

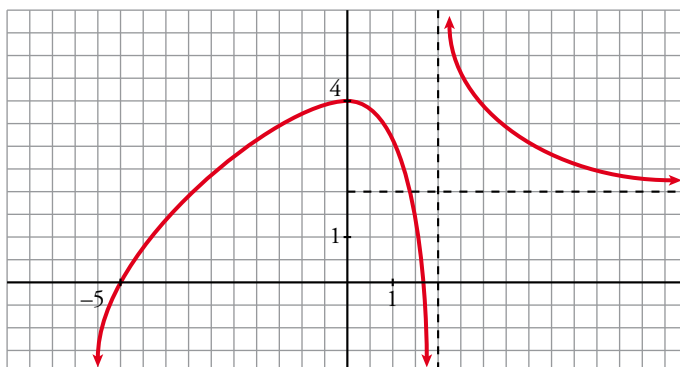
Resol

Pàgina 193

Límits i derivades per representar una funció

■ Traça uns eixos de coordenades sobre un paper quadriculat i representa-hi una corba, tan senzilla com sigui possible, que compleixi aquestes condicions:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$; $f(1,75) = 0$
- f és derivable en tot $\mathbb{R}$, excepte en $x = 2$.



■ Descriu, amb el mínim de dades i de manera similar a l'exercici anterior, aquesta funció:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$
- $f(-9) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4$; $f'(4) = 0$

1 Elements fonamentals per a la construcció de corbes

Pàgina 195

1 Troba el domini de les funcions següents i digues on són contínues i on derivables.

$$\text{a) } y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3 \quad \text{b) } y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{c) } y = \frac{1}{\sin x} \quad \text{d) } y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{e) } y = \sqrt{x^2 - 2x} \quad \text{f) } y = \ln(x^2 - 1) \quad \text{g) } y = \ln(x^2 + 1) \quad \text{h) } y = \frac{e^x}{x^2}$$

a) $\text{Domini} = \mathbb{R}$

y és un polinomi; per tant, és contínua i derivable en tot el seu domini.

$$\text{b) } x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Domini} = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

y és un quocient de polinomis, que només donaria problemes de continuïtat i derivabilitat en $x = 4$ i $x = 1$; per tant, és contínua i derivable en el seu domini, $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

c) Com que $\sin x$ s'anul·la quan $x = k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$, la funció donada no existeix per a aquests valors de x ja que es produiria una divisió entre 0. Per tant, el domini de definició és $\mathbb{R} - \{k\pi\}$.

La funció és contínua i derivable en tot el seu domini.

d) $x^2 + 1 \neq 0$ per a tot $x \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$

Deduïm del raonament de l'apartat b) que és contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

e) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Com que és una funció arrel, la derivada no existirà en els punts en què s'anul·la, $x = 2$ i $x = -2$. És contínua en tot el seu domini, $\mathbb{R} - (0, 2)$, però només és derivable en $\mathbb{R} - [0, 2]$.

f) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

La derivada no existeix per a $x^2 - 1 = 0$, però són punts fora del domini; per tant, és contínua i derivable en tot el seu domini.

g) $x^2 + 1 > 0$ per a tot $x \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$

La derivada existeix per a tot punt x ; per tant, és derivable i contínua en $\mathbb{R}$.

h) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0\}$

La derivada només dona problemes fora del domini; per tant, és contínua i derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

2 Digues on són contínues i on són derivables aquestes funcions:

a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

b) $y = |x^3 - x|$

c) $y = \arccos(x - 4)$

d) $y = \log(5 - \sqrt{169 - x^2})$

a) $\text{Domini} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

És contínua i derivable en el seu domini.

b) La funció $y = |x^3 - x|$ és contínua en tot el seu domini, que és $\mathbb{R}$. Com que té punts angulosos on s'anul·la el polinomi $x^3 - x$, no és derivable en aquests punts; és a dir, no és derivable en $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$.

c) La funció $y = \arccos(x - 4)$ està definida quan $-1 \leq x - 4 \leq 1$; és a dir, el seu domini de definició és l'interval $[3, 5]$. En aquest, la funció és contínua. Com que té punts de tangent vertical en $x = 3$ i $x = 5$, no és derivable en aquests. Sí ho és en la resta de l'interval.

d) Vegem primer el domini de definició de la funció $y = \log(5 - \sqrt{169 - x^2})$.

Perquè la funció existeixi, ha de ser $5 - \sqrt{169 - x^2} > 0$; és a dir, $\sqrt{169 - x^2} < 5$ i a més x ha d'estar comprès entre -13 i 13 perquè l'arrel quadrada tingui sentit.

Elevant al quadrat:

$$169 - x^2 < 25 \rightarrow 144 < x^2 \rightarrow 12 < x \leq 13 \text{ i } -13 \leq x < -12$$

Per tant, el domini de definició és $[-13, -12) \cup (12, 13]$.

En el seu domini la funció és contínua. En $x = -13$ i $x = 13$ la funció té punts de tangent vertical; per tant, en aquests no és derivable. Consegüentment, és derivable en $(-13, -12) \cup (12, 13)$.

Pàgina 196

3 Troba les simetries i les periodicitats de cada una d'aquestes funcions:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = \sin x + 1/2 (\sin 2x)$

f) $y = \sqrt[3]{\cos x + 5}$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

És una funció parella: simètrica respecte de l'eix Y .

No és periòdica.

b) $f(-x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

No és parella ni imparella: no és simètrica respecte de l'eix Y ni respecte de l'origen de coordenades.

No és periòdica.

c) $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$

És imparella: simètrica respecte de l'origen de coordenades.

No és periòdica.

d) $f(-x) = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$

No és parella ni imparella: no és simètrica respecte de l'eix Y ni respecte de l'origen de coordenades.

No és periòdica.

e) $f(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{2}(\sin(-2x)) = -\sin x - \frac{1}{2}(\sin(2x)) = -f(x)$

És imparella: simètrica respecte de l'origen de coordenades. És periòdica de període 2π .

f) Com que $\cos(-x) = \cos x$, la funció és parella.

Per altra banda, $\cos x$ és periòdica de període 2π . Per tant, la funció donada també és periòdica de període 2π .

Pàgina 197

4 Troba, en cada cas, les asímptotes verticals i situa la corba respecte d'aquestes:

a) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

c) $y = \frac{3}{\sqrt{4-x}}$

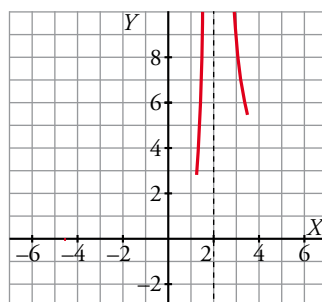
d) $y = \log(x^2 - 4)$

a) El denominador s'anul·la quan $x = 2$ i quan $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = +\infty$, ja que a prop del punt 2 els dos termes de la fracció són positius. Per tant,

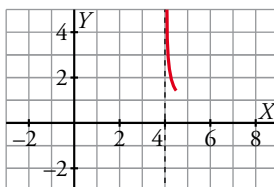
en $x = 2$ hi ha una asímptota vertical.

Per altra banda, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 0$ i en $x = 0$ no hi ha una asímptota vertical.



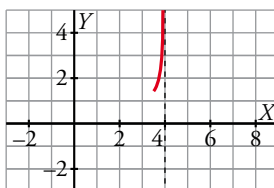
b) El denominador s'anul·la quan $x = 4$ i el domini de la funció és l'interval $(4, +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$ i en $x = 4$ tenim una asímptota vertical.



c) El denominador s'anul·la quan $x = 4$ i el domini de la funció és l'interval $(-\infty, 4)$.

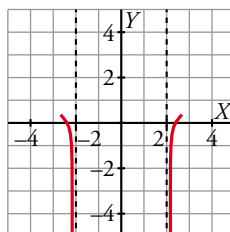
$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{\sqrt{4-x}} = +\infty$ i en $x = 4$ tenim una asímptota vertical.



d) El domini de definició és $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ja que $x^2 - 4 > 0$.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \log(x^2 - 4) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} \log(x^2 - 4) = -\infty$ perquè en tots dos casos $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$.

Per tant, té dues asímptotes verticals: una en $x = -2$ i una altra en $x = 2$.



Pàgina 199

5 Troba les branques en l'infinit de les funcions següents:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e) $y = \ln(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

g) $y = x \sin x$

h) $y = x - \cos x$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 20x^3) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 20x^3) = -\infty$$

Té dues branques parabòliques de creixement cada vegada més ràpid perquè és una funció polinòmica.

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$

En l'infinit, la funció donada és equivalent a $x^2 + 1$; per tant, té dues branques parabòliques de creixement cada vegada més ràpid i $f(x) \rightarrow +\infty$ quan $x \rightarrow \pm\infty$.

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2} = x + 4 + \frac{12x - 16}{(x-2)^2}$

La funció té una asímptota obliqua quan $x \rightarrow \pm\infty$ i és la recta $y = x + 4$.

d) En l'infinit, la funció és equivalent a $\sqrt{x^2} = |x|$; per tant, $f(x) \rightarrow +\infty$ quan $x \rightarrow \pm\infty$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$

$y = \ln(x^2 + 1)$ és equivalent en l'infinit a $y = \ln(x^2) = 2\ln|x|$.

$$\text{Per tant, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln|x|}{x} = 0.$$

El mateix ocorre quan $x \rightarrow -\infty$ i, per tant, té dues branques parabòliques de creixement cada vegada més lent quan $x \rightarrow \pm\infty$.

f) Aquesta funció té una branca parabòlica de creixement cada vegada més ràpid quan $x \rightarrow +\infty$ perquè és una funció exponencial. Pel mateix motiu, la recta $y = 0$ és l'asímtota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$.

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sin x)$ no existeix.

Anàlogament ocorre quan $x \rightarrow -\infty$ i, per tant, aquesta funció no té ni asímptotes ni branques parabòliques.

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = 1 \text{ perquè la funció } \cos x \text{ està acotada entre } -1 \text{ i } 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\cos x \text{ no existeix.}$$

En conseqüència, no té asímptotes ni branques parabòliques.

6 Quin tipus de branques en l'infinit tenen aquestes funcions?

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = \frac{1}{x+1} & \text{b) } y = \frac{3x}{x+1} & \text{c) } y = \frac{x^2}{x+1} & \text{d) } y = \frac{x^4}{x+1} \\ \text{e) } y = \frac{x^2}{e^x} & \text{f) } y = \sqrt[3]{x^2+3} & \text{g) } y = x + \sqrt{x} & \text{h) } y = \operatorname{tg} x \end{array}$$

a) Té una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow \pm\infty$. És la recta $y = 0$.

b) $y = \frac{3x}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$ té una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow \pm\infty$. És la recta $y = 3$.

c) $y = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. Per tant, la recta $y = x - 1$ és l'asímtota obliqua quan $x \rightarrow \pm\infty$.

d) $y = \frac{x^4}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$ té branques parabòliques de creixement cada vegada més ràpid perquè és equivalent en l'infinit a una funció polinòmica.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. La recta $y = 0$ és l'asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2/e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$. La funció té una branca parabòlica de creixement cada vegada més ràpid quan $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+3}{x^3}} = 0$$

Es dona la mateixa situació quan $x \rightarrow -\infty$ perquè és una funció parella. Té dues branques parabòliques de creixement cada vegada més lent.

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Té una branca parabòlica de creixement cada vegada més lent quan $x \rightarrow +\infty$.

Com que el seu domini de definició és l'interval $[0, +\infty)$, no podem estudiar-la quan $x \rightarrow -\infty$.

h) La funció $y = \operatorname{tg} x$ és periòdica i no acotada. No té asímtotes ni branques parabòliques en l'infinit.

Pàgina 200**7 Troba els punts singulars i els punts d'inflexió d'aquestes funcions:**

$$\text{a) } y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

$$\text{b) } y = \ln(x^2 + 1)$$

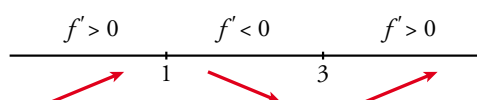
$$\text{a) } y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5. \text{ Domini} = \mathbb{R}$$

$$\bullet f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\bullet f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:

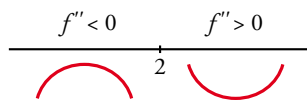


Hi ha un màxim en $(1, 9)$ i un mínim en $(3, 5)$.

$$\bullet f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

Signe de $f''(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(2, 7)$.

b) $y = \ln(x^2 + 1)$. Domini = $\mathbb{R}$

$$\bullet f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

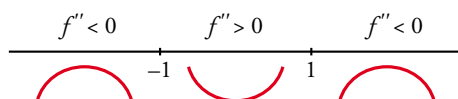
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array} \right\} \text{ Hi ha un mínim en } (0, 0).$$

$$\bullet f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signe de $f''(x)$



Hi ha un punt d'inflexió en $(-1, \ln 2)$ i un altre en $(1, \ln 2)$.

8 Troba els punts singulars de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

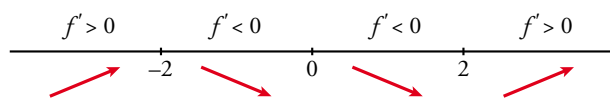
d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. Domini = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



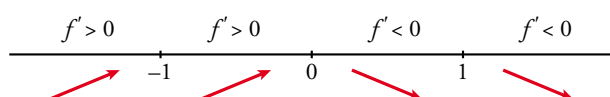
Hi ha un màxim en $(-2, 64)$, un mínim en $(2, -64)$, i un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Domini = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de $f'(x)$:



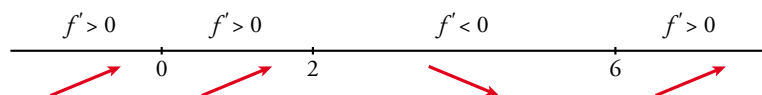
Hi ha un màxim en $(0, 0)$.

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. $\text{Domini} = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 0)$ i un mínim en $\left(6, \frac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. $\text{Domini} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x=1 \notin \text{Domini}.$$

No hi ha punts singulars.

2 El valor absolut en la representació de funcions

Pàgina 201

1 Representa:

a) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

b) $y = |x - 5|x$

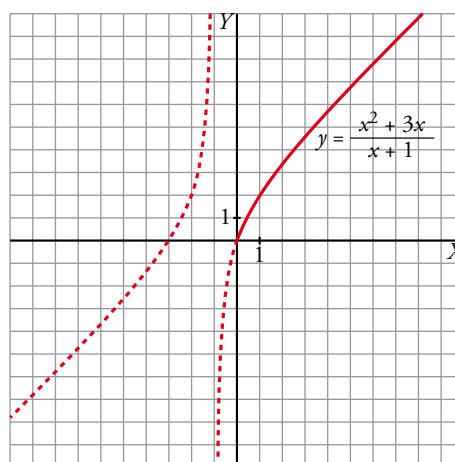
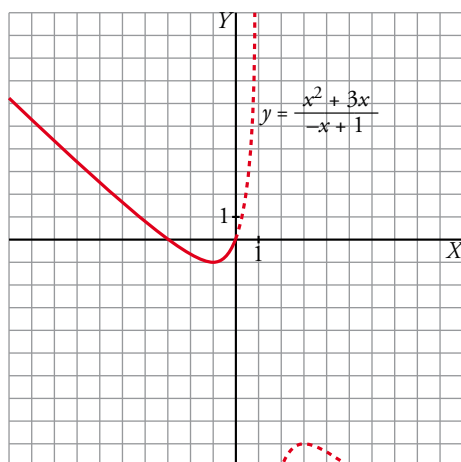
c) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

d) $y = \sqrt{|x^2 - 1|}$

a) L'únic valor absolut que intervé és $|x|$. L'abscissa en la qual canvia de signe x és 0. Per tant:

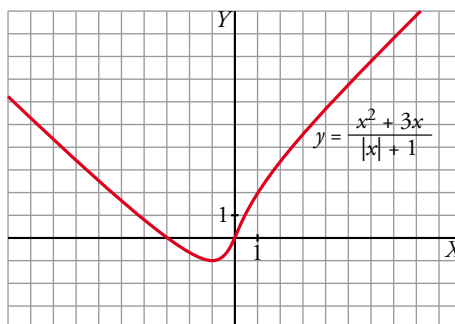
$$x < 0, |x| = -x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{-x + 1}$$

$$x \geq 0, |x| = x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$



Representem, doncs, aquesta funció:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1} = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

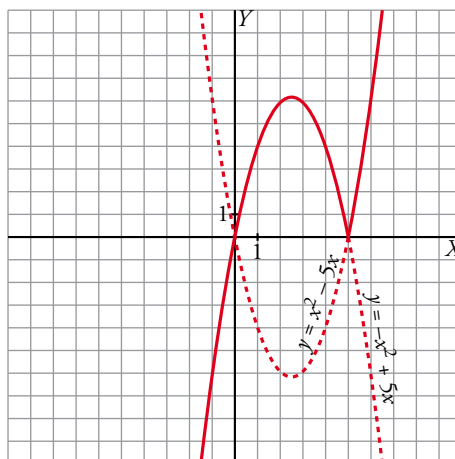


b) L'únic valor absolut que intervé és $|x - 5|$. L'abscissa on canvia de signe $x - 5$ és 5. Per tant, analitzem com queda la funció a l'esquerra i a la dreta de 5:

$$x < 5 \rightarrow |x - 5| = -x + 5 \rightarrow y = (-x + 5)x = -x^2 + 5x$$

$$x \geq 5 \rightarrow |x - 5| = x - 5 \rightarrow y = (x - 5)x = x^2 - 5x$$

$$y = |x - 5|x = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } x < 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



- c) Intervenien dos valors absoluts, $|x + 1|$ i $|x - 3|$, que canvien de signe en les abscisses $x = -1$ i $x = 3$, respectivament.

Per tant:

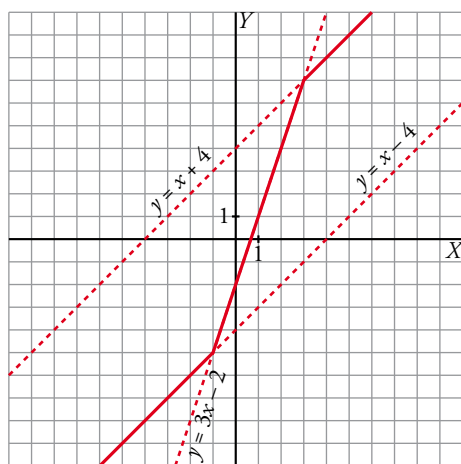
$$x < -1, |x + 1| = -x - 1 \text{ i } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 - x - 1 = x - 4$$

$$-1 \leq x < 3, |x + 1| = x + 1 \text{ i } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 + x + 1 = 3x - 2$$

$$x \geq 3, |x + 1| = x + 1 \text{ i } |x - 3| = x - 3 \rightarrow y = x - x + 3 + x + 1 = x + 4$$

Representem, doncs, aquesta funció:

$$y = x - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



- d) Les abscisses on canvia de signe $x^2 - 1$ són -1 i 1 . Analitzem com queda definit el valor absolut:

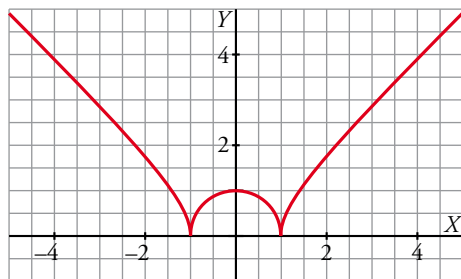
$$x < -1 \rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$-1 \leq x < 1 \rightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x \geq 1 \rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \sqrt{|x^2 - 1|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

i la gràfica és:



3 Representació de funcions polinòmiques

Pàgina 203

1 Representa aquestes funcions:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

e) $y = x^3 - 3x$

f) $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- Simetries:

$$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x). \text{ És parella: simètrica respecte de l'eix } Y.$$

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Punts singulars: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- Talls amb els eixos:

— amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow \text{Punt: } (0, 7)$

— amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Punts: $(-\sqrt{7}, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(\sqrt{7}, 0)$

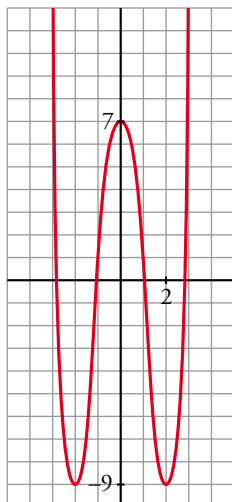
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Punts: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{17}{9}\right)$ i $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{17}{9}\right)$

- Gràfica:



$$b) y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$$

- Simetries:

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No és parella ni imparella: no és simètrica respecte de l'eix Y , ni respecte de l'origen de coordenades.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Punts: (0, 0); (2, -64); (-3, -189)

- Talls amb els eixos:

— amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt: (0, 0)

— amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+432}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \end{cases} \begin{cases} x \approx 2,86 \\ x \approx -4,19 \end{cases}$$

Punts: (0, 0); (2,86; 0); (-4,19; 0)

- Punts d'inflexió:

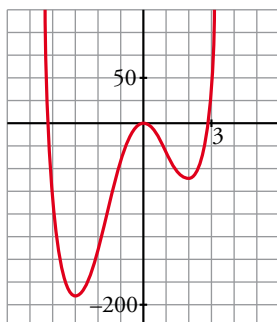
$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1,12 \\ x \approx -1,79 \end{cases}$$

Punts: (1,12; -34,82) i (-1,79; -107,22)

- Gràfica:



$$c) y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$$

- Simetries:

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No és parella ni imparella: no és simètrica respecte de l'eix Y , ni respecte de l'origen de coordenades.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Punts: (1, 7); (-1, -9); (3, -9)

- Talls amb els eixos:

— amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt: (0, 0)

— amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x - 6) = 0$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 12) = 0 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ x \approx 3,65 \\ x \approx -1,65 \end{cases}$$

Punts: (0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (-1,65; 0)

- Punts d'inflexió:

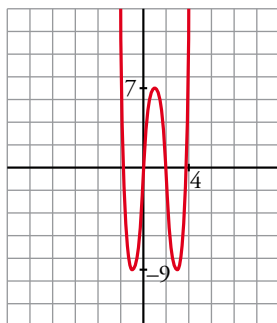
$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{cases} x \approx 2,15 \\ x \approx -0,15 \end{cases}$$

Punts: (2,15; -1,83) i (-0,15; -1,74)

- Gràfica:



d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- Simetries:

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No és parella ni imparella: no és simètrica respecte de l'eix Y , ni respecte de l'origen de coordenades.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Punts: (0, -16); (1, -17)

- Talls amb els eixos:

— amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -16 \rightarrow$ Punt: $(0, -16)$

— amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$

$3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \rightarrow$ té una sola arrel, que està entre -2 i -1 ; ja que, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$,
 $g(-2) = -16 < 0$ i $g(-1) = 3 > 0$.

