2$$

$$x = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2} + 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \to y = x$$

2. Intervals de concavitat i convexitat

Determina els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió d'aquesta funció:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

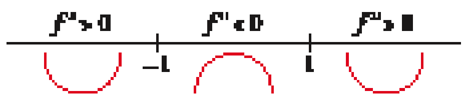
El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \to 3x^2 + 1 = 0$ no té solució $\to$ No té punts d'inflexió i la taula dels signes de la segona derivada és:



(el signe de la segona derivada només depèn del denominador)

La funció és còncava en $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$. És convexa en $(-1, 1)$.

3. Màxim i mínim absolut

Calcula el màxim i el mínim absoluts, en l'interval $[-1, 2]$, de la funció:

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$$

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$ està definida en $\mathbb{R}$ ja que l'argument del logaritme sempre és positiu. És una funció contínua i derivable en $[-1, 2]$. Com que és contínua en un interval tancat i acotat, arriba als seus extrems absoluts. Aquests poden ser els extrems de l'interval o els extrems relatius, si estan en l'interior.

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - 1$$

$$f'(x) = 0 \to \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \to 2x + 1 = x^2 + x + 1 \to x = 1,\ x = 0$$

Avaluem:

$x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = ln\,((-1)^2 + (-1) + 1) - (-1) = 1$

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = ln\,1 = 0$

$x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = ln\,3 - 1 \approx 0{,}0986$

$x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = ln\,7 - 2 \approx -0{,}054$

Arriba al màxim absolut en (1, 1) i al mínim absolut en (2, $ln\,7 - 2$).

4. Punts en els quals s'anul·len f', f'' i f'''

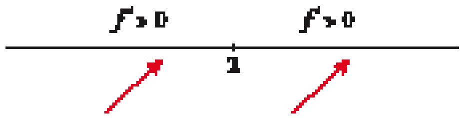
Estudia si la funció $f(x) = 1 - (2 - x)^5$ té màxim, mínim o punt d'inflexió en $x = 2$.

- Trobem f', f'', f''':

  $f'(x) = 5\,(2 - x)^4 \;\rightarrow\; f''(x) = -20\,(2 - x)^3 \;\rightarrow\; f'''(x) = 60\,(2 - x)^2$

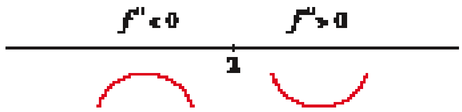
  En fer $x = 2$, es verifica $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$.

- Estudiem el signe de f' a l'esquerra i a la dreta de $x = 2$:



  f creix a l'esquerra i a la dreta de 2 $\rightarrow$ f no té màxim ni mínim en $x = 2$.

- Comprovem que té un punt d'inflexió estudiant el signe de f'':



  A l'esquerra de $x = 2$, la funció és convexa, i a la dreta de $x = 2$, la funció és còncava.

El punt (2, 1) és un punt d'inflexió.

5. Extrems relatius

Sigui $f(x) = x^2\,e^{-ax}$ amb $a \neq 0$.

a) Troba el valor de a perquè la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 2$.

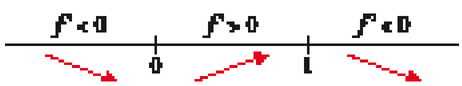
b) Classifica els extrems relatius quan $a = 2$.

a) $f'(x) = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}$

$f'(2) = 0 \;\rightarrow\; 4e^{-2a} - 4ae^{-2a} = 0 \;\rightarrow\; e^{-2a}(4 - 4a) = 0 \;\rightarrow\; 4 - 4a = 0 \;\rightarrow\; a = 1$ (ja que l'exponencial mai s'anul·la)

b) Per a $a = 2$ la derivada és $f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$.

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = 0$



$x = 0,\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ és un mínim relatiu.

$x = 1,\; f(1) = e^{-2} \;\rightarrow\; (1, e^{-2})$ és un màxim relatiu.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 188

Per practicar

Recta tangent

1 Troba l'equació de la recta tangent a les corbes següents en els punts que s'indiquen:

a) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ **en** $x = 0$

b) $y = (0{,}3x - 0{,}01x^2)^2$ **en** $x = 10$

c) $y = \sqrt{x+12}$ **en** $x = -3$

d) $y = e^{2x-1}$ **en** $x = \dfrac{1}{2}$

e) $y = x\ ln\ x$ **en** $x = e$

a) $f'(x) = -\dfrac{4}{(x-2)^2}$, $f'(0) = -1$

$x = 0$, $f(0) = -1$

La recta tangent és $y = -1 - x$.

b) $f'(x) = 2(0{,}3x - 0{,}01x^2)(0{,}3 - 0{,}02x)$, $f'(10) = 0{,}4$

$x = 10$, $f(10) = 4$

La recta tangent és $y = 4 + 0{,}4(x - 10)$.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+12}}$, $f'(-3) = \dfrac{1}{6}$

$x = -3$, $f(-3) = 3$

La recta tangent és $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x+3)$

d) $f'(x) = 2e^{2x-1}$, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$

$x = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$

La recta tangent és $y = 1 + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

e) $f'(x) = ln\ x + 1$, $f'(e) = 2$

$x = e$, $f(e) = e$

La recta tangent és $y = e + 2(x - e)$.

2 Obtén l'equació de la recta tangent i paral·lela a l'eix d'abscisses en aquestes corbes:

a) $y = x\ ln\ x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sin\ 2x$

Una recta paral·lela a l'eix d'abscisses té pendent zero.

a) $y' = ln\ x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\ x + 1$

$y' = 0 \rightarrow ln\ x + 1 = 0 \rightarrow ln\ x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \rightarrow y = \dfrac{-1}{e}$

La recta tangent en el punt $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$ és: $y = \dfrac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x = (2x + x^2)e^x$

Com que $e^x \neq 0$ per a tot x:

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2+x) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punt}\,(0, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punt}\,(-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punt (0, 0), la recta tangent és: $y = 0$
- En el punt $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, la recta tangent és: $y = \dfrac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\cos 2x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\cos 2x = 0 \;\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = 1 \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$

- En els punts $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, amb $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangent és: $y = 1$
- En els punts $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, amb $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangent és: $y = -1$

3 Donada la funció $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, troba els punts en els quals el pendent de la recta tangent sigui $\dfrac{5}{4}$.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{4} \;\rightarrow\; \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{5}{4} \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$$

Els punts demanats són $\left(-2, \dfrac{-3}{2}\right)$ y $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

4 Escriu les equacions de les rectes tangents a la funció $y = \dfrac{x - 4}{x + 2}$ que són paral·leles a la recta $6x - y + 5 = 0$.

La recta donada és $y = 6x + 5$. Per tant, hem de trobar els punts de la funció donada en què els pendents de les rectes tangents valen 6.

$$f'(x) = \frac{x + 2 - (x - 4)}{(x + 2)^2} = \frac{6}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 6 \;\rightarrow\; \frac{6}{(x + 2)^2} = 6 \;\rightarrow\; (x + 2)^2 = 1 \;\rightarrow\; x = -3,\; x = -1$$

$x = -3,\; f(-3) = 7 \;\rightarrow$ La tangent en $(-3, 7)$ és $y = 7 + 6(x + 3)$.

$x = -1,\; f(-1) = -5 \;\rightarrow$ La tangent en $(-1, -5)$ és $y = -5 + 6(x + 1)$.

5 Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = x|x - 3|$ el pendent de la qual és –2.

Definim la funció per intervals:

$$f(x) = \begin{cases} x(-x + 3) & \text{si } x < 3 \\ x(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 3x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Trobem la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La funció donada és contínua en tot $\mathbb{R}$ i és derivable quan $x \neq 3$.

Perquè el pendent de la recta tangent a la corba sigui –2, poden donar-se dos casos:

$$-2x+3=-2 \rightarrow x=\frac{5}{2} \rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

$$2x-3=-2 \rightarrow x=\frac{1}{2} \quad \text{(no és vàlid perquè no pertany a l'interval)}$$

El punt en què la tangent té pendent –2 és $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ i la recta tangent en aquest punt és:

$$y=\frac{5}{4}-2\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

6 a) Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$ en $x=3$.

b) Hi ha una altra recta tangent a la gràfica de f que sigui paral·lela a la que has trobat? En cas afirmatiu, troba-la.

a) Trobem el pendent de la recta tangent fent servir la derivada:

$$f'(x)=3x^2-6x+2$$

$$x=3,\ f(3)=8,\ f'(3)=11 \rightarrow y=8+11(x-3)$$

b) Per saber si existeix un altre punt en què la recta tangent sigui paral·lela resolem:

$$f'(x)=11 \rightarrow 3x^2-6x+2=11 \rightarrow x=3,\ x=-1$$

Hi ha un altre punt:

$x=-1,\ f(-1)=-4 \rightarrow y=-4+11(x+1)$ és la recta tangent en aquest punt.

