UNITAT 13

LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONS

Pàgina 330

Dos trens

Un Talgo i un tren de mercaderies surten de la mateixa estació, per la mateixa via i en idèntica direcció, un rere l'altre, quasi simultàniament.

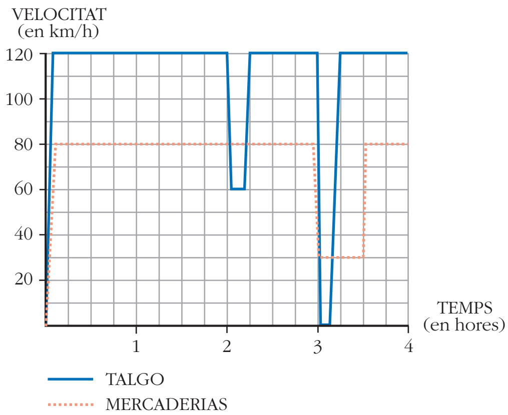
Com podem veure en la gràfica, el Talgo, al cap de dues hores, redueix la velocitat:

A què pot ser degut això?

Per què no redueix la marxa també l'altre tren?

A les tres hores tots dos trens modifiquen la marxa: el Talgo s'atura durant uns quants minuts, mentre que el de mercaderies va molt a poc a poc durant mitja hora.

Aquestes són les gràfiques temps - velocitat d'ambdós moviments.



Pàgina 331

- **Per fer-nos una idea clara d'aquests moviments, fem els càlculs següents:**

  a) **El Talgo, durant dues hores, va a 120 km/h. Quants quilòmetres recorre a aquesta velocitat?**

  b) **De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo redueix la velocitat. Quants quilòmetres recorre a aquesta velocitat?**

c) El tren de mercaderies disminueix la marxa a les 3 h. Quina distància ha recorregut fins en aquest moment?

d) Quina distància recorre el tren de mercaderies durant la mitja hora en què va lent?

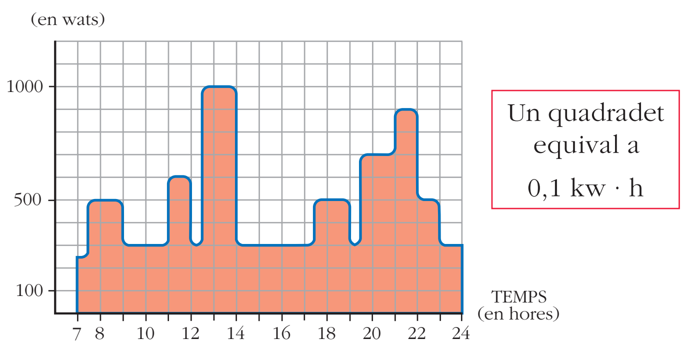
Fent els càlculs anteriors, podràs comprovar que: tots dos trens recorren 240 km a velocitat normal. Redueixen la velocitat en el mateix lloc i recorren, així, uns altres 15 km (potser per obres en la via) i, a continuació, recuperen la velocitat normal. (És a dir, el tren de mercaderies no frena *quan* frena el Talgo, però sí *on* frena el Talgo.) Més endavant el Talgo s'atura en una estació.

e) A quina distància de l'estació de sortida hi ha aquesta altra estació en la qual s'atura el Talgo?

a) 240 km.
b) 15 km.
c) 240 km.
d) 15 km.
e) 345 km.

Consum d'energia elèctrica

- **La gràfica ens dóna la potència elèctrica que hi ha en funcionament en un habitatge, a cada instant, entre les 7 del matí i les 12 de la nit.**



L'àrea sota la corba és l'energia consumida:

$$\textbf{potència} \times \textbf{temps} = \textbf{energia}$$

- **Quants kw · h s'han consumit, aproximadament, en aquestes 17 hores?**

Aproximadament 8,1 Kw.

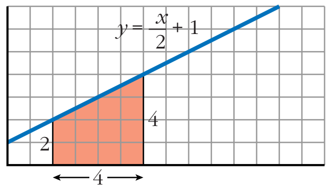
Pàgina 335

1. Troba gràficament les integrals següents:

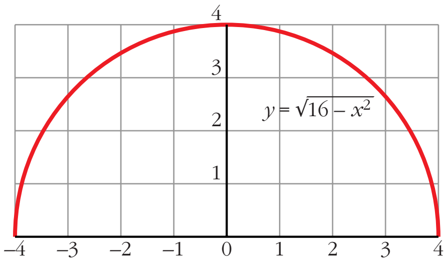
a) $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{2}+1\right)dx$ b) $\displaystyle\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$

a) És un trapezi les bases del qual mesuren 2 i 4 i que té una altura de 4.

$$\text{Àrea} = \frac{2+4}{2} \cdot 4 = 12 \text{ u}^2$$



b) $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ (Circumferència)



El recinte l'àrea del qual volem calcular és mig cercle de radi 4 u.

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$$

2. Troba gràficament les integrals següents:

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4} (\sqrt{16 - x^2} + 4)dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^{4} (4 - \sqrt{16 - x^2})dx$

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4} (\sqrt{16 - x^2} + 4)\, dx = \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx + \int_{-4}^{4} 4\, dx$

Anomenem $I_1 = \displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_{-4}^{4} 4\, dx$.

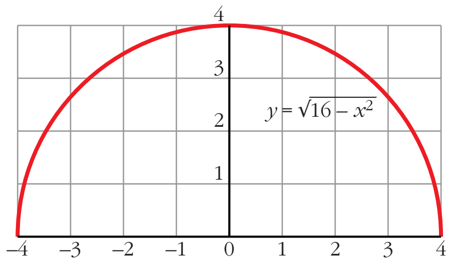
Resolem gràficament les dues integrals per posteriorment sumar-ne els resultats.

I_1: $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ (circumferència)

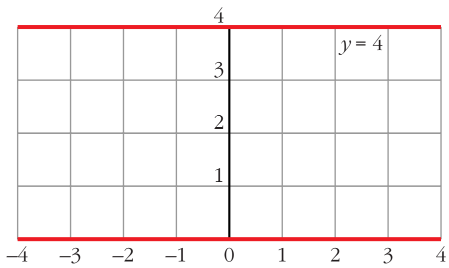
El recinte l'àrea del qual volem calcular és mig cercle de radi 4 u.

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$$



I_2: Es tracta d'un rectangle de dimensions 8 u × 4 u. Per tant, la seva àrea és 32 u^2.



Finalment, $I_1 + I_2 = 25{,}1 + 32 = 57{,}1$ u^2.

b) $\displaystyle\int_{-4}^{4} (4 - \sqrt{16 - x^2}\,)\, dx = \int_{-4}^{4} 4\, dx - \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx$

Observem que es tracta de les mateixes integrals que en l'apartat a), tot i que ara és $I_2 - I_1$, i té com a resultat $32 - 25{,}1 = 6{,}9 \text{ u}^2$.

Pàgina 339

3. Sigui la funció: $F(x) = \displaystyle\int_0^x log\,(t^2 + 4)dt$. Calcula $F'(x)$.

$F(x) = \displaystyle\int_0^x log(t^2 + 4)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$, sent $f(t) = log(t^2 + 4)$ contínua.

Pel teorema fonamental del càlcul:

$$F'(x) = f(x) = log(x^2 + 4)$$

4. Calcula la integral següent: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} cos\, x\, dx$

$$\int_0^{\pi/2} cos\, x\, dx = [sin\, x]_0^{\pi/2} = sin\, \frac{\pi}{2} - sin\, 0 = 1 - 0 = 1$$

Pàgina 340

5. Calcula: $\displaystyle\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\, dx$

$$I = \left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 - 3x\right]_1^6 = \left(6^4 - \frac{4}{5} \cdot 6^5 - 3 \cdot 6\right) - \left(1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^5 - 3 \cdot 1\right) =$$

$$= -4942{,}8 + 2{,}8 = -4940$$

6. Calcula: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

$$I = [arc\ tg\ x]_0^1 = arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0 = \frac{\pi}{4}$$

Observació: $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$

Pàgina 342

7. Troba l'àrea compresa entre la funció $y = x^3 - x^2 - 6x$ i l'eix X.

I. Busquem les solucions de l'equació: $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Són -2, 0 i 3.

II. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Busquem la primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

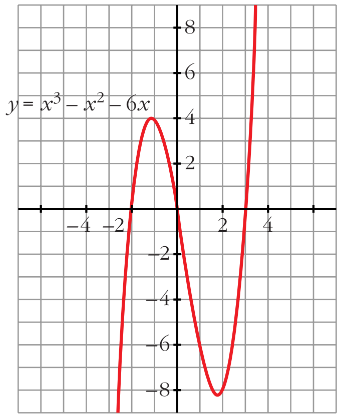
III. $G(-2) = \frac{-16}{3}$, $G(0) = 0$, $G(3) = \frac{-63}{4}$

IV. $G(0) - G(-2) = \frac{16}{3}$

$G(3) - G(0) = \frac{-63}{4}$

L'àrea buscada és: $\frac{16}{3} + \left|\frac{-63}{4}\right| = \frac{253}{12}$ u^2

(S'inclou la gràfica per entendre el procés, però és innecessària per obtenir l'àrea.)



8. Troba l'àrea compresa entre les funcions $y = x^4 + x^3$ i $y = x^4 + x^2 + 6x$.

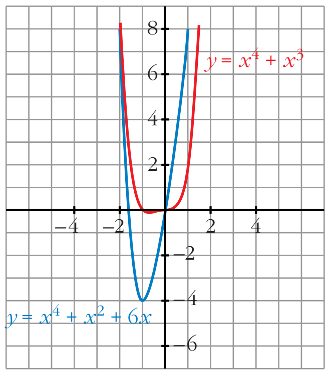
S'obté la funció diferència:

$$y = (x^4 + x^3) - (x^4 + x^2 + 6x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Ara es calcula l'àrea compresa entre aquesta funció i l'eix X, la qual cosa s'ha fet ja en l'exercici anterior.

Així doncs, l'àrea buscada és $\frac{253}{12}$ u^2.

(També aquí és innecessària la gràfica per obtenir l'àrea buscada.)



Pàgina 343

9. Calcula el volum d'una esfera de radi 5 cm fent girar la semicircumferència $y = \sqrt{25 - x^2}$ al voltant de l'eix X. Quins límits d'integració has de prendre?

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} (25 - x^2)\,dx = \pi \cdot \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} = \pi \cdot \frac{500}{3} \text{ u}^3$$

Observació: El volum del cos engendrat pel cercle $x^2 + y^2 = r^2$, quan gira al voltant de l'eix X és:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \text{ u}^3$$

Pàgina 349

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

10. Calcula les integrals següents:

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \sqrt{5} - 1$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt = \int_1^2 2\,(t^2-1)dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^2 =$

$\displaystyle = 2\left[\frac{(\sqrt{x})^3}{3} - \sqrt{x}\right]_1^4 = 2\left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = 2\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3}$

11. Calcula: $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \textit{sin}\ x\ \textit{cos}\ x\ dx$

$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \textit{sin}\ x \cdot \textit{cos}\ x\ dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}$

Apliquem el següent canvi:

$\textit{sin}\ x = t;\quad \textit{cos}\ x \cdot dx = dt$

per a $x = 0;\ t = 0$

per a $x = \dfrac{\pi}{4};\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. Troba el valor de la integral definida de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3\,\textit{cos}\,(2\pi x)$ en l'interval $I = [0, 2]$.