Punts: $(2, 0)$ i $(k, 0)$, amb k entre -2 i -1 .

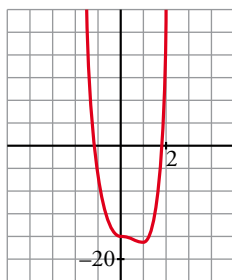
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Punts: $(0, -16)$ i $\left(\frac{2}{3}, -\frac{448}{27}\right)$

- Gràfica:



e) $y = x^3 - 3x$

- Simetries:

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. És imparella: simètrica respecte de l'origen de coordenades.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Punts: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- Talls amb els eixos:

— amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punt: $(0, 0)$

— amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

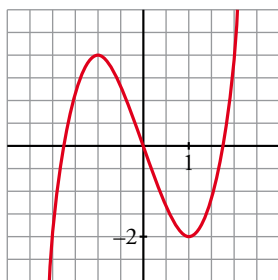
Punts: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, 0)$

- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punt: } (0, 0)$$

- Gràfica:



f) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- Simetries:

$$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x). \text{ És parella: simètrica respecte de l'eix } Y.$$

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Punts: } (0, 0); (-2, -4); (2, -4)$$

- Talls amb els eixos:

$$\text{— amb l'eix } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punt: } (0, 0)$$

$$\text{— amb l'eix } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2 \right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Punts: } (0, 0); (-2\sqrt{2}, 0); (2\sqrt{2}, 0)$$

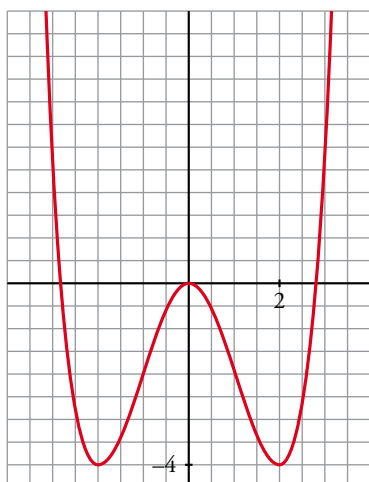
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Punts: } \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9} \right); \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9} \right)$$

- Gràfica:



4 Representació de funcions racionals

Pàgina 205

1 Representa:

$$a) y = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$$b) y = \frac{x^2-9}{x^2-4}$$

$$c) y = \frac{x^2-2x-8}{x}$$

$$d) y = \frac{x^3+2x}{x^2+1}$$

$$a) y = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}. \text{ Domini} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

- Simetries:

$$f(-x) = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x). \text{ És imparella: simètrica respecte de l'origen de coordenades.}$$

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asímtota vertical en } x = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asímtota vertical en } x = 1.$$

- Asímtota obliqua:

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y = -x \text{ és asímtota obliqua.}$$

Posició de la corba respecte de l'asímtota:

$$f(x) - (-x) > 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (corba per sobre)}$$

$$f(x) - (-x) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (corba per sota)}$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

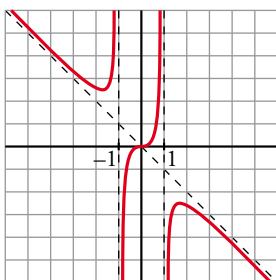
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Punts: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

- Talls amb els eixos:

Talla els eixos en (0, 0).

- Gràfica:



$$b) y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}, \text{ Domini} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

- Simetries:

$$f(-x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x). \text{ És parella: simètrica respecte de l'eix } Y.$$

- Asímptotes verticals:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Asímptota vertical en } x = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asímptota vertical en } x = 2.$$

- Asímptota horitzontal:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \frac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1 \text{ és asímptota horitzontal.}$$

Posició de la corba respecte de l'asímptota:

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (corba per sota)}$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (corba per sota)}$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punt: } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

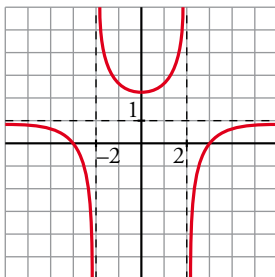
- Talls amb els eixos:

$$\text{— Amb l'eix } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow \text{Punt: } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

$$\text{— Amb l'eix } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Punts: $(-3, 0)$ i $(3, 0)$

- Gràfica:



$$c) y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x}, \text{ Domini} = \mathbb{R} - \{0\}$$

- Simetries:

$$f(-x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{-x}. \text{ No és parella ni imparella: no és simètrica respecte de l'eix } Y, \text{ ni respecte de l'origen.}$$

- Asímptotes verticals:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asímtota vertical en } x = 0.$$

- Asímtota obliqua:

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \rightarrow y = x - 2 \text{ és asímtota obliqua.}$$

Posició de la corba respecte de l'asímtota:

$$f(x) - (x - 2) > 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (corba per sobre)}$$

$$f(x) - (x - 2) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (corba per sota)}$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^2} > 0 \text{ per a tot } x \text{ del domini.}$$

La funció és creixent en tot el seu domini. No té punts singulars.

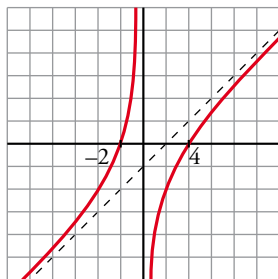
- Talls amb els eixos:

$$\text{— Amb l'eix } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Punts: $(-2, 0)$ i $(4, 0)$

— No talla l'eix Y , ja que no està definida en $x = 0$.

- Gràfica:



d) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. $\text{Domini} = \mathbb{R}$

- Simetries:

$$f(-x) = \frac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x). \text{ És imparella: simètrica respecte de l'origen de coordenades.}$$

- No té asímtotes verticals.

- Asímtota obliqua:

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x \text{ és asímtota obliqua.}$$

Posició de la corba respecte de l'asímtota:

$$f(x) - x < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (corba per sota)}$$

$$f(x) - x > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (corba per sobre)}$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \rightarrow \text{No té solució.}$$

No hi ha punts singulars.

- Talls amb els eixos:

— Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punt: } (0, 0)$

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punt: } (0, 0)$

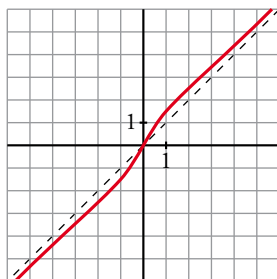
- Punts d'inflexió:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Punts: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- Gràfica:



5 Representació d'altres tipus de funcions

Pàgina 207

1 Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $y = \ln(x^2 + 4)$

d) $y = \ln(x^2 - 1)$

e) $y = \frac{\ln x}{x}$

f) $y = \frac{e^x}{x^2}$

g) $y = \frac{e^{-x}}{-x}$

h) $y = x^3 e^x$

i) $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

j) $y = \frac{1}{\ln x}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

• Domini: $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$\text{Domini} = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

• Simetries:

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No és parella ni imparella: no és simètrica respecte de l'eix Y ni respecte de l'origen de coordenades.

• No té asímptotes verticals.

• Asímptotes obliques:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

$y = -x - 1$ és asímptota obliqua quan $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$y = x + 1$ és asímptota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$.

• Punts singulars:

$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Com que no pertany al domini de $f(x)$, no hi ha punts singulars.

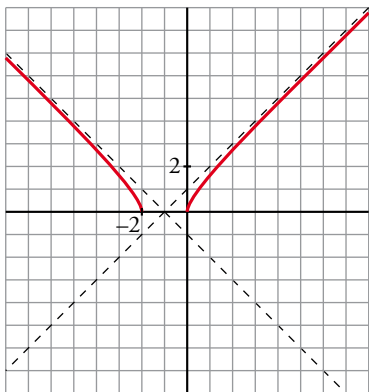
- Talls amb els eixos:

$$\text{— Amb l'eix } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Punts: (0, 0) i (-2, 0)

$$\text{— Amb l'eix } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punt: (0, 0)}$$

- Gràfica:



$$b) y = \sqrt{x^2 - 9}$$

- Domini: $x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\text{Domini} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

- Simetries:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} = f(x). \text{ És parella: simètrica respecte de l'eix } Y.$$

- No té asímptotes verticals.

- Asímtotes obliques:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = -x$ és asímtota obliqua quan $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ és asímtota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$.

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Com que no pertany al domini de $f(x)$, no hi ha punts singulars.

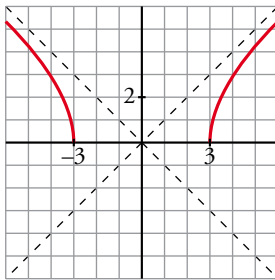
- Talls amb els eixos:

$$\text{— Amb l'eix } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2-9} \rightarrow x^2-9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Punts: $(-3, 0)$ i $(3, 0)$

— No talla l'eix Y , ja que no existeix $f(0)$.

- Gràfica:



c) $y = \ln(x^2 + 4)$

- Domini:

Com que $x^2 + 4 > 0$ per a tot x , $\text{Domini} = \mathbb{R}$.

- Simetries:

$$f(-x) = \ln(x^2 + 4) = f(x). \text{ És parella: simètrica respecte de l'eix } Y.$$

- No té asímptotes verticals.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Per tant, no té asímptotes de cap tipus.

Té branques parabòliques.

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punt: } (0, \ln 4)$$

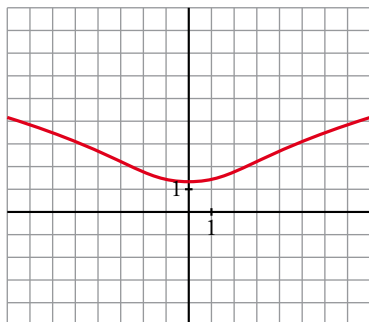
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Punts: $(-2, \ln 8)$ i $(2, \ln 8)$

- Gràfica:



d) $y = \ln(x^2 - 1)$

- Domini: $x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simetries: $f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$. És parella: simètrica respecte de l'eix Y .
- Asímtotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ i } x = 1 \text{ són asímtotes verticals.}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Té branques parabòliques.

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

No té punts singulars, perquè la funció no està definida en $x = 0$.

- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No té punts d'inflexió.

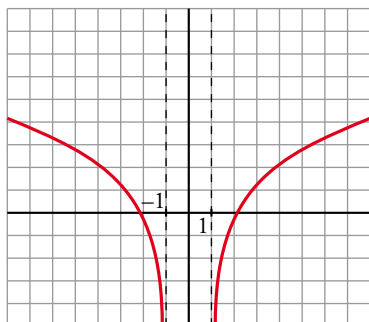
- Punts de tall amb els eixos:

— Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ Punts: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ i } (\sqrt{2}, 0)$$

— No talla l'eix Y , perquè no existeix $f(0)$.

- Gràfica:



$$e) y = \frac{\ln x}{x}$$

- Domini: El seu domini de definició és l'interval $(0, +\infty)$.
- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \rightarrow \text{Té una asímptota vertical en } x = 0.$$

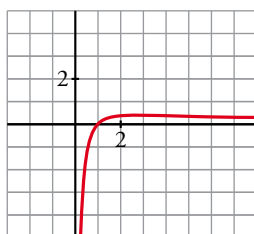
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és una asímptota horitzontal quan } x \rightarrow +\infty.$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e \rightarrow f(e) = \frac{1}{e}. \text{ Té un punt singular: } \left(e, \frac{1}{e}\right)$$

- Gràfica:



$$f) y = \frac{e^x}{x^2}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No és simètrica.
- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Asímtota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. A més, $f(x) > 0$ per a tot x del domini.

$y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$.

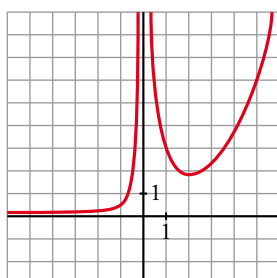
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Branca parabòlica.}$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x (x - 2)}{x^4} = \frac{e^x (x - 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punt } \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

- Gràfica:



$$g) y = \frac{e^{-x}}{-x}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No és simètrica.
- Asímptotes verticals:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asímptota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty. \text{ Branca parabòlica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. f(x) < 0 \text{ per a tot } x \text{ positiu.}$$

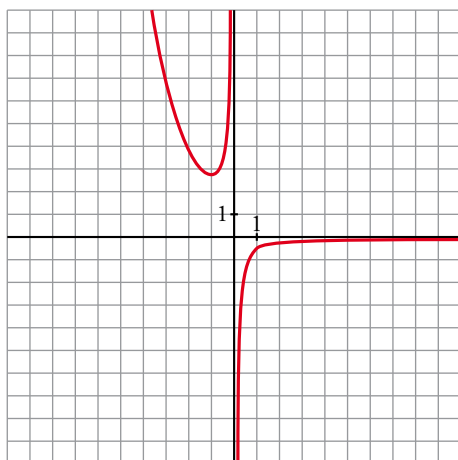
$y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$.

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Punt: } (-1, -e)$$

- Gràfica:



$$h) y = x^3 e^x$$

- El seu domini de definició és $\mathbb{R}$.
- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty$$

La funció té una branca parabòlica de creixement cada vegada més ràpid quan $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot e^x = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és una asímptota horitzontal quan } x \rightarrow -\infty.$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = (3x^2 + x^3) e^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (3x^2 + x^3) e^x = 0 \rightarrow x = -3, x = 0$$

$$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x) e^x$$

$$f'''(-3) = (-27 + 54 - 18)e^{-3} = 9e^{-3} \rightarrow x = -3 \text{ és un mínim relatiu.}$$

$$f(-3) = -27e^{-3} \approx -1,34$$

$$f''(0) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ és un punt d'inflexió, ja que la derivada segona canvia de signe en passar-hi.}$$

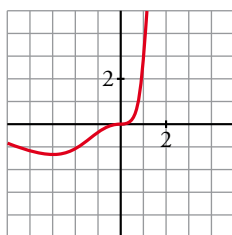
$$f(0) = 0$$

$$\text{Els altres dos punts d'inflexió són: } x_1 = -3 + \sqrt{3} \text{ i } x_2 = -3 - \sqrt{3}.$$

$$f(x_1) = -0,57$$

$$f(x_2) = -0,93$$

- Gràfica:



$$i) y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$$

- El període de $\cos x$ és 2π i el de $\cos 2x$ és π . Per tant, la funció és periòdica de període 2π . L'estudiem només en aquest interval.

- És derivable en tot $\mathbb{R}$ (és suma de funcions derivables).

- Punts singulars:

$$f'(x) = -\sin 2x - \sin x = -2\sin x \cdot \cos x - \sin x = -\sin x(2\cos x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -\sin x(2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punt: } \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ x = \pi \rightarrow \text{Punt: } \left(\pi, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \text{Punt: } \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3}{4}\right) \\ x = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{Punt: } \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

- Punts de tall amb els eixos:

$$\text{— Amb l'eix } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2} \rightarrow \text{Punt: } \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{— Amb l'eix } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \cos 2x + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \begin{cases} \cos x = 0,366 \\ \cos x = -1,366 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$\cos x = 0,366 \begin{cases} x = 1,2 \\ x = 5,09 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} x = 1,2 \\ x = 5,09 \end{matrix}} \right\} \text{Punts: } (1,2; 0); (5,09; 0)$$

- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = -2\cos 2x - \cos x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2\cos 2x - \cos x = 0$$

$$-2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2\sin^2 x - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

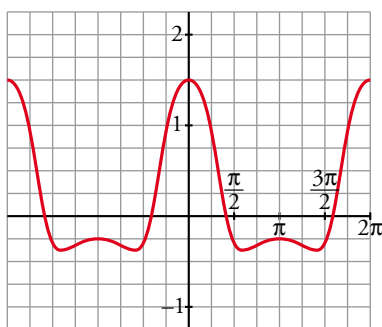
$$-2\cos^2 x + 2 - 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$-4\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} \begin{cases} \cos x = -0,843 \rightarrow x_1 = 2,57, x_2 = 3,71 \\ \cos x = 0,593 \rightarrow x_3 = 0,94, x_4 = 5,35 \end{cases}$$

Punts: (2,57; -0,63); (3,71; -0,63); (0,94; 0,44); (5,35; 0,45)

- Gràfica:



j) $y = \frac{1}{\ln x}$

- El seu domini de definició és $(0, +\infty) - \{1\}$ perquè es pugui avaluar el logaritme i no es produexi una divisió entre 0.
- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és una asímptota horitzontal quan } x \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0, \text{ ja que } \ln x \rightarrow -\infty \text{ quan } x \rightarrow 0^+.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \rightarrow \text{La recta } x = 1 \text{ és una asímptota vertical.}$$

- Punts singulars:

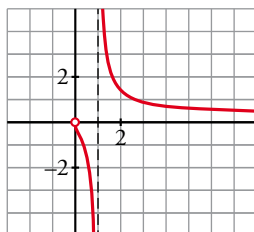
$$f'(x) = \frac{-1/x}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln^2 x} \rightarrow \text{No té punts singulars ja que la derivada no s'anul·la mai.}$$

La funció decreix en els intervals (0, 1) i (1, +∞) ja que $x \cdot \ln^2 x$ sempre és positiu en tots dos.

$$f''(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2 \cdot \ln^3 x} \rightarrow f''(x) = 0 \text{ si } \ln x + 2 = 0 \rightarrow x = e^{-2}$$

La funció té un punt d'inflexió en $\left(e^{-2}, -\frac{1}{2}\right)$.

- Gràfica:



Exercicis i problemes resolts

Pàgina 208

1. De l'estudi a la gràfica (asímtotes horitzontals i verticals)

Fes-ho tu. Representa $y = f(x)$:

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$; f és derivable en tot el seu domini.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1^+ \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$f(0) = 0; f(7) = 0 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4; f(4) = 2; f''(4) < 0$$

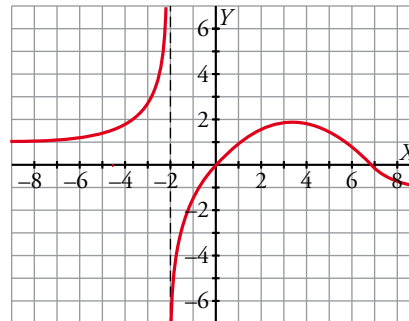
- I) Perquè és derivable en el seu domini, és contínua en aquest i no té punts angulosos.
 II) En $x = -2$ la funció té una asímtota vertical i les tendències ens diuen com s'hi apropa.

La recta $y = 1$ és l'asímtota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$ i s'hi apropa per sobre.

Anàlogament, la recta $y = -1$ és l'asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i també s'hi apropa per sobre.

- III) Talla l'eix horitzontal en els punts $(0, 0)$ i $(7, 0)$.

L'únic extrem relatiu està en el punt $(4, 2)$ i, a més, és un màxim.



2. De l'estudi a la gràfica (simetries i asímtotes obliqües i verticals)

Fes-ho tu. Representa $y = f(x)$:

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; funció imparella.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1) \cdot x] = -1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$f(3) = 0; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; f(0) = 0$$

- I) Com que és derivable en el seu domini, és contínua en aquest i no té punts angulosos.
 II) Com que és imparella, és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

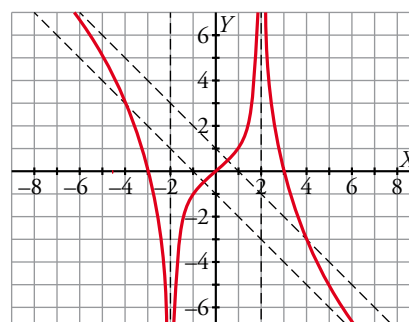
La recta $x = 2$ és una asímtota vertical i, per simetria, també ho és la recta $x = -2$.

Les tendències en aquesta última asímtota s'obtenen per simetria de les primeres.

Per altra banda, la recta $y = -x - 1$ és l'asímtota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$. De nou, per simetria, la recta $y = -x + 1$ és l'asímtota obliqua quan $x \rightarrow -\infty$.

- III) Talla l'eix horitzontal en els punts $(3, 0)$, $(0, 0)$ i $(-3, 0)$, aquest últim per simetria.

Finalment, el punt $(0, 0)$ és l'únic punt de tangent horitzontal i, per les característiques de la corba, és un punt d'inflexió.



Pàgina 209

3. Representació d'una funció polinòmica

Fes-ho tu. Estudia els punts de tall amb els eixos, els punts singulars i el creixement i decreixement d'aquesta funció:

$$y = 2x^6 - 3x^4$$

Representa'n la gràfica.

- Talls amb els eixos:

$$x = 0; f(0) = 0$$

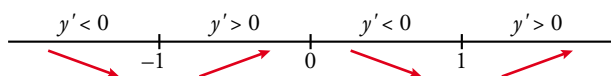
$$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow 2x^6 - 3x^4 = 0 \rightarrow x^4(2x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = 0 \end{cases}$$

Passa per $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ i $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$.

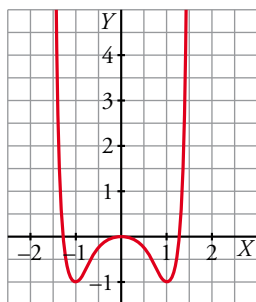
- Punts singulars:

$$f'(x) = 12x^5 - 12x^3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x^3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1; f'(-1) = -1 \\ x = 0; f'(0) = 0 \\ x = 1; f'(1) = 1 \end{cases}$$

- Creixement i decreixement:



És decreixent en $(-\infty, -1)$ i en $(0, 1)$ i creixent en $(-1, 0)$ i en $(1, +\infty)$.