7 Troba la recta tangent a la corba $y=4x^3-2x^2-10$ en el seu punt d'inflexió.

Calculem primer el punt d'inflexió resolent $f''(x)=0$:

$$f'(x)=12x^2-4x$$

$$f''(x)=24x-4$$

$$f''(x)=0 \rightarrow 24x-4=0 \rightarrow x=\frac{1}{6}$$

Avaluant la derivada segona a ambdós costats de $x=\frac{1}{6}$, observem que la funció passa de convexa a còncava. Per tant, és un punt d'inflexió.

$$x=\frac{1}{6},\ f\left(\frac{1}{6}\right)=4\left(\frac{1}{6}\right)^3-2\left(\frac{1}{6}\right)^2-10=-\frac{271}{27},\ f'\left(\frac{1}{6}\right)=12\left(\frac{1}{6}\right)^2-4\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$$

L'equació és: $y=-\frac{271}{27}-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)$

8 Troba els punts de la corba $y=3x^2-5x+12$ en què la recta tangent a aquesta passi per l'origen de coordenades.

Hem de trobar les equacions de les tangents des d'un punt exterior a la gràfica de la funció.

Els punts de tangència són de la forma $(a, 3a^2-5a+12)$.

El pendent de la recta tangent que passa per l'origen és $\dfrac{3a^2-5a+12-0}{a-0}=\dfrac{3a^2-5a+12}{a}$.

Fent servir la derivada, el pendent anterior també és $6a-5$.

$$\frac{3a^2-5a+12}{a}=6a-5 \rightarrow 3a^2-5a+12=6a^2-5a \rightarrow a-2,\ a=2$$

Obtenim dos punts de tangència i dues rectes tangents:

$$x=-2,\ f(-2)=34,\ f'(-2)=-17 \rightarrow y=-17x$$

$$x=2,\ f(2)=14,\ f'(2)=7 \rightarrow y=7x$$

9 **Troba els punts de la corba $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en els quals la recta tangent a aquesta passi pel punt (0, –8). Escriu les equacions de les rectes tangents en aquests punts.**

Hem de trobar les equacions de les tangents des d'un punt exterior a la gràfica de la funció.

Els punts de tangència són de la forma $\left(a, \frac{a^2}{4} + 4a - 4\right)$.

El pendent de la recta tangent que passa per $(0, -8)$ és $\dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a - 4 - (-8)}{a - 0} = \dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a}$.

Fent servir la derivada, el pendent anterior també és $\frac{a}{2} + 4$.

$$\frac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a} = \frac{a}{2} + 4 \to \frac{a^2}{4} + 4a + 4 = \frac{a^2}{4} + 4a \to a = -4,\ a = 4$$

Obtenim dues rectes tangents:

$$f'(-4) = 2 \to y = -8 + 2x$$

$$f'(4) = 6 \to y = -8 + 6x$$

10 **Troba, en cada cas, les equacions de les rectes tangents paral·leles a l'eix X:**

a) $y = \dfrac{x^3}{3(x-1)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$

a) L'eix horitzontal té pendent 0.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{3(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \to x^2(2x - 3) = 0 \to x = 0,\ x = \frac{3}{2}$$

$$x = 0,\ f(0) = 0 \to y = 0$$

$$x = \frac{3}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \to y = \frac{9}{4}$$

b) $y' = \dfrac{2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x(2\ln x + 1)}{\ln^2 x}$

$$y' = 0 \to x(2\ln x + 1) = 0 \to x = 0 \text{ (no val)},\ x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}},\ f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{e} \to y = -\frac{2}{e}$$

c) $y' = \dfrac{(2x+2)e^x - (x^2+2x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2 - x^2}{e^{2x}}$

$$y' = 0 \to 2 - x^2 = 0 \to x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2},\ f(\sqrt{2}) = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \to y = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$$

$$x = -\sqrt{2},\ f(-\sqrt{2}) = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} \to y = e^{\sqrt{2}}(2 - 2\sqrt{2})$$

Màxims i mínims. Punts d'inflexió

11 **Troba els màxims, els mínims i els punts d'inflexió de les funcions següents:**

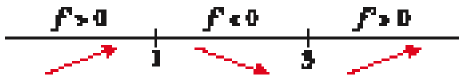
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$

Signe de la derivada:



Hi ha un mínim en (3, 0) i un màxim en (1, 4).

Punts d'inflexió:

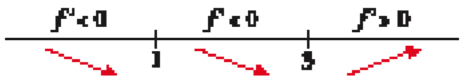
$f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$

Com que $f''(x) < 0$ per a $x < 2$ i $f''(x) > 0$ per a $x > 2$, el punt (2, 2) és un punt d'inflexió.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

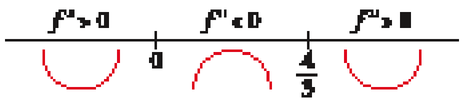
$f'(x) = \dfrac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -4/3 \end{cases}$



Hi ha un mínim en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

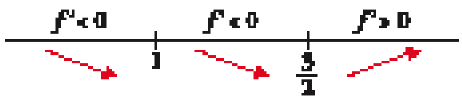
$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 4/3 \rightarrow y = -(64/81) \end{cases}$



Hi ha un punt d'inflexió en (0, 0) i un altre en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

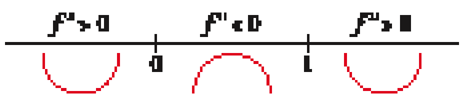
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -27/16 \end{cases}$



Hi ha un mínim en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

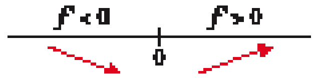
$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$



Hi ha un punt d'inflexió en (0, 0) i un altre en (1, –1).

d) $f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$



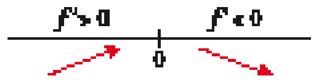
Hi ha un mínim en (0, 0).

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ per a tot x.

No hi ha punts d'inflexió.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

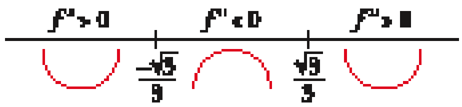
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hi ha un màxim en (0, 1).

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

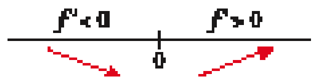
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ i un altre en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

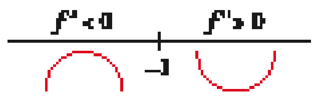
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (ja que $e^x \neq 0$ per a tot x) $\rightarrow\; y = 1$



Hi ha un mínim en (0, –1).

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$



Hi ha un punt d'inflexió en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

12 **Troba els intervals de creixement i de decreixement, i els màxims i els mínims d'aquestes funcions:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

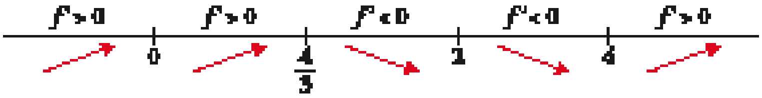
d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ **e)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x) - (8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció és creixent en $(-\infty, 0)$ Ø $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ Ø $(4, +\infty)$.

És decreixent en $\left(\frac{4}{3}, -2\right)$ Ø $(2, 4)$.

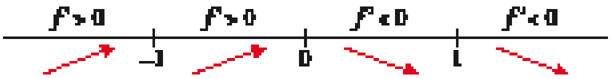
Té un màxim en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}\right)$ i un mínim en $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de la derivada:



La funció és creixent en $(-\infty, -1)$ Ø $(-1, 0)$.

És decreixent en $(0, 1)$ Ø $(1, +\infty)$.

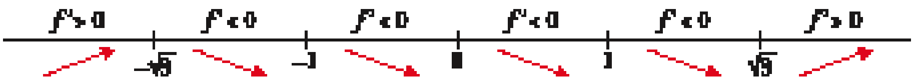
Té un màxim en $(0, -1)$.

c) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x\sqrt{3} \end{cases}$$

Signe de la derivada:



La funció és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3})$ Ø $(\sqrt{3}, +\infty)$.

És decreixent en $(-\sqrt{3}, -1)$ Ø $(-1, 1)$ Ø $(1, \sqrt{3})$.

Té un màxim en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Té un mínim en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

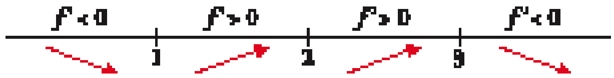
Té un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

d) $y = \frac{2x^2-3x}{2-x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x)-(2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x-4x^2-6+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2} = \frac{-2(x^2-4x+3)}{(2-x)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(1, 2)$ Ø $(2, 3)$.

és decreixent en $(-\infty, 1)$ Ø $(3, +\infty)$.

té un mínim en $(1, -1)$.

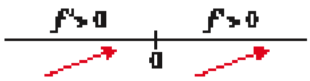
té un màxim en $(3, -9)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{2xx - (x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2-1}{x} = 0$. No té solució.

Signe de la derivada:



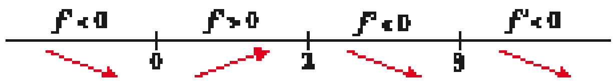
La funció és creixent en tot el seu domini.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Domini* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$f'(x) = \dfrac{-8\,(3x^2 - 6x)}{x^4\,(x-3x)^2} = \dfrac{-8x\,(3x-6)}{x^4\,(x-3x)^2} = \dfrac{-8\,(3x-6)}{x^3\,(x-3x)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signe de la derivada:



La funció: és creixent en $(0, 2)$.

és decreixent en $(-\infty, 0)$ Ø $(2, 3)$ Ø $(3, +\infty)$.

té un màxim en $(2, -2)$.

13 Estudia la concavitat, la convexitat i els punts d'inflexió de les funcions següents:

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

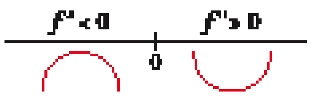
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln\,(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Domini* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signe de $f''(x)$:



La funció és convexa en $(-\infty, 0)$ i còncava en $(0, +\infty)$.