$\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3\cdot \textit{cos}\,(2\pi x)\right) dx = \left[\textit{ln}\,(x+1) - \frac{3\cdot \textit{sin}\,(2\pi x)}{2\cdot\pi}\right]_0^2 =$

$= \textit{ln}\,(3) - \textit{ln}\,(1) = \textit{ln}\,(3)$

13. Calcula l'àrea compresa entre la corba: $y = 3x^2 - x + 1$, l'eix X i les rectes $x = 0$ y $x = 4$.

I. Calculem les solucions de l'equació: $3x^2 - x + 1 = 0$

No té solucions, per la qual cosa no talla l'eix X.

II. Busquem una primitiva de $f(x)$:

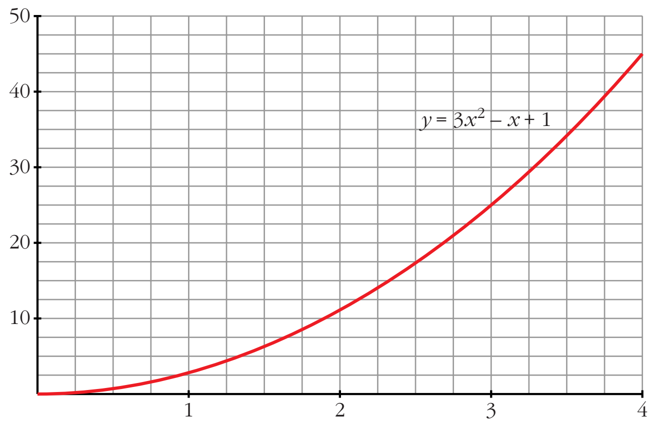
$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)\, dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $G(0) = 0$, $G(4) = 60$

IV. $G(4) - G(0) = 60$

L'àrea buscada és 60 u^2.

(Hem inclòs la gràfica per entendre el procés, però és innecessària per obtenir l'àrea.)



14. Calcula l'àrea sota la corba $y = 3x - 2$ entre $x = -1$ i $x = 1$.

I. Busquem la solució de l'equació $3x - 2 = 0$. És $\frac{2}{3}$.

II. Ordenem els extrems de l'interval i l'arrel que hi ha entre ells: $-1, \frac{2}{3}, 1$.

III. Busquem una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x - 2)\, dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

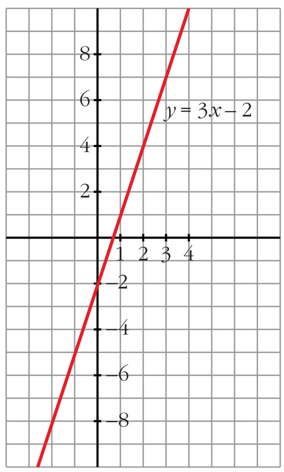
IV. $G(-1) = \frac{7}{2}$, $G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$, $G(1) = \frac{-1}{2}$

V. $G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$

$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

L'àrea buscada és: $\left|\frac{-25}{6}\right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ u^2.

(S'inclou la gràfica, si bé és innecessària per obtenir-ne l'àrea.)



15. **Troba l'àrea sota la corba $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ i $x = 4$.**

I. Busquem la primitiva de la funció $f(x) = \sqrt{x}$.

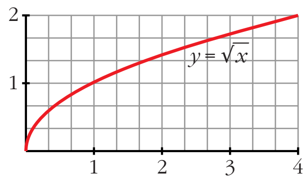
$$G(x) = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II. $G(0) = 0$, $G(4) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$

III. $G(4) - G(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

L'àrea buscada és: $\frac{16}{3}$ u^2.

(S'inclou la gràfica, si bé és innecessària per obtenir l'àrea.)



16. **Calcula l'àrea de la regió limitada per la corba $y = (x - 1)^2 (x + 1)$ i les rectes $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.**

I. Busquem les solucions de l'equació: $(x - 1)^2 \cdot (x + 1) = 0$. Són -1 i 1.

II. Ordenem els extrems de l'interval i les arrels que hi ha entre ells: 1, 2.

III. Busquem una primitiva de $f(x)$:

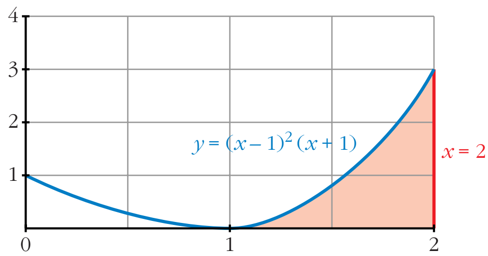
$$G(x) = \int (x - 1)^2 \cdot (x + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

IV. $G(1) = \frac{5}{12}$, $G(2) = \frac{4}{3}$

V. $G(2) - G(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$

L'àrea buscada és $\frac{11}{12}$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé és innecessària per resoldre l'exercici.)



17. **Calcula l'àrea de la regió limitada per la corba $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ i les rectes $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.**

I. Busquem la solució de $\frac{x}{x^2 - 2} = 0$. És 0.

II. Com que aquesta solució es troba fora de l'interval d'integració, els extrems són 2 i 3.

III. Busquem la primitiva de la funció $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$, que és contínua en aquest interval:

$$G(x) = \int \frac{x}{x^2 - 2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot ln\, |x^2 - 2|$$

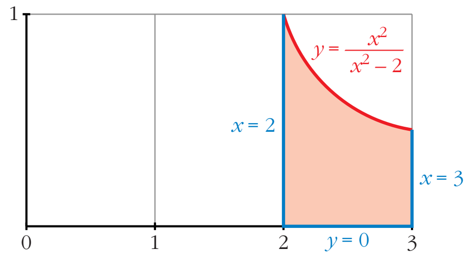
IV. $G(2) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(2)$, $G(3) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(7)$

V. $G(3) - G(2) = \frac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)]$

L'àrea buscada és:

$$\frac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)]\ \text{u}^2.$$

(S'adjunta la gràfica, si bé és innecessària per a la resolució de l'exercici.)



18. Troba en cada cas l'àrea compresa entre:

a) $y = x^2 - 5$ **i** $y = -x^2 + 5$.

b) $y = x^2$ **i** $y^2 = x$.

a) I. Busquem les solucions de: $x^2 - 5 = -x^2 + 5$. Són $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Per tant, aquests seran els nostres límits d'integració.

II. S'obté la funció diferència:

$$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$$

III. Busquem la seva primitiva:

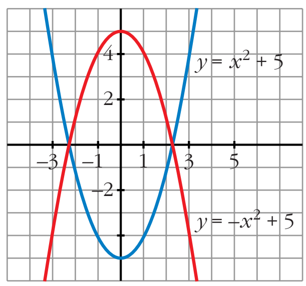
$$G(x) = \int (-2x^2 + 10)\,dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV. $G(-\sqrt{5}) = \frac{-20}{3}\sqrt{5}$, $G(\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5}$

V. $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{20}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}$

L'àrea buscada és: $\frac{40}{3}\sqrt{5}$ u^2.

(S'inclou la gràfica, tot i que és innecessària per obtenir l'àrea.)



b) $y = x^2$ Punts de tall $x^2 = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x}$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

L'arrel en el tram (0, 1) va per sobre de la paràbola:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}\,x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

19. **Calcula l'àrea compresa entre les corbes donades en cada un dels exercicis següents:**

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $y = x$

d) $y = x(x-1)(x-2)$; $y = 0$

e) $y = x^2$; $y = 1$

f) $y = x^2 - 2x$; $y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$; $y = 2x - 7$

a) I. Busquem les solucions de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Són -2 i 2.

Per tant, aquests seran els nostres límits d'integració.

II. Calculem la funció diferència:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculem la seva primitiva:

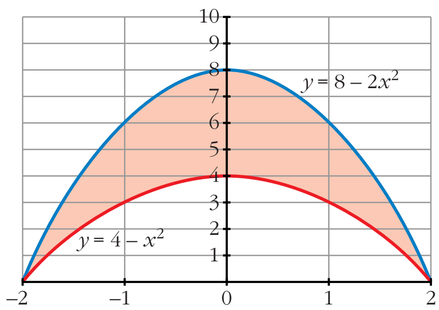
$$G(x) = \int (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$

L'àrea buscada és: $\frac{32}{3}$ u^2.



b) I. Busquem les solucions de l'equació: $x^2 = 4 - x^2$.

Són $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ (els nostres límits d'integració).

II. Calculem la funció diferència:

$$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$$

III. Calculem la seva primitiva:

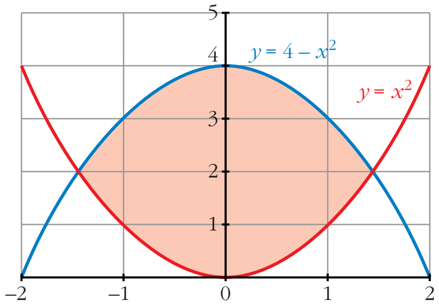
$$G(x) = \int (4 - 2x^2)\, dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \dfrac{-8\sqrt{2}}{3}$, $G(\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{8\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

L'àrea buscada és: $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé és innecessària per trobar l'àrea.)



c) I. Busquem les solucions de l'equació: $x^3 - 3x^2 + 3x = x$. Són 0, 1 i 2.

II. Calculem la funció diferència:

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$$

III. Calculem la seva primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

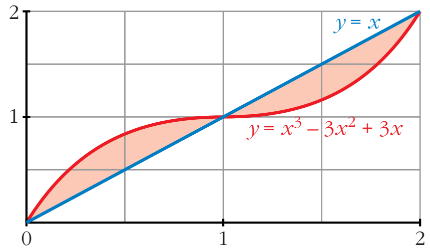
IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \dfrac{1}{4}$, $G(2) = 0$

$G(1) - G(0) = \dfrac{1}{4}$

$G(2) - G(1) = \dfrac{-1}{4}$

L'àrea buscada és: $\dfrac{1}{4} + \left|\dfrac{-1}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$ u^2.

(La gràfica que s'adjunta és per entendre millor l'exercici, però és innecessària per obtenir l'àrea.)



d) I. Busquem les solucions de: $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0$. Són 0, 1 i 2.

II. Calculem la funció diferència:

$$y = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

III. Calculem la seva primitiva:

$$G(x) = \int x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Resulta que es tracta del mateix exercici que l'apartat c).

L'àrea buscada és: $\frac{1}{2}$ u^2.

e) I. Busquem les solucions de l'equació: $x^2 = 1$. Són -1 i 1.

II. Calculem la funció diferència:

$$y = x^2 - 1$$

III. Calculem la seva primitiva:

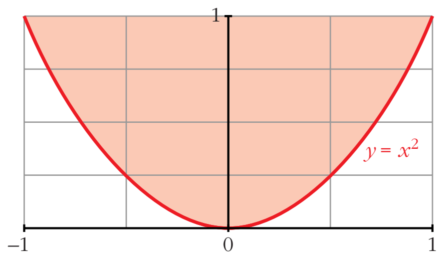
$$G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x$$

IV. $G(-1) = \frac{2}{3}$, $G(1) = \frac{-2}{3}$

V. $G(1) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$

L'àrea buscada és: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé és innecessària per resoldre l'exercici.)



f) I. Busquem les solucions de l'equació: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$. Són 0 i 3.

II. Calculem la funció diferència:

$$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$$

III. Calculem la seva primitiva:

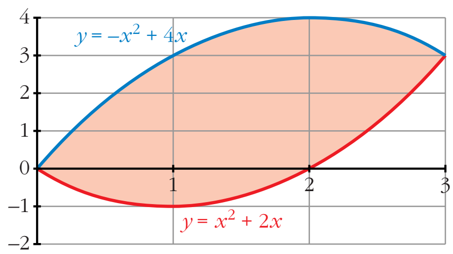
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV. $G(0) = 0$, $G(3) = -9$

V. $G(3) - G(0) = -9$

L'àrea buscada és: $|-9| = 9$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé és innecessària.)