4. Representació d'una funció racional amb branques parabòliques

Fes-ho tu. Representa la funció següent:

$$y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$$

- Domini de definició: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Simetries:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{(-x)^2} = \frac{x^4 - 1}{x^2} = f(x)$$

És simètrica respecte de l'eix Y; és a dir, és parella.

- Asíptota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 - 1}{x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 1}{x^2} = -\infty$$

- Branques en l'infinit:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 1}{x^2} = +\infty$$

Té branques parabòliques perquè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 1}{x^3} = \pm\infty$.

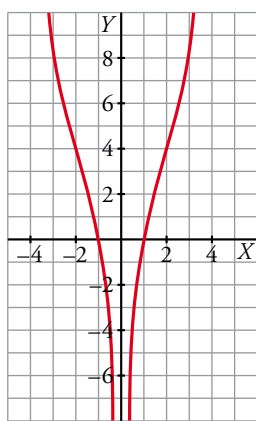
- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2(x^4 + 1)}{x^3}; f'(x) = 0 \text{ no és possible, ja que el numerador és sempre diferent de 0.}$$

- Creixement i decreixement:

$$\begin{array}{c} y' < 0 \qquad y' > 0 \\ \swarrow \qquad \searrow \\ 0 \end{array}$$

És decreixent en $(-\infty, 0)$ i creixent en $(0, +\infty)$.



Pàgina 210

5. Representació d'una funció racional amb asímptotes obliqües

Fes-ho tu. Estudia el domini, les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, els màxims i els mínims per representar aquesta funció:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

- El domini de definició és $\mathbb{R} - \{1\}$.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

ja que, en estar $x - 1$ elevat al quadrat, el signe del quocient sempre és positiu a prop de 1. Per tant, la recta $x = 1$ és l'asímtota vertical de la funció:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{La recta } y = x + 2 \text{ és l'asímtota obliqua de la funció.}$$

- Punts singulars:

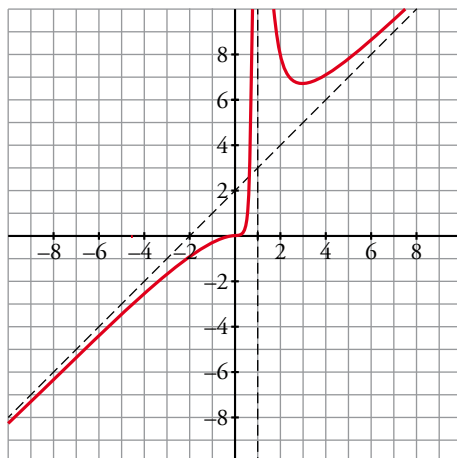
$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 3$$

$$\begin{array}{c} f' > 0 \qquad f' > 0 \qquad f' < 0 \qquad f' > 0 \\ \swarrow \qquad \searrow \qquad \swarrow \qquad \searrow \\ 0 \qquad 1 \qquad 3 \end{array}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(3) = \frac{27}{4}$$



6. Representació d'una funció racional amb asímptotes horitzontals

Fes-ho tu. Representa aquesta funció:

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}$$

- El domini de definició és $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = 1 \rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ és una asímptota horitzontal quan } x \rightarrow +\infty. \text{ El mateix ocorre quan } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty$$

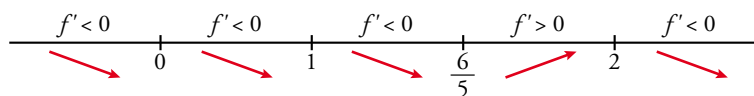
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty \text{ ja que, en estar } x-2 \text{ elevat al quadrat, el signe del quocient no canvia al passar d'un costat a un altre a prop de 2.}$$

Les rectes $x = 1$ i $x = 2$ són asímptotes verticals.

- Punts singulars:

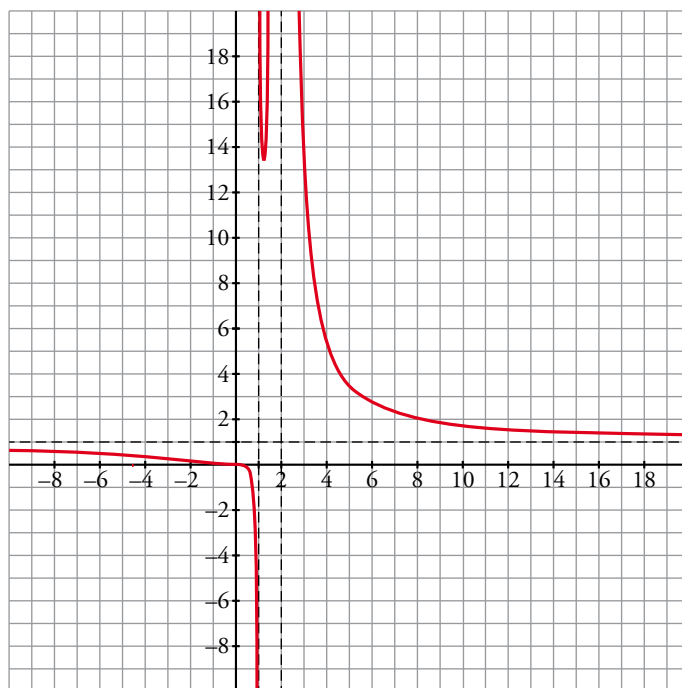
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} \right)' = \frac{3x^2(x-2)^2(x-1) - x^3[2(x-2)(x-1) + (x-2)^2]}{(x-2)^4(x-1)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x-2)(x-1) - x^3[2(x-1) + (x-2)]}{(x-2)^3(x-1)^2} = \frac{-5x^3 + 6x^2}{(x-2)^3(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -5x^3 + 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = \frac{6}{5}$$



$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^3}{\left(\frac{6}{5}-2\right)^2\left(\frac{6}{5}-1\right)} = \frac{27}{2}$$



Pàgina 211

7. Funció amb valor absolut

Fes-ho tu. Representa aquesta funció:

$$y = |x| - |x - 3| + |x + 1|$$

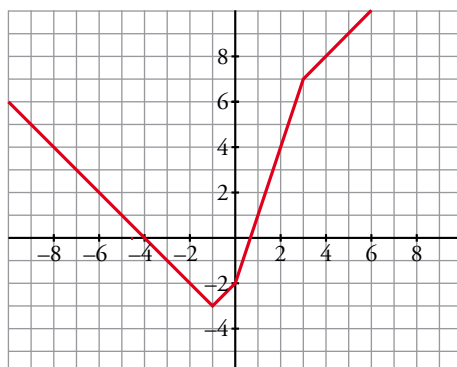
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$-|x - 3| = \begin{cases} -[-(x - 3)] & \text{si } x < 3 \\ -(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$|x + 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Tenint en compte els punts on canvia de signe cada sumand, sumem les expressions i s'obté:

$$y = |x| - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} -x + x - 3 - x - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x + x - 3 + x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x + x - 3 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - x + 3 + x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x < -1 \\ x - 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



8. Funció logarítmica

Fes-ho tu. Representa aquesta funció:

$$y = \ln \frac{x-3}{x-1}$$

- Domini de definició:

Resolem la inequació $\frac{x-3}{x-1} > 0$ i concloem que la funció està definida en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

- Asímtotes verticals: $x = 1$ i $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x-3}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \frac{x-3}{x-1} = -\infty$$

- Asímtota horitzontal: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln 1 = 0$$

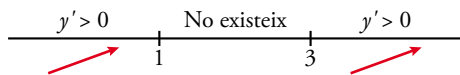
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln 1 = 0$$

- Punts singulars:

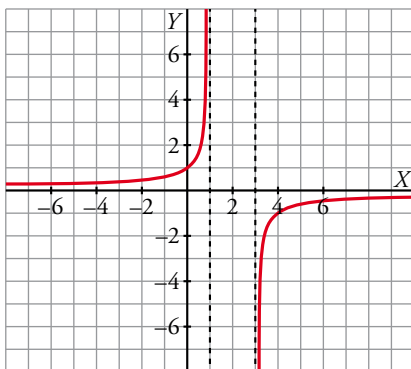
$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-3}{x-1}} \cdot \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x-3)}$$

Com que no pot ser 0, no té punts singulars.

- Creixement i decreixement:



És creixent en $(-\infty, 1)$ i en $(3, +\infty)$.



Pàgina 212

9. Estudi i gràfica d'altres funcions

Fes-ho tu. Representa aquestes funcions:

a) $y = \frac{x}{\ln x^2}$

b) $y = \frac{2x+1}{e^{-x}}$

- a) • Domini de definició: $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

• Té simetria imparella ja que $f(-x) = -f(x)$. Per tant, l'estudiem només per a valors positius de x .

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x^2} = 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ té una discontinuïtat evitable.}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x^2} = +\infty \rightarrow$ La recta $x = 1$ és una asímptota vertical. Per simetria, la recta $x = -1$ també ho és.

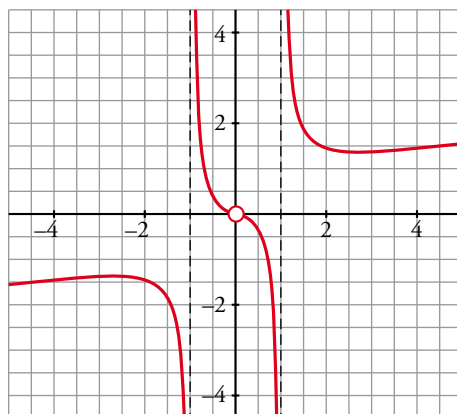
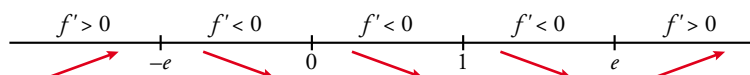
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x/x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\ln x^2}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x^2} = 0 \rightarrow \text{Té una branca parabòlica.}$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x^2} \right)' = \frac{\ln x^2 - 2}{\ln^2(x^2)} \rightarrow \ln x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{e^2} = \pm e$$

$$f(e) = \frac{e}{2}, f(-e) = -\frac{e}{2}$$



- b) • El seu domini de definició és $\mathbb{R}$. No té asímptotes verticals.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}} = +\infty, \text{ ja que } e^{-x} \rightarrow 0 \text{ quan } x \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x+1}{e^{-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{xe^{-x}} = +\infty \rightarrow \text{Té una branca parabòlica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és una asímptota horitzontal quan } x \rightarrow -\infty.$$

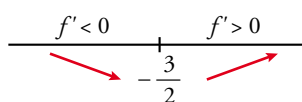
La funció talla l'eix horitzontal en $x = -\frac{1}{2}$.

Si $x < -\frac{1}{2}$, la funció agafa valors negatius i està per sota de l'asímtota.

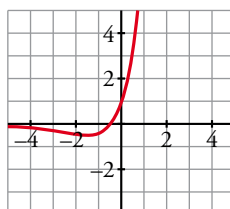
- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2e^{-x} - (2x+1)(-e^{-x})}{(e^{-x})^2} = \frac{3+2x}{e^{-x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$



$$f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0,45$$

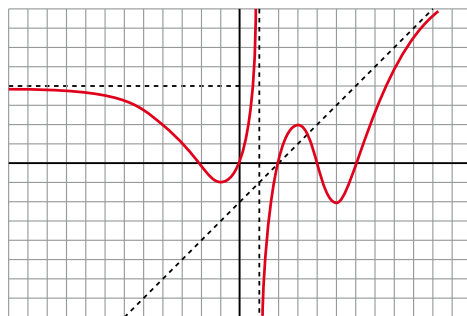


Exercicis i problemes guiats

Pàgina 213

1. Descripció d'una gràfica

Describeix la gràfica següent donant els elements necessaris perquè un company o una companya la pugui representar a partir de la descripció.



- El domini de definició és $\mathbb{R} - \{1\}$. És derivable en el seu domini ja que no presenta punts angulosos.
- La recta $y = 4$ és l'asíptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$ ja que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$. S'apropa per sota de l'asíptota.

La recta $x = 1$ és l'asíptota vertical de la funció. La posició respecte de l'asíptota és:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

La recta $y = x - 2$ és l'asíptota obliqua de la funció quan $x \rightarrow +\infty$. La corba talla l'asíptota obliqua en els punts d'abscisses $x = 2$ i $x = \frac{7}{2}$. Després s'apropa per sota de l'asíptota.

- Els punts $(-1, -1)$ i $(5, -2)$ són mínims relatius de la funció. Només té un màxim relatiu, que es troba en el punt $(3, 2)$.
- Finalment, la funció talla els eixos de coordenades en els punts: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ i $(6, 0)$.

2. Representació d'una funció polinòmica

Estudia i representa la funció següent:

$$f(x) = 40(x^2 + x)^2$$

- El seu domini de definició és $\mathbb{R}$. Com que és polinòmica, és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.
- No té simetries:

$$f(-x) = 40[(-x)^2 - x]^2 = 40(x^2 - x)^2$$

- Branques en l'infinit:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 40(x^2 + x)^2 = +\infty$$

Té branques parabòliques, ja que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{40(x^2 + x)^2}{x} = \pm\infty$.

- Talls amb els eixos:

$$x = 0, f(0) = 0$$

$$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)^2 = 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Passa per $(-1, 0)$ i $(0, 0)$.

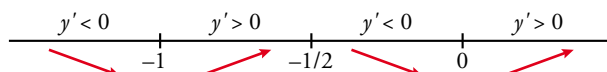
- Punts singulars:

$$f'(x) = 80(x^2 + x)(2x + 1)$$

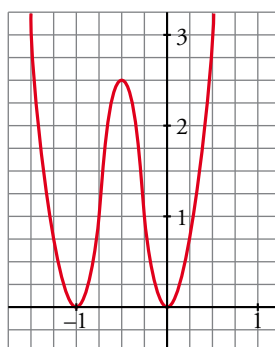
$$f'(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)(2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1; f(-1) = 0 \\ x = -\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \\ x = 0; f(0) = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

- Creixement i decreixement:



És decreixent en $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ i és creixent en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$.



3. Representació d'una funció radical

Representa aquesta funció:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

- El seu domini de definició és $\mathbb{R}$. És contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$, ja que el radicand és un polinomi que sempre és positiu.
- $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$. És una funció parella.
- Branques infinites:

Anem a estudiar-ho només en $+\infty$. Per a $-\infty$ aplicarem la simetria de la funció.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

La recta $y = x$ és una asímptota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$, ja que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.

Quan $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$. Per tant, la corba queda per sobre de l'asímtota.

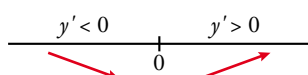
- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

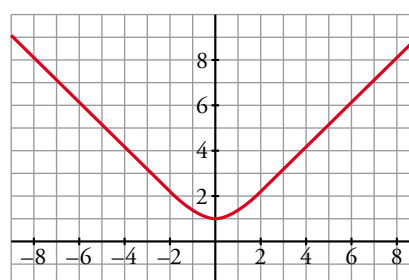
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x = 0, f(0) = 1$$

- Creixement i decreixement:



Decreixent en $(-\infty, 0)$ i creixent en $(0, +\infty)$.



4. Corba amb asímptotes

Representa la funció següent: $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|}$

- El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0\}$.

La funció té simetria parella ja que $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^4 + 1}}{|-x|} = f(x)$. N'hi ha prou d'estudiar-la per a valors positius de x .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} = +\infty \rightarrow$ La recta $x = 0$ és l'asímtota vertical de la funció.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} = 1$$

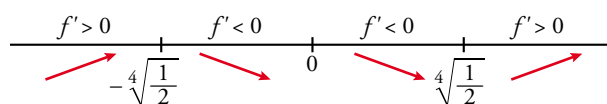
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)} = 0$$

La recta $y = x$ és l'asímtota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$.

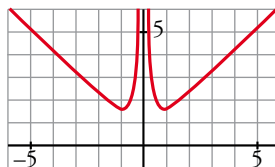
$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x} \right)' = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} \cdot x - \sqrt{x^4 + 1}}{x^2} = \frac{2x^4 - (x^4 + 1)}{x^2 \sqrt{x^4 + 1}} = \frac{2x^4 - 1}{x^2 \sqrt{x^4 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 0,84$$

(Hem calculat la derivada suposant que x agafa valors positius).



$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, y = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}} \approx 1,46 \rightarrow \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}; 1,46 \right) \text{ és un mínim relatiu de la funció.}$$



Exercicis i problemes proposats

Pàgina 214

Per practicar

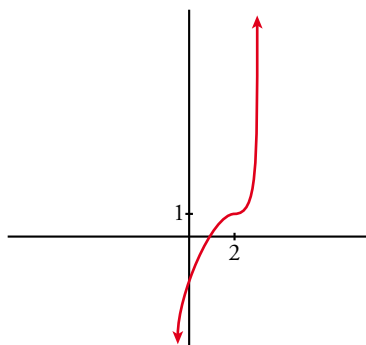
■ Descripció d'una gràfica

1 Representa una funció contínua i derivable en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(2) = 1, f'(x) \geq 0 \text{ per a qualsevol } x, f'(2) = 0$$



2 D'una funció $y = f(x)$ tenim la informació següent:

$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

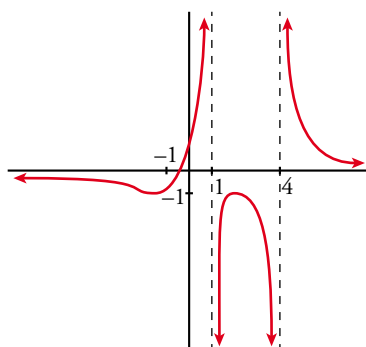
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0$$

$$\text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$$

$$f'(2) = 0, f(2) = -1; f'(-1) = 0, f(-1) = -1$$

Representa-la.



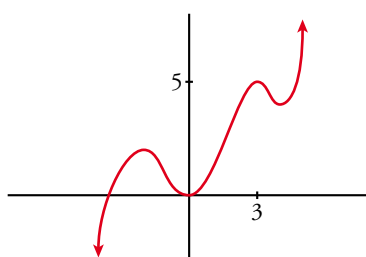
3 Dibuixa la gràfica d'una funció contínua i derivable en $\mathbb{R}$ de la qual es coneixen les dades següents:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

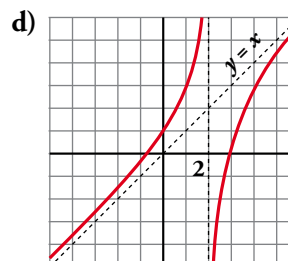
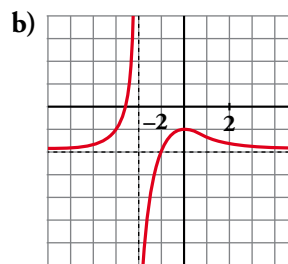
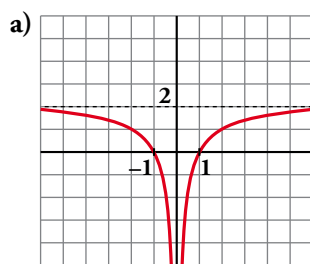
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, x = 0, x = 3, x = 4$$

$$f(-2) = 2; f(0) = 0; f(3) = 5; f(4) = 4$$



4 Descriu les funcions següents indicant-ne el domini, les simetries (si en tenen), les asímptotes i les branques infinites, els punts singulars i els intervals de creixement i de decreixement. Fes-ho donant valors de la funció, de la seva derivada i de certs límits.



a) • Asíntota horitzontal: $y = 2$.

Asíntota vertical: $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

• $f(x)$ no té punts singulars.

• Decreix en $(-\infty, 0)$ i creix en $(0, +\infty)$

b) • Asíntota horitzontal: $y = -2$.

Asíntota vertical: $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > -2$)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

• Punts singulars:

$$f'(0) = 0; \quad f(0) = -1. \text{ Màxim en } (0, -1).$$

• Creixent en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ i decreixent en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horitzontal: si $x \rightarrow +\infty$, $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

• Punt singulars:

$$f'(0) = 0; \quad f(0) = 0. \text{ Mínim en } (0, 0).$$

$$f'(2) = 0; \quad f(2) = 1. \text{ Màxim en } (2, 1).$$

• Decreixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i creixent en $(0, 2)$.

d) • Asímtota vertical: $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

• Asímtota obliqua: $y = x$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)

• $f(x)$ no té punts singulars.

• Creixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

■ Característiques de les funcions

5 Indica el domini de cadascuna de les funcions següents:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{3x - 21}}$

c) $y = \ln(4 - \sqrt{x})$

d) $y = \frac{1}{1 + \cos x}$

e) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}}$

a) Perquè es pugui definir la funció, el radicand ha de ser no negatiu.

$$-x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow \text{El domini de definició és l'interval } [-1, 4].$$

b) Perquè es pugui definir la funció, el radicand ha de ser positiu.

$$3x - 21 \geq 0 \rightarrow \text{El domini de definició és l'interval } (7, +\infty).$$

c) Perquè es pugui definir la funció, l'argument del logaritme ha de ser positiu i, a més, $x \geq 0$ perquè existeixi l'arrel.

$$4 - \sqrt{x} > 0 \rightarrow \sqrt{x} < 4 \rightarrow x \text{ ha d'estar en l'interval } [0, 16).$$

d) $1 + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = (2n + 1)\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

El seu domini de definició és $\mathbb{R} - \{(2n + 1)\pi \text{ amb } k \in \mathbb{Z}\}$.

e) La tangent no està definida quan $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

A més, la funció no està definida quan $\operatorname{tg} x = 0$, és a dir, quan $x = k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

Per tant, el domini de definició és $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$.

f) Perquè la funció estigui ben definida, ha de ser $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$.