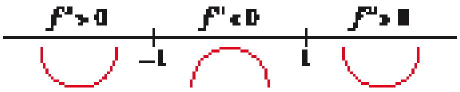
Té un punt d'inflexió en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Domini* = ℝ

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signe de $f''(x)$:



La funció és còncava en $(-\infty, -1)$ Ø $(1, +\infty)$ i convexa en $(-1, 1)$.

Té un punt d'inflexió en $(-1, -5)$ i un altre en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. *Domini* = ℝ

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

$f''(x) > 0$ per a $x \neq 2$

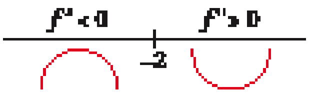
Per tant, la funció és còncava. No té punts d'inflexió.

d) $y = x\,e^x$. *Domini* = ℝ

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -2$ $(e^x \neq 0$ per a tot $x)$

Signe de $f''(x)$:



La funció és convexa en $(-\infty, -2)$ i còncava en $(-2, +\infty)$.

Té un punt d'inflexió en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

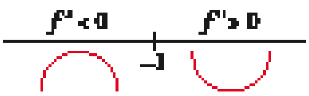
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Domini* = ℝ – {–1}

$$f'(x) = \frac{-1\,(x+1) - (2 - x)}{(x+1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ per a tot x.

Signe de $f''(x)$:



La funció és convexa en $(-\infty, -1)$ i còncava en $(-1, +\infty)$.

No té punts d'inflexió.

f) $y = \ln\,(x + 1)$. *Domini* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$f''(x) < 0$ per a $x \in (-1, +\infty)$

Per tant, la funció és convexa en $(-1, +\infty)$.

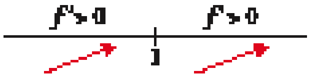
14 **Estudia si aquestes funcions tenen màxims, mínims o punts d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$ **c)** $y = 3 - (x - 1)^6$ **d)** $y = -3 + 2(x - 1)^5$

a) • Màxims i mínims: busquem els punts en què $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow 3(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiem el signe de la derivada:



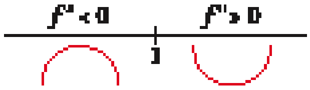
La funció creix a l'esquerra i a la dreta de $x = 1$.

No hi ha ni un màxim ni un mínim.

• Punts d'inflexió: busquem els punts en què $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 6(x - 1) \rightarrow 6(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiem el signe de $f''(x)$:



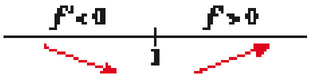
És convexa a l'esquerra de $x = 1$ i còncava a la seva dreta.

Hi ha un punt d'inflexió en (1, 1).

b) • Màxims i mínims: busquem els punts en què $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 4(x - 1)^3 \rightarrow 4(x - 1)^3 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 2$

Estudiem el signe de la derivada:



La funció decreix a l'esquerra de $x = 1$ i creix a la seva dreta.

Hi ha un mínim en (1, 2).

• Podem comprovar que no hi ha punts d'inflexió amb el signe de $f''(x)$:

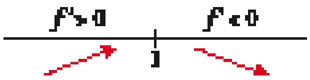
$f''(x) = 12(x - 1)^2 \rightarrow f''(x) \geq 0$ per a qualsevol x.

La funció és còncava en tot el seu domini.

c) • Màxims i mínims: busquem els punts en què $f'(x) = 0$.

$f'(x) = -6(x - 1)^5 \rightarrow -6(x - 1)^5 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 3$

Estudiem el signe de la derivada:



La funció creix a l'esquerra de $x = 1$ i decreix a la seva dreta.

Hi ha un màxim en (1, 3).

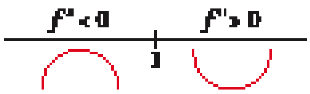
• Com que $f''(x) = -30(x - 1)^4 \leq 0$, la funció és convexa en tot el seu domini.

d) • Màxims i mínims: busquem els punts en què $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 10(x - 1)^4 \rightarrow 10(x - 1)^4 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = -3$

Com que $f'(x) = 10(x - 1)^4 \geq 0$, la funció és creixent en tot el seu domini. No hi ha màxims ni mínims.

Estudiem el signe de $f''(x) = 40(x - 1)^3$:



La funció és convexa a l'esquerra de $x = 1$ i còncava a la seva dreta.

Hi ha un punt d'inflexió en (1, –3).

Coeficients d'una funció

15 **Donada la funció $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$, calcula a sabent que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 3$. Es tracta d'un màxim o un mínim?**

Com que té un extrem relatiu en $x = 3$, ha de complir-se que $f'(3) = 0$.

$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$

$f'(3) = 0 \rightarrow -\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0 \rightarrow a = -4$

Per tant, $f(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}$.

$f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3};\ f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}$

$x = 3,\ f(3) = \frac{1}{3},\ f''(3) = -\frac{8}{27} + \frac{36}{81} = \frac{4}{27} > 0 \rightarrow$ El punt $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ és un mínim relatiu.

16 **De la funció $f(x) = ax^3 + bx$ sabem que passa per (1, 1) i en aquest punt té tangent paral·lela a la recta $3x + y = 0$. Troba a i b.**

$f(x) = ax^3 + bx;\ f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \rightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \rightarrow 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

17 **Troba una funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 2$ i un punt d'inflexió en $P(1, 2)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 2 \rightarrow 1 + a + b + c = 2$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0$

$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a + b + c = 2 \\ 6 + 2a = 0 \\ 12 + 4a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -7,\ b = 16,\ c = -8$$

18 **Calcula el valor dels coeficients a, b i c de la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, sabent que:**

a) L'equació de la recta tangent a f en $x = 0$ és $y = x$.

b) Té un extrem relatiu en el punt (–1, 0).

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

De l'apartat a) es dedueix que passa pel punt (0, 0) i que $f'(0) = 1$.

L'apartat b) implica que $f(-1) = 0$ i que $f'(-1) = 0$.

$f'(0) = 1 \rightarrow c = 1$

$f(-1) = 0 \rightarrow 1 - a + b - 1 = 0 \rightarrow -a + b = 0$

$f'(-1) = 0 \rightarrow -4 + 3a - 2b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -a + b = 0 \\ -4 + 3a - 2b + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 3,\ b = 3$$

Pàgina 189

19 **Troba a, b, c i d perquè $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tingui un màxim relatiu en el punt (0, 4) i un mínim relatiu en el punt (2, 0).**

Les condicions del problema impliquen que:

$f(0) = 4,\ f'(0) = 0,\ f(2) = 0,\ f'(2) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$d = 4$

$c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 8a + 4b + 4 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = -3$$

20 **Sigui $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomi que compleix $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ i té dos extrems relatius per a $x = 1$ i $x = 2$. Troba a, b, c i d.**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lcr} f(1) = 0 & \to & a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 & \to & c = 2 \\ f'(1) = 0 & \to & 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 & \to & 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + b + d = -2 \\ c = 2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 6a + 2b = -1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} a\\b\\c\\d \end{array}}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \dfrac{-5}{6} \end{array}\right\}$$

Així: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}d$; $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

21 **Donada la funció $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula els valors de a i b sabent que té dos punts d'inflexió, un en $x = 1$ i un altre en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{lcr} f''(1) = 0 & \to & 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 & \to & 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Restant les igualtats: $a + 1 = 0 \to a = -1$

Substituint en la 2a equació: $3b - 3 = 0 \to b = 1$

22 **La corba $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ talla l'eix d'abscisses en $x = -1$ i té un punt d'inflexió en el punt (2, 1). Calcula a, b i c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(-1) = 0 & \to & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \to & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \to & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}\right\}$$

23 **La funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ no té cap extrem relatiu en $x = 1$, verifica que $f(1) = 1$ i que $f'(1) = 0$. Calcula els paràmetres a, b i c.**

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$

$f''(x) = 12x^2 + 6ax$

$f(1) = 1 + a + b + c = 1 \;\rightarrow\; 1 + a + b + c = 1 \;\rightarrow\; 1 - 2 + 2 + c = 1 \rightarrow\; c = 0$

$f'(1) = 4 + 3a + b = 0 \;\rightarrow\; 4 + 3a + b = 0 \;\rightarrow\; 4 - 6 + b = 0 \;\rightarrow\; b = 2$

$f''(1) = 12 + 6a = 0 \;\rightarrow\; 12 + 6a = 0 \;\rightarrow\; a = -12/6 \;\rightarrow\; a = -2$

24 **Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Troba a i b perquè la corba $y = f(x)$ tingui en $x = 1$ un punt d'inflexió amb tangent horitzontal.**

Si la corba té un punt d'inflexió en $x = 1$, ha de ser $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a \rightarrow 6 + 2a = 0$

Si en $x = 1$ la tangent és horitzontal, el seu pendent serà 0; i, per tant, $f'(1) = 0$.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 + 2a + b = 0$

Resolem: $\begin{cases} 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3 \\ 3 + 2a + b = 0 \rightarrow b = -3 - 2(-3) = 3 \end{cases}$

La corba serà $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

Per resoldre

25 **Donades les funcions:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Comprova que són derivables en $\mathbb{R}$.

b) Determina'n els intervals de creixement i decreixement i els màxims i els mínims.