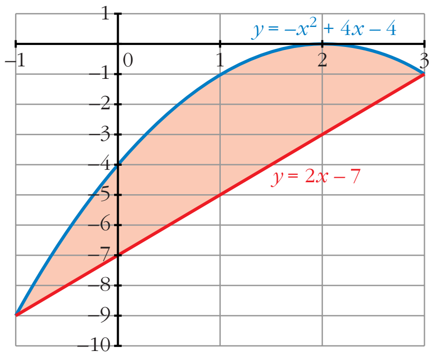
g) I. Busquem les solucions de: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$. Són -1 i 3.

II. Calculem la funció diferència:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3.$$

III. Calculem la seva primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$



IV. $G(-1) = \frac{-5}{3}$, $G(3) = 9$

V. $G(3) - G(-1) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$

L'àrea buscada és: $\frac{32}{3}$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé és innecessària per a la resolució de l'exercici.)

20. Dibuixa i troba l'àrea de la regió limitada per la corba: $y = x(3 - x)$ i la recta $y = 2x - 2$.

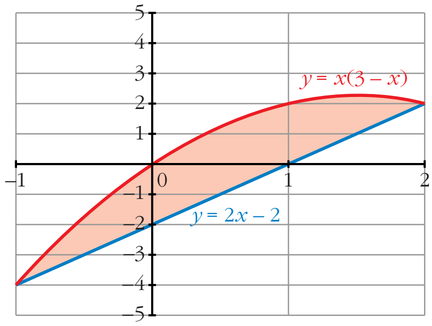
I. Busquem les solucions de l'equació: $x(3 - x) = 2x - 2$. Són -1 i 2.

II. Calculem la funció diferència:

$f(x) = x(3 - x) - (2x - 2)$

III. Calculem la seva primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\,dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$



IV. $G(-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{-7}{6}$; $G(2) = \frac{-8}{3} + 2 + 4 = \frac{10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

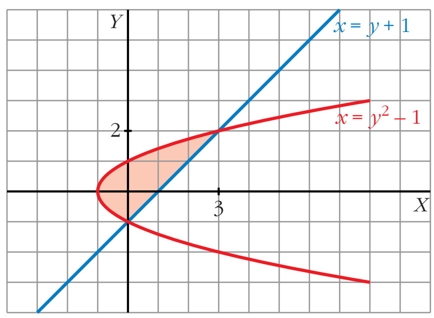
L'àrea buscada és: $\frac{9}{2}$ u^2.

21. Dibuixa el recinte pla limitat per la paràbola $y^2 - x = 1$ i per la recta paral·lela a $y = x$ que passa pel punt (1, 0). Calcula l'àrea d'aquest recinte.

I. Calculem les solucions de l'equació: $y^2 - 1 = y + 1$.

(Aquesta equació resulta d'aïllar la x en: $y^2 - x = 1$; $y = x - 1$.)

Les seves solucions són $y = -1$ i 2.



II. Calculem la funció diferència:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Busquem la seva primitiva:

$$G(y) = \int (y^2 - y - 2)\, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

IV. $G(-1) = \frac{7}{6}$, $G(2) = \frac{-10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \frac{-10}{3} - \frac{7}{6} = \frac{-9}{2}$

L'àrea buscada és $\left|\frac{-9}{2}\right| = \frac{9}{2}$ u^2.

22. Troba l'àrea limitada per la funció $y = 2x - x^2$ i les seves tangents en els punts en què talla l'eix d'abscisses.

I. Busquem les solucions de l'equació: $2x - x^2 = 0$. Són 0 i 2.

II. Calculem la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que és $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangent que passa per $(0, 0)$ té pendent $f'(0) = 2$, per tant és $y = 2x$.

La tangent que passa per $(2, 0)$ té pendent $f'(2) = -2$, per tant és $y = -2x + 4$.

III. Hem de distingir dos intervals d'integració: entre 0 i 1 i entre 1 i 2.

La funció diferència en el primer interval és:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

i en el segon interval és:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Les seves primitives són:

$$G_1(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

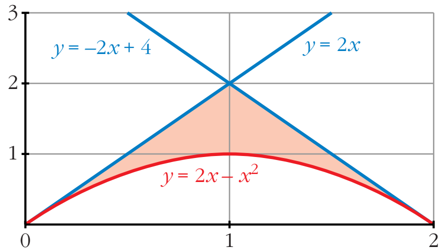
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0$, $G_1(1) = \frac{1}{3}$, $G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$

$G_2(1) = \frac{7}{3}$, $G_2(2) = \frac{8}{3}$, $G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$

L'àrea buscada és: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé no és necessària per resoldre l'exercici.)



23. **Donades la hipèrbola $xy = 6$ i la recta $x + y - 7 = 0$, calcula l'àrea limitada per la recta i la hipèrbola.**

I. Busquem les solucions de l'equació: $7 - x = \frac{6}{x}$. Són 1 i 6 (els nostres límits d'integració).

II. Calculem la funció diferència:

$$y = 7 - x - \frac{6}{x}$$

III. Busquem la seva primitiva:

$$G(x) = \int\left(7 - x - \frac{6}{x}\right) = 7x - \frac{x^2}{2} - 6 \cdot ln\ |x|$$

IV. $G(1) = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

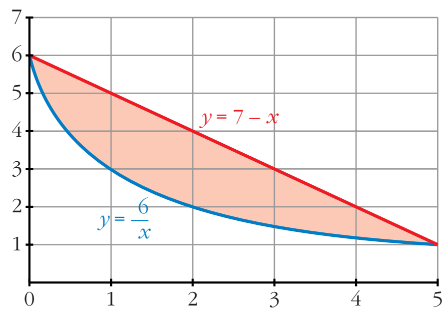
$G(6) = 24 - 6 \cdot ln\,(6)$

V. $G(6) - G(1) = 24 - 6 \cdot ln\,(6) - \frac{13}{2} = \frac{35}{2} - 6 \cdot ln\,(6)$

L'àrea buscada és:

$$\frac{35}{2} - 6 \cdot ln\,(6)\ \text{u}^2.$$

(S'adjunta la gràfica, si bé no és necessària per resoldre l'exercici.)



24. **Calcula l'àrea limitada per la corba $y = x^3 - 2x^2 + x$ i la recta tangent a aquesta en l'origen de coordenades.**

I. Calculem l'equació de la recta tangent en el punt $(0, 0)$; per fer-ho, calculem la derivada de la nostra funció:

$y' = 3x^2 - 4x + 1$

$y'(0) = 1$ (pendent)

La recta tangent té per equació $y = x$.

II. Calculem les solucions de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Són 0 i 2 (límits d'integració).

III. Obtenim la funció diferència:

$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$

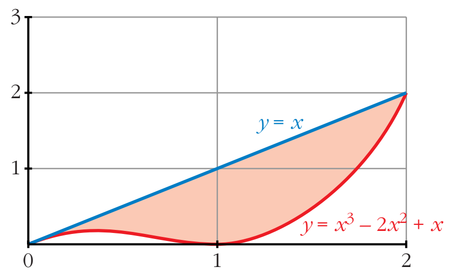
IV. Busquem la seva primitiva: $G(x) = \int(x^3 - 2x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \frac{-4}{3}$

$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$

L'àrea buscada és: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé no és necessària per a la resolució de l'exercici.)



25. Calcula el volum engendrat en girar al voltant de l'eix X els recintes següents:

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ entre $x = 1$ i $x = 5$

b) $f(x) = x^2$ entre $x = -1$ i $x = 2$

c) $f(x) = x - x^2$ entre $x = 0$ i $x = 1$

a) $\int_1^5 \pi \cdot (\sqrt{x-1})^2\,dx = \int_1^5 \pi \cdot (x-1)\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = \pi \cdot \left[\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = 8\pi$

b) $\int_{-1}^2 \pi \cdot (x^2)^2\,dx = \pi \int_{-1}^2 x^4\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^2 = \frac{33}{5}\pi$

c) $\int_0^1 \pi \cdot (x - x^2)^2\,dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}$

26. Calcula el volum engendrat en girar al voltant de l'eix X els recintes limitats per les gràfiques que s'indiquen:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

b) $y^2 = 4x$, $x = 4$

a) Trobem els punts de tall entre $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$

A l'exercici 18 veiem que eren $x = 0$ i $x = 1$

$$\int_0^1 \pi \cdot (\sqrt{x} - x)^2\,dx = \pi \int_0^1 (x - 2x\sqrt{x} + x^2)\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}$$

b) $\int_0^4 \pi \cdot (2\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^4 \pi \cdot 4x\,dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 4\pi \cdot 8 = 32\pi$

Pàgina 350

27. **Troba l'àrea compresa entre la corba $y = \dfrac{4}{9 + 2x^2}$, l'eix d'abscisses i les rectes verticals que passen pels punts d'inflexió d'aquesta corba.**

I. Busquem els punts d'inflexió; per fer-ho, calculem les dues primeres derivades:

$$y' = \frac{-16x}{(9 + 2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9 + 2x^2 - 8x^2)}{(9 + 2x^2)^3}$$

Igualem a zero per trobar en quins valors de x la segona derivada és zero.

Això succeeix en $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ i $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (punts d'inflexió).

II. Calculem la primitva de la nostra funció:

$$G(x) = \int \frac{4}{9 + 2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)$$

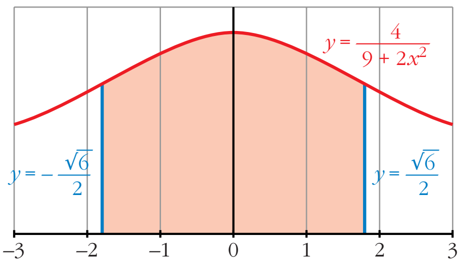
III. $G\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$G\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

L'àrea buscada és: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

(S'adjunta la gràfica, si bé és innecessària per a la resolució de l'exercici.)

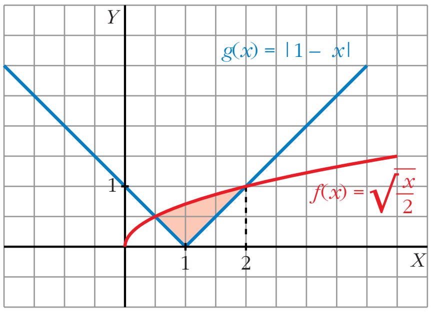


28. **Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ i $g(x) = |1 - x|$:**

a) Dibuixa les dues gràfiques en un mateix pla i troba'n els punts d'intersecció.

b) Determina l'àrea del recinte tancat entre ambdues gràfiques.

a) $g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Busquem els punts d'intersecció resolent l'equació següent:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1 - x)$$

Les seves solucions són $\frac{1}{2}$ i 2 (límits d'integració).

b) Hem de distingir dos intervals d'integració de $\frac{1}{2}$ a 1 i 1 a 2.