Per altra banda, la funció és periòdica de període π .

$$\text{Dins de l'interval } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}^2 x - 1 > 0 \text{ quan } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Fent servir la periodicitat, el domini de definició és la unió de tots els intervals de la forma

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \text{ amb } k \in \mathbb{Z}.$$

6 Estudia la simetria de les funcions següents:

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

c) $y = \operatorname{tg} \pi x$

d) $y = e^{|x|}$

e) $y = \frac{|x|}{x^2 - 2x}$

f) $y = 2\cos \frac{x}{2}$

a) $f(-x) = (-x)^2 + 1 = f(x) \rightarrow$ Funció parella.

b) $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 3}} = -f(x) \rightarrow$ Funció imparella.

c) $f(-x) = \operatorname{tg}[\pi(-x)] = -f(x) \rightarrow$ Funció imparella.

$$d) f(-x) = e^{-|x|} = f(x) \rightarrow \text{Funció parella.}$$

$$e) f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 2(-x)} = \frac{|x|}{x^2 + 2x} \rightarrow \text{No és simètrica.}$$

$$f) f(-x) = 2\cos \frac{-x}{2} = f(x) \rightarrow \text{Funció parella.}$$

7 Determina el període de cadascuna d'aquestes funcions:

$$a) y = \sin 3x$$

$$b) y = \sin 2\pi x$$

$$c) y = \operatorname{tg} \pi x$$

$$d) y = \sin x + \cos 2x$$

$$e) y = \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \cdot \sin x$$

$$f) y = \sin (x^2 + 1)$$

$$a) f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \sin (3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x) \rightarrow \text{El seu període és } \frac{2\pi}{3}.$$

$$b) f(x + 1) = \sin [2\pi(x + 1)] = \sin (2\pi x + 2\pi) = \sin 2\pi x = f(x) \rightarrow \text{El seu període és } 1.$$

$$c) f(x + 1) = \operatorname{tg} [\pi(x + 1)] = \operatorname{tg} (\pi x + \pi) = \operatorname{tg} \pi x = f(x) \rightarrow \text{El seu període és } 1.$$

$$d) f(x + 2\pi) = \sin (x + 2\pi) + \cos [2(x + 2\pi)] = \sin x + \cos (2x + 4\pi) = \sin x + \cos 2x = f(x) \rightarrow \text{El seu període és } 2\pi.$$

$$e) f(x) = \cos \frac{\pi x}{2} \sin x$$

$$\cos \frac{\pi x}{2} \text{ és periòdica de període } \frac{2\pi}{\pi/2} = 4.$$

$$\sin x \text{ és periòdica de període } 2\pi.$$

Per tant, la funció donada no pot ser periòdica.

f) Perquè sigui periòdica de període T , ha de complir-se que:

$$f(x + T) = \sin ((x + T)^2 + 1) = \sin (x^2 + 2Tx + T^2 + 1) = f(x) = \sin (x^2 + 1 + 2k\pi); \text{ però això no és possible, ja que no es pot trobar l'hipotètic període independentment de } x.$$

8 Troba les asímptotes verticals d'aquestes funcions i indica la posició relativa de cada corba respecte d'aquestes:

$$a) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$b) y = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$c) y = \frac{1}{\ln x}$$

$$d) y = \frac{x(x - 1)}{x^2 - 2x}$$

$$e) y = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$$

$$f) y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$$

a) Té dues possibles asímptotes verticals ja que el seu denominador s'anul·la quan $x = 1$ i $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

b) Té dues possibles asímptotes verticals ja que el seu denominador s'anul·la quan $x = 3$ i $x = -3$. La posició de la funció respecte de les asímptotes ha de tenir en compte el domini de definició, que és $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = +\infty$$

c) El domini de definició és $(0, +\infty) - \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ no hi ha asímptota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \rightarrow \text{La recta } x = 1 \text{ és l'asímtota vertical de la funció.}$$

$$d) y = \frac{x(x-1)}{x^2-2x} = \frac{x(x-1)}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}, \text{ excepte en el punt } x=0.$$

Per tant, en $x=0$ té una discontinuïtat evitable. En $x=2$ té una asímptota vertical i la posició és:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$$

e) El denominador s'anul·la quan $\sin^2 x = 1$, és a dir, quan $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2) + k\pi} \frac{1}{1 - \sin^2 x} = +\infty \text{ ja que } 1 - \sin^2 x > 0, \text{ excepte en els valors de } x \text{ on estan les asímptotes verticals.}$$

f) El denominador s'anul·la quan $\cos \frac{x}{2} = 0$, és a dir, quan $x = \pi + 2k\pi$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

Com que la funció és periòdica de període 4π , estudiem les asímptotes verticals $x = \pi$, $x = 3\pi$ i les altres s'obtenen fent servir la periodicitat.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\cos x/2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\cos x/2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi^-} \frac{1}{\cos x/2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3\pi^+} \frac{1}{\cos x/2} = +\infty$$

■ Funcions polinòmiques

9 Estudia i representa les funcions següents:

a) $y = x^3 + 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

e) $y = x^5 - 5x^3$

f) $y = (x-1)^3 - 3x$

g) $y = x^4 - 4x^2$

h) $y = 1 - (x-1)^3$

a) $y = x^3 + 3x^2$

- Branques infinites:

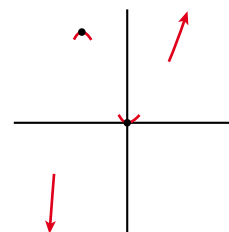
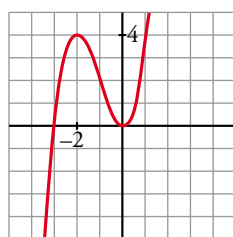
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x; \quad 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x + 6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ és un mínim.} \\ x = -2, \quad f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \rightarrow (-2, 4) \text{ és un màxim.} \end{array} \right.$$

- Representació:



b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

- Branques infinites:

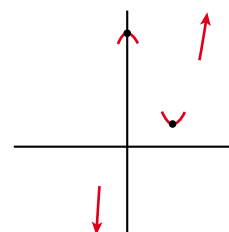
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Punts singulars:

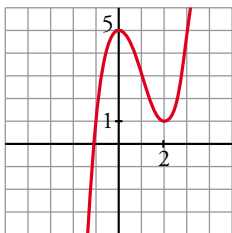
$$f'(x) = 3x^2 - 6x; \quad 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad f(0) = 5 \rightarrow (0, 5) \text{ és un màxim.} \\ x = 2, \quad f(2) = 1 \rightarrow (2, 1) \text{ és un mínim.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad f(0) = 5 \rightarrow (0, 5) \text{ és un màxim.} \\ x = 2, \quad f(2) = 1 \rightarrow (2, 1) \text{ és un mínim.} \end{array} \right.$$



- Representació:



$$c) y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$$

- Branques infinites:

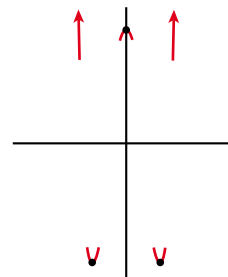
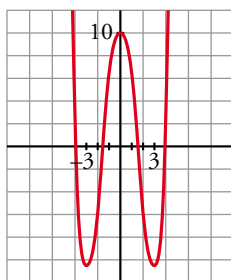
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x; \quad x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

$$\begin{aligned} x = 0, \quad f(0) &= 10 \rightarrow \text{màxim en } (0, 10). \\ x = 3, \quad f(3) &= -41/4 \rightarrow \text{mínim en } (3, -41/4). \\ x = -3, \quad f(-3) &= -41/4 \rightarrow \text{mínim en } (-3, -41/4). \end{aligned}$$

- Representació:



$$d) y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$$

- Branques infinites:

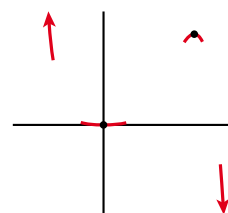
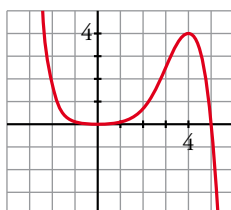
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \quad \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \rightarrow x^3(20 - 5x) = 0$$

$$\begin{aligned} x = 0, \quad f(0) &= 0 \rightarrow \text{mínim en } (0, 0). \\ x = 4, \quad f(4) &= 4 \rightarrow \text{màxim en } (4, 4). \end{aligned}$$

- Representació:



$$e) y = x^5 - 5x^3$$

- Branques infinites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Punts singulars:

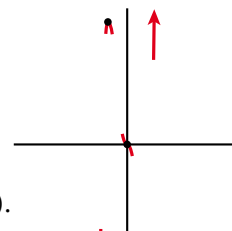
$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; 5x^4 - 15x^2 = 0 \rightarrow 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0$$

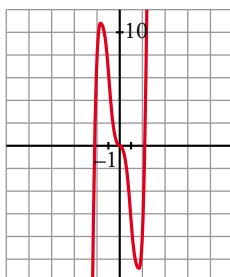
$$x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3^5} - 5\sqrt{3^3} = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3^5} + 5\sqrt{3^3} = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Té màxim en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$, mínim en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ i punt d'inflexió en $(0, 0)$.



- Representació:



f) $y = (x-1)^3 - 3x$

- Branques infinites:

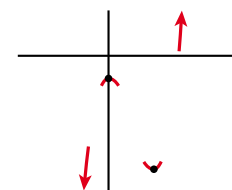
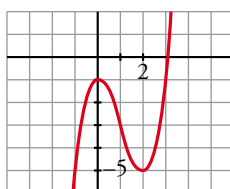
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 3(x-1)^2 - 3; 3(x-1)^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)^2 = 1 \begin{cases} x = 0, f(0) = -1 \rightarrow (0, -1) \text{ és un màxim.} \\ x = 2, f(2) = -5 \rightarrow (2, -5) \text{ és un mínim.} \end{cases}$$

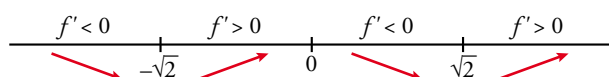
- Representació:



g) $y = x^4 - 4x^2$

- Com que és una funció polinòmica, el seu domini és $\mathbb{R}$.
- És simètrica respecte de l'eix vertical.
- No té asímptotes. En l'infinit, té branques parabòliques de creixement cada vegada més ràpid.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x, f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2}, x = 0, x = \sqrt{2}$$



$$x = -\sqrt{2}, y = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 = -4$$

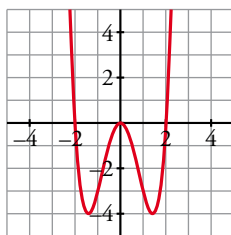
$$x = 0, y = 0$$

$$x = \sqrt{2}, y = -4$$

Els punts de tall amb l'eix horitzontal són les solucions de:

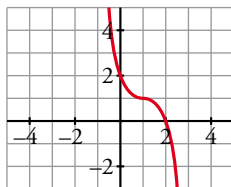
$$x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x = -2, x = 0, x = 2$$

- Representació:



h) $y = 1 - (x - 1)^3$

- Com que és una funció polinòmica, el seu domini és $\mathbb{R}$.
- No té asímptotes. En l'infinit té branques parabòliques de creixement cada vegada més ràpid.
 $f'(x) = -3(x - 1)^2$, $f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$
- És decreixent en $(-\infty, 1)$ i en $(1, +\infty)$ ja que la primera derivada és negativa excepte en $x = 1$.
 $x = 1 \rightarrow y = 1$
- Talla els eixos en els punts $(2, 0)$ i $(0, 2)$.
- Representació:



10 Estudia les branques infinites, intervals de creixement i de decreixement, màxims, mínims i punts d'inflexió de les funcions següents. Representa-les gràficament:

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

b) $y = 2 - (x - 3)^4$

c) $y = (x + 1)^6 - 5$

d) $y = 3 - (1 - x)^3$

e) $y = x(x - 1)(x + 3)$

f) $y = (x - 2)^2(x + 1)x^3$

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

- Branques infinites $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

- Punts singulars:

$$f'(x) = -3(2 - x)^2; -3(2 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 2; f(2) = 3$$

Signe de f' : $\frac{f' < 0}{\text{red arrow pointing right}} \quad \frac{f' < 0}{\text{red arrow pointing right}} \quad \frac{f' < 0}{\text{red arrow pointing right}}$

f és decreixent en $\mathbb{R}$.

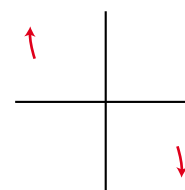
No té màxims ni mínims.

- Punts d'inflexió:

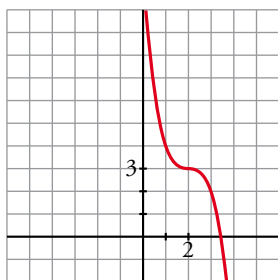
$$f''(x) = 6(2 - x); 6(2 - x) = 0 \rightarrow x = 2; f(2) = 3$$

Signe de f'' : $\frac{f'' > 0}{\text{red arc pointing up}} \quad \frac{f'' < 0}{\text{red arc pointing down}} \quad \frac{f'' < 0}{\text{red arc pointing down}}$

El punt $(2, 3)$ és un punt d'inflexió amb tangent horitzontal ($f''(2) = 0$ i $f'(2) = 0$).



- Gràfica:



b) $y = 2 - (x - 3)^4$

- Branques infinites $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

- Punts singulars:

$$f'(x) = -4(x-3)^3; -4(x-3)^3 = 0 \rightarrow x = 3; f(3) = 2$$

Signe de f' : $\begin{array}{c} f' > 0 \qquad f' < 0 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 3 \end{array}$

f és creixent en $(-\infty, 3)$ i decreixent en $(3, +\infty)$.

Té un màxim en $(3, 2)$.

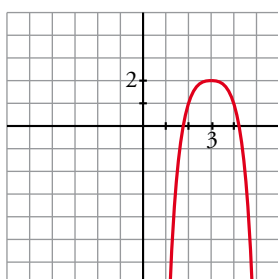
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = -12(x-3)^2; -12(x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3; f(3) = 2$$

Signe de f'' : $\begin{array}{c} f'' < 0 \qquad f'' < 0 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 3 \end{array}$

No té punts d'inflexió.

- Gràfica:



c) $y = (x + 1)^6 - 5$

- Branques infinites $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

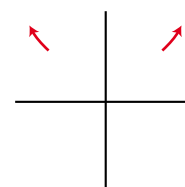
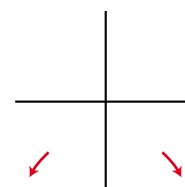
- Punts singulars:

$$f'(x) = 6(x+1)^5; 6(x+1)^5 = 0 \rightarrow x = -1; f(-1) = -5$$

Signe de f' : $\begin{array}{c} f' < 0 \qquad f' > 0 \\ \hline \qquad \qquad \qquad -1 \end{array}$

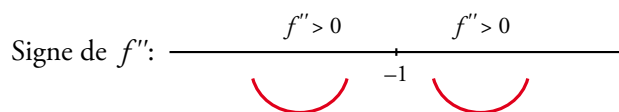
f és decreixent en $(-\infty, -1)$. És creixent en $(-1, +\infty)$.

Mínim en $(-1, -5)$.



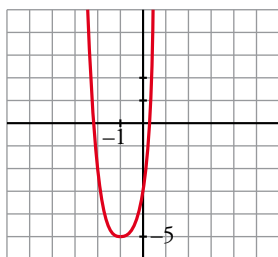
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = 30(x+1)^4; \quad 30(x+1)^4 = 0 \rightarrow x = -1; \quad f(-1) = -5$$



No té punts d'inflexió.

- Gràfica:

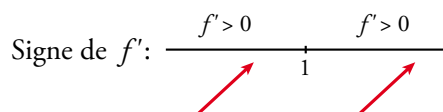


d) $y = 3 - (1-x)^3$

- Branques infinites $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 3(1-x)^2; \quad 3(1-x)^2 = 0 \rightarrow x = 1; \quad f(1) = 3$$

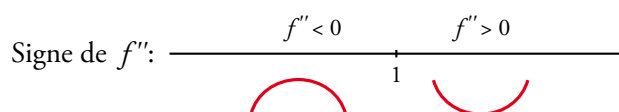


f és creixent en $\mathbb{R}$.

No té màxims ni mínims.

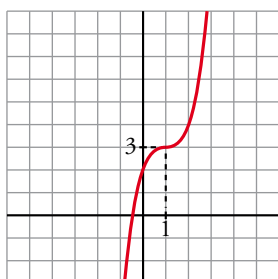
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = -6(1-x); \quad -6(1-x) = 0 \rightarrow x = 1; \quad f(1) = 3$$



(1, 3) és un punt d'inflexió amb tangent horitzontal, ja que $f'(1) = 0$.

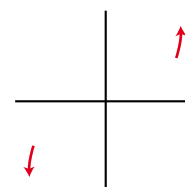
- Gràfica:



e) $y = x(x-1)(x+3)$

- Branques infinites $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

Té dues branques parabòliques de creixement cada vegada més ràpid.



- Punts singulars:

$$f'(x) = (x-1)(x+3) + x(x+3) + x(x-1) = 3x^2 + 4x - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}, x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$$

- És creixent en $\left(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}\right)$ i en $\left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$.

$$\text{És decreixent en } \left(\frac{-2 - \sqrt{13}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}\right).$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \approx -1,87; y = 6,06 \rightarrow (-1,87; 6,06) \text{ és un màxim relatiu.}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \approx 0,54; y = -0,88 \rightarrow (0,54; -0,88) \text{ és un mínim relatiu.}$$

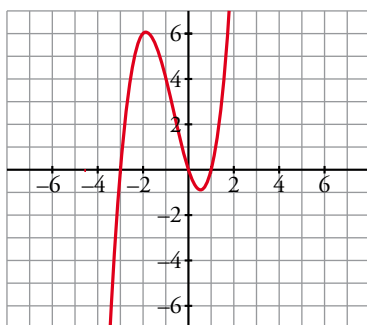
- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = 6x + 4; f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}; y \approx 2,6 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}; 2,6\right) \text{ és el punt d'inflexió.}$$

- Talla els eixos de coordenades en els punts $x = 0$, $x = 1$ i $x = -3$.

- Gràfica:



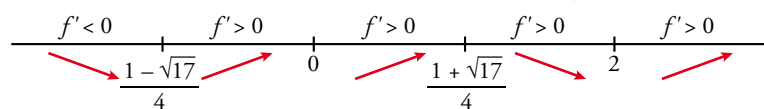
f) $y = (x-2)^2(x+1)x^3$

- Branques infinites $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ Té dues branques parabòliques de creixement cada vegada més ràpid.

- Punts singulars:

$$f'(x) = ((x-2)^2(x+1)x^3)' = 2(x-2)(x+1)x^3 + (x-2)^2x^3 + (x+1)(x-2)^2 3x^2 = 6x^5 - 15x^4 + 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 15x^4 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, x = 0, x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}, x = 2$$



$$x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \approx -0,78, y = -0,81 \rightarrow (-0,78; -0,81) \text{ és un mínim relatiu.}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \approx 1,28, y = 2,48 \rightarrow (1,28; 2,48) \text{ és un màxim relatiu.}$$

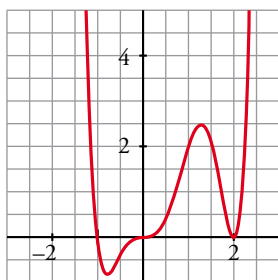
$$x = 2, y = 0 \rightarrow (2, 0) \text{ és un mínim relatiu.}$$

- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = 30x^4 - 60x^3 + 24x; f''(x) = 0 \rightarrow x = 0; x = 1,73; x = 0,83; x = -0,56$$

Els punts d'inflexió són $(0, 0)$; $(1,73; 1,03)$; $(0,83; 1,43)$ i $(-0,56; -0,51)$.

- Talla els eixos de coordenades en els punts $x = 2$, $x = -1$ i $x = 0$.
- Gràfica:



Pàgina 215

Funcions racionals

11 En les funcions següents, estudia'n el domini, les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes, i representa-les a partir dels resultats obtinguts:

a) $y = \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

f) $y = x + \frac{1}{x^2}$

g) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

h) $y = \frac{x^3}{(1 - x)^2}$

i) $y = \frac{4x^2}{1 + x^4}$

- a) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0\}$. Té simetria parella.

- Asímtotes verticals:

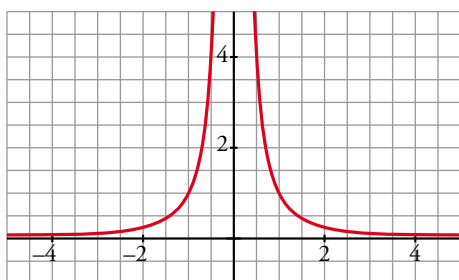
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ perquè la funció és positiva en tot el seu domini. La recta $x = 0$ és l'asímtota vertical de la funció.

- Asímtotes horitzontals:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow$ La recta $y = 0$ és l'asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i, també, per simetria, quan $x \rightarrow -\infty$.

La funció està per sobre de l'asímtota perquè és sempre positiva.

- Gràfica:



- b) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Asímtotes: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

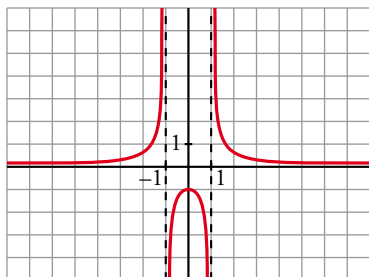
$y = 0$ és asímtota horitzontal.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ és asíptota vertical.}$$

- Gràfica:



- c) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Asíptotes: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

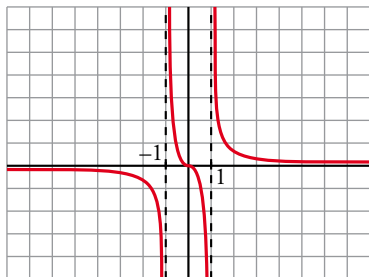
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asíptota horitzontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ és asíptota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ és asíptota vertical.}$$

- Gràfica:



- d) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0\}$.

