UNITAT 4

RESOLUCIÓ DE SISTEMES MITJANÇANT DETERMINANTS

Pàgina 82

Resolució de sistemes 2 × 2 mitjançant determinants

- **Resol, aplicant-hi $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ i $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, els següents sistemes d'equacions i comprova'n la solució:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286;$

Per tant: $x = \dfrac{156}{26} = 6;$ $y = \dfrac{-286}{26} = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166;$

Per tant: $x = \dfrac{-415}{-83} = 5;$ $y = \dfrac{-166}{-83} = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 64;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -60 & 9 \end{vmatrix} = 192;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -60 \end{vmatrix} = -320;$

Per tant: $x = \dfrac{192}{64} = 3;$ $y = \dfrac{-320}{64} = -5$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x + \ \ y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -10; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 28 & -2 \end{vmatrix} = -30;$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 28 \end{vmatrix} = 50;$$

Per tant: $x = \dfrac{-30}{-10} = 3; \quad y = \dfrac{50}{-10} = -5$

Pàgina 83

Inversa d'una matriu 2 × 2

- **Obtén, de forma semblant, les expressions de z i de t. Arribaràs, així, a la conclusió següent:**

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}z + a_{12}t = 0 \\ a_{21}z + a_{22}t = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a_{12}}{|A|}; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a_{11}}{|A|}$$

Per tant: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

- **Comprova, un cop efectuat el producte, que: $A \cdot A^{-1} = I$**

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

- **Aplica l'expressió anterior per calcular M^{-1} essent: $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.**

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

- **Fes els productes $M \cdot M^{-1}$ i $M^{-1} \cdot M$ i comprova que, en ambdós casos, obtens la matriu unitat.**

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Per què creus que és necessari que $|A| \neq 0$ perquè una matriu quadrada tingui inversa?**

En la seva obtenció, dividim per $|A|$.

És necessari que $|A| \neq 0$ perquè el sistema que obtenim tingui solució única.

Pàgina 85

1. Aplica el teorema de Rouché per descobrir si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2 \\ |A'| = 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 2 \end{array}\right\}$$

El sistema és *compatible.*

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 3 \neq ran(A) = 2$

El sistema és *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \;\rightarrow\; ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema és *incompatible.*

2. Segueix el mateix procés que en l'exercici anterior i descobreix si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x + 3y - z &=& 1 \\ 2x + \quad\quad z &=& 2 \\ 2y - z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x + 3y - z &=& 1 \\ 2x + \quad\quad z &=& 2 \\ 2y - z &=& 5 \end{array}\right. \qquad \textbf{c)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2z \quad\quad &=& 7 \\ 3x - y + \quad\quad 4t &=& 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &=& -13 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{rcl} x + 3y - z &=& 1 \\ 2x + \quad\quad z &=& 2 \\ 2y - z &=& 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (ja que la 1a i la 3a columnes són iguals)} \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema és *compatible*.

Observació: Com que la 4a columna de A' i la 1a són iguals, necessàriament $ran(A') = ran(A)$; és a dir, el sistema és compatible.

b) $$\left.\begin{array}{rcl} x + 3y - z &=& 1 \\ 2x + \quad\quad z &=& 2 \\ 2y - z &=& 5 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sabem que $ran(A) = 2$ (vegeu apartat a) d'aquest exercici).

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema és *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{rcl} x + y + 2z \quad\quad &=& 7 \\ 3x - y + \quad\quad 4t &=& 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &=& -13 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

Sabem que $ran(A) = 2$ (vegeu apartat c) de l'exercici anterior).

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema és *compatible*.

Pàgina 86

3. Enuncia la regla de Cramer per a un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2} \\ \boldsymbol{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3} \end{array}\right.$$

Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \;\; \rightarrow \;\; ran(A) = 3 = ran(A')$

Per tant, el sistema és compatible.

La solució és: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$, $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, $z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$,

de manera que A_x és la matriu que resulta de substituir en la matriu A la columna dels coeficients de x per la columna dels termes independents. Anàlogament, A_y i A_z s'obtenen substituint en A la columna dels coeficients de la incògnita corresponent per la dels termes independents.