I. La funció diferència en el primer interval és:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x)$$

La funció diferència en el segon interval és:

$$h_2(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1)$$

II. Les seves primitives són:

$$H_1(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$; $H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$, $H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

$H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

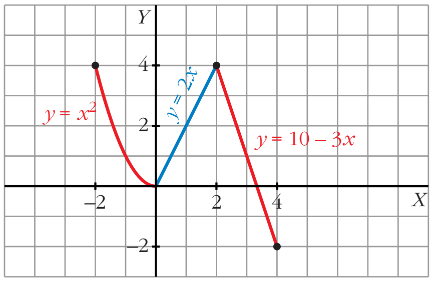
L'àrea buscada és $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

29. **Es considera la funció:**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } \ \ 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } \ \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la funció g i calcula el valor de les següents integrals definides:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)dx$$

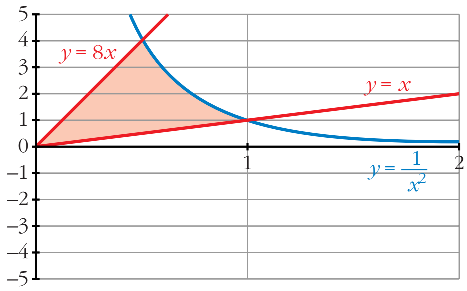


$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\ dx = \int_{-2}^{0} x^2\ dx + \int_{0}^{1} 2x\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[x^2\right]_0^1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_{1}^{4} g(x)\ dx = \int_{1}^{2} 2x\ dx + \int_{2}^{4} (10 - 3x)\ dx = \left[x^2\right]_1^2 + \left[10x - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = 5$$

$$K = \int_{-2}^{4} g(x)\ dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

30. **Dibuixa el recinte comprès entre les gràfiques de les funcions $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, i troba'n l'àrea.**



I. Busquem els punts d'intersecció de les funcions:

$\dfrac{1}{x^2} = x$: Solució $x = 1$.

$\dfrac{1}{x^2} = 8x$: Solució $x = \dfrac{1}{2}$.

$x = 8x$: Solució $x = 0$.

Tenim dos intervals d'integració: de 0 a $\frac{1}{2}$ i de $\frac{1}{2}$ a 1.

II. Busquem la funció diferència en el primer interval:

$$f_1(x) = 8x - x = 7x$$

I en el segon interval:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Busquem les seves primitives:

$$G_1(x) = \int 7x\,dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int\left(\frac{1}{x^2} - x\right)dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0, \quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8}, \quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V. $G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

$$G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

L'àrea buscada és $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u^2.

31. Calcula l'àrea del recinte pla limitat per la corba $y = x^2e^x$ i les rectes $x = 0$ i $x = 5$.

Busquem una primitiva a la nostra funció:

$$G(x) = \int x^2 \cdot e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

(aplicant el mètode d'integració per parts).

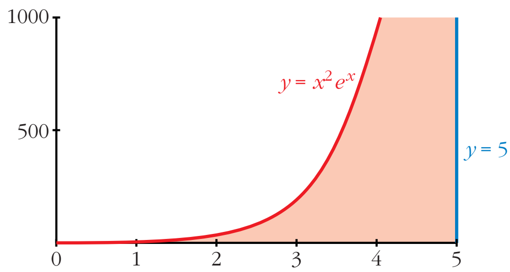
$$G(0) = 2$$

$$G(5) = 17 \cdot e^5$$

$$G(5) - G(0) = 17 \cdot e^5 - 2$$

L'àrea buscada és $(17 \cdot e^5 - 2)$ u^2.

(S'adjunta la gràfica, si bé no és necessària per resoldre l'exercici.)



32. **Troba el polinomi de segon grau que passa pels punts (0, 1) i (3, 0), si sabem que l'àrea limitada per aquesta corba, l'eix Y i l'eix X positiu és 4/3.**

Com que el polinomi passa pels punts $(0, 1)$ i $(3, 0)$, una arrel és $x = 3$, per tant: $y = (x - 3) \cdot (ax - b)$.

D'altra banda, quan $x = 0$, $y = 1$, així: $1 = -3 \cdot (-b) = 3b$, $b = \frac{1}{3}$

De manera que queda: $y = (x - 3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right)$

Atès que passa pels punts indicats i està limitat pels eixos X i Y (positius), els límits d'integració són 0 i 3.

Així doncs, busquem la primitiva del polinomi:

$$G(x) = \int (x-3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{ax^3}{3} - 3a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

D'on deduïm que $a = \frac{1}{27}$.

Així doncs, el polinomi és: $y = (x - 3) \cdot \left(\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}\right)$.

33. **Donada la corba $y = x^2 + 2x + 2$, troba l'àrea limitada per la corba, la recta tangent en el punt on la funció té un extrem i la tangent a la corba amb pendent 6.**

Busquem el punt en què la corba té un extrem, trobant-ne la derivada i igualant a zero: $y' = 2x + 2 = 0$, el punt és $(-1, 1)$.

L'equació de la recta tangent en aquest punt és $y = 1$.

D'altra banda, l'equació de la recta tangent amb pendent 6 és $y = 6x - 2$.

Busquem els punts de tall de la corba amb les dues rectes, de $y = x^2 + 2x + 2$ amb $y = 1$ és $(-1, 1)$; de $y = x^2 + 2x + 2$ amb $y = 6x - 2$ és $(2, 10)$; i de $y = 1$ amb $y = 6x - 2$ és $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Distingim dos intervals d'integració: de -1 a $\frac{1}{2}$ i de $\frac{1}{2}$ a 2.

En el primer interval la funció diferència és:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

En el segon:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Busquem les seves primitives:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

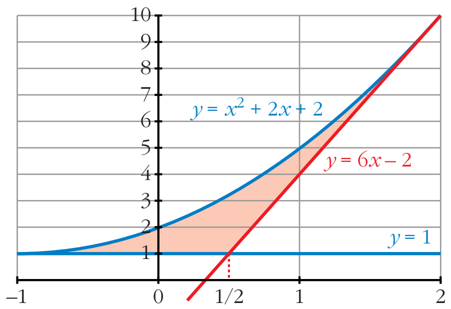
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3},\ G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24},\quad G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

L'àrea buscada és: $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ u^2.



34. **De la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sap que té un màxim relatiu en $x = 1$, un punt d'inflexió en (0, 0) i que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$.**
Calcula a, b, c i d.

Sabem que passa pel punt (0, 0), és a dir, $f(0) = 0$, d'on esbrinem que $d = 0$.

D'altra banda, sabem que té un màxim relatiu en $x = 1$, de manera que $f'(1) = 0$, és a dir: $3a + 2b + c = 0$.

També té un punt d'inflexió en (0, 0), per la qual cosa $f''(0) = 0$, d'on $b = 0$.

Com que $3a + 2b + c = 0$ i $b = 0$, tenim que $3a + c = 0 \rightarrow c = -3a$.

Així doncs, la nostra funció queda reduïda a la funció: $f(x) = ax^3 - 3ax$.

Busquem la seva primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0, \quad G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultat és $-\frac{5a}{4}$, que és igual a $\frac{5}{4}$, d'on deduïm que $a = -1$ i per tant $c = 3$.

La funció buscada és $f(x) = -x^3 + 3x$.

35. **Tenint en compte que la funció $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ pren valors positius i negatius, troba el valor de k de forma que l'àrea de la regió limitada per l'eix X, les rectes $x = -1$, $x = 2$ i la corba $f(x)$ quedi dividida per l'eix X en dues parts amb àrea igual.**

Suposem que $x = a$ comprès entre -1 i 2 és el punt en què la nostra funció talla l'eix X, per tant hem de distingir dos intervals d'integració: de -1 a a i de a a 2.

Busquem una primitiva de la nostra funció:

$$G(x) = \frac{2x^4}{4} - x^3 + kx = \frac{x^4}{2} - x^3 + kx$$

$$G(-1) = \frac{3}{2} - k$$

$$G(2) = 2k$$

Si suposem que en el primer interval la funció és negativa, l'àrea és:

$$G(-1) - G(a)$$

i que en el segon interval la funció és positiva, l'àrea és:

$$G(2) - G(a)$$

I com que l'àrea en els dos intervals ha de ser igual, es té la igualtat següent:

$$G(-1) - G(a) = G(2) - G(a)$$

és a dir:

$$G(-1) = G(2)$$

$$\frac{3}{2} - k = 2k$$

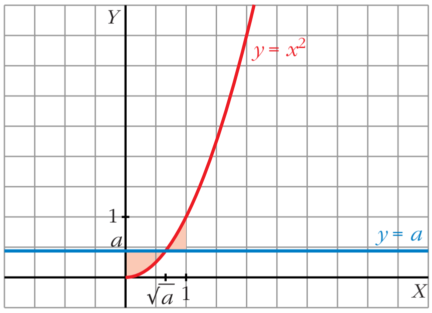
$$k = \frac{1}{2}$$

Observeu que s'obté el mateix resultat independentment de quin interval considerem en el qual la funció és positiva o negativa.

36. **Es consideren les corbes $y = x^2$ i $y = a$, on $0 < a < 1$. Ambdues corbes es tallen en el punt (x_0, y_0) amb abscissa positiva. Troba a si sabem que l'àrea tancada entre ambdues corbes des de $x = 0$ fins a $x = x_0$ és igual a la tancada entre aquestes des de $x = x_0$ fins a $x = 1$.**

El punt de tall és $(\sqrt{a}, a)$.

Dibuixem les àrees per tenir una idea més clara del nostre exercici:



Tenim dos intervals d'integració: de 0 a $\sqrt{a}$ i de $\sqrt{a}$ a 1.

La funció diferència per al primer interval és:

$$f_1(x) = a - x^2$$

La seva primitiva és:

$$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

L'àrea en el primer interval és $\dfrac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

La funció diferència en el segon interval és:

$$f_2(x) = x^2 - a$$

La seva primitiva és:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

$$G_2(\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a}, \quad G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

L'àrea en el segon interval és $\dfrac{1}{3} - a + \dfrac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

Com que l'àrea en els dos intervals és igual, s'ha de:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

D'on obtenim que $a = \dfrac{1}{3}$.

37. **Siguin $y = ax^2$ e $y = ax + a$ les equacions d'una paràbola p i d'una recta r, respectivament. Demostra les afirmacions següents:**

a) Els punts de tall de p i r no depenen del valor de a.

b) Si es duplica el valor de a, també es duplica l'àrea tancada entre p i r.

a) Els punts de tall s'obtenen quan s'igualen les dues equacions:

$$ax^2 = ax + a$$

$$ax^2 - ax - a = 0$$

$$a \cdot (x^2 - x - 1) = 0$$

Com que suposem $a \neq 0$, perquè siguin certament una paràbola i una recta, dividint tota l'equació entre a, arribem a:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

i les seves solucions són: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (les quals no depenen de a).

b) La funció diferència és: $f(x) = ax + a - ax^2 = a \cdot (-x^2 + x + 1)$.

Si anomenem $h(x) = -x^2 + x + 1$, tenim que: $f_1(x) = a \cdot h(x)$

i la primitiva de $f(x)$ és a per la primitiva de $h(x)$, és a dir:

$$G_1(x) = a \cdot H(x)$$

L'àrea compresa és per tant:

$$G_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a \cdot \left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2$$

Si dupliquem a, tenim que la funció diferència és ara:

$$f_2(x) = 2a \cdot h(x)$$

i la seva primitiva:

$$G_2(x) = 2a \cdot H(x)$$

Per la qual cosa l'àrea compresa és:

$$G_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2a \cdot \left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2$$

38. **Troba el volum del cos limitat per l'el·lipse $\dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$ en fer una volta completa al voltant de OX.**

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{5} = \frac{20\pi}{3} \text{ u}^3.$$

39. **Calcula l'àrea limitada per $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$, l'eix X i les rectes $x = a$ i $x = b$, essent a i b les abscisses del màxim i el mínim de f.**

La funció talla l'eix X en $x = 0$.

D'altra banda, té un mínim en $x = -2$ i un màxim en $x = 2$.

Hem de distingir entre dos intervals: de -2 a 0 i de 0 a 2.