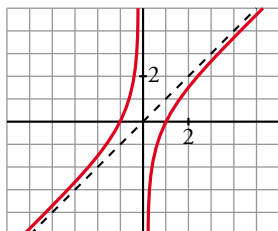
- Asíptotes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ és asíptota vertical.}$$

$y = x$ és asíptota obliqua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)

- Gràfica:



- e) • El domini de definició és $\mathbb{R}$.

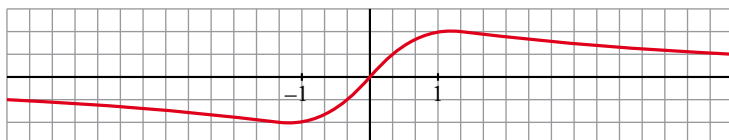
- Asímtotes:

No té asímtotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ és asímtota horitzontal (si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

- Gràfica:



- f) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Asímtotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ perquè la fracció és positiva en tot el seu domini.}$$

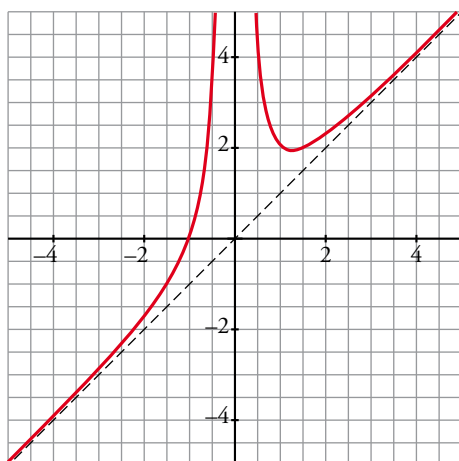
La recta $x = 0$ és asímtota vertical de la funció.

No té asímtotes horitzontals.

- Asímtotes obliqües:

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2} \rightarrow \text{La recta } y = x \text{ és asímtota obliqua.}$$

Com que $f(x) - x = \frac{1}{x^2} > 0$ excepte en $x = 0$, la funció queda per sobre de l'asímtota obliqua.



- g) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

La funció té simetria imparella.

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ és asímtota vertical. Anàlogament, per simetria, ho és la recta } x = -1.$$

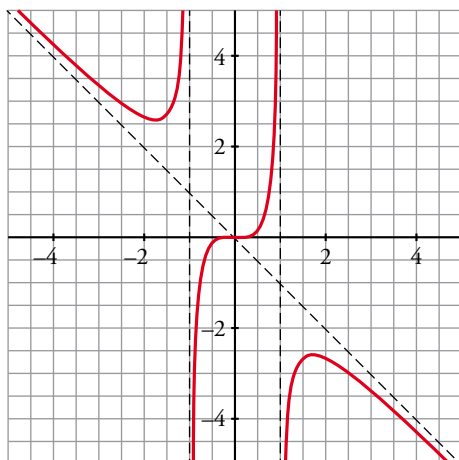
No té asímtotes horitzontals.

- Asímtotes obliqües:

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x - \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \text{La recta } y = -x \text{ és l'asímtota obliqua.}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - (-x) = -\frac{x}{x^2 - 1} < 0 \rightarrow$ La funció queda per sota de l'asímtota.

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - (-x) = -\frac{x}{x^2 - 1} > 0 \rightarrow$ La funció queda per sobre de l'asímtota.



h) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{1\}$.

• Asímtotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty \text{ ja que el denominador és no negatiu.}$$

La recta $x = 1$ és una asímtota vertical de la funció.

No té asímtotes horitzontals.

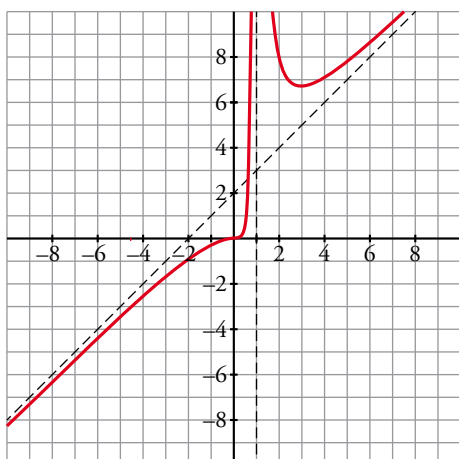
• Asímtotes obliqües:

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{La recta } y = x + 2 \text{ és asímtota obliqua.}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2} > 0 \rightarrow$ La funció queda per sobre de l'asímtota.

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2} < 0 \rightarrow$ La funció queda per sota de l'asímtota.

• Gràfica:



i) • El domini de definició és $\mathbb{R}$. És una funció parella.

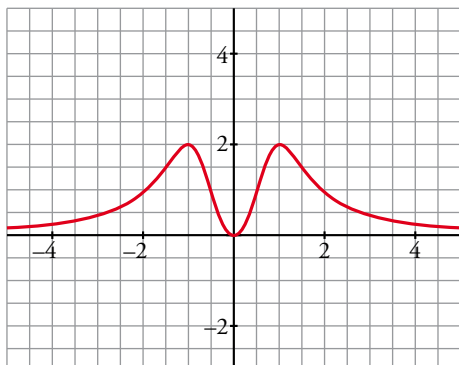
• No té asímtotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{1+x^4} = 0$$

La recta $x = 0$ és l'asímtota horitzontal de la funció quan $x \rightarrow \pm \infty$.

La funció queda per sobre de l'asímtota perquè és positiva excepte en $x = 0$.

- Gràfica:



12 Representa les funcions següents i estudia'n el domini de definició, les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes, el creixement i els extrems relatius.

a) $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

d) $y = \frac{x^2}{9-x^2}$

e) $y = \frac{x^2+4}{x}$

f) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

g) $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$

h) $y = \frac{x^4}{x^2-4}$

i) $y = \frac{x^3}{x+2}$

j) $y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$

a) $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$

- Domini: $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asímtotes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímtota horitzontal.

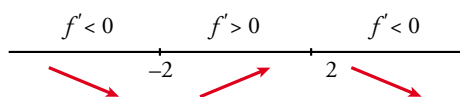
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ és asímtota vertical.}$$

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} = \frac{4x-8-8x+24}{(x-2)^3} = \frac{-4x+16}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x+16=0 \rightarrow x=4$$

Signe de $f'(x)$:

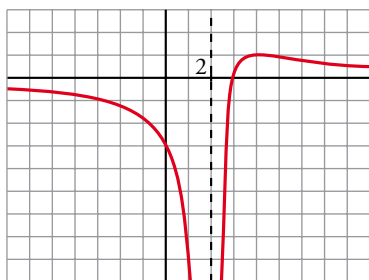


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

És creixent en $(2, 4)$.

Té un màxim en $(4, 1)$.

- Gràfica:



b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

- Domini: $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asímtotes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ és asímtota horitzontal.

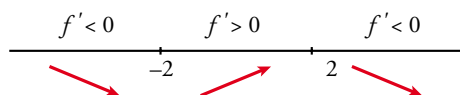
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ és asímtota vertical.}$$

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x-2 = 0 \rightarrow x = -2$$

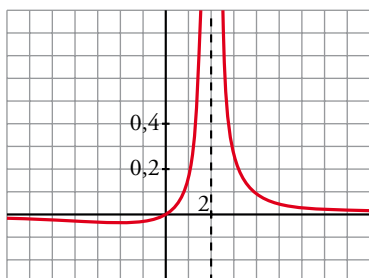
Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. És creixent en $(-2, 2)$.

Té un mínim en $\left(-2, \frac{-1}{8}\right)$.

- Gràfica:



c) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \frac{1}{x-2}$

- Domini: $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asímtotes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ és asímtota vertical.}$$

$y = x - 2$ és asímptota obliqua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

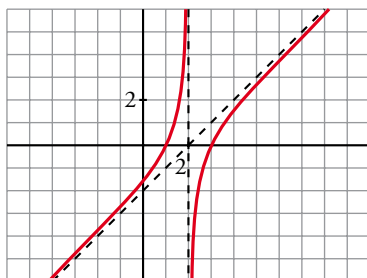
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{No té solució.}$$

$f(x)$ no té extrems relatius.

$f'(x) > 0$ per a tot $x \rightarrow f(x)$ és creixent en tot el seu domini.

- Gràfica:



d) $y = \frac{x^2}{9-x^2}$

- Domini: $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- Asímtotes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > -1$)

$y = -1$ és asímptota horitzontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -3 \text{ és asímptota vertical.}$$

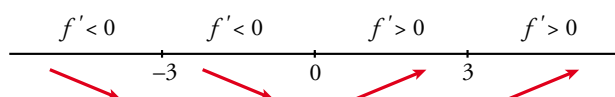
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ és asímptota vertical.}$$

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{2x(9-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 18x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de $f'(x)$:

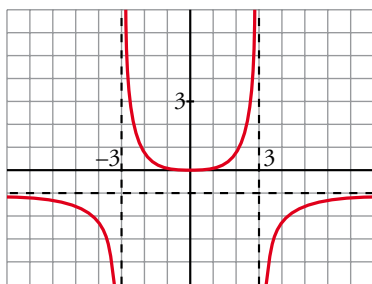


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

És creixent en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Té un mínim en $(0, 0)$.

- Gràfica:



$$e) y = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asímptotes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ és asímptota vertical.}$$

$y = x$ és asímptota obliqua.

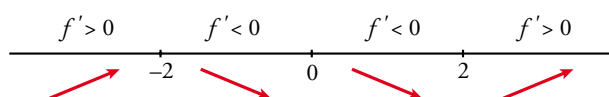
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



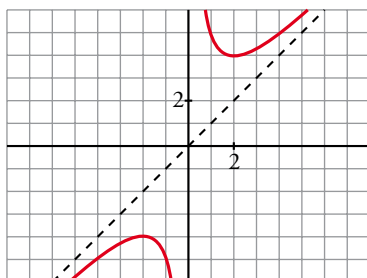
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

És decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

Té un màxim en $(-2, -4)$.

Té un mínim en $(2, 4)$.

- Gràfica:



$$f) y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{3\}$

- Asímptotes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ és asímptota horitzontal.

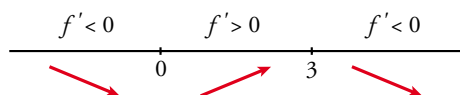
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ és asíptota vertical.}$$

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de $f'(x)$:

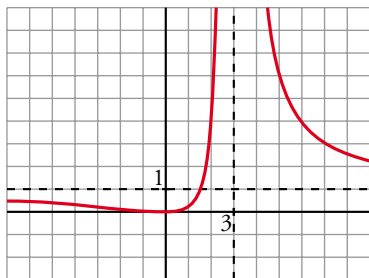


$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

És creixent en $(0, 3)$.

Té un mínim en $(0, 0)$.

- Gràfica:



$$g) y = \frac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \frac{2x}{x^2+1}$$

- Domini: $\mathbb{R}$

- Asíptotes:

No té asíptotes verticals.

$y = 2x$ és asíptota obliqua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2x$).

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

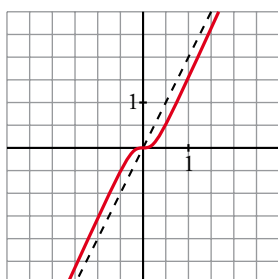
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x^2+3) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 0$.

$f(x)$ és creixent en tot $\mathbb{R}$.

- Gràfica:



$$h) y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Asímtotes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ és asímtota vertical.}$$

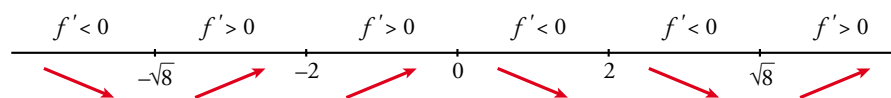
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Branques parabòliques.}$$

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



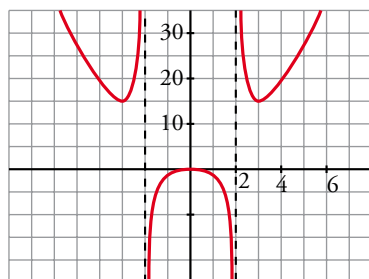
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$.

És creixent en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$.

Té un mínim en $(-\sqrt{8}, 16)$ i un altre en $(\sqrt{8}, 16)$.

Té un màxim en $(0, 0)$.

- Gràfica:



$$i) y = \frac{x^3}{x + 2}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asímtotes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ és asímtota vertical.}$$

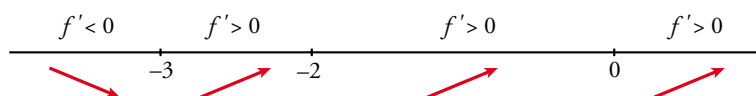
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Branques parabòliques.}$$

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



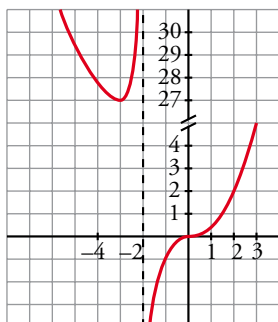
$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -3)$.

És creixent en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Té un mínim en $(-3, 27)$.

Té un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

- Gràfica:



$$j) y = \frac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \frac{1}{x-1}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{1\}$

- Asímtotes:

$y = 1$ és asímtota horitzontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ és asímtota vertical.}$$

$y = x - 3$ és asímtota obliqua.

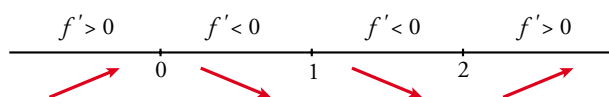
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 3$)

- Creixement, decreixement, extrems relatius:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



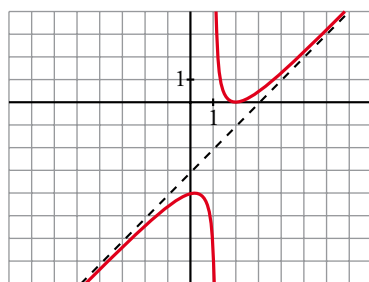
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

És decreixent en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

Té un màxim en $(0, -4)$.

Té un mínim en $(2, 0)$.

• Gràfica:



13 Representa aquestes funcions havent-ne estudiat prèviament el domini, les asímptotes, les branques infinites i extrems relatius.

a) $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

b) $y = \frac{(x-1)}{x(x-3)(x+4)}$

c) $y = \frac{8-2x}{x(x-2)}$

d) $y = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)}$

a) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

• Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-1)(x-3)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 3 \text{ és asímtota vertical.}$$

• Asímtotes horitzontals:

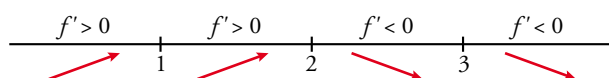
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és l'asímtota horitzontal quan } x \rightarrow \pm\infty.$$

La funció queda per sobre de l'asímtota quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

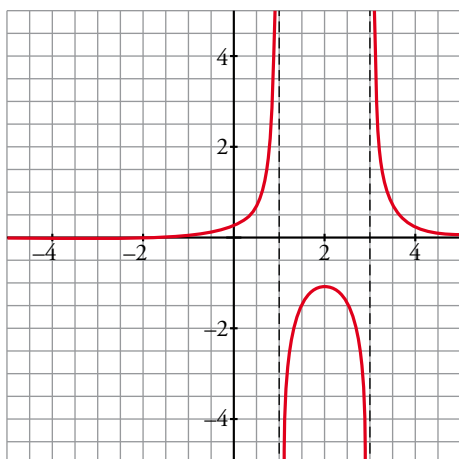
• Extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{[(x-1)(x-3)]^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x = 2, y = -1$$



- Gràfica:



- b) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-4, 0, 3\}$.

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = -4 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 3 \text{ és asímtota vertical.}$$

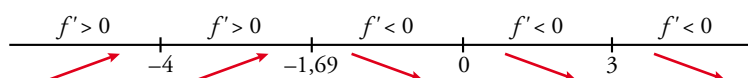
- Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és l'asímtota horitzontal quan } x \rightarrow \pm\infty.$$

La funció queda per sobre de l'asímtota quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

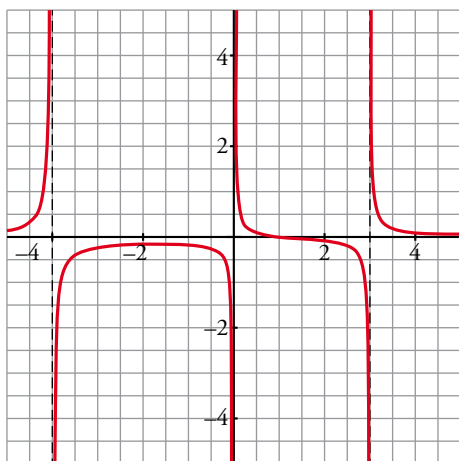
- Extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{2(-x^3 + x^2 + x - 6)}{x^2(x-3)^2(x+4)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^3 + x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = -1,69; y = -0,15$$



- Talla els eixos en (1, 0).

- Gràfica:



- c) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8-2x}{x(x-2)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8-2x}{x(x-2)} = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8-2x}{x(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8-2x}{x(x-2)} = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ és asímtota vertical.}$$

- Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8-2x}{x(x-2)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és l'asímtota horitzontal quan } x \rightarrow \pm\infty.$$

La funció queda per sota de l'asímtota quan $x \rightarrow +\infty$ i per sobre quan $x \rightarrow -\infty$.

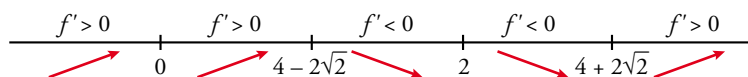
- Extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 8x + 8)}{x^2(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow x = 4 - 2\sqrt{2}, x = 4 + 2\sqrt{2}$$

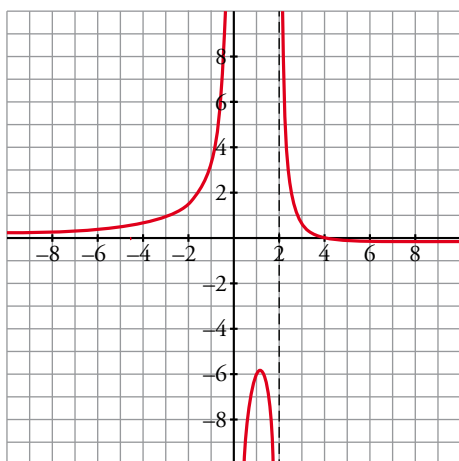
$$x = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,17, y = -5,83$$

$$x = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83, y = -0,17$$



- Talla els eixos en (4, 0).

- Gràfica:



- d) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = -1 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 2 \text{ és asímtota vertical.}$$

- No té asímtotes horitzontals.

- Asímtotes obliqües:

$$f(x) = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = 2x + 1 + \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} \rightarrow \text{La recta } y = 2x + 1 \text{ és l'asímtota obliqua.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - (2x + 1) = \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} > 0 \rightarrow \text{La funció queda per sobre de l'asímtota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - (2x + 1) = \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} < 0 \rightarrow \text{La funció queda per sota de l'asímtota.}$$

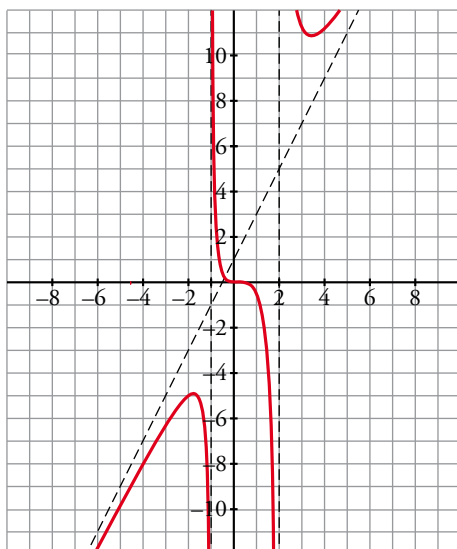
- Extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0,33; x = 3,43; x = -1,76$$

- Talla els eixos en $(0, 0)$ i en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- Gràfica:



14 Estudia el domini, les asymptotes, els intervals de creixement i els extrems relatius per representar les funcions següents:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

b) $y = \frac{3-2x}{x}$

c) $y = x^2 - \frac{2}{x}$

d) $y = \frac{x^2}{x+2}$

a) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

- Domini:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 3. \text{ Dom} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

- Asímptotes verticals:

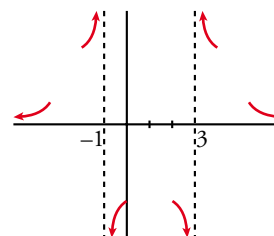
$$x = -1. \text{ Posició } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \end{cases}$$

$$x = 3. \text{ Posició } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \end{cases}$$

- Asímptota horitzontal:

$$y = 0, \text{ perquè } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0.$$

$$\text{Posició } \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y > 0 \end{cases}$$



- Intervals de creixement, de decreixement i extrems:

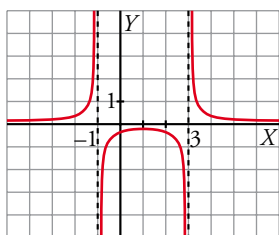
$$y' = \frac{-2x+2}{(x^2-2x-3)^2} = 0 \rightarrow -2x+2=0 \rightarrow x=1, f(1) = -\frac{1}{4}$$

Signe de y' :

$$\begin{array}{ccccccc} y' > 0 & & y' > 0 & & y' < 0 & & y' < 0 \\ \nearrow & & \nearrow & & \searrow & & \searrow \\ -1 & & 1 & & 3 & & \end{array} \quad \text{Màxim: } \left(1, -\frac{1}{4}\right)$$

Intervals de creixement: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

Intervals de decreixement: $(1, 3) \cup (3, +\infty)$



b) $y = \frac{3-2x}{x}$

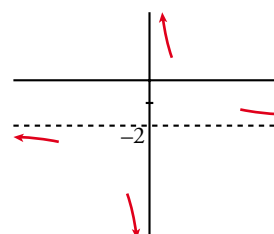
- Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asímptotes verticals:

$$x = 0. \text{ Posició } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3-2x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-2x}{x} = +\infty \end{cases}$$

- Asímptota horitzontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3-2x}{x} = -2, y = -2.$$

$$\text{Posició } \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > -2 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < -2 \end{cases}$$



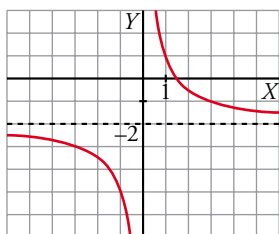
- Intervals de creixement i de decreixement:

$$y' = \frac{-2x - (3-2x)}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$$

Signe de y' : és negativa en tot el seu domini.