Les dues funcions són contínues i derivables (excepte, potser, en els punts on se separen els trossos) perquè estan definides per intervals per mitjà de funcions polinòmiques.

a) Estudiem el punt $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4x - 2) = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1) \rightarrow \text{és contínua també en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(1^-) = 4 = f'(1^+) \rightarrow \text{és derivable en } x = 1.$$

Estudiem el punt $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 7x - 4) = 14 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2x^2 + 3x) = 14 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 2} g(x) = 14 = g(2) \rightarrow \text{és contínua també en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{si } x < 2 \\ 4x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f'(2^-) = 11 = f'(2^+) \rightarrow \text{és derivable en } x = 2.$$

b) En el cas de $f(x)$:

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$ (pertany a l'interval de definició)

$x = -1$, $y = -2$, $f''(-1) > 0 \rightarrow$ El punt $(-1, -2)$ és un mínim relatiu.

En el cas de $g(x)$:

$$g'(x) = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} 2x+7=0 \ \rightarrow \ x=-\dfrac{7}{2} \ \text{(pertany a l'interval de definició)} \\ 4x+3=0 \ \rightarrow \ x=-\dfrac{3}{4} \ \text{(no val perquè no està a l'interval de definició)} \end{cases}$$

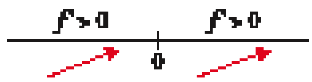
$x = -\dfrac{7}{2}$, $y = -\dfrac{65}{4}$, $g''\left(-\dfrac{7}{2}\right) > 0 \ \rightarrow$ El punt $\left(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{65}{4}\right)$ és un mínim relatiu.

26 **Estudia els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x|x|$. Té màxims o mínims? Determina els intervals de concavitat i convexitat. Té algun punt d'inflexió?**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \ \rightarrow \ \text{És una funció contínua en } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}, \ f'(0^-) = 0 = f'(0^+) \ \rightarrow \ \text{També és derivable en } x = 0.$$

La primera derivada només s'anul·la quan $x = 0$.



La funció no té ni màxims ni mínims relatius.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \ \rightarrow \ \text{És convexa en l'interval } (-\infty, 0) \text{ i còncava en } (0, +\infty).$$

El punt (0, 0) és un punt d'inflexió perquè canvia de convexa a còncava.

27 **Troba el valor de c de manera que la funció $y = \dfrac{e^x}{x^2+c}$ tingui un únic punt crític.**

Es tracta d'un màxim, d'un mínim o d'un punt d'inflexió?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+c) - e^x \cdot 2x}{(x^2+c)^2} = \frac{e^x(x^2+c-2x)}{(x^2+c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x + c = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4c}}{2}$$

Perquè només hi hagi un extrem relatiu, ha de ser: $4 - 4c = 0 \ \rightarrow \ c = 1$

En aquest cas:

$$y = \frac{e^x}{x^2+1}; \ f'(x) = \frac{e^x(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x = 1$$

$$f'(x) = 0 \ \text{si} \ x \ne 1 \ \rightarrow \ f(x) \ \text{és creixent si} \ x \ne 1.$$

Hi ha un punt d'inflexió en $x = 1$.

28 **a) Calcula els valors dels paràmetres a i b perquè sigui derivable aquesta funció:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

b) Troba els seus extrems relatius en el cas $a = -2$, $b = 1$.

a) La funció està definida per intervals per mitjà de funcions contínues i derivables. Només ens queda estudiar el punt $x = 0$. Vegem la continuïtat de la funció:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \quad \to \quad b = 1$$

Per al valor obtingut de b la funció és contínua perquè $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = -2 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = a \end{cases} \quad \to \quad a = -2 \text{ perquè sigui derivable en } x = 0.$$

Si $a = -2$ i $b = 1$ la funció és contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} = 0 \to x = 2 \text{ (no val)} \\ 2x - 2 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

Estudiant el signe de la primera derivada a prop de $x = 1$, obtenim que el punt (1, 0) és un mínim relatiu.

29 **La corba $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ talla l'eix d'abscisses en $x = 1$ i té un punt d'inflexió en (3, 2). Calcula els punts de la corba que tinguin recta tangent paral·lela a l'eix X.**

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$; $f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \to & 1 + a + b + g = 0 \\ f(3) = 2 & \to & 27 + 9a + 3b + g = 2 \\ f''(3) = 0 & \to & 18 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -9 \\ b = 24 \\ g = -16 \end{array}\right\}$$

Així: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$; $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Punts amb tangent horitzontal:

$$f'(x) = 0 \to x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Els punts són (4, 0) i (2, 4).

30 **Troba el valor que ha de tenir a perquè la funció $f(x) = x^2 \ln \dfrac{x}{a}$, $a > 0$, tingui un punt singular en $x = e$.**

El domini de definició és $(0, +\infty)$ perquè a és positiu.

$$f'(x) = x + 2x \ln \frac{x}{a}$$

Perquè tingui un punt singular en $x = e$ ha de ser $f'(e) = 0$

$$e + 2e \cdot \ln \frac{e}{a} = 0 \to e\left(1 + 2 \ln \frac{e}{a}\right) = 0 \to 1 + 2(\ln e - \ln a) = 0 \to 1 + 2 - 2 \ln a = 0 \to \ln a = \frac{3}{2}$$

$a = e^{3/2}$

31 Comprova si existeix algun valor de a per al qual la funció $f(x) = a ln\, x + x^3$ tingui un punt d'inflexió en el punt $x = 1$.

Perquè existeixi punt d'inflexió en $x = 1$, ha de ser $f''(1) = 0$:

$$f(x) = a\, ln\, x + x^3 \rightarrow f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 = \frac{a}{x} + 3x^2$$

$$f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x \rightarrow f''(1) = -a + 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

Comprovem amb f''' si existeix punt d'inflexió:

$$f''(x) = -\frac{6}{x^2} + 6x \rightarrow f'''(x) = \frac{6}{x^3} + 6 \rightarrow f'''(1) \neq 0$$

Per a $a = 6$, la funció té un punt d'inflexió en $x = 1$.

32 Es considera la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ x\, ln\, x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Determina a, b i c perquè sigui contínua, tingui un màxim en $x = -1$ i la tangent en $x = -2$ sigui paral·lela a la recta $y = 2x$.

La funció està definida per intervals per mitjà de funcions contínues. Exigim la continuïtat en $x = 0$ i així serà contínua en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^-} (ax^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x\, ln\, x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (indeterminat).}$$

Fent servir la regla de L'Hôpital $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$.

Per tant, $\lim_{x \to 0^+} (x\, ln\, x) = 0$.

Per tant, perquè sigui contínua $c = 0$.

Si $x < 0$, $f'(x) = 2ax + b$

Per tenir un màxim en $x = -1$, $f'(-1) = 0 \rightarrow -2a + b = 0 \rightarrow b = 2a$

Perquè la tangent en $x = -2$ sigui paral·lela a la recta $y = 2x$, ha de ser $f'(2) = 2 \rightarrow -4a + b = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} b = 2a \\ -4a + b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = -1,\ b = -2$$

33 a) Fixa't en la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

i calcula els valors de m, n i p perquè f sigui derivable en $\mathbb{R}$ i tingui un extrem relatiu en $x = -\frac{1}{2}$.

b) És un màxim o un mínim?

c) Comprova si existeixen altres punts singulars i representa la funció.

a) La funció està definida per intervals per mitjà de funcions polinòmiques; per tant, és contínua i derivable excepte, potser, en el punt.

Estudiem el punt $x = 1$.

Continuïtat:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + px) = -1 + p \\ \lim_{x \to 1^-} (x^2 + mx + n) = 1 + m + n \end{array}\right\} \rightarrow -1 + p = 1 + m + n \rightarrow m + n - p = -2$$

Si es compleix la condició anterior, la funció serà contínua en $x = 1$ perquè $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } x < 1 \\ 2x + m & \text{si } x > 1 \end{cases} \to \begin{cases} f'(1^-) = -2 + p \\ f'(1^+) = 2 + m \end{cases} \to -2 + p = 2 + m \to m - p = -4$$

Si es compleix la condició anterior, la funció serà derivable en $x = 1$ perquè les derivades laterals coincideixen.

Perquè tingui un extrem relatiu en $x = -\frac{1}{2}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \to 1 + p = 0 \to p = -1$.

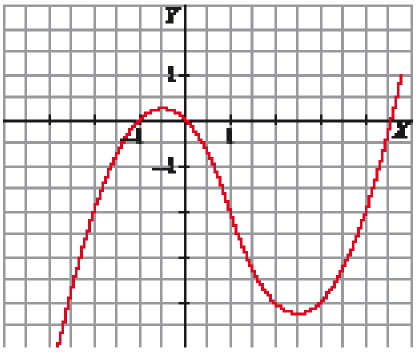
$$\left.\begin{array}{l} p = -1 \\ m - p = -4 \\ m + n - p = -2 \end{array}\right\} \to m = -5,\ n = 2,\ p = -1$$

b) $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0 \to$ L'extrem relatiu és un màxim.

c) Si existeix un altre extrem relatiu, ha d'estar en el segon interval.

$$f'(x) = 0\ (x > 1) \to 2x - 5 = 0 \to x = \frac{5}{2}$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \to \text{En } x = \frac{5}{2} \text{ hi ha un mínim relatiu.}$$



34 **Fixa't en la funció $f(x) = |x - 3|(x + 1)$ i troba els punts on les tangents són paral·leles a la recta $y = 6x - 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)(x+1) & \text{si } x < 3 \\ (x-3)(x+1) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La funció no és derivable en $x = 3$ perquè les derivades laterals són diferents.

$$f'(x) = 6 \to \begin{cases} -2x + 2 = 6 \to x = -2 \\ 2x - 2 = 6 \to x = 4 \end{cases}$$

$x = -2,\ y = -5$

$x = 4,\ y = 5$

Els punts buscats són (–2, –5) i (4, 5).