Busquem la funció primitiva:

$$G(x) = \int \frac{4x}{x^2+4}\,dx = 2\ln(x^2+4)$$

L'àrea en el primer interval és:

$G(-2) = 2 \cdot \ln(8)$

$G(0) = 2 \cdot \ln(4)$

$G(0) - G(-2) = 2 \cdot \big(\ln(4) - \ln(8)\big)$

$\big|2 \cdot \big(\ln(4) - \ln(8)\big)\big| = 2 \cdot \big(\ln(8) - \ln(4)\big)\ \text{u}^2$

L'àrea en el segon interval és:

$G(2) = 2 \cdot \ln(8)$

$G(2) - G(0) = 2 \cdot \big(\ln(8) - \ln(4)\big)$

$2 \cdot \big(\ln(8) - \ln(4)\big)\ \text{u}^2$

L'àrea total és:

$2 \cdot \big(\ln(8) - \ln(4)\big) + 2 \cdot \big(\ln(8) - \ln(4)\big) = 4 \cdot \big(\ln(8) - \ln(4)\big)\ \text{u}^2$

40. **Troba l'àrea compresa entre les corbes $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.**

I. Busquem la funció diferència:

$$y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$$

II. Busquem la seva primitiva:

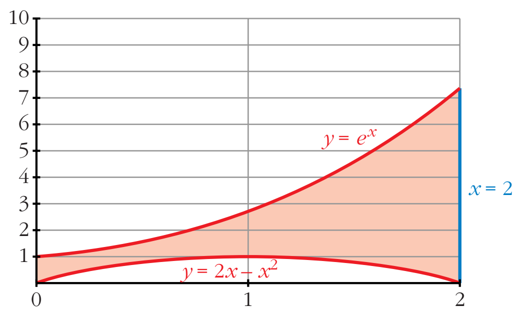
$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III. $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

L'àrea buscada és $\left(e^2 - \dfrac{4}{3} - 1\right)\ \text{u}^2$.



41. **La corba $y = \dfrac{4}{x+4}$, els eixos de coordenades i la recta $x = 4$ limiten una superfície S. Calcula l'àrea de S i el volum de la figura engendrada per S en girar al voltant de l'eix X.**

Busquem una primitiva:

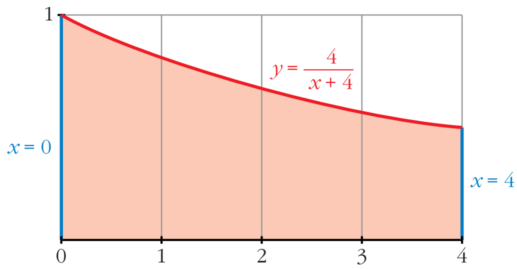
$$G(x) = 4 \cdot ln\ |x + 4|$$

$G(0) = 4 \cdot ln\ (4)$

$G(4) = 4 \cdot ln\ (8)$

$G(4) - G(0) = 4 \cdot \big(ln\ (8) - ln\ (4)\big)$

L'àrea buscada és $4 \cdot \big(ln\ (8) - ln\ (4)\big)$ u^2.



$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{4}{x+4}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-16}{x+4}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{8} = 2\pi \text{ u}^3.$$

Pàgina 351

42. **Troba l'àrea de la regió del pla limitat per la corba $y = ln\ x$, la recta $y = 2$ i els eixos de coordenades.**

La corba $y = ln\ x$ i la recta $y = 2$ es tallen en $x = e^2$, per tant els límits d'integració són 1 i e^2. D'altra banda, tenim la regió compresa entre 0 i 1.

Així doncs, distingim dos intervals: de 0 a 1 i de 1 a e^2.

En el primer interval, la funció diferència és: $y = 2 - 0 = 2$

La seva primitiva és:

$$G_1(x) = 2x$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(1) = 2$$

$$G_1(1) - G_1(0) = 2$$

L'àrea per al primer interval és 2 u^2.

En el segon interval, la funció diferència és:

$$y = 2 - ln\ x$$

La seva primitiva és:

$$G_2(x) = 2x - (x \cdot \ln |x| - x) = 3x - x\ln |x|$$

$$G_2(e^2) = 3 \cdot e^2 - e^2 \cdot 2 = e^2$$

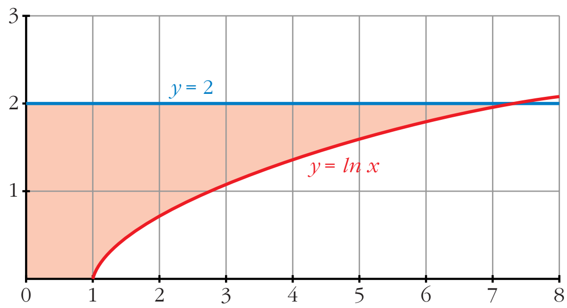
$$G_2(1) = 3$$

$$G_2(e^2) - G_2(1) = e^2 - 3$$

L'àrea per al segon interval és $(e^2 - 3)$ u^2.

Per tant, l'àrea total és:

$$(2 + e^2 - 3) = (e^2 - 1) \text{ u}^2$$



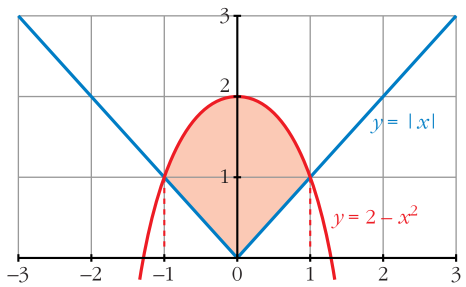
43. **Calcula l'àrea de la figura limitada per les corbes que es donen en els casos següents:**

a) $y = 2 - x^2$, $y = |x|$

b) $xy + 8 = 0$, $y = x^2$, $y = 1$

c) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$

a)



Es tallen en $x = -1$ i $x = 1$.

En l'interval de -1 a 0, la funció diferència és:

$$y = 2 - x^2 - (-x) = 2 - x^2 + x$$

En l'interval de 0 a 1, la funció diferència és:

$$y = 2 - x^2 - x$$

Per simetria, només cal calcular l'àrea en un dels dos intervals, per exemple, en el segon. Busquem la seva funció primitiva:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

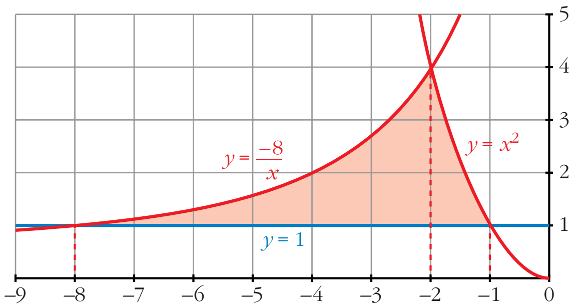
$$G(1) = \frac{7}{6}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) - G(0) = \frac{7}{6}$$

L'àrea total és $2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$ u^2.

b)



Les tres funcions es tallen 2 a 2 en: –8, –2 i –1.

Per tant, calculem l'àrea en dos intervals, de –8 a –2 i de –2 a –1.

La funció diferència en el primer interval és: $y = \frac{-8}{x} - 1$

La seva primitiva és:

$$G_1(x) = -8 \cdot ln\,|x| - x$$

$$G_1(-8) = -8 \cdot ln\,(-8) + 8$$

$$G_1(-2) = -8 \cdot ln\,(-2) + 2$$

$$G_1(-2) - G_1(-8) = -8 \cdot ln\,(-2) + 2 + 8 \cdot ln\,(-8) - 8 =$$

$$= -8 \cdot \left(ln\,(-2) - ln\,(-8)\right) - 6 = -8 \cdot ln\left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 8ln\,4 - 6$$

La funció diferència en el segon interval és:

$$y = x^2 - 1$$

La seva primitiva és:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

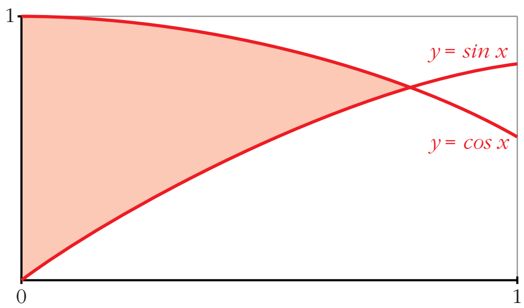
$$G_2(-2) = \frac{-2}{3}$$

$$G_2(-1) = \frac{2}{3}$$

$$G_2(-1) - G_2(-2) = \frac{4}{3}$$

L'àrea buscada és: $\left(8ln\,4 - 6 + \frac{4}{3}\right) = \left(8ln\,4 - \frac{14}{3}\right)$ u².

c)



Les dues corbes es tallen en $x = \frac{\pi}{4}$.

Per tant, els nostres límits d'integració són 0 i $\frac{\pi}{4}$.

Busquem la funció diferència:

$$y = \cos x - \sin x$$

La seva primitiva és:

$$G(x) = \sin x + \cos x$$

$$G(0) = 1$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sqrt{2} - 1$$

L'àrea buscada és $(\sqrt{2} - 1)\ \text{u}^2$.

44. Si sabem que l'àrea de la regió compresa entre la corba $y = x^2$ i la recta $y = bx$ és igual a $\frac{9}{2}$, calcula el valor de b.

La corba $y = x^2$ i la recta $y = bx$ es tallen en el punt d'abscissa $x = b$ i en $x = 0$.

Així, els nostres límits d'integració són 0 i b.

La funció diferència és:

$$y = bx - x^2$$

La seva primitiva és:

$$G(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$G(0) = 0$$

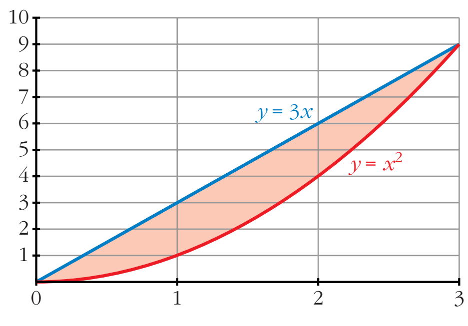
$$G(b) = \frac{b^3}{6}$$

$$G(b) - G(0) = \frac{b^3}{6}$$

Com que l'àrea és $\frac{9}{2}$, tenim que:

$$\frac{b^3}{6} = \frac{9}{2},$$

d'on obtenim que $b = 3$.



45. Calcula el valor de a perquè l'àrea de la regió limitada per la corba $y = -x^2 + ax$ i l'eix X sigui igual a 36.

La corba talla l'eix X en els punts d'abscissa 0 i a (aquests són els límits d'integració).

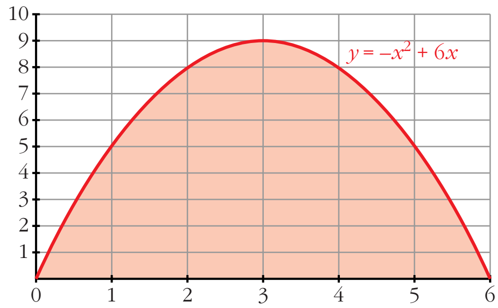
La seva primitva és:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$



Com que l'àrea és 36, tenim que:

$$\frac{a^3}{6} = 36,$$

d'on esbrinem que $a = 6$.

46. **Donada la funció $y = \frac{2}{x+1}$, calcula el valor de a perquè l'àrea limitada per aquesta corba i les rectes $x = 0$ i $x = a$ sigui igual a 2.**

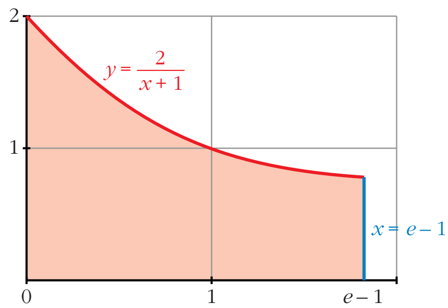
Busquem la seva primitiva:

$$G(x) = 2 \cdot ln\,(x + 1)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = 2 \cdot ln\,(a + 1)$$

$$G(a) - G(0) = 2 \cdot ln\,(a + 1)$$



Com que l'àrea és igual a 2, tenim que: $2 \cdot ln\,(a + 1) = 2$, d'on esbrinem que $a = e - 1$.