La funció és decreixent en el seu domini.

No té màxims ni mínims.



c) $y = x^2 - \frac{2}{x}$

- Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asímptota vertical:

$$x = 0. \text{ Posició } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

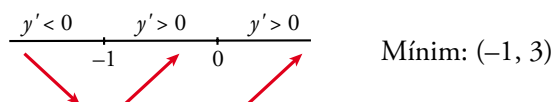
- Asímptota horitzontal no té, perquè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$.
- Tampoc té asímptota obliqua, perquè:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{2}{x^2}\right) = \pm\infty$$

- Intervals de creixement i decreixement:

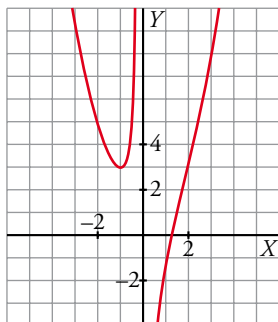
$$y' = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 + 2}{x^2}; y' = 0 \rightarrow 2x^3 + 2 = 0 \rightarrow x = -1, f(-1) = 3$$

Signe de y' :



Intervals de creixement: $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Intervals de decreixement: $(-\infty, -1)$



d) $y = \frac{x^2}{x+2}$

- Domini: $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asíntotes verticals: $x = -2$

Posició $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty \end{array} \right.$

- Asíntota horitzontal no té, perquè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x+2} = \pm\infty$.

- Asíntota obliqua:

$$\frac{x^2}{-x^2 - 2x} \cdot \frac{|x+2|}{x-2} \rightarrow y = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

La recta $y = x - 2$ és una asíntota obliqua.

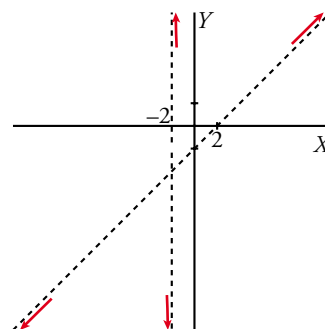
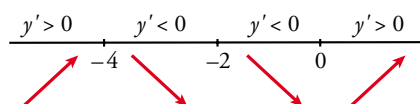
Posició $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > x - 2 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < x - 2 \end{array} \right.$

- Creixement i decreixement:

$$y' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 + 4x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0; y = 0 \\ x = -4; y = -8 \end{array} \right.$$

Signe de y' :

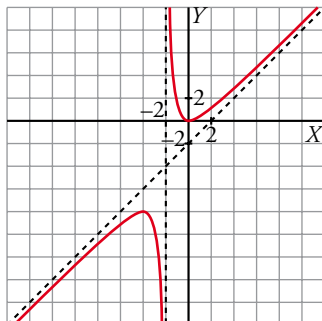


Creix en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

Decreix en $(-4, -2) \cup (-2, 0)$.

Màxim: $(-4, -8)$.

Mínim: $(0, 0)$.



15 Representa aquestes funcions racionals:

a) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c) $y = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x^3}$

e) $y = \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2}$

f) $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x}$

Recorda que si se simplifica una fracció dividint numerador i denominador per $(x - a)$, hi ha una discontinuïtat evitable en $x = a$.

a) • El domini de definició és $\mathbb{R}$.

• No té asímptotes verticals.

• Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ és l'asímtota horitzontal de la funció.}$$

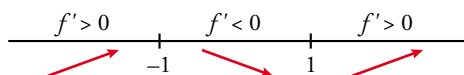
$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1} < 0 \rightarrow \text{La funció queda per sota de l'asímtota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1} > 0 \rightarrow \text{La funció queda per sobre de l'asímtota.}$$

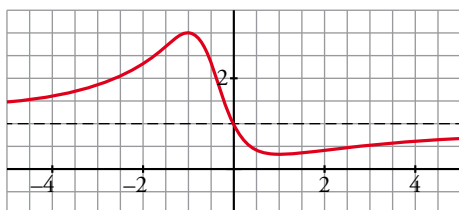
• Extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$$



$$x = -1, y = 3; x = 1, y = \frac{1}{3}$$

• Gràfica:



b) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{1\}$.

• Asímptotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ és asíptota vertical.}$$

• No té asímptotes horitzontals.

• Asímptotes obliques:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \rightarrow \text{La recta } y = x - 1 \text{ és l'asíptota obliqua de la funció.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} > 0 \rightarrow \text{La funció queda per sobre de l'asíptota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} < 0 \rightarrow \text{La funció queda per sota de l'asíptota.}$$

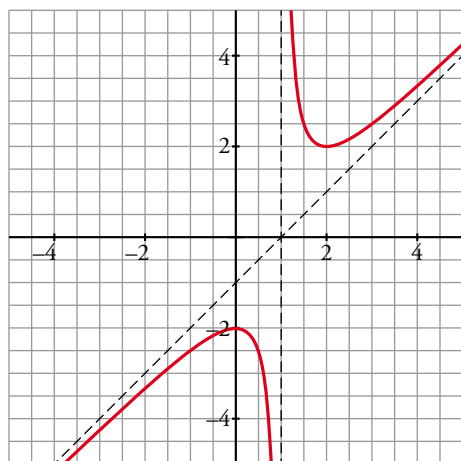
• Extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$



$$x = 0, y = -1; x = 2, y = 2$$

• Gràfica:



c) • El domini de definició és $\mathbb{R}$.

• No té asímptotes verticals.

• Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = 3 \rightarrow \text{La recta } y = 3 \text{ és l'asíptota horitzontal de la funció.}$$

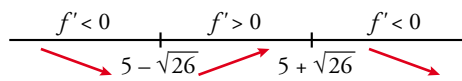
$$f(x) - 3 = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} > 0 \rightarrow \text{La funció queda per sobre de l'asíptota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} < 0 \rightarrow \text{La funció queda per sota de l'asíptota.}$$

- Extrems relatius:

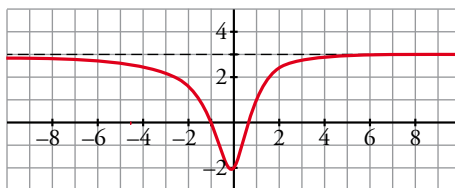
$$f'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 1}{(x^2 + 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 10x + 1 = 0 \rightarrow x = 5 - \sqrt{26}, x = 5 + \sqrt{26}$$



$$x = 5 - \sqrt{26} \approx -0,1, y = -2,05$$

$$x = 5 + \sqrt{26} \approx 10,1, y = 3,05$$

- Gràfica:



- d) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

- Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{La recta } y = \frac{1}{2} \text{ és l'asímtota horitzontal de la funció.}$$

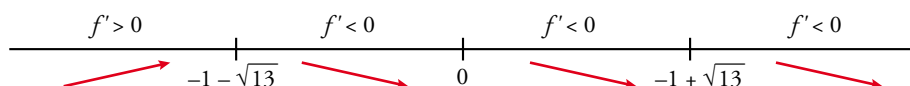
$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3} < 0 \rightarrow \text{La funció queda per sota de l'asímtota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3} > 0 \rightarrow \text{La funció queda per sobre de l'asímtota.}$$

- Extrems relatius:

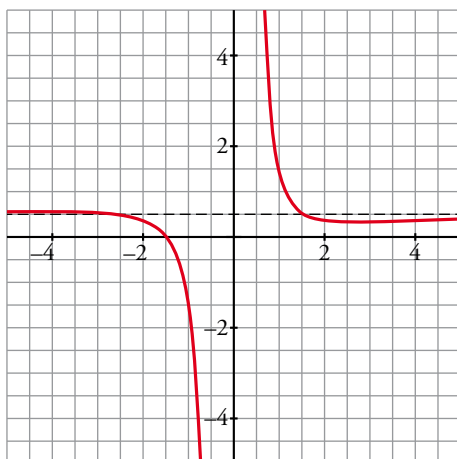
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 12}{2x^4}, f'(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow x = -1 - \sqrt{13}, x = -1 + \sqrt{13}$$



$$x = -1 - \sqrt{13} \approx -4,6, y = \frac{(-4,6)^3 - 4,6^2 + 4,6 + 4}{-2 \cdot 4,6^3} = 0,56452$$

$$x = -1 + \sqrt{13} \approx 2,6, y = 0,35$$

- Gràfica:



- e) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \frac{(x-1)(x^2 - 6x - 6)}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} \quad \text{excepte en } x = 1, \text{ on presenta una discontinuïtat evitable.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\frac{11}{2}$$

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = -1 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

- Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és l'asímtota horitzontal de la funció.}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0 \rightarrow$ La funció queda per sobre de l'asímtota.

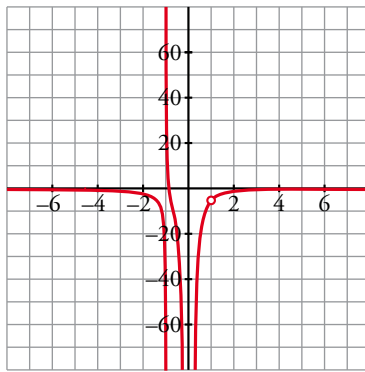
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0 \rightarrow$ La funció queda per sota de l'asímtota.

- Extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{-x^3 + 12x^2 + 24x + 12}{x^3(x+1)^2}, \quad f'(x) = 0 \rightarrow -x^3 + 12x^2 + 24x + 12 = 0 \rightarrow x = 13,8$$

$$x = 13,8; \quad y = 0,036$$

- Gràfica:



- f) • El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x^2 - x - 11)}{x(x+1)(x-2)} = \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} \quad \text{excepte en } x = 2, \text{ on presenta una discontinuïtat evitable.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

- Asímtotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = -1 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

- Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = 1 \rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ és l'asímtota horitzontal de la funció.}$$

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} - 1 = \frac{-2x - 11}{x(x+1)}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - 1 = \frac{-2x - 11}{x(x+1)} < 0 \rightarrow \text{La funció queda per sota de l'asímtota.}$$

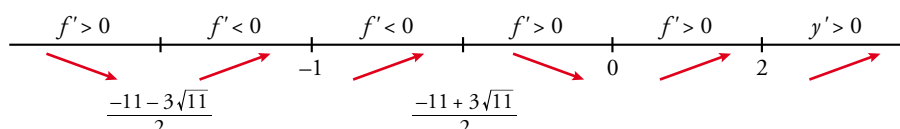
$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - 1 = \frac{-2x - 11}{x(x+1)} > 0 \rightarrow \text{La funció queda per sobre de l'asímtota.}$$

- Extrems relatius:

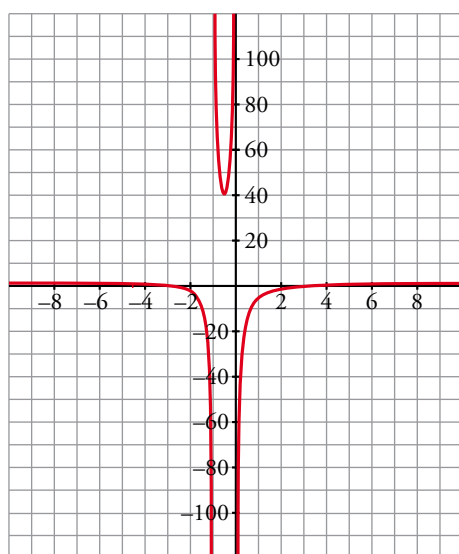
$$f'(x) = \frac{2x^2 + 22x + 11}{x^2(x+1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 22x + 11 = 0$$

$$x = \frac{-11 - 3\sqrt{11}}{2} \approx -10,5; y = 1,1$$

$$x = \frac{-11 + 3\sqrt{11}}{2} \approx -0,53; y = 40,9$$



- Gràfica:



■ Funcions amb valor absolut i funcions a trossos

16 Representa aquesta funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica'n els intervals de creixement i de decreixement i els seus extrems relatius. Té algun punt d'inflexió?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, és una paràbola oberta cap avall:

Vèrtex: $f'(x) = -2x - 2$; $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$, $f(-1) = 3$

Talls amb l'eix: $-x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{-2}$ $\begin{cases} x \approx 0,73 \text{ (no val perquè } 0,73 > 0) \\ x \approx -2,73 \end{cases}$

- Si $x \geq 0$, és una paràbola oberta cap amunt:

Vèrtex: $f'(x) = 2x - 2$; $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$, $f(1) = 1$

Talls amb l'eix X : $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \rightarrow$ No té solució. No talla l'eix X .

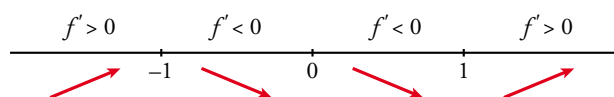
Tall amb l'eix Y : $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Creixement i decreixement:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = -2 = f'(0^+) \rightarrow$ és derivable en $x = 0$.

- Signe de $f'(x)$:



Creix en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decreix en $(-1, 1)$.

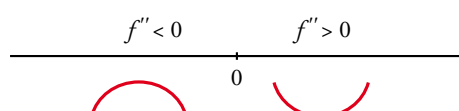
Té un màxim en $(-1, 3)$ i un mínim en $(1, 1)$.

- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. No existeix $f''(0)$.

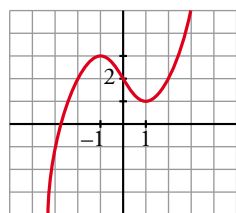
Signe de $f''(x)$:



La funció és convexa en $(-\infty, 0)$ i còncava en $(0, +\infty)$.

En $(0, 2)$ té un punt d'inflexió.

- Representació:



17 Representa la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia'n els intervals de creixement i de decreixement, els extrems relatius i la curvatura.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuïtat:

Si $x \neq 0$, f és contínua perquè està definida per polinomis.

Si $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 3x + 1 &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 &= 1 \\ f(0) &= (0-1)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \text{ Com que } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0), f \text{ és contínua en } x = 0.$$

- Creixement i decreixement:

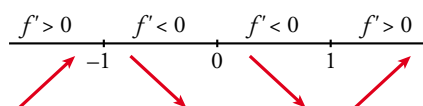
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -3 \\ f'(0^+) &= -2 \end{aligned} \right\}$$

Com que $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f no és derivable en $x = 0$.

- Punts singulars:

$$f'(x) = 0 \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 & \begin{cases} x = 1 \text{ (no val perquè ha de ser } x < 0) \\ x = -1, f(-1) = 3 \end{cases} \\ 2(x-1) = 0 & \rightarrow x = 1, f(1) = 0 \end{cases}$$

Signe de f' :



Creix en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decreix en $(-1, 1)$.

Màxim en $(-1, 3)$.

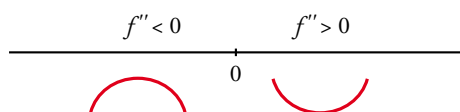
Mínim en $(1, 0)$.

- Curvatura:

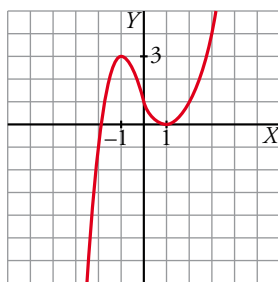
$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array} \right\}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. Per tant, no existeix $f''(0)$.

Signe de f'' :



Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 1)$.



18 Representa les funcions següents. Indica, en cada cas, els intervals de creixement i de decreixement i els extrems relatius, si n'hi ha:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

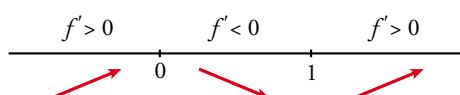
d) $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) f és contínua si $x \neq 1$ perquè les funcions que la defineixen són contínues.

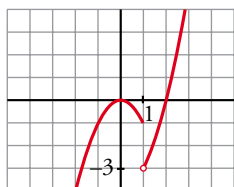
No és contínua en $x = 1$, perquè $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -3$.

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ No és derivable en $x = 1$, perquè no és contínua.

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0, 2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signe de f' :Creix en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ i decreix en $(0, 1)$.Màxim: $(0, 0)$

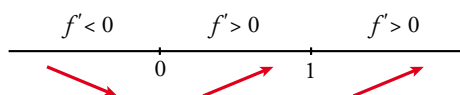
Representació:

b) f és contínua en $x \neq 1$ perquè les funcions que la defineixen són contínues.En $x = 1$:

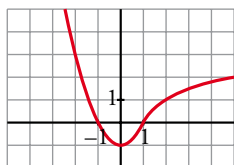
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0 \end{aligned} \right\} f \text{ és contínua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{No és derivable en } x = 1, \text{ perquè no existeix } f'(1^+).$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de f' :Creix en $(0, +\infty)$ i decreix en $(-\infty, 0)$.Mínim: $(0, -1)$

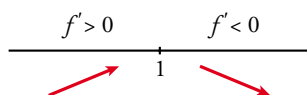
Representació:

c) f és contínua si $x \neq 1$, perquè ho són les funcions que la defineixen.En $x = 1$:

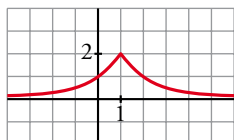
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2 \end{aligned} \right\} f \text{ és contínua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{No és derivable en } x = 1, \text{ perquè } f'(1^-) \neq f'(1^+).$$

No hi ha punts en què $f'(x) = 0$.

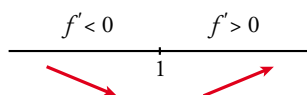
Signe de f' :Creix en $(-\infty, 1)$ i decreix en $(1, +\infty)$.Màxim: $(1, 2)$ (no és derivable en aquest punt).

Representació:

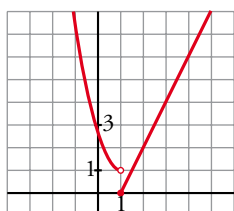
d) f és contínua en $x \neq 1$, perquè ho són les funcions que la defineixen.En $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-2) = 0 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Com que } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), f \text{ no és contínua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ no existeix } f'(1), \text{ perquè } f \text{ és discontinua en } x = 1.$$

No existeixen punts en què $f'(x) = 0$.Signe de f' :Decreix en $(-\infty, 1)$ i creix en $(1, +\infty)$.

Representació:

**19** Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En l'interval $(-\infty, 0]$, estudia si té punts de tall amb els eixos, si la funció creix o decreix, els punts d'inflexió i si té asímptotes. Dibuixa la gràfica en tot $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• Si $x \in (-\infty, 0)$, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Si $x = 0$, $y = -x + 1 = 1$

Talls amb els eixos:

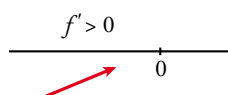
$$x = 0, y = 1 \rightarrow (0, 1)$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow \text{No té solució. No talla l'eix } Y.$$

- Creixement i decreixement:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}; \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = 1$$

Signe de $f'(x)$:

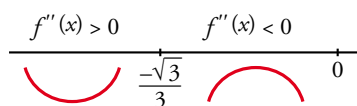


La funció és creixent.

- Punts d'inflexió:

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}; \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (no val)} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Signe de $f''(x)$:



Punt d'inflexió: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right) \approx (-0,58; 0,75)$

- Representació:



20 Dibuixa la gràfica de les funcions següents i indica en quins punts no són derivables:

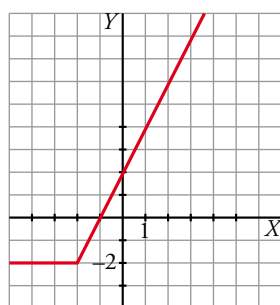
a) $y = x + |x + 2|$ b) $y = 2x - |x - 3|$ c) $y = |x| + |x - 3|$ d) $y = x|x - 1|$

a) $y = x + |x + 2|$

Com que $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$, estudiem f a l'esquerra i a la dreta de -2 per definir-la per intervals.

$$\begin{array}{ccc} -x - 2 & & x + 2 \\ x & -2 & x \end{array}$$

Sumem: $\begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



No és derivable en $x = -2$.

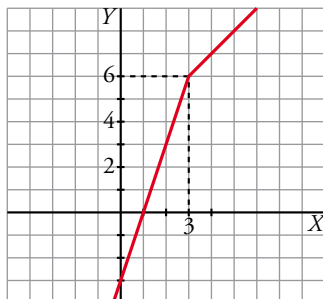
b) $2x - |x - 3|$

Estudiem la funció per a valors més petits i més grans que 3.

$$\begin{array}{ccc} -x+3 & & x-3 \\ \hline 2x & 3 & 2x \end{array}$$

Restem: $\begin{cases} 2x - (-x + 3) = 3x - 3 \\ 2x - (x - 3) = x + 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



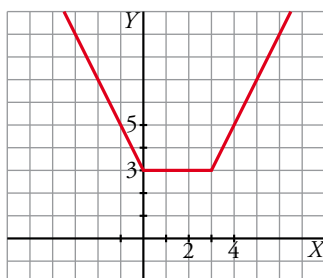
No és derivable en $x = 3$.

c) $y = |x| + |x - 3|$

Com que $|x| = 0$ en $x = 0$ i $|x - 3| = 0$ en $x = 3$, estudiem f a l'esquerra i a la dreta d'aquests punts.

$$\begin{array}{ccc} -x & & x \\ \hline -x+3 & 0 & -x+3 \\ & \vdots & \vdots \\ & & x-3 \end{array}$$

Sumem: $\begin{cases} -x + (-x + 3) = -2x + 3 \\ x + (-x + 3) = 3 \\ x + (x - 3) = 2x - 3 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



No és derivable en $x = 0$ ni en $x = 3$.

d) $y = x|x - 1|$

Estudiem f a la dreta i a l'esquerra de $x = 1$.

$$\begin{array}{ccc} -x+1 & & x-1 \\ \hline x & 1 & x \end{array}$$

Multipliquem: $\begin{cases} x(-x + 1) = -x^2 + x \\ x(x - 1) = x^2 - x \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $y = -x^2 + x$ és una paràbola oberta cap avall:

Vèrtex: $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Talls amb OX :

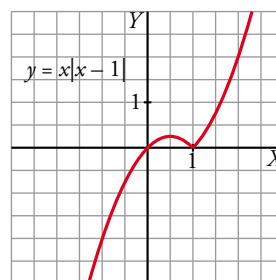
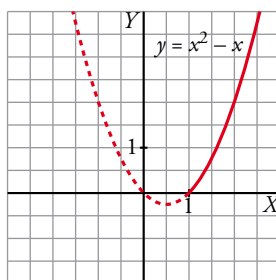
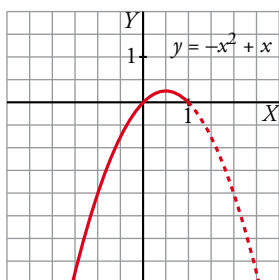
$$-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$$

- $y = x^2 - x$ és una paràbola oberta cap amunt:

Vèrtex: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (no val, ja que ha de ser $x \geq 1$)

Talls amb OX :

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no val)} \\ x = 1 \end{cases}$$



No és derivable en $x = 1$.