35 **Calcula el màxim i el mínim absoluts en l'interval [–2, 3] de la funció:**

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + (x - 3)$$

La funció donada és contínua en l'interval [–2, 3]; per tant, arriba al seu màxim i al seu mínim absolut. Aquests poden ser els extrems de l'interval o els màxims i mínims relatius.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + 1$$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x}{x^2+1} + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Avaluem:

$x = -2,\ f(-2) = \ln 5 - 5 \approx -3{,}39$

$x = -1,\ f(-1) = \ln 2 - 4 \approx -3{,}31$

$x = 3,\ f(3) = \ln 10$

El seu mínim absolut és el punt $(-2, \ln 5 - 5)$ i el seu màxim absolut és el punt $(3, \ln 10)$.

36 **La funció de cost total de producció de x unitats d'un producte determinat és:**

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$$

Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com a:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Quina ha de ser la producció perquè sigui mínim el cost mitjà per unitat?

Busquem el mínim de la funció $C(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ igualant a 0 la seva derivada:

$$C(x) = \frac{1}{2}x + 3 + \frac{200}{x}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2} - \frac{200}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{200}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 400 \rightarrow x = -20 \text{ (no vàlid)},\ x = 20$$

Comprovem que hi ha un mínim en $x = 20$:

$$C''(x) = \frac{400}{x^3} \rightarrow Q''(20) = \frac{1}{20} > 0$$

S'han de produir 20 unitats per minimitzar el cost mitjà per unitat.

37 **Una empresa vol produir $Q(t) = 200 + 10t$ unitats d'un producte per vendre a un preu $p(t) = 200 - 2t$ euros per unitat, on t és el nombre de dies transcorreguts des de l'inici de la producció.**

a) Calcula el benefici si $t = 10$.

b) Escriu, depenent de t, la funció de benefici $(0 \le t \le 60)$.

c) Determina quan el benefici és màxim.

a) Si $t = 10$ <
- $Q(10) = 200 + 10 \cdot 10 = 300$ unitats
- $p(10) = 200 - 2 \cdot 10 = 180$ € per unitat

Benefici: $Q(10) \cdot p(10) = 300 \cdot 180 = 54\,000$ €

b) $B(t) = Q(t) \cdot p(t) = (200 + 10t)(200 - 2t) = -20t^2 + 1\,600t + 40\,000$ si $0 \le t \le 60$

c) Per trobar el màxim, fem $B'(t) = 0$:

$B'(t) = -40t + 1\,600 = 0 \rightarrow t = 40$

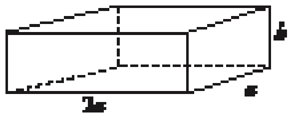
Al cap de 40 dies s'obté el màxim benefici, que és:

$B(40) = -20 \cdot 40^2 + 1\,600 \cdot 40 + 40\,000 = 72\,000$ €

Pàgina 190

38 **Es vol fabricar una caixa de volum màxim que sigui el doble de llarga que d'ampla i que, a més, la suma de l'amplada més la llargada més l'altura sigui igual a un metre.**

Calcula les mesures que ha de tenir la caixa i quin serà el seu volum.



Volum de la caixa: $V = 2a \cdot a \cdot b = 2a^2 b$

$a + 2a + b = 1 \rightarrow b = 1 - 3a$

$V = 2a^2(1 - 3a) = 2a^2 - 6a^3$

Per trobar el màxim volum, derivem i igualem a zero:

$$V' = 4a - 18a^2 = 0 \rightarrow a(4 - 18a) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \ \text{(no val)} \\ a = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Comprovem si el volum és màxim per a $a = \dfrac{2}{9}$:

$$V'' = 4 - 36a \rightarrow V''\left(\frac{2}{9}\right) = 4 - 36 \cdot \frac{2}{9} = -4 < 0, \quad \text{màxim.}$$

Si $a = \dfrac{2}{9}$ m, la llargada serà $2 \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{9}$ m, i l'altura, $1 - \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{3}$ m.

El volum màxim és:

$$V = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243} \text{ m}^3$$

39 **Una empresa disposa de 15 comercials que proporcionen uns ingressos per vendes de 5 750 euros mensuals cada un. Es calcula que, per cada nou comercial que es contracti, els ingressos de cada un disminueixen 250 euros. Calcula:**

a) La funció que determina els ingressos mensuals que s'obtindrien si es contractessin x comercials més.

b) El nombre total de comercials que ha de tenir l'empresa perquè els ingressos siguin màxims, i quins serien aquests ingressos.

a) Anomenem x el nombre de nous comercials que es contractin. La funció que determina els ingressos mensuals serà:

$$I(x) = (15 + x)(5\,750 - 250x) = -250x^2 + 2\,000x + 86\,250$$

b) Busquem el màxim de la funció $I(x)$ igualant a 0 la seva derivada:

$$I'(x) = -500x + 2\,000$$

$$I'(x) = 0 \rightarrow -500x + 2\,000 = 0 \rightarrow x = 4$$

Comprovem que hi ha un màxim en $x = 4$:

$$I''(x) = -500 \rightarrow I''(4) = -500 < 0$$

Perquè els ingressos siguin màxims, l'empresa ha de tenir 19 comercials.

40 **Els beneficis d'una empresa en els seus primers 8 anys de funcionament vénen donats, en milions d'euros, per aquesta funció:**

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t, \quad 0 \le t \le 8, \quad t \text{ en anys}$$

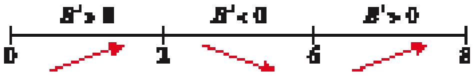
a) Estudia la monotonia de $B(t)$ i els seus extrems.

b) Descriu l'evolució dels beneficis de l'empresa en els seus 8 anys d'existència.

a) Estudiem el signe de la primera derivada:

$$B'(t) = \frac{3t^2}{4} - 6t + 9$$

$$B'(t) = 0 \rightarrow \frac{3t^2}{4} - 6t + 9 = 0 \rightarrow t = 2, \ t = 6$$



$B(0) = 0,\ \ B(2) = 8,\ \ B(6) = 0,\ \ B(8) = 8$

La funció és creixent en els intervals (0, 2) i (6, 8) i és decreixent en l'interval (2, 6).

Els punts (0, 0) i (6, 0) són mínims absoluts, i els punts (2, 8) i (8, 8) són màxims absoluts.

b) Els beneficis de la empresa creixen durant els dos primers anys fins que en el segon any s'arriba a un benefici màxim de 8 milions d'euros. A continuació baixen durant els quatre anys següents fins que en el sisè any no s'obtenen beneficis. Finalment, creixen durant els dos anys següents i en l'octau es torna a obtenir un benefici màxim de 8 milions d'euros.

41 **Sigui $f(x)$ la funció que representa el cost mitjà, en euros per quilogram d'aliment preparat, en una jornada en què es produeixen x kg d'aliment.**

$$f(x) = 2 + x + \frac{9}{x},\quad x > 0$$

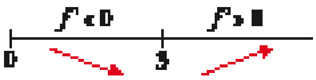
a) Estudia la variació del cost mitjà. Quina és la quantitat de producte que s'ha de preparar en una jornada per minimitzar el cost mitjà per quilogram?

b) Si el cost mitjà no es manté inferior a 10, serà necessari un reajustament del procés. Quina pot ser la producció perquè no s'hagi de fer aquest reajustament?

a) Per estudiar la variació analitzem el signe de la primera derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x = -3 \text{ (no és vàlid)},\ x = 3$$



El cost mitjà disminueix fins que es produeixen 3 kg i, a partir d'aquesta quantitat, augmenta indefinidament. S'han de preparar 3 kg en una jornada per minimitzar el cost.

b) Per no tenir que reajustar, hem d'esbrinar quan el cost mitjà no supera el valor 10.

$$2 + x + \frac{9}{x} = 10 \;\rightarrow\; x^2 - 8x + 9 = 0 \;\rightarrow\; x = 4 - \sqrt{7} \approx 1{,}35;\ \ x = 4 + \sqrt{7} \approx 6{,}65$$

Per tant, hem de mantenir la producció entre 1,35 kg i 6,65 kg d'aliment preparat.

42 **El nombre de vehicles que ha passat un dia determinat pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:**

$$N(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si } 0 \le t \le 9 \\[2ex] 10 - \left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si } 9 \le t \le 24 \end{cases}$$

on N indica el nombre de vehicles i t el temps, en hores, transcorregut des de les 0:00 h.

a) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava pel peatge?

b) A quina hora va passar el nombre més gran de vehicles? Quants van ser?

a) Per saber quan la funció és creixent, estudiarem el signe de la seva derivada.