47. **Considera la regió del pla que determinen les corbes $y = e^x$ i $y = e^{2x}$ i la recta $x = k$.**

a) Troba'n l'àrea per a $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ perquè l'àrea sigui 2.

a) Si $k = 1$, els nostres límits d'integració són 0 i 1.

Busquem la funció diferència: $y = e^{2x} - e^x$

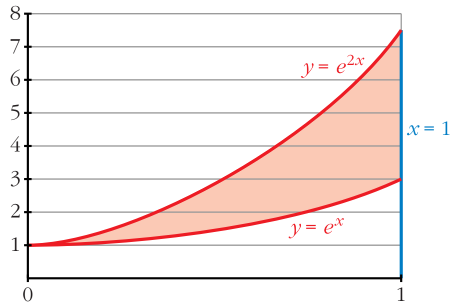
La seva primitiva és:

$$G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - e^x$$

$$G(0) = \frac{-1}{2}, \quad G(1) = \frac{e^2}{2} - e$$

$$G(1) - G(0) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

L'àrea buscada és $\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right)$ u^2.



b) Ara els nostres límits d'integració són 0 i k. Com que la funció diferència i la seva primitiva són les mateixes que en l'apartat a), tenim que:

$$G(0) = \frac{-1}{2}$$

$$G(k) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k$$

$$G(k) - G(0) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Com que l'àrea és 2, tenim que: $\frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2} = 2$.

Si resolem l'equació, esbrinem que $k = ln\,(3)$.

48. Calcula l'àrea tancada entre la corba $y = x^2 - 2x - 3$ i la corda de la mateixa que té per extrems els punts d'abscisses 0 i 1.

Els punts que determinen la corda són $(0, -3)$ i $(1, -4)$, d'on obtenim l'equació de la recta que conté la corda:

$$y = -x - 3$$

Els nostres límits d'integració són 0 i 1.

Busquem la funció diferència:

$$y = x^2 - 2x - 3 - (-x - 3) = x^2 - x$$

La seva primitiva és:

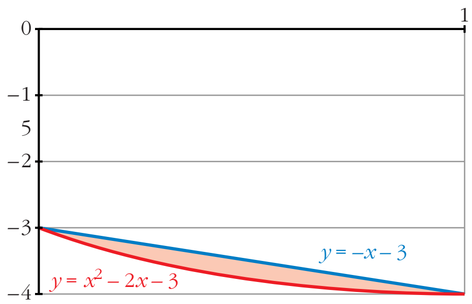
$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) = \frac{-1}{6}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{-1}{6}$$

L'àrea buscada és $\left|\frac{-1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ u^2.



49. **Donades $y = -x^2 + 1$ i la recta $y = a$, $a < 0$, determina el valor de a de manera que l'àrea entre la corba i la recta sigui $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ u².**

La corba i la recta es tallen en els punts d'abscissa $x = -\sqrt{1-a}$ i $x = \sqrt{1-a}$.

La funció diferència és: $y = -x^2 + 1 - a$.

La seva primitiva és:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + x - ax$$

$$G(-\sqrt{1-a}) = \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - \sqrt{1-a} + a \cdot \sqrt{1-a}$$

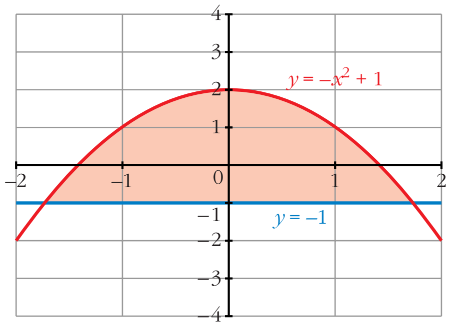
$$G(\sqrt{1-a}) = -\frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} + \sqrt{1-a} - a \cdot \sqrt{1-a}$$

$$G(\sqrt{1-a}) - G(-\sqrt{1-a}) = \frac{4}{3}(1-a) \cdot \sqrt{1-a}$$

Com que l'àrea és $\frac{8\sqrt{2}}{3}$, igualem:

$$\frac{4}{3}(1-a) \cdot \sqrt{1-a} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Si resolem l'equació, obtenim que $a = -1$.



50. **Troba l'àrea de la porció de pla tancada entre les corbes $y = \sin x$ i $y = \sin 2x$ per a valors de x en l'interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.**

Les corbes es tallen en el punt d'abscissa $x = \frac{\pi}{3}$.

Per tant, tenim dos intervals d'integració de: 0 a $\frac{\pi}{3}$ i de $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{2}$.

La funció diferència en el primer interval és: $y = \sin 2x - \sin x$.

La seva primitiva és:

$$G_1(x) = \frac{-\cos 2x}{2} + \cos x$$

$$G_1(0) = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

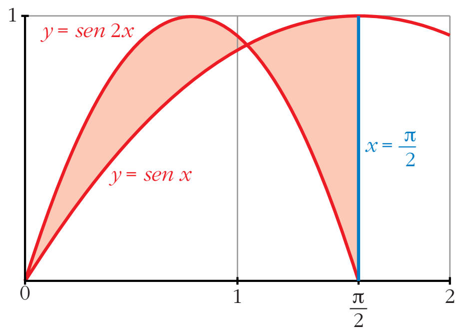
$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) - G_1(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

La funció diferència en el segon interval és: $y = sin\ x - sin\ 2x$.

La seva primitiva és:

$$G_2(x) = -\cos x + \frac{\cos 2x}{2}$$



$$G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

L'àrea buscada és $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u^2.

51. **Troba l'àrea compresa entre la corba $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, l'eix OX i les rectes $x = 1$ i $x = 2$.**

Busquem una primitiva de la nostra funció:

$$G(x) = \int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{4x}{x^2+2x+1}\right) dx =$$

$$= x - 2 \cdot \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= x - 2 \cdot \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx + 2 \cdot \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= x - 2 \cdot \ln (x+1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{(x+1)}$$

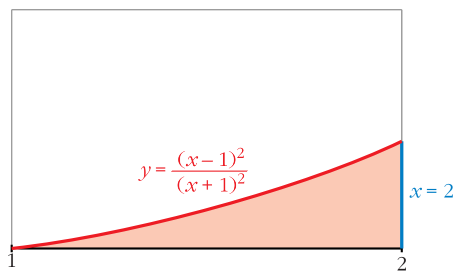
$$G(1) = -2 \cdot \ln (4) - 3$$

$$G(2) = \frac{2}{3} - 2 \cdot \ln (9)$$

$$G(2) - G(1) = \frac{2}{3} - 2\ln (9) + 2\ln (4) + 3 =$$

$$= \frac{11}{3} + 2(\ln (4) - \ln (9)) = \frac{11}{3} + 2\left(\ln\left(\frac{4}{9}\right)\right) u^2$$

L'àrea buscada és $\left[\frac{11}{3} + 2\ln\left(\frac{4}{9}\right)\right]$ u^2.



52. **Calcula l'àrea limitada per la hipèrbola $xy = 1$ i la corda de la mateixa que té per extrems els punts d'abscisses 1 i 4.**

La corda té per extrems els punts $(1, 1)$ i $\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Així doncs, obtenim que l'equació de la recta que conté la corda és:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4}$$

Els nostres límits d'integració són 1 i 4.

Calculem la funció diferència:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}$$

La seva primitiva és:

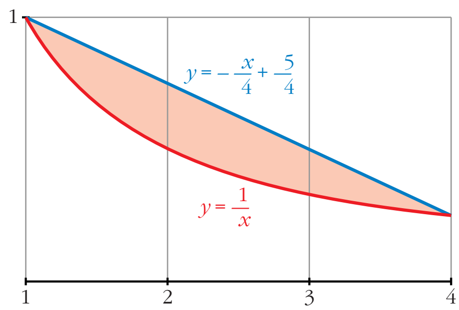
$$G(x) = \frac{-x^2}{8} + \frac{5x}{4} - \ln|x|$$

$$G(1) = \frac{9}{8}$$

$$G(4) = 3 - \ln 4$$

$$G(4) - G(1) = 3 - \ln 4 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8} - \ln 4$$

L'àrea buscada és $\left(\frac{15}{8} - \ln 4\right)$ u^2.

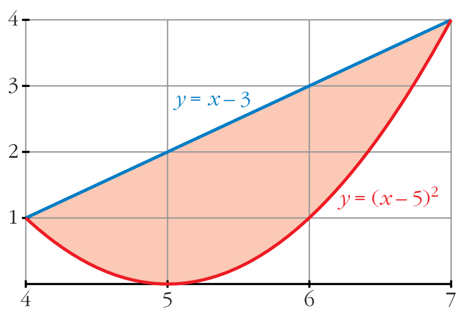


53. **La regió limitada per la recta $y = x - 3$, la paràbola $y = (x - 5)^2$ i l'eix OX gira al voltant de l'eix OX. Troba el volum del cos de revolució que es genera.**

Busquem els punts de tall de la recta i la paràbola:

$$x - 3 = (x - 5)^2$$

Es tallen en els punts $(4, 1)$ i $(7, 4)$. Per tant, els nostres límits d'integració són 4 i 7.



Busquem el volum generat per la recta $y = x - 3$ al voltant de OX entre 4 i 7, i posteriorment li restem el generat per la corba $y = (x - 5)^2$ al voltant de OX entre els mateixos límits.

$$V_1 = \pi \cdot \int_4^7 (x-3)^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_4^7 = 21 \cdot \pi \text{ u}^3$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_4^7 (x-5)^4\, dx = \pi \cdot \left[\frac{(x-5)^5}{5}\right]_4^7 = \frac{33}{5} \cdot \pi \text{ u}^3$$

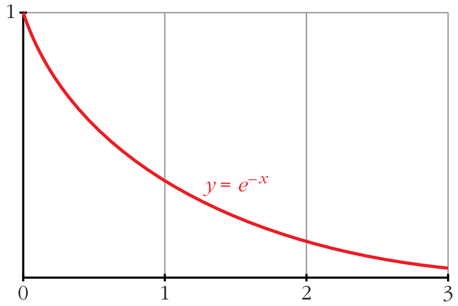
El volum buscat és:

$$V_1 - V_2 = 21 \cdot \pi - \frac{33}{5} \cdot \pi = \frac{72}{5} \cdot \pi \text{ u}^3$$

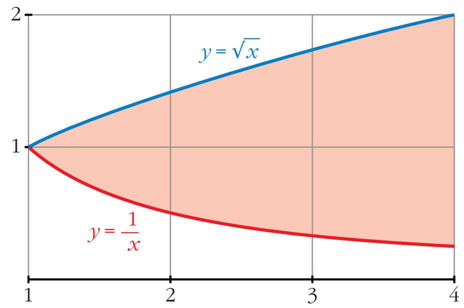
54. **Troba el volum del cos engendrat per la regió del pla limitada pels eixos de coordenades, la corba d'equació $y = e^{-x}$ i la recta $x = 3$, en girar al voltant de l'eix OX.**

$$V = \pi \cdot \int_0^3 (e^{-x})^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^3 e^{-2x} \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{-2} \cdot \left[e^{-2x}\right]_0^3 = \frac{\pi}{-2} \cdot (e^{-6} - 1) \text{ u}^3$$



55. **Calcula el volum que s'obté en fer girar al voltant de l'eix OX el recinte limitat per les funcions $y = \dfrac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$.**



Les corbes $y = \dfrac{1}{x}$ i $x = y^2$ es tallen en el punt d'abscissa 1. Per tant, els nostres límits d'integració són 1 i 4.

El volum buscat és el resultat de restar el volum engendrat per la corba $y = \sqrt{x}$ al voltant de OX entre 1 i 4, i el volum engendrat per la corba $y = \dfrac{1}{x}$ al voltant de OX entre els mateixos límits.