21 Considera la funció $f(x) = x^2|x - 3|$:

a) Troba els punts on f no és derivable.

b) Calcula'n els màxims i els mínims.

c) Representa-la gràficament.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2(-x + 3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Si $x \neq 3$, tenim que $f(x)$ és derivable. La seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \text{ (Punt } (3, 0)). \end{array}$$

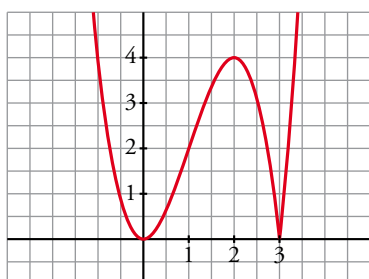
$$b) f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 & \text{si } x < 3 \\ 3x(-x + 2) = 0 & \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{cases} \\ 3x^2 - 6x = 0 & \text{si } x > 3 \rightarrow \text{cap ni un} \end{cases}$$

Com que $f(x) \geq 0$ per a tot x , tenim que:

$f(x)$ té un mínim en $(0, 0)$ i un altre en $(3, 0)$, i té un màxim en $(2, 4)$.

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Unint tot això, arribem a la gràfica:



22 Representa la funció $f(x) = -|x^3 - x^2 + 2|$.

Per representar-la, dibuixem la gràfica de la funció $y = x^3 - x^2 + 2$. La gràfica de $f(x)$ coincidirà amb la de y en la zona on aquesta estigui per sota de l'eix X i amb la seva simètrica respecte de l'eix X si la de y està per sobre d'aquest.

Analitzem la funció polinòmica $y = x^3 - x^2 + 2$:

- Tall amb l'eix Y : $x = 0$, $y = 2$

Talls amb l'eix X : $x^3 - x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

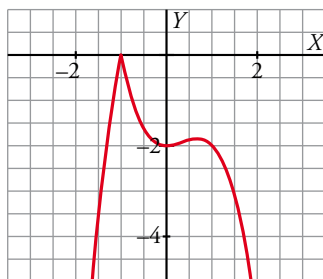
$$y' = 3x^2 - 2x, y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}$$

$$y'' = 6x - 2$$

$x = 0 \rightarrow y'' = -2 < 0$ (0, 2) és un màxim relatiu.

$x = \frac{2}{3} \rightarrow y'' = 2 > 0 \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{50}{27} \approx 1,85$; $\left(\frac{2}{3}; 1,85\right)$ és un mínim relatiu.

Ara prenem el mòdul d'aquesta funció i canviem el signe.



Pàgina 216

Per resoldre

23 Estudia el domini de definició, les asímptotes i els extrems de cada una d'aquestes funcions i, amb aquesta informació, tracta de trobar-ne la gràfica entre les següents:

a) $y = \frac{1}{\sin x}$

b) $y = x e^x$

c) $y = \sin \frac{x}{2}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$

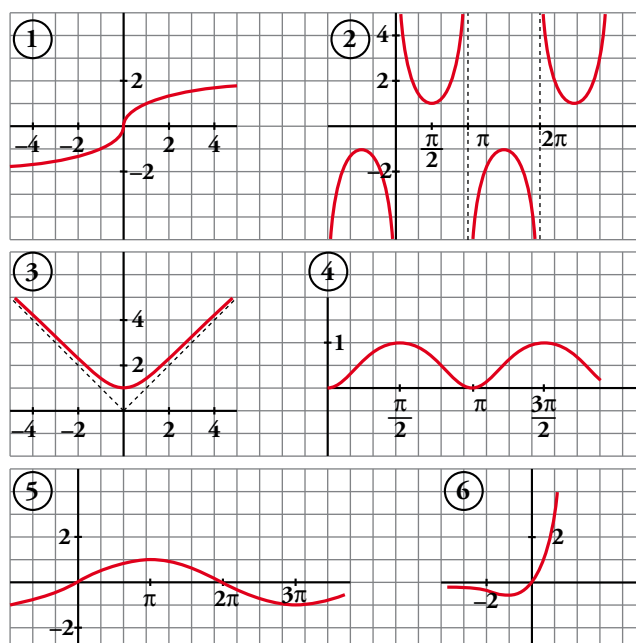
e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = \sin^2 x$

a) $y = \frac{1}{\sin x}$

- Domini: $\sin x = 0 \rightarrow x = 0 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Domini} = \mathbb{R} - \{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$$



- Asímptotes:

$x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ són asímptotes verticals.

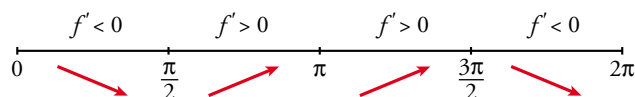
No hi ha més asímptotes.

- Extrems:

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Signe de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



$f(x)$ és periòdica de període 2π .

$f(x)$ és decreixent en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

És creixent en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Té un mínim en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Té un màxim en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- Gràfica $\rightarrow$ ②.

b) $y = xe^x$

- Domini: $\mathbb{R}$

- Asímptotes:

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

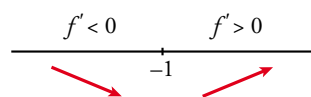
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Branca parabòlica.}$$

- Extrems:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 + x = 0 \rightarrow x = -1$$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -1)$.

És creixent en $(-1, +\infty)$.

Té un mínim en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$.

- Gràfica $\rightarrow$ ⑥.

c) $y = \sin \frac{x}{2}$

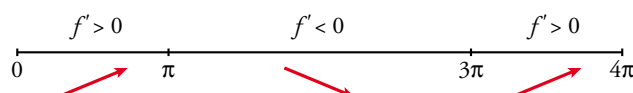
- Domini: $\mathbb{R}$
- Asímptotes: No en té.
- Extrems:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ és periòdica de període 4π .

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.

És decreixent en $(\pi, 3\pi)$.

Té un màxim en $(\pi, 1)$.

Té un mínim en $(3\pi, -1)$.

- Gràfica $\rightarrow$ ⑤.

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- Domini: $\mathbb{R}$
- Asímptotes: No en té.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Branques parabòliques.}$$

- Extrems:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \text{ per a tot } x \neq 0.$$

$f(x)$ és creixent.

- Gràfica $\rightarrow$ ①.

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- Domini: $\mathbb{R}$
- Simetria:

$$f(-x) = f(x) \rightarrow f(x) \text{ és parella: simètrica respecte de l'eix } Y.$$

- Asímptotes:

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0\end{aligned}$$

$y = x$ és asímptota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x$).

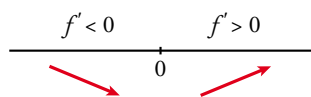
Per simetria, $y = -x$ és asímptota obliqua quan $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x$).

- Extrems:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0)$.

És creixent en $(0, +\infty)$.

Té un mínim en $(0, 1)$.

- Gràfica $\rightarrow$ ③.

f) $y = \sin^2 x$

- Domini: $\mathbb{R}$

- Asímtotes: No en té.

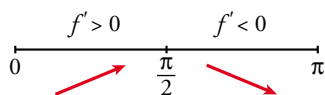
- Extrems:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$f(x)$ és periòdica de període π .

Signe de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ és creixent en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

És decreixent en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Té un màxim en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Té un mínim en $(0, 0)$ i un altre en $(\pi, 0)$.

- Gràfica $\rightarrow$ ④.

24 Determina les asímptotes de les funcions següents:

a) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{3x}$

b) $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

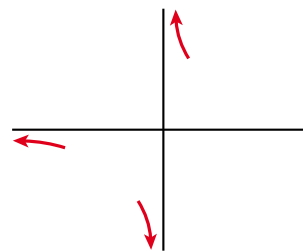
a) Domini: $(-\infty) \setminus (0, 1]$

- Asímtota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = \pm \infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asímtota horitzontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = 0$$

 $y = 0$ és asímtota horitzontal cap a $-\infty$ ($y < 0$).b) Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asímtota vertical:

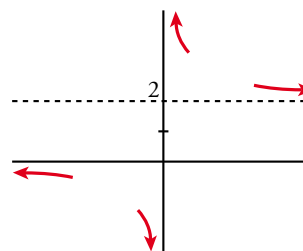
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm \infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asímtota horitzontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

 $y = 2$ és asímtota horitzontal cap a $+\infty$ ($y > 2$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

 $y = 0$ és asímtota horitzontal cap a $-\infty$ ($y < 0$).**25** Representa gràficament cada una d'aquestes funcions:

a) $y = \frac{1}{|x| - 2}$

b) $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{|x + 3|}{1 + |x|}$

a) $y = \frac{1}{|x| - 2}$

Definim la funció per intervals:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x-2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

■ Si $x < 0$, $y = \frac{1}{-x-2} = \frac{-1}{x+2}$:

- Domini: $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asímtota vertical:

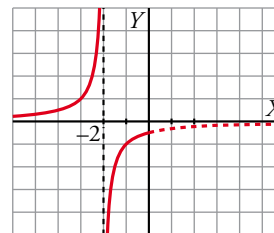
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < -2, & f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{Si } x > -2, & f(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

 $x = -2$ és una asímtota vertical.

- Asímtota horitzontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$$

$y = 0$ és asímtota horitzontal cap a $-\infty$ ($f(x) > 0$).



- Si $x \geq 0$, $y = \frac{1}{x-2}$:

- Domini: $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asímtota vertical:

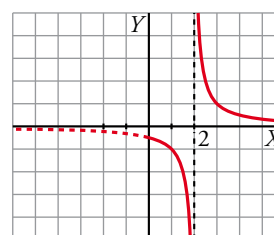
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 2, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$x = 2$ és una asímtota vertical.

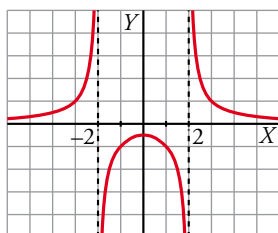
- Asímtota horitzontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$y = 0$ és asímtota horitzontal cap a $+\infty$ ($f(x) > 0$).



La gràfica de $y = \frac{1}{|x|-2}$ és:



b) $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

Definim la funció per intervals:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, $y = \frac{-2x}{x^2 + 1}$:

- Domini: $\mathbb{R}$

- No té asímtotes verticals.

- Asímtotes horitzontals:

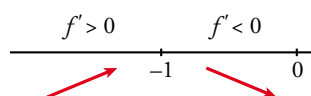
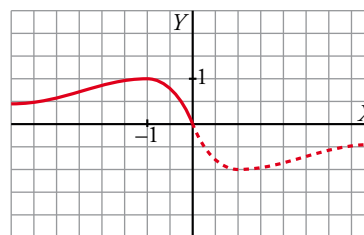
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0$$

$y = 0$ és asímtota horitzontal cap a $-\infty$ ($y > 0$).

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1) + 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \begin{cases} x = 1 \text{ (no val, } 1 > 0) \\ x = -1, f(-1) = 1 \end{cases}$$

Signe de f' :Màxim en $(-1, 1)$.

■ Si $x \geq 0$, $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$:

- Domini: $\mathbb{R}$
- No té asímptotes verticals.
- Asímtotes horitzontals:

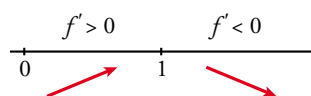
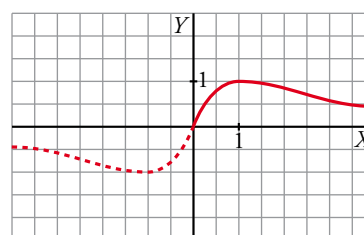
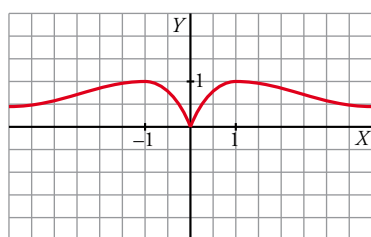
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

 $y = 0$ és asímtota horitzontal cap a $+\infty$ ($y > 0$).

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ (no val, } -1 < 0) \\ x = 1, f(1) = 1 \end{cases}$$

Signe de f' :Màxim en $(1, 1)$.La gràfica de $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$ és:

$$c) |x + 3| = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < -3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|x + 3|}{1 + |x|} = \begin{cases} \frac{-x - 3}{1 - x} & \text{si } x < -3 \\ \frac{x + 3}{1 - x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{x + 3}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- El domini de definició és $\mathbb{R}$.
- Tall amb l'eix Y : $x = 0$, $y = 3$

Talls amb l'eix X : $y = 0 \rightarrow \frac{|x + 3|}{1 + |x|} = 0 \rightarrow |x + 3| = 0 \rightarrow x = -3$

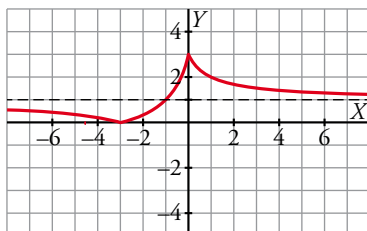
- No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x+3|}{1+|x|} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{1+x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+3|}{1+|x|} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-3}{1-x} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ La recta } y = 1 \text{ és l'asímtota horitzontal quan } x \rightarrow \pm \infty.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{(1-x)^2} & \text{si } x < -3 \\ \frac{4}{(1-x)^2} & \text{si } -3 < x < 0 \\ \frac{-2}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ és creixent en l'interval $(-3, 0)$.

$f(x)$ és decreixent en els intervals $(-\infty, -3)$ i $(0, +\infty)$.



26 Estudia i representa cada una de les funcions següents:

a) $y = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

b) $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

c) $y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

d) $y = \frac{e^{|x-1|}}{x^2+2x-3}$

- a) • Domini de definició:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \rightarrow x^2-1 > 0 \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

La funció té simetria parella. Podem limitar-nos a estudiar-la en l'interval $(1, +\infty)$.

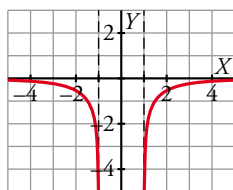
- Asímtotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = -\infty \rightarrow \text{Les rectes } x = 1, x = -1 \text{ són les asímptotes verticals de la funció.}$$

Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ és l'asímtota horitzontal quan } x \rightarrow \pm \infty.$$

- $f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)} \rightarrow f(x)$ és creixent en l'interval $(1, +\infty)$.



- b) • El domini de definició és $\mathbb{R}$.

- Tall amb l'eix Y : $x = 0, y = 0$

Talls amb l'eix X : $y = 0 \rightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0 \rightarrow x = 0$

- No té asímptotes verticals.

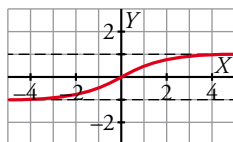
Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/e^x}{1 + 1/e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$$

Les rectes $y = 1$ i $y = -1$ són les asímtotes horitzontals quan $x \rightarrow +\infty$ i $x \rightarrow -\infty$, respectivament.

- $y' = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \rightarrow y$ és creixent en tot $\mathbb{R}$.



- c) • Domini de definició:

$$\frac{x}{x+1} > 0 \rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

- Asímtotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$$

Les rectes $x = -1$ i $x = 0$ són les asímtotes verticals de la funció.

Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

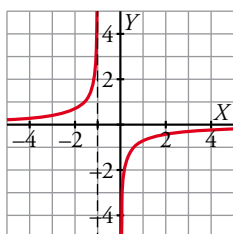
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

La recta $y = 0$ és l'asímtota horitzontal de la funció.

- $y' = \frac{1}{x(x+1)}$

Si $x > 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow y$ és creixent en l'interval $(0, +\infty)$.

Si $x < -1 \rightarrow y' > 0 \rightarrow y$ és creixent en l'interval $(-\infty, -1)$.



- d) • El domini de definició és: $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$

Tenint en compte la definició de valor absolut, $y = \begin{cases} \frac{e^{-x} + 1}{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x < 1 \text{ i } x \neq -3 \\ \frac{e^x - 1}{x^2 + 2x - 3} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

- Tall amb l'eix Y : $x = 0$, $y = -\frac{e}{3}$

- Asímptotes verticals:

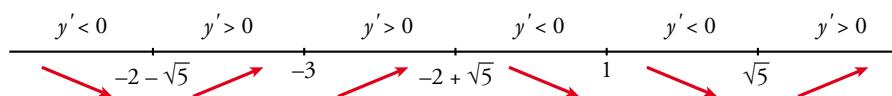
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = -\infty \end{array} \right\} x = -3 \text{ és asímptota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x+1}}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ és asímptota vertical.}$$

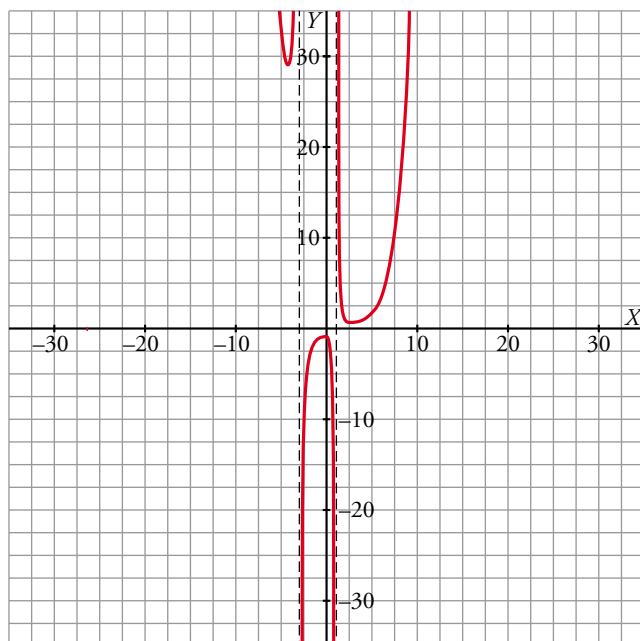
No té asímptotes horitzontals ni obliqües.

$$\bullet y' = \begin{cases} \frac{e^{1-x}(-x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} & \text{si } x < 1 \text{ i } x \neq -3 \\ \frac{e^{x-1}(x^2 - 5)}{(x^2 + 2x - 3)^2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$y' = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{e^{1-x}(-x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \rightarrow -x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -2 - \sqrt{5}, x = -2 + \sqrt{5} \\ \frac{e^{x-1}(x^2 - 5)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5} \end{cases}$$



Trobem les ordenades dels extrems relatius i s'obté la gràfica:



27 La recta $y = 2x + 6$ és una asímptota obliqua de la funció:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$$

Troba el valor de k i representa la funció obtinguda així.

- Trobem k :

Si $y = 2x + 6$ és asímptota obliqua, tenim que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

També podríem fer la divisió:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 1 \quad | \quad x - k \\ -2x^2 + 2kx \quad | \quad 2x + 2k \\ \hline 2kx + 1 \\ -2kx + 2k^2 \\ \hline 1 + 2k^2 \end{array}$$

L'asímtota obliqua és $y = 2x + 2k$.

$$2x + 2k = 2x + 6 \rightarrow 2k = 6 \rightarrow k = 3$$

$$\text{Per tant: } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$$

- Domini: $\mathbb{R} - \{3\}$

- Asímtotes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ és asímtota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ és asímtota obliqua.

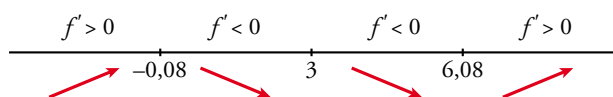
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 6$.

- Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{4x(x - 3) - (2x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6,08 \\ x = -0,08 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:



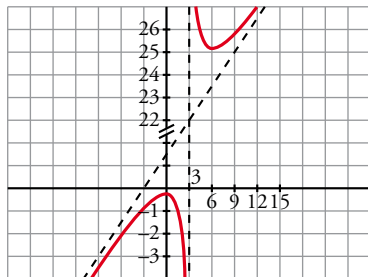
$f(x)$ és creixent en $(-\infty; -0,08) \cup (6,08; +\infty)$.

És decreixent en $(-0,08; 3) \cup (3; 6,08)$.

Té un màxim en $(-0,08; -0,33)$.

Té un mínim en $(6,08; 24,32)$.

- Gràfica:



28 Donada la funció:

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$$

calcula a i b perquè la gràfica de f passi pel punt $(-2, -6)$ i tingui, en aquest punt, una tangent horitzontal. Per a aquests valors de a i b , representa la funció.