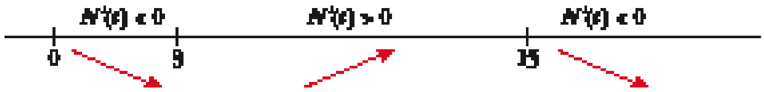
Les funcions amb les quals $N(t)$ està definida són contínues i derivables si $0 \le t < 9$ i si $9 < t \le 24$. Estudiem la derivabilitat en $t = 9$:

$$N'(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-3}{3}\right) & \text{si } 0 \le t < 9 \\[2ex] -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-15}{3}\right) & \text{si } 9 < t \le 24 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} N'(9^-) = \dfrac{4}{3} \\ N'(9^+) = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \; N \text{ és derivable en } t = 9.$$

$$N'(t) = 0 \begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-3}{3}\right) = 0 \;\rightarrow\; t = 3 \\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-15}{3}\right) = 0 \;\rightarrow\; t = 15 \end{cases}$$

Signe de $N'(t)$:



El nombre de vehicles va augmentar entre les 3 h i les 15 h.

b) El màxim absolut d'una funció contínua definida en un interval tancat es troba entre els màxims relatius de la funció o en els extrems de l'interval:

$N(0) = 3$; $N(15) = 10$; $N(24) = 1$

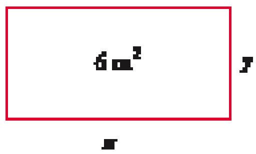
El nombre més gran de vehicles va passar a les 15 h, i van ser 10 vehicles.

43 **Es vol construir el marc per a una finestra rectangular de 6 m² de superfície. El metre lineal de tram horitzontal costa 2,50 € i el de tram vertical, 3 €.**

a) Calcula les dimensions de la finestra perquè el cost del marc sigui mínim.

b) Quin és aquest cost mínim?

a) Àrea $= x \cdot y = 6 \;\rightarrow\; y = \dfrac{6}{x}$



Perímetre $= 2x + 2y$

Cost $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$$C = 5x + \frac{36}{x}$$

$$C' = 5 - \frac{36}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68 \text{ m} \;\rightarrow\; y = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \text{ m}$$

$$\left(C'' = \frac{72}{x^3};\; C''\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ és mínim}\right).$$

Les dimensions són $x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ m i $y = \sqrt{5}$ m.

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$ €

44 **El nivell diari mitjà de CO_2 en l'aire d'una ciutat depèn del nombre d'habitants, p, i ve donat per la funció:**

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

Amb p en milers d'habitants i C en parts per milió (ppm). Si l'evolució de la població d'aquesta ciutat en t anys és $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$, amb quina rapidesa variarà la concentració de CO_2 en aquest lloc d'aquí a 3 anys?

L'expressió del nivell mitjà diari de CO_2 en funció del temps, en anys, és $C[p(t)] = (C \circ p)(t)$.

La variació de CO_2 ve donada per la derivada de la funció anterior.

$$(C \circ p)'(t) = C'[p(t)] \cdot p'(t) = \frac{3{,}1 + 0{,}1t^2}{2\sqrt{\dfrac{(3{,}1 + 0{,}1t^2)^2}{2} + 17}} \cdot 0{,}2t$$

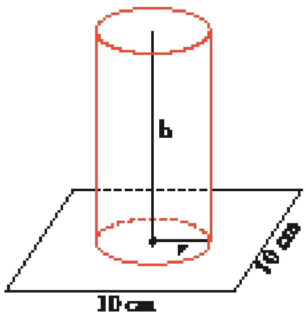
Ja que:

$$C'(p) = \frac{p}{2\sqrt{\frac{p^2}{2}+17}} \quad \text{i} \quad p'(t) = 0{,}2t$$

Si $t = 3 \rightarrow (C \circ p)'(3) = \dfrac{3,1+0,9}{2\sqrt{\frac{(3,1+0,9)^2}{2}+17}} \cdot 0{,}6 = 0{,}24$

Ens dona un creixement de 0,24 parts per milió als 3 anys.

45 **En un quadrat de costat 10 cm volem recolzar-hi la base d'un cilindre que té l'àrea del lateral de 50 cm^2. Quin ha de ser el radi del cilindre perquè el volum sigui màxim?**



Àrea lateral del cilindre = $2\pi r\text{h} = 50\ \text{cm}^2 \rightarrow \text{h} = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volum del cilindre és:

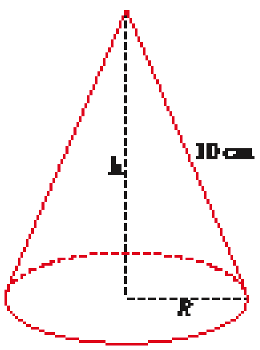
$V = \pi r^2\text{h} = \pi r^2 \cdot \dfrac{50}{2\pi r} = 25r \rightarrow V(r) = 25r$

Com que la base es recolza sobre el quadrat, tenim que el domini de $V(r)$ és l'interval (0, 5].

Hem de maximitzar $V(r) = 25r$, amb r (0, 5].

Com que $V(r)$ és una funció creixent, s'arriba al seu màxim en $r = 5$.

46 **Es vol construir un recipient cònic de generatriu 10 cm i de capacitat màxima. Quin ha de ser el radi de la base?**



$\text{h}^2 + R^2 = 100 \rightarrow R^2 = 100 - \text{h}^2$

$Volum = \dfrac{1}{3}\pi R^2\text{h} = \dfrac{1}{3}\pi(100-\text{h}^2)\text{h} = \dfrac{1}{3}\pi(100\text{h}-\text{h}^3)$

Hem de maximitzar la funció volum:

$$f(\text{h}) = \frac{1}{3}\pi\,(100\text{h} - \text{h}^3)$$

$$f'(\text{h}) = \frac{1}{3}\pi\,(100\text{h} - 3\text{h}^2)$$

$$f'(\text{h}) = 0 \rightarrow 100 - 3\text{h}^2 = 0 \rightarrow \text{h} = \pm\sqrt{\frac{100}{3}}$$

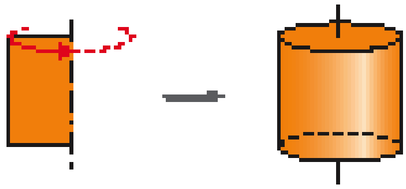
(considerem l'arrel positiva, ja que $\text{h} \geq 0$).

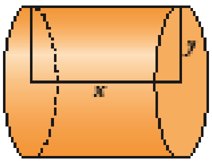
($f'(\text{h}) > 0$ a l'esquerra de $\text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ i $f'(\text{h}) < 0$ a la dreta de $\text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$. Per tant, en $\text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ hi ha un màxim).

Així, el radi de la base serà:

$$R^2 = 100 - \text{h}^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \rightarrow R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

47 **Troba la base i l'altura d'una cartolina rectangular de perímetre 60 cm que, en girar al voltant d'un costat vertical, generi un cilindre de volum màxim.**





Perímetre cartolina = $2x + 2y = 60 \rightarrow x + y = 30 \rightarrow x = 30 - y$

Volum = $\pi y^2 x = \pi y^2(30 - y) = \pi(30y^2 - y^3)$

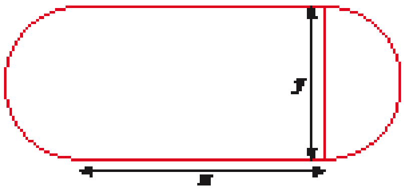
Hem de maximitzar la funció:

$$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$$
$$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$$
$$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \rightarrow 3y(20 - y) = 0 \begin{cases} y = 0 \text{ (no val)} \\ y = 20 \rightarrow x = 10 \end{cases}$$

(En $y = 20$ hi ha un màxim, ja que $V'(y) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $V'(y) < 0$ a la seva dreta.)

Els costats de la cartolina mesuraran 20 cm i 10 cm.

48 **Volem construir una pista d'entrenament que consti d'un rectangle i de dos semicercles adossats a dos costats oposats del rectangle. Si volem que el perímetre de la pista sigui de 200 m, troba les dimensions que fan màxima l'àrea de la regió rectangular.**



Perímetre de la pista = $2x + \pi \cdot y = 200$

Aïllem: $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

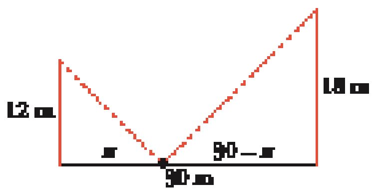
Àrea del rectangle = $x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivem:

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \rightarrow x = 50 \text{ m} \rightarrow y = \frac{100}{\pi} \text{ m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\ A''(50) < 0 \rightarrow x = 50 \text{ és màxim.}\right)$$

49 **Dos pals de 12 m i 18 m d'alçària disten entre si 30 m. Es vol estendre un cable que uneixi un punt del terra entre aquests dos pals amb els seus extrems. On s'ha de situar el punt del terra perquè la longitud total del cable sigui mínima?**



La longitud total del cable és:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2};\ \text{és a dir: } L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224};$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}} + \frac{2x-60}{2\sqrt{x^2-60x+1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-60x+1\,224}+(x-30)\sqrt{x^2+144}}{\sqrt{(x^2+144)(x^2-60x+1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \;\to\; x\sqrt{x^2-60x+1\,224}+(x-30)\sqrt{x^2+144}=0$$

$$x\sqrt{x^2-60x+1\,224} = -(x-30)\sqrt{x^2+144}$$

$$x^2(x^2-60x+1\,224) = (x-30)(x^2+144)$$

$$x^4-60x^3+1\,224x^2 = (x^2-60x+900)(x^2+144)$$

$$x^4-60x^3+1\,224x^2 = x^4+144x^2-60x^3-8\,640x+900x^2+129\,600$$

$$180x^2+8\,640x-129\,600=0$$

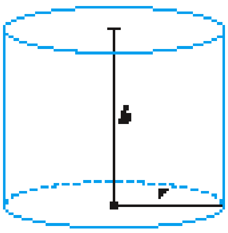
$$x^2+48x-720=0$$

$$x = \frac{-48\pm\sqrt{2\,304+2\,880}}{2} = \frac{-48\pm\sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48\pm 72}{2} \quad \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \ \text{(no val)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hi ha un mínim, ja que $L'(x) < 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $L'(x) > 0$ a la seva dreta).