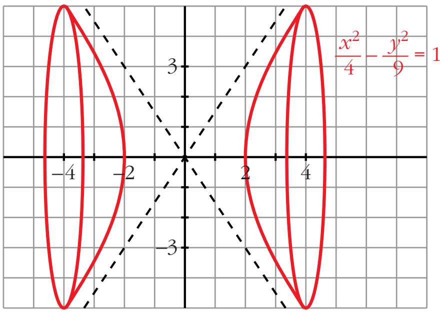
$$V_1 = \pi \cdot \int_1^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2} \text{ u}^3$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4 = \frac{3\pi}{4} \text{ u}^3$$

El volum buscat és:

$$V_1 - V_2 = \frac{15\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{27\pi}{4} \text{ u}^3$$

56. **Calcula el volum engendrat per la hipèrbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ quan $x \in [-4, 4]$.**



$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_2^4 f(x)^2\, dx =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{9x^2}{4} - 9\right) dx =$$

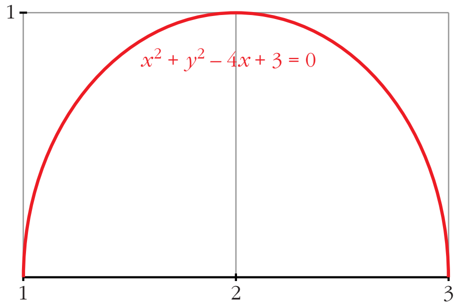
$$= 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{3x^3}{4} - 9x\right]_2^4 =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 24 = 48\pi \text{ u}^3$$

57. **Troba el volum engendrat pel cercle $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ en girar al voltant de OX.**

El cercle de l'exercici té el seu centre en $(2, 0)$ i radi 1, per tant talla l'eix OX en $(1, 0)$ i $(3, 0)$. Així doncs, els nostres límits d'integració són 1 i 3.

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$



$$V = \pi \cdot \int_1^3 y^2\, dx = \pi \cdot \int_1^3 \left(1 - (x-2)^2\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ u}^3$$

58. **Obtén la família de corbes en què el pendent de la tangent és $f(x) = x\, e^{2x}$. Quina d'aquestes corbes passa pel punt $A(0, 2)$?**

Busquem la seva primitiva:

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx$$

Utilitzant el mètode d'integració per parts obtenim:

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

Com que passa per $(0, 2)$, tenim que: $-\frac{1}{4} + k = 2$, d'on $k = \frac{9}{4}$.

Així, la corba buscada és:

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{9}{4}$$

59. Expressa la funció de posició d'un mòbil si sabem que la seva acceleració és constant de 8 cm/s², que la seva velocitat és 0 quan $t = 3$ i que està en l'origen al cap d'11 segons.

Anomenem $S(t)$ a la posició del mòbil al cap de t segons. Així:

$$V(t) = S'(t) \text{ y } a(t) = S''(t) = 8 \text{ cm/s}^2$$

Calculem la velocitat $V(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 8\,dt = 8t + k \\ V(3) = 24 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -24 \end{array}\right\} \quad V(t) = 8t - 24$$

Calculem $S(t)$:

$$S(t) = \int V(t)\,dt = \int (8t - 24)\,dt = 4t^2 - 24t + c$$

$$S(11) = 220 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -220$$

Per tant: $S(t) = 4t^2 - 24t - 220$.

60. Un mòbil es desplaça en línia recta, amb un moviment uniformement accelerat, amb una acceleració de 2 m/s² i amb una velocitat inicial $v_0 = 1$ m/s. Calcula i compara les distàncies recorregudes entre $t = 0$ i $t = 2$ i entre $t = 2$ i $t = 3$.

- Calculem la velocitat del mòbil:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 2\,dt = 2t + k \\ V(0) = k = 1 \end{array}\right\} \quad V(t) = 2t + 1$$

- Distància recorreguda entre $t = 0$ i $t = 2$:

$$d_1 = \int_0^2 V(t)\,dt = \int_0^2 (2t + 1)\,dt = [t^2 + t]_0^2 = 6 \text{ m}$$

- Distància recorreguda entre $t = 2$ i $t = 3$:

$$d_2 = \int_2^3 V(t)\,dt = [t^2 + t]_2^3 = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

- Per tant, recorre la mateixa distància entre $t = 0$ i $t = 2$ que entre $t = 2$ i $t = 3$.

Pàgina 352

QÜESTIONS TEÒRIQUES

61. Calcula la derivada de la funció donada per $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t\,dt$ de dues formes:

a) Obtenint de forma explícita $F(x)$ i, després, derivant.

b) Aplicant-hi el teorema fonamental del càlcul.

a) $F(x) = \left[sin\, t\right]_0^{x^2} = sin\, x^2$

$F'(x) = 2x \cdot cos\, x^2$

b) Com que f és una funció contínua en tots els punts, es pot aplicar el teorema fonamental del càlcul:

$$F'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot cos\, x^2$$

62. Troba la derivada de les funcions que es donen en els exercicis següents:

a) $F(x) = \int_0^x cos\, t^2\, dt$ **b)** $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 - 1)\, dt$

c) $F(x) = \int_x^4 \frac{1}{1 + sin^2 t}\, dt$ **d)** $F(x) = \int_0^{sin\, x} (1 + t)\, dt$

a) Com que f és contínua, podem aplicar el teorema fonamental del càlcul:

$$F'(x) = cos\, x^2$$

b) Com que f és contínua, també podem aplicar el teorema fonamental del càlcul:

$$F'(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2)' = 2x \cdot (x^2 - 1)$$

c) Apliquem el teorema:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + sin^2\, x}$$

d) Anàlogament: $F'(x) = (1 + sin\, x) \cdot (sin\, x)' = (1 + sin\, x) \cdot cos\, x$

63. Sense resoldre la integral, indica on hi ha el màxim o el mínim relatiu en la funció:

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\, dt$$

Els màxims o mínims relatius s'obtenen per als valors de x en què la primera derivada és zero, en el nostre cas $F'(x) = 0$.

Com que f és contínua, podem aplicar el teorema fonamental del càlcul:

$$F'(x) = x^2 - 1$$

$F'(x) = 0$ en $x = -1$ i $x = 1$, així en els punts d'abscissa -1 i 1, hi ha màxims o mínims relatius.

64. Sabem que $\int_0^x f(t)\, dt = x^2(1 + x)$, essent contínua en $\mathbb{R}$. Calcula $f(2)$.

Aplicant el teorema fonamental del càlcul, veiem que:

$$f(x) = 2x \cdot (1 + x) + x^2$$

$$f(2) = 16$$

65. **Sigui** $F(x) = \int_1^x \cos^2 t \, dt$. **Troba els possibles extrems d'aquesta funció en l'interval** $[0, 2\pi]$.

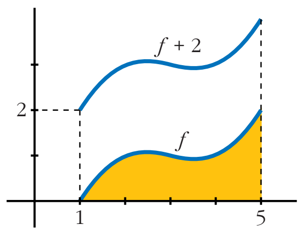
Com que $f(x) = \cos^2 x$ és contínua en $[0, 2\pi]$, podem aplicar el teorema fonamental del càlcul, i així obtenim la primera derivada de la funció $F(x)$:

$$F'(x) = \cos^2 x$$

Aquesta té els seus extrems en els valors de x en els quals $F'(x) = 0$, és a dir, en $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{3\pi}{2}$.

66. **Sabem que l'àrea limitada per una funció f, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 1$ i $x = 5$ és igual a 6.**

Quant augmentarà l'àrea si traslladem 2 unitats cap amunt la funció f?

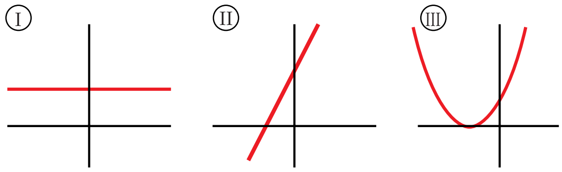


És fàcil veure que l'àrea afegida és la d'un rectangle de base 4 u i 2 u d'altura, la seva àrea és $8\ u^2$. És a dir, l'àrea augmentarà $8\ u^2$.

67. **Si una funció f és positiva per a tots els valors de la seva variable, qualsevol funció primitiva d'aquesta és creixent en cada un dels seus punts. Per què?**

Cert, ja que si la primera derivada d'una funció és positiva, aquesta funció és creixent.

68. **Les gràfiques I, II i III corresponen, no necessàriament per aquest ordre, als d'una funció derivable f, a la seva funció derivada f' i a una primitiva F de f. Identifica cada gràfica amb la seva funció, i justifica la resposta.**



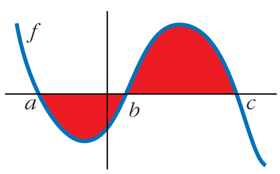
La gràfica II és la de la funció; la gràfica I és la de la seva derivada, i la gràfica III, la de la seva primitiva.

La raó és: partint de la gràfica II, observem que es tracta d'una funció lineal (afí) amb pendent positiu, per la qual cosa la funció derivada ha de ser una funció constant (el pendent de la funció afí).

D'altra banda, la primitiva de la funció afí ha de ser una funció quadràtica, la gràfica de la qual correspon a la paràbola.

69. **Quina de les següents expressions ens dóna l'àrea limitada per la gràfica de f i l'eix d'abscisses?**

a) $\int_a^c f$; **b)** $\left|\int_a^c f\right|$; **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$; **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$



d).

70. **Si una funció f no talla l'eix X, qualsevol primitiva d'aquesta no pot tenir màxims o mínims. Per què?**

Cert, perquè la funció f seria la derivada de la seva primitiva i com que mai no és zero, no pot tenir ni màxims ni mínims.

71. **Donada la funció $y = x^2$, troba el punt $c \in [0, 2]$ tal que l'àrea $\int_0^2 x^2\,dx$ sigui igual a la d'un rectangle de base 2 i altura $f(c)$. És a dir, $2f(c) = \int_0^2 x^2\,dx$. Quin teorema assegura l'existència de c?**

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

Així doncs, tenim: $2 \cdot f(c) = \frac{8}{3}$, des d'on esbrinem que $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El teorema que assegura l'existència de c és el teorema del valor mitjà del càlcul integral.

72. **Sigui F una funció definida en $[0, +\infty)$ de manera que $F(x) = \int_0^x ln(2 + t)\,dt$. Analitza si és vertadera o falsa cada una d'aquestes afirmacions:**

a) $F(0) = ln\ 2$ **b)** $F'(x) = \frac{1}{2+x}$, $x \ge 0$

c) F **és creixent en el seu domini.**

a) $F(x) = (x + 2) \cdot ln\ |x + 2| - (x + 2) - 2 \cdot ln\ 2 + 2$

$F(0) = 2 \cdot ln\ 2 - 2 - 2 \cdot ln\ 2 + 2 = 0$

És falsa, a més només cal veure que no hi ha àrea.

b) Com que f és contínua per a $x \ge 0$, apliquem el teorema del càlcul integral:

$F'(x) = ln\ |2 + x|$

També és falsa.

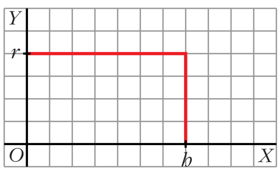
c) Certa, perquè la seva derivada F' és positiva en tot el domini.