4. Utilitzant la regla de Cramer, resol el sistema següent:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x - 3y + 5z} & = & \boldsymbol{-24} \\ \boldsymbol{2x - y + 4z} & = & \boldsymbol{-8} \\ \boldsymbol{x + y} & = & \boldsymbol{9} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 3y + 5z & = & -24 \\ 2x - y + 4z & = & -8 \\ x + y & = & 9 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Per tant: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

Pàgina 87

5. Demostra la regla de Cramer per a un sistema de tres equacions amb tres incògnites.

Procedeix de forma anàloga tal com s'ha fet en aquesta pàgina.

Tenim un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\}, \text{ amb } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Hem d'aïllar cada una de les incògnites. Comencem per la x.

Per aïllar x, hem d'eliminar y, z. Això s'aconsegueix multiplicant les tres equacions, que anomenem (1), (2), (3), pels adjunts dels coeficients de x:

$$(1) \cdot A_{11} \rightarrow a_{11}\, A_{11}\, x + a_{12}\, A_{11}\, y + a_{13}\, A_{11}\, z = c_1\, A_{11}$$
$$(2) \cdot A_{21} \rightarrow a_{21}\, A_{21}\, x + a_{22}\, A_{21}\, y + a_{23}\, A_{21}\, z = c_2\, A_{21}$$
$$(3) \cdot A_{31} \rightarrow a_{31}\, A_{31}\, x + a_{32}\, A_{31}\, y + a_{33}\, A_{31}\, z = c_3\, A_{31}$$

Sumant, obtenim una igualtat que a continuació analitzarem per parts:

- El coeficient de x és:

  $$a_{11}\, A_{11} + a_{21}\, A_{21} + a_{31}\, A_{31} = |A|$$

- El coeficient de la y és:

  $$a_{12}\, A_{11} + a_{22}\, A_{21} + a_{32}\, A_{31} = 0$$

  Anàlogament, es veu que el coeficient de z és zero.

- El terme independent és:

  $c_1\, A_{11} + c_2\, A_{21} + c_3\, A_{31}$, que és el determinant de la matriu A_x que resulta en substituir en A la columna dels coeficients de x per la columna dels termes independents:

  $$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Recapitulem: en efectuar la suma $(1) \cdot A_{11} + (2) \cdot A_{21} + (3) \cdot A_{31}$, obtenim:

$$|A|\, x + 0y + 0z = |A_x|$$

Atès que $|A| \neq 0$, podem aïllar la x, i obtenim:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

Per aïllar y caldria multiplicar les equacions (1), (2), (3) per A_{12}, A_{22}, A_{32}, respectivament. I anàlogament procediríem a aïllar z, de manera que s'obté:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Pàgina 89

6. Resol els següents sistemes d'equacions:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ \quad - 2y + 7z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ \quad - 2y + 7z = 10 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y = 3} \\ \boldsymbol{\phantom{x+{}} y + z = 5} \\ \boldsymbol{x + z = 4} \\ \boldsymbol{5x - y + z = 6} \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{3x + 4y = 4} \\ \boldsymbol{2x + 6y = 23} \\ \boldsymbol{-2x + 3y = 1} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la 1a i la 3a columnes són iguals)} \;\rightarrow\; ran\,(A') = 2$$

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 2a equació:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \;\rightarrow\; x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \;\rightarrow\; y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Solució: $x = 1 + \lambda, \;\; y = 7\lambda, \;\; z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$

Sabem, per l'apartat a), que $ran\,(A) = 2$.

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$

Calculem el rang de A':

$|A'| = 0 \rightarrow ran(A') = 3$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de l'última equació i aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solució: $x = 1, \; y = 2, \; z = 3$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Com que $|A'| = -309 \neq 0$, aleshores $ran(A') = 3 \neq ran(A)$.

El sistema és *incompatible*.

Pàgina 90

7. Resol els següents sistemes d'equacions:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Per tant, $ran(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Seleccionem el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

Podem suprimir la 3a equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \end{array}\right\} \quad \textit{Solució:}\ \ x = -\lambda, \ \ y = -2\lambda, \ \ z = \lambda$$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\} \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow ran\,(A) = 3 = \textit{nre. d'incògnites}$

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \ \ y = 0, \ \ z = 0$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

Per resoldre'l, passem la t al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y = 2t \\ x - y + z = t \end{array}\right\} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solució: $x = \lambda, \ \ y = -\lambda, \ \ z = 0, \ \ t = 2\lambda$

8. Resol:

a) $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y + 3z = 0} \\ \boldsymbol{y + z = 0} \\ \boldsymbol{x - 3y + 2z = 0} \\ \boldsymbol