Per tant, el punt del terra ha de situar-se a 12 m del pal de 12 m (i a 18 m del pal de 18 m).

50 **Determina el radi de la base i l'altura d'un cilindre de 54 cm^2 d'àrea total per tal que el seu volum sigui màxim.**



Àrea total $= 2\pi r\mathrm{h} + 2\pi r^2$

$$2\pi r\mathrm{h} + 2\pi r^2 = 54 \;\to\; \mathrm{h} = \frac{54-2\pi r^2}{2\pi r}$$

Volum $= \pi r^2\mathrm{h}$

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{54-2\pi r^2}{2\pi r} = r(27-\pi r^2) = 27r - \pi r^3$$

Busquem el màxim de V:

$$V' = 27-3\pi r^2 \;\to\; 27-3\pi r^2 = 0 \;\to\; r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \;\to$$

$$\to\; r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \quad \text{(la solució negativa no val).}$$

Comprovem si el volum és màxim:

$$V'' = -6\pi r \;\to\; V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) < 0, \text{ és un màxim.}$$

Si $r = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \;\to\; \mathrm{h} = \dfrac{27-\pi(9/\pi)}{\pi(3/\sqrt{\pi})} = \dfrac{18\sqrt{\pi}}{3\pi} = \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\pi}$

Per tant, perquè el volum sigui màxim ha de ser:

$$r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}7 \text{ cm i } \mathrm{h} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 3{,}4 \text{ cm}$$

51 **Fixa't en f: [1, e] $\to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina quines de les rectes tangents a la gràfica de f tenen el màxim pendent.**

El pendent de la recta tangent a $f(x)$ en $x = a$ és $f'(a)$. Hem de trobar el màxim de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculem la derivada de $f'(x)$; és a dir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hi ha un màxim relatiu de $f'(x)$, ja que $f''(x) > 0$ a l'esquerra d'aquest valor i $f''(x) < 0$ a la seva dreta).

Trobem $f'(x)$ en $x = 2$ i en els extrems de l'interval $[1, e]$:

$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ f'(1) = 0;\ f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

Per tant, la recta tangent amb pendent màxim és la recta tangent en $x = 2$. La trobem:

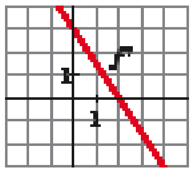
$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2;\ f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta és: $y = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{4}(x-2)$

Pàgina 191

Qüestions teòriques

52 **Observant la gràfica de la funció f', derivada de f, digues:**



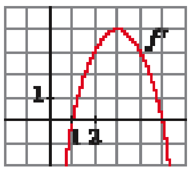
a) Quins són els intervals de creixement i de decreixement de f?

b) Té f màxims o mínims?

a) f és creixent $(f' > 0)$ en l'interval $(-\infty, 2)$ i decreixent $(f' < 0)$ en $(2, +\infty)$.

b) f té un màxim en $x = 2$. $(f'(2) = 0$ i la funció passa de creixent a decreixent.)

53 **Aquesta és la gràfica de la funció derivada de $f(x)$. Explica si $f(x)$ té màxims, mínims o punts d'inflexió en $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$.**



$x = 1$: en aquest punt, la funció té un mínim, perquè passa de ser decreixent $(f' < 0)$ a creixent $(f' > 0)$, i $f'(1) = 0$.

$x = 3$: en aquest punt, f té un punt d'inflexió, ja que $f''(3) = 0$.

$x = 5$: en aquest punt, f té un màxim, ja que passa de ser creixent a decreixent i $f'(5) = 0$.

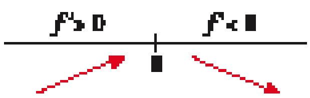
54 **La funció f té derivades primera i segona i són $f'(a) = 0$ i $f''(a) = 0$. Pot presentar f un màxim relatiu en el punt a? En cas afirmatiu, posa'n un exemple.**

Sí, pot presentar un màxim. Per exemple:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ és tal que:

$$f'(x) = -4x^3$$

$$f''(x) = -12x^2$$



Per tant: $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 0$

En (0, 0) hi ha un màxim relatiu.

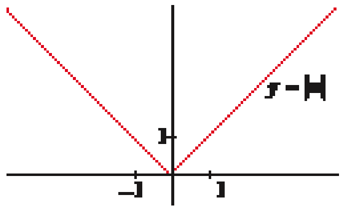
55 **Considera la funció $|x|$ (valor absolut de x):**

a) Presenta un mínim relatiu en algun punt?

b) En quins punts és derivable?

Raona les respostes.

a)



$f(x)$ presenta un mínim relatiu en $x = 0$, ja que $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$.

De fet, és el mínim absolut de $f(x)$.

b) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ no és derivable en $x = 0$, ja que $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.

Per tant, f és derivable per a $x \neq 0$.

56 **Si $f'(a) = 0$, quina de les proposicions següents és certa?**

a) f té un màxim o un mínim en el punt $x = a$.

b) f té un punt d'inflexió en $x = a$.

c) f té en el punt $x = a$ una tangent paral·lela a l'eix X.

Si $f'(a) = 0$, només podem assegurar que f té en $x = a$ tangent horitzontal (paral·lela a l'eix OX).

Podria tenir un màxim, un mínim o un punt d'inflexió en $x = a$.

Per tant, només és certa la proposició c).

Per aprofundir

57 **Troba el domini de definició i els intervals de creixement i de decreixement de la funció:**

$$f(x) = ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

La funció està definida quan $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$. Com que el denominador és sempre positiu, ha de ser $x^2 - 1 > 0$. Per tant, el domini de definició és $(-\infty, -1)$ Ø $(1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ (aquest punt no és vàlid perquè no està en el domini de definició).

La funció és decreixent en $(-\infty, -1)$ i creixent en $(1, +\infty)$.

58 **Fes un estudi dels intervals de creixement i els màxims i els mínims de la funció donada per:**

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Definim la funció per intervals. Per a això, calculem els punts on $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Trobem la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<-3 \\ -2x-2 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no és derivable, ja que $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no és derivable, ja que $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Vegem on s'anul·la la derivada:

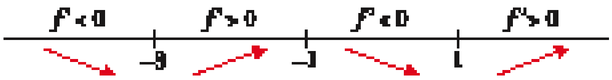
  $2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

  Però $f'(x) = 2x + 2$ per a $x < -3$ i $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$ i $f'(x) = -2x - 2$ per a $-3 < x < 1$

  Per tant, $f'(x)$ s'anul·la en $x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = 4$.

- Signe de la derivada:



- La funció: És creixent en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

  És decreixent en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

  Té un màxim en $(-1, 4)$.

  Té un mínim en $(-3, 0)$ i un altre en $(1, 0)$: són els punts on f no és derivable.

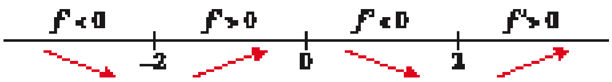
59 **Sigui la funció $y = |x^2 - 4|$. Estudia l'existència de màxims i de mínims relatius i absoluts en aquesta funció.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x<-2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2-4 & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<-2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no és derivable, ja que $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no és derivable, ja que $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada s'anul·la en $x = 0$.
- Signe de la derivada:



- La funció té un màxim relatiu en $(0, 4)$.

  No té màxim absolut $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$.

- Té un mínim relatiu en $(-2, 0)$ i un altre en $(2, 0)$. En aquests punts, el mínim també és absolut, perquè $f(x) \ge 0$ per a tot x.

60 **Sigui f la funció definida per $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

a) Troba el valor de a i b sabent que $f(x)$ és derivable en el punt $x = 0$.

b) Té punts singulars?

a) Exigim la continuïtat i derivabilitat en $x = 0$.

Vegem la continuïtat:

$$\lim_{x \to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 2; \qquad \lim_{x \to 0^+} a\sqrt{b-x} = a\sqrt{b}$$

La funció és contínua quan $a\sqrt{b} = 2$, ja que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Vegem la derivabilitat:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si } \ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}} \end{cases} \rightarrow -1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$$

Si es compleix la condició anterior serà derivable en $x = 0$, ja que coincideixen les seves derivades laterals.

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{b} = 2 \\ \frac{a}{2\sqrt{b}} = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow a = 2, \ b = 1$$

La funció queda així: $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

La seva derivada és: $f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } \ 0 \le x < 1 \end{cases}$

b) Els punts singulars només poden estar en el primer tros, ja que la derivada no s'anul·la quan $x \ge 0$.