Pàgina 353

PER APROFUNDIR

73. **Dedueix per integració el volum del cilindre de radi r i altura h.**

☛ ***Fes girar al voltant de OX el rectangle limitat per la recta $y = r$ entre $x = 0$ i $x = h$.***



$$V = \pi \cdot \int_0^h r^2\,dx = \pi \cdot \left[r^2 x\right]_0^h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

74. Demostra, utilitzant el càlcul integral, que el volum de l'esfera és

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

☛ ***L'esfera s'engendra en girar el cercle $x^2 + y^2 = R^2$ al voltant de l'eix X.***

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} y^2\, dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

75. Demostra que el volum de l'el·lipsoide obtingut en girar l'el·lipse $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ és:

a) $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a b^2}$ si gira al voltant de $\boldsymbol{OX}$.

b) $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^2 b}$ si gira al voltant de $\boldsymbol{OY}$.

a) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_{-a}^{a} \left(b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2}\right) dx = \pi \cdot \left[b^2 x - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right]_{-a}^{a} =$

$$= \pi \cdot \left(b^2 a - \frac{ab^2}{3} + b^2 a - \frac{ab^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot ab^2$$

b) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_{-b}^{b} \left(a^2 - y^2 \frac{a^2}{b^2}\right) dy = \pi \cdot \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2}\right]_{-b}^{b} =$

$$= \pi \cdot \left(a^2 b - \frac{ba^2}{3} + a^2 b - \frac{ba^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot ba^2$$

76. Determina la funció $\boldsymbol{y = f(x)}$ si sabem que la seva gràfica passa pel punt $\boldsymbol{P(1, 1)}$, que la tangent en $\boldsymbol{P}$ és paral·lela a la recta $\boldsymbol{3x + 3y - 1 = 0}$ i que $\boldsymbol{f''(x) = x}$.

La informació que tenim és:

$f(1) = 1$

$f'(1) = -1$

$f''(x) = x$

Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + a$$

Com que $f'(1) = -1$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + a = -1, \text{ aleshores } a = \frac{-3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$$

Calculem $f(x)$: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + b.$

Com que $f(1) = 1$, esbrinem que $b = \frac{7}{3}$, així: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}.$

77. Determina el valor del paràmetre $a > 0$ de tal manera que l'àrea de la regió del pla limitada per l'eix X i la gràfica de la funció $f(x) = a(x+2)^2 - (x+2)^3$ valgui 108.

La funció talla l'eix X en els punts d'abscissa $x = -2$ i $x = a - 2$. Per trobar els nostres límits d'integració, busquem una primitiva:

$$G(x) = \int [a(x+2)^2 - (x+2)^3]\, dx = a \cdot \frac{(x+2)^3}{3} - \frac{(x+2)^4}{4}$$

$$G(a-2) = \frac{a^4}{12}$$

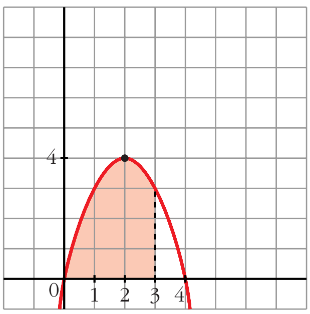
$$G(-2) = 0$$

$$G(a-2) - G(2) = \frac{a^4}{12}$$

Com que l'àrea ha de ser 108, igualem:

$$\frac{a^4}{12} = 108. \text{ D'on obtenim que: } a = 6.$$

78. Troba l'equació d'una paràbola d'eix vertical, tangent en l'origen de coordenades a una recta de pendent 4 i que delimita amb l'eix X un recinte de base [0, 3] i àrea 9.



- $y = ax^2 + bx + c$
- Passa per $(0, 0) \rightarrow y(0) = 0 \rightarrow x = 0$
- $y'(0) = 4 \rightarrow b = 4$

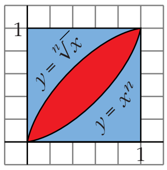
  $y = ax^2 + 4x$
- L'àrea entre 0 i 3 és 9, així:

  $$\int_0^3 (ax^2 + 4x)\, dx = \left[\frac{ax^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9a + 18 = 9$$

  D'on esbrinem que: $a = -1$.

  Així, la funció és: $y = -x^2 + 4x$.

79. **Troba, si és possible, un nombre enter n, $n \geq 2$, per al qual siguin iguals les àrees dels tres recintes: el vermell i cada un dels dos blaus.**



Per calcular l'àrea central, busquem la funció diferència:

$$y = \sqrt[n]{x} - x^n$$

Calculem la seva primitiva:

$$G(x) = \frac{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$G(0) = 0$

$$G(1) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{n-1}{n+1}$$

D'altra banda, l'àrea de la zona que limita amb OX l'obtenim amb la següent funció:

$$y = x^n$$

La seva primitiva és:

$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$G(0) = 0$

$$G(1) = \frac{1}{n+1}$$

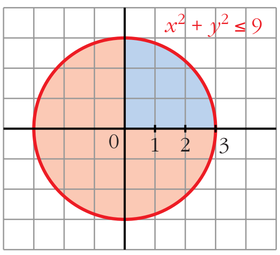
$$G(1) - G(0) = \frac{1}{n+1}$$

La regió que falta té la mateixa àrea que aquesta última. Com que les àrees han de ser iguals, les igualem:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

D'on deduïm que $n = 2$.

80. **Demostra, utilitzant el càlcul integral, que l'àrea del cercle $x^2 + y^2 \leq 9$ és 9π.**



- Àrea $= 4 \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$
- Calculem $G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$, mitjançant un canvi de variable:

$$G(x) = \int \sqrt{9 \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}\, dx = 3 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx$$

Canvi: $\dfrac{x}{3} = sin\ t \ \rightarrow \ x = 3 \cdot sin\ t \ \rightarrow \ dx = 2 \cdot cos\ t \cdot dt$

$$G(x) = 3 \cdot \int \sqrt{1 - sin^2\ t} \cdot 3cos\ t \cdot dt = 9\int cos^2\ t\ dt =$$

$$= 9\int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = 9\left[\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\ sin^2\ t\right] = \frac{9}{2}\,t + \frac{9}{4}\ sin^2\ t =$$

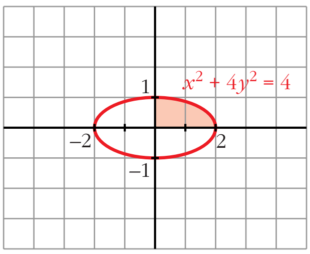
$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{9 - x^2}{9}} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

- Així doncs, l'àrea serà: $A = 4 \cdot \big(G(3) - G(0)\big) = 4 \cdot \dfrac{9\pi}{4} = 9\pi.$

81. Demostra, utilitzant el càlcul integral, que l'àrea de l'el·lipse $x^2 + 4y^2 = 4$ és 2π.



- Aïllem y: $4y^2 = 4 - x^2 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \ \rightarrow \ y = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

- L'àrea serà: $A = 4 \cdot \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\ dx.$

- Calculem $G(x) = \displaystyle\int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\ dx.$

Canvi: $\dfrac{x}{2} = sin\ t \ \rightarrow \ x = 2 \cdot sin\ t \ \rightarrow \ dx = 2 \cdot cos\ t\ dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sin^2\ t} \cdot 2cos\ t\ dt = 2\int cos^2\ t\ dt =$$

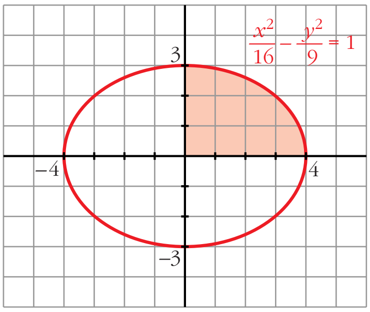
$$= 2 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = \int (1 + cos\ 2t)\ dt =$$

$$= t + \frac{sin^2\ t}{2} = arc\ sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} =$$

$$= arc\ sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4}$$

- L'àrea serà: $A = 4 \cdot \big[G(2) - G(0)\big] = 4 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 2\pi.$

82. **Calcula l'àrea tancada per l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.**



- $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \rightarrow$

$$y^2 = 9 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \rightarrow y = \pm 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}$$

- L'àrea és:

$$A = 4 \cdot \int_0^4 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx =$$

$$= 12 \int_0^4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx$$

- Calculem $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx$.

Canvi: $\frac{x}{4} = sin\ t \rightarrow x = 4 \cdot sin\ t \rightarrow dx = 4 \cdot cos\ t\ dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sin^2\ t} \cdot 4cos\ t\ dt = 4\int cos^2\ t\ dt =$$

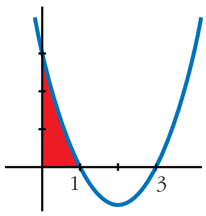
$$= 4 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = \int (2 + 2cos\ 2t)\ dt =$$

$$= 2t + sin\ 2t = 2 \cdot arc\ sin\left(\frac{x}{4}\right) + 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} =$$

$$= 2 \cdot arc\ sin\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{16 - x^2}}{8}$$

- L'àrea serà: $A = 12 \cdot [G(4) - G(0)] = 12\pi$.

83. **Troba l'expressió analítica de la funció polinòmica de segon grau que talla l'eix X en $x = 1$ i $x = 3$, i de la qual sabem que l'àrea ombrejada de la figura val $4/3$.**



Com que talla l'eix X en $x = 1$ i en $x = 3$, ha de ser:

$$f(x) = k \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = k \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

L'àrea ombrejada serà:

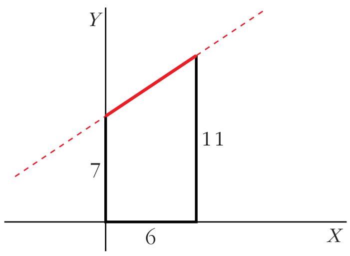
$$A = \int_0^1 k \cdot (x^2 - 4x + 3)\, dx = k \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 =$$

$$= k \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = 1$$

Per tant, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

84. **Troba el volum d'un tronc de con que té com a radis $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 11$ cm i altura 6 cm. Per fer-ho, fes girar al voltant de l'eix X el segment adequat.**

Quina equació té la recta que sosté el segment vermell? Quins són els límits d'integració que has d'utilitzar?



La recta passa pels punts (0, 7) i (6, 11). Obtenim l'equació:

$$m = \frac{11-7}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ la recta és } y = 7 + \frac{2}{3}x$$

Els límits d'integració són $x = 0$ i $x = 6$.

El volum serà:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 (f(x))^2\, dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(7 + \frac{2}{3}x\right)^2 dx =$$

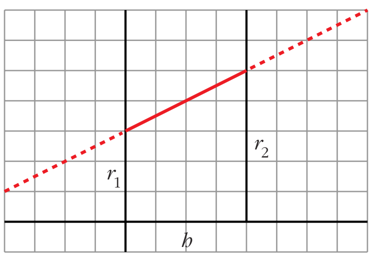
$$= \pi \cdot \int_0^6 \left(49 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[49x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{27}\right]_0^6 = 350\pi \text{ u}^3$$

85. **Per trobar la fórmula del volum d'un tronc de con, has de procedir com en l'exercici anterior, però amb dimensions variables.**

Fes-ho per un tronc de con de manera que els radis de les seves bases siguin r_1 i r_2 i la seva altura, h. Has d'arribar a la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi\, h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$



La recta passa pels punts $(0, r)$ i (h, r_2).

Obtenim l'equació: $m = \dfrac{r_2 - r_1}{h - 0} = \dfrac{r_2 - r_1}{h} \Rightarrow y = r_1 + \left(\dfrac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x.$

El volum serà:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) x \right]^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^h \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot x^2 + 2r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x \right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x^2 \right]_0^h =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 h + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot h^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[r_1^2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2) + r_1 r_2 - r_1^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r_2^2 + \frac{1}{3} \cdot r_1^2 - \frac{2}{3} \cdot r_1 r_2 + r_1 r_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot [r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$$