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Passa per } (-2, -6), f(-2) = -6 \rightarrow -2a + b - 4 = -6 \\ \text{Tangent horitzontal} \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Per a aquests valors, queda: $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$

- Domini: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asímtotes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \rightarrow y = 2x + 2 \text{ és asímtota obliqua.}$$

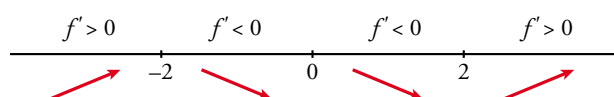
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- Punts singulars:

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

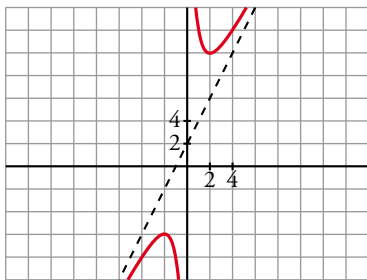
Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. És decreixent en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

Té un màxim en $(-2, -6)$. Té un mínim en $(2, 10)$.

- Gràfica:



29 Troba els valors de a , b i c per als quals la funció:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

té com a asímptota horitzontal la recta $y = -1$ i un mínim en el punt $(0, 1)$.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

$$\text{Si } y = -1 \text{ és asímptota horitzontal} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a \rightarrow a = -1$$

Si té un mínim en $(0, 1)$, ha de ser $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - (ax^2 + bx + c)2x}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow f'(0) = \frac{b(-4) - 0}{16} = \frac{-b}{4} = 0 \rightarrow b = 0$$

$$\text{A més: } f(0) = 1 \rightarrow \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c}{-4} = 1 \rightarrow c = -4$$

$$\text{Per tant: } f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$$

30 Comprova que la funció $y = \frac{|x|}{x+1}$ té dues asímptotes horitzontals.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1 \text{ és asímptota horitzontal quan } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ és asímptota horitzontal quan } x \rightarrow +\infty.$$

31 La funció $f(x) = x + e^{-x}$, té alguna asímptota? En cas afirmatiu, troba-la.

$$f(x) = x + e^{-x}$$

- Domini: $\mathbb{R}$.
- No té asímptotes verticals.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$

No té asímptotes horitzontals.

- Asímtotes obliqües:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot e^x} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$y = x$ és asímptota obliqua cap a $+\infty$.

No hi ha asímptota obliqua cap a $-\infty$ perquè: $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty$

32 Segui la funció $f(x)$:

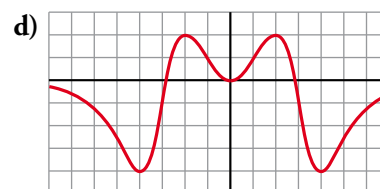
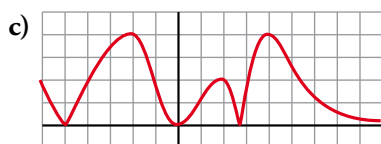
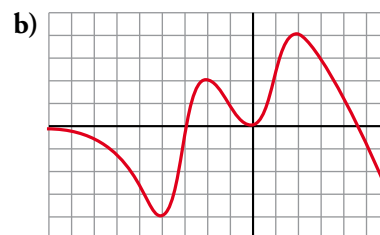
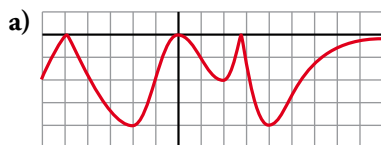
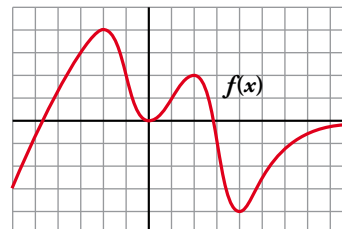
Indica quina gràfica correspon a aquestes altres:

$$f(-x)$$

$$f(|x|)$$

$$-|f(x)|$$

$$|f(x)|$$



a) $-|f(x)|$

b) $f(-x)$

c) $|f(x)|$

d) $f(|x|)$

33 La funció següent representa la demanda d'un article al llarg dels anys:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8t+4}{t+2} & \text{si } t > 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} t: \text{anys} \\ f(t): \text{milers d'articles} \end{matrix}$$

a) Representa la funció.

b) Quina quantitat es demana al cap de 2 anys? A partir de quan es demanen més de 6000 unitats?

c) Quina quantitat d'unitats no arribarà mai a superar la demanda per molt que passi el temps?

a) En el primer interval, la funció està definida per mitjà d'una paràbola. En el segon interval és un tros de paràbola.

- La funció és contínua en $t = 2$, ja que:

$$f(2) = 5$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 2^-} (t^2 + 1) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{8t+4}{t+2} = 5 \end{cases}$$

- Té una asímptota horitzontal quan $t \rightarrow +\infty$, ja que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t+4}{t+2} = 8$.

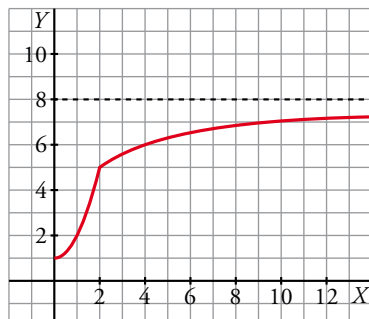
Posició:

$$\text{Si } t \rightarrow +\infty, \frac{8t+4}{t+2} - 8 = -\frac{12}{t+2} < 0. \text{ La funció queda per sota de l'asímtota.}$$

- Creixement i decreixement:

$$f'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 2 \\ \frac{12}{(t+2)^2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Sempre és positiva; per tant, sempre és creixent.



- b) Com que $f(2) = 5$, als 2 anys es demanen 5 000 unitats.

$$6 = \frac{8t+4}{t+2} \rightarrow t = 4. \text{ Per tant, a partir dels 4 anys es demanen més de 6 000 unitats.}$$

- c) Com podem veure en la gràfica, com que és $y = 8$ asímptota horitzontal, la demanda mai superarà les 8 000 unitats.

34 La variació del preu d'un article ve donada per:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 5 - \frac{t}{2} & \text{si } 2 < t \leq 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t: \text{ anys} \\ f(t): \text{ centenars d'euros} \end{array}$$

- a) Representa la funció.

- b) Quin va ser el preu inicial? I el final?

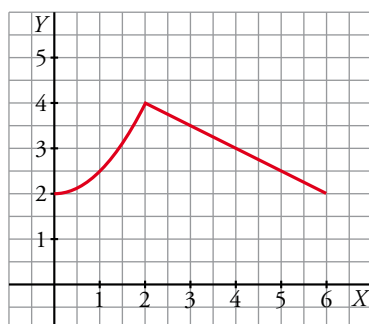
- c) Quant va durar la venda de l'article? Quin en va ser el preu màxim?

- a) La funció està definida per intervals per mitjà de dues funcions polinòmiques. La primera és una paràbola i la segona és una recta.

$$\bullet \text{ És contínua en } t = 2, \text{ ja que } f(2) = 4 \text{ i } \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \right) = 4$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} \left(5 - \frac{t}{2} \right) = 4$$

- La seva gràfica és:



- b) Com que $f(0) = 2$, el preu inicial va ser de 200 €. El preu final va ser també de 200 €, perquè $f(6) = 2$.

- c) L'article es va vendre durant 6 anys. El preu màxim va ser de 400 € i es va donar als 2 anys, ja que $f(2) = 4$.

Pàgina 217

Qüestions teòriques

35 Una funció $f(x)$ té les característiques següents:

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$ i és derivable en tot el seu domini.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Indica quines de les afirmacions següents són segures, quines són possibles i quines són impossibles:

- a) $f(x)$ és parella.
 - b) $f(x)$ és imparella.
 - c) No té màxims ni mínims.
 - d) Té un màxim i un mínim.
 - e) Talla l'eix X en dos punts.
 - f) Talla l'eix X almenys en dos punts.
 - g) Té una asímptota obliqua.
- a) Impossible, perquè, per exemple, a prop de $x = 0$ no és simètrica respecte de l'eix vertical.
 - b) Probable, perquè una funció imparella pot complir aquestes condicions.
 - c) Probable, encara que aquesta afirmació no està relacionada amb les dades del problema.
 - d) Probable, encara que aquesta afirmació no està relacionada amb les dades del problema.
 - e) Probable, per la seva continuïtat i el seu comportament a ambdós costats de l'eix vertical.
 - f) Segur. Com que és contínua ha de tallar el semieix negatiu de les X en pujar des de $-\infty$ (quan $x \rightarrow -\infty$) fins a $+\infty$ (quan $x \rightarrow 0^-$). Anàlogament ocorre amb el semieix positiu de les X .
 - g) Probable. Podria ser també branques parabòliques.

36 La funció $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ no està definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; no obstant això, té només una asímptota vertical.

Justifica aquesta informació.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ és asímptota vertical.}$$

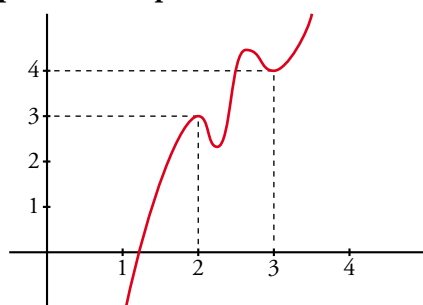
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hi ha una discontinuïtat evitable, no hi ha una asímptota.

- 37** Si és possible, dibuixa una funció contínua en l'interval $[0, 4]$ que tingui, almenys, un màxim relatiu en $(2, 3)$ i un mínim relatiu en $(3, 4)$. Si la funció fos polinòmica, quin hauria de ser, «com a mínim» el seu grau?

$f(x)$ ha de tenir, almenys, dos màxims i dos mínims en $[0, 4]$, si és derivable.

Si $f(x)$ fos un polinomi, tindria, com a mínim, grau 5 (ja que $f'(x)$ s'anul·laria, almenys, en quatre punts).



Per aprofundir

- 38** La concentració (en %) de nitrogen d'un compost, en funció del temps $t \in [0, +\infty)$ mesurat en segons, ve donada per la funció:

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

- a) Comprova que la concentració de nitrogen creix amb el temps. Per a quin t la concentració de nitrogen és mínima i quina és aquesta concentració?
- b) A quin valor tendeix la concentració de nitrogen quan el temps tendeix a infinit?

a) $N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$

$N'(t) = \frac{120e^{-t}}{(2e^{-t} + 1)^2}$ és sempre positiu per a qualsevol valor de t . Per tant, $N(t)$ és creixent.

La concentració de nitrogen és mínima per a $t = 0$ i el seu valor és $N(0) = 20$.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{1 + 2e^{-t}} = 60$ és el valor al que tendeix la concentració quan el temps tendeix a infinit.

- 39** Una partícula es mou al llarg de la gràfica de la corba d'equació $y = \frac{2x}{1 - x^2}$ per a $x > 1$.

En el punt $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$, la deixa i es desplaça al llarg de la recta tangent a aquesta corba.

- a) Troba l'equació de la tangent.
- b) Si es desplaça de dreta a esquerra, troba el punt en què la partícula topa amb l'asíptota vertical més pròxima al punt P .
- c) Si el desplaçament és d'esquerra a dreta, troba el punt en què la partícula topa amb l'eix X .

- a) Pendent de la recta tangent en $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2) - 2x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2}$$

$$m = f'(2) = \frac{10}{9}$$

L'equació de la recta tangent en P és:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x - 2) \rightarrow y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

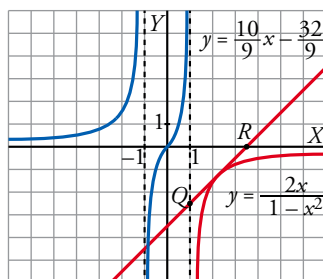
- b) L'asíptota vertical més pròxima a P és $x = 1$. Hem de trobar el punt d'intersecció de $x = 1$ amb la recta tangent anterior:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} y = \frac{-22}{9} \quad \left. \begin{array}{l} y = \frac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} \text{ El punt és } Q\left(1, \frac{-22}{9}\right).$$

- c) Hem de trobar el punt en què la recta anterior talla l'eix OX :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array} \right\} \frac{10}{9}x = \frac{32}{9} \rightarrow x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{16}{5} \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ El punt és } R\left(\frac{16}{5}, 0\right).$$

Aquesta gràfica mostra la corba $y = \frac{2x}{1-x^2}$, la recta tangent $y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$ i els punts $Q\left(1, \frac{-22}{9}\right)$ i $R\left(\frac{16}{5}, 0\right)$.



Autoavaluació

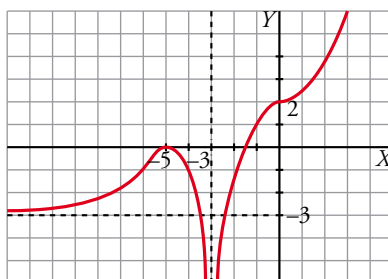
Pàgina 217

1 Dibuixa la gràfica d'una funció f de la qual sabem:

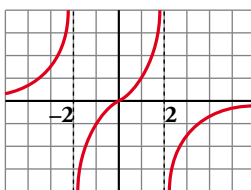
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$f'(-5) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f(-5) = 0; \quad f(0) = 2$$

Té tangent horitzontal en els punts $(-5, 0)$ i $(0, 2)$. En el primer té un màxim, i en el segon, un punt d'inflexió.



2 Descriu la funció seguint indicant-ne el domini, les asímptotes i les branques infinites. Fes-ho donant valors de la funció i de certs límits.



- El domini de definició és $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

És una funció imparella, contínua i derivable en el seu domini.

- Té dues asímptotes verticals: les rectes $x = -2$ i $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

La recta $y = 0$ és l'asímtota horitzontal de la funció quan $x \rightarrow \pm\infty$.

- És creixent en els intervals $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ i $(2, +\infty)$.

3 Té $f(x) = x^3 + 2x + 4$ màxims o mínims? I algun punt d'inflexió? Estudia'n la curvatura i representa-la.

$$f(x) = x^3 + 2x + 4$$

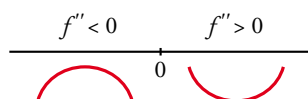
$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = -2 \rightarrow \text{no té solució.}$$

$$f'(x) > 0 \text{ per a tot } x \rightarrow f(x) \text{ és creixent. No té màxims ni mínims.}$$

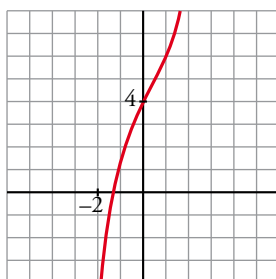
$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signe de $f''(x)$:Hi ha un punt d'inflexió en $(0, 4)$.

- A més, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Gràfica:



4 Estudia les asímptotes i els punts singulars de cada una de les funcions següents i representa-les gràficament:

a) $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$

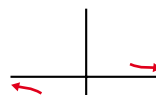
b) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

a) • Domini: $\mathbb{R}$

• Asímtotes:

No té asímptotes verticals, ja que $x^2 + 4 \neq 0$.Horizontals: $y = 0$, ja que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{x^2 + 4} = 0$.

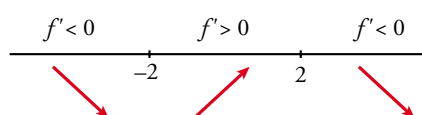
Posició $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0 \end{cases}$



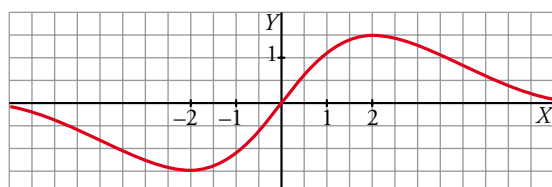
• Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-6x^2 + 24}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \begin{cases} x = -2, f(-2) = -3/2 \\ x = 2, f(2) = 3/2 \end{cases}$$

Signe de $f'(x)$:Mínim: $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$. Màxim: $\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

• Representació:



b) • Domini: $\mathbb{R} - \{3\}$

- Asímptotes verticals: $x = 3$, perquè $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \pm \infty$.

$$\text{Posició} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty \end{cases}$$

- Asímptotes horitzontals:

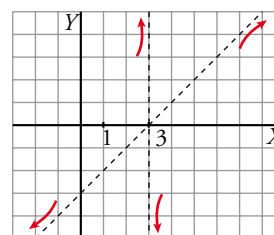
No té, perquè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$.

- Asímptotes obliques:

Expressem la funció de la forma $\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{quocient} + \frac{\text{residu}}{\text{divisor}}$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = x - 3 + \frac{-4}{x - 3} \rightarrow y = x - 3 \text{ és asímptota obliqua.}$$

$$\text{Posició} \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) < x - 3 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) > x - 3 \end{cases}$$



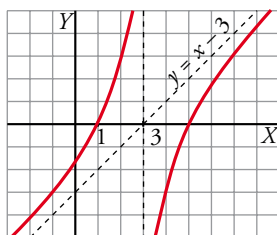
- Punts singulars:

$$y' = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ (no té solució).}$$

Signe de y' : la derivada és positiva en tot el domini. La funció és creixent. No té màxims ni mínims.

Talla els eixos en els punts $(0, -\frac{5}{3})$, $(1, 0)$ i $(5, 0)$.



5 Representa la funció $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Indica'n els intervals de creixement i de decreixement i els extrems.

Per a $x < 2$, la gràfica és una paràbola amb vèrtex en $(0, 4)$.

Per a $x > 2$, és una recta.

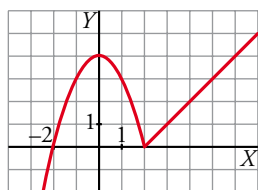
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{No és derivable en } x = 2.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 4 \begin{cases} f(x) \text{ és creixent en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \\ \text{És decreixent en } (0, 2). \end{cases}$$

Té un màxim en el punt (0, 4) i un mínim en (2, 0).

Representació:



6 Troba els màxims i els mínims de $f(x) = x\sqrt{x+3}$. Indica si té asímptotes i representa-la gràficament.

$$f(x) = x\sqrt{x+3}. \text{ Domini} = (-3, +\infty)$$

- Trobem els punts singulars:

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x+6 = 0 \rightarrow x = -2, f(-2) = -2$$

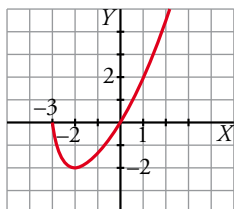
Signe de f' : $\begin{array}{ccc} f' < 0 & & f' > 0 \\ & \swarrow & \nearrow \\ & -2 & \end{array}$

La funció té un mínim en $(-2, -2)$.

- La funció no té asímptotes:

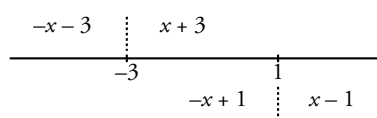
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

- Gràfica:



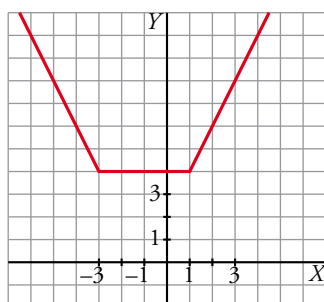
7 Dibuixa la gràfica de $f(x) = |x+3| + |x-1|$.

$$f(x) = |x+3| + |x-1|$$



- Si $x < -3$: $-x-3-x+1 = -2x-2$
- Si $-3 \leq x < 1$: $x+3-x+1 = 4$
- Si $x \geq 1$: $x+3+x-1 = 2x+2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 2x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



- 8** Calcula els punts de tall amb els eixos i els punts singulars de la funció $y = \ln(-x^2 + 1)$. Determina'n els intervals de creixement i de decreixement i esbossa'n la gràfica.

• $\text{Domini} = (-1, 1) \rightarrow y$ és una funció parella.

• $f(x) = 0 \rightarrow f(x) = -x^2 + 1 = 1 \rightarrow x = 0$

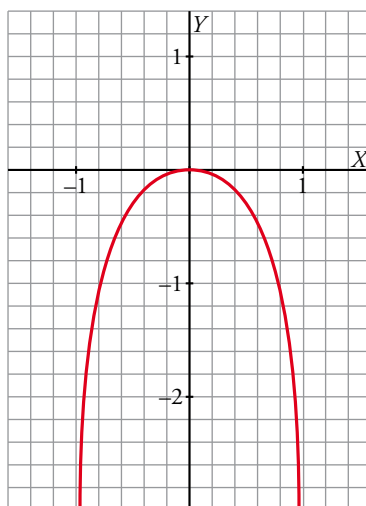
L'únic punt de tall amb els eixos és $(0, 0)$.

• $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0$ per a tot x .

Per tant, $(0, 0)$ és un màxim.

• f té dues asímptotes verticals en $x = -1$ i $x = 1$.



- 9** Representa la funció $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

• $\text{Domini} = \mathbb{R}$.

• No té asímptotes verticals, perquè $e^x \neq 0$ per a tot x .

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow y = 0$ és asímptota horitzontal cap a $+\infty \rightarrow f(x) > 0$

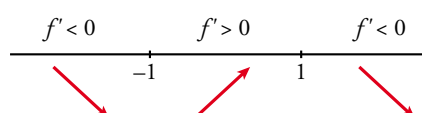
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \rightarrow$ No té asímptota horitzontal cap a $-\infty$.

• Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x+2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

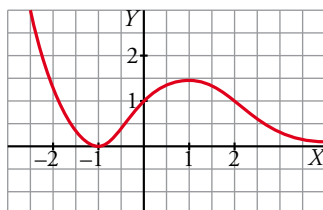
$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = 1, f(1) = \frac{4}{e} \\ x = -1, f(-1) = 0 \end{cases}$$

Signe de f' :

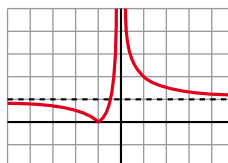
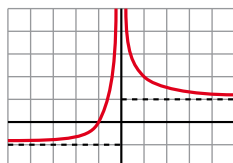


Mínim: $(-1, 0)$. Màxim: $\left(1, \frac{4}{e}\right)$

- Gràfica:



10 Quina gràfica correspon a $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$?



$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- Asíptota vertical: $x = 0$
- Asíptotes horitzontals: $y = -1$ i $y = 1$

La gràfica de f és la primera.