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - 2e^{-x} = 0 \rightarrow x = ln\, 2 > 0$ (aquest punt no és vàlid perquè no pertany a l'interval de definició)

Per tant, no té punts singulars.

Autoavaluació

Pàgina 191

1 a) Escriu l'equació de la tangent a la corba següent en el seu punt d'inflexió:

$$f(x) = 3x^2 - (x + 2)^3$$

b) Hi ha algun punt on aquesta recta tangent sigui paral·lela a l'eix X?

a) Trobem el punt en què s'anul·la la seva segona derivada:

$f'(x) = 6x - 3(x + 2)^2$

$f''(x) = 6 - 6(x + 2) = -6x - 6$

$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ -6x - 6 = 0 \ \rightarrow\ x = -1$

Observem que la funció passa de còncava a convexa en el punt d'abscissa $x = -1$ estudiant el signe de la derivada segona. Per tant, en $x = -1$ hi ha un punt d'inflexió.

$x = -1,\ f(-1) = 2,\ f'(-1) = -9$

La recta tangent en el seu punt d'inflexió és $y = 2 - 9(x + 1)$.

b) Els valors de x en què la recta tangent és paral·lela a l'eix X són aquells en què s'anul·la la derivada de f.

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ 6x - 3(x + 2)^2 = 0 \ \rightarrow\ x^2 + 2x + 4 = 0 \ \rightarrow$ No té solució.

Per tant, no hi ha punts amb tangent horitzontal.

2 Donada la funció $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 3}$, es demana:

a) Els seus intervals de creixement i de decreixement.

b) Els màxims i mínims relatius.

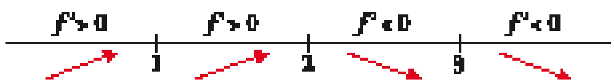
a) Calculem el domini de la funció:

$x^2 - 4x + 3 = 0 \ \rightarrow\ x = 1,\ x = 3$

La funció no està definida en $x = 1$ i $x = 3$. En aquests valors no és contínua ni derivable. El domini de definició és $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

$$f'(x) = \frac{-14x + 28}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ -14x + 28 = 0 \ \rightarrow\ x = 2$



Els intervals de creixement són $(-\infty, 1)$ i $(1, 2)$.

Els intervals de decreixement són $(2, 3)$ i $(3, +\infty)$.

b) $x = 2,\ f(2) = -8$

En el punt $(2, -8)$ hi ha un màxim relatiu.

3 La funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f'(1) = 0$, que $f(1) = 1$ i que f no té cap extrem relatiu en $x = 1$. Calcula a, b i c.

Perquè no tingui extrem relatiu en $x = 1$ ha de ser $f''(1) = 0$, ja que, en cas contrari, com que $f'(1) = 0$, hi hauria un extrem relatiu en $x = 1$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$f(1) = 1 \;\rightarrow\; 1 + a + b + c = 1$$
$$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 3 + 2a + b = 0$$
$$f''(1) = 0 \;\rightarrow\; 6 + 2a = 0$$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = -1 \\ 3 + 2a + b \quad = 0 \\ 6 + 2a \qquad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -3,\;\; b = 3,\;\; c = 0$$

4 **El nombre de persones ingressades en un hospital per una infecció després de t setmanes ve donat per la funció:**

$$N(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} \quad \text{on } t \geq 0$$

Calcula el màxim de persones ingressades i la setmana en què passa. A partir de quina setmana, després d'arribar al màxim, el nombre d'ingressats és més petit que 25?

- Per calcular el màxim, derivem i igualem a zero:

$$N'(t) = \frac{350(2t^2 - 3t + 8) - 350t(4t - 3)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = \frac{350(-2t^2 + 8)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow -2t^2 + 8 = 0 \;\rightarrow\; t^2 = 4 \begin{cases} t = -2 \;\; (\text{no val, ja que } t \geq 0) \\ t = 2 \;\rightarrow\; N(2) = \dfrac{350 \cdot 2}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 8} = 70 \end{cases}$$

El nombre màxim de persones ingressades és 70, en la 2a setmana.

- Hem de veure quan $\dfrac{350t}{2t^2 - 3t + 8} < 25$.

$$350t < 50t^2 - 75t + 200 \;\rightarrow\; 50t^2 - 425t + 200 > 0 \;\rightarrow\; 2t^2 - 17t + 8 > 0$$

Resolem la inequació:

$$f(t) = 2t^2 - 17t + 8 = 0 \begin{cases} t = 8 \\ t = 0{,}5 \end{cases}$$

$f(t) > 0$ per a $t \in (0;\, 0{,}5)$ Ø $(8, +\infty)$.

Després d'arribar al màxim en $t = 2$, a partir de $t = 8$, el nombre de persones ingressades és inferior a 25.

5 **Sigui $B(x) = ax + b\sqrt{x}$ la funció de beneficis d'una empresa. Sabem que el benefici màxim és 50 milers d'euros i s'obté si $x = 100$ unitats produïdes. Calcula a i b.**

$B(x) = ax + b\sqrt{x}$

Sabem que $B(100) = 50$ i $B'(100) = 0$

$$B(100) = 100a + 10b = 50$$

$$B'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} \;\rightarrow\; B'(100) = a + \frac{b}{20} = 0$$

Resolem el sistema següent:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ a + \dfrac{b}{20} = 0 \;\rightarrow\; a = -\dfrac{b}{20} \end{cases}$$

$$100\left(-\frac{b}{20}\right) + 10b = 50 \;\rightarrow\; \frac{-b}{2} + b = 5 \;\rightarrow\; -b + 2b = 10 \;\rightarrow\; b = 10;\;\; a = -\frac{1}{2}$$

Per tant, $B(x) = -\dfrac{x}{2} + 10\sqrt{x}$.

6 En un parc natural, la mida d'una població d'ocells s'ajusta a aquesta funció:

$$N(t)=\begin{cases} t^2-8t+50, & 0\le t\le 10 \\ 95-\dfrac{250}{t}, & t>10 \end{cases}$$

amb $N(t)$ en centenars i t, en anys.

a) A partir de quin any creixerà el nombre d'ocells?

b) És mínima aquesta població algun any?

c) A quin valor tendeix la població amb el pas del temps?

d) Calcula l'interval de temps en què la població es manté entre 5 000 i 7 500 ocells.

a) La funció està definida per intervals per mitjà de funcions contínues en els seus intervals de definició respectius.

En $t=10$ també és contínua, ja que $\lim\limits_{t\to 10^-}(t^2-8t+50)=\lim\limits_{t\to 10^+}\left(95-\dfrac{250}{t}\right)=N(10)=70$

$$N'(t)=\begin{cases} 2t-8 & \text{si } 0<t<10 \\ \dfrac{250}{t^2} & \text{si } t>10 \end{cases}$$

La derivada només s'anul·la quan $2t-8=0 \;\to\; t=4$.

A partir d'aquest instant, la derivada és positiva quan $4<t<10$ i quan $t>10$. Per tant, la població creixerà a partir del quart any.

b) La població és mínima quan $t=4$ i és $N(4)=34$, és a dir, 3 400 ocells. Això és perquè la funció decreix quan $0<t<4$ i per allò comentat en l'apartat anterior.

c) Per trobar aquest valor calculem:

$$\lim_{t\to +\infty}\left(95-\frac{250}{t}\right)=95$$

És a dir, amb el pas del temps la població tendeix a ser de 9 500 ocells.

d) Com que $N(0)=50$, la població comença amb 5 000 ocells. Descendeix fins les 3 400 quan $t=4$ i a partir d'aquí creix. Quan $t=10$, la població és de 7 000 aus, com s'ha vist en l'apartat a). Perquè arribi a 7 500 ha de complir-se que:

$$75=95-\frac{250}{t} \;\to\; t=\frac{25}{2}=12{,}5$$

Per tant, la població es manté entre 5 000 i 7 500 ocells quan $0\le t\le 12{,}5$.

7 Es vol construir una caixa amb tapa que tingui el màxim volum i que sigui el doble d'ampla que de llarga. Es disposa de 30 m^2 de xapa. Quines mesures de llarg i d'ample ha de tenir la caixa?

Anomenem x la llargada i y l'altura. Així, l'amplada és $2x$.

Per tant, la quantitat de xapa utilitzada és $6xy+4x^2=30$.

Volem que la funció volum sigui màxima $\to$ $V=2x\cdot x\cdot y=2x^2y$ màxima.

Aïllem y en la primera igualtat: $6xy+4x^2=30 \;\to\; y=\dfrac{30-4x^2}{6x}=\dfrac{15-2x^2}{3x}$

i substituïm en la funció volum: $V=2x^2\cdot\dfrac{15-2x^2}{3x}=\dfrac{2x(15-2x^2)}{3}=\dfrac{30x-4x^3}{3}$

Derivem i igualem a zero:

$$V'=10-4x^2;\; V'=0 \;\to\; 10-4x^2=0 \;\to\; x=-\sqrt{\frac{5}{2}}\ \text{(no vàlida)},\; x=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Com que $V''=-8x$ és negativa en $x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, en aquest valor hi ha un màxim relatiu.

Les dimensions demanades són: llargada $=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ m; amplada $=2\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\sqrt{10}$ m; altura $=\dfrac{10}{3\sqrt{\dfrac{5}{2}}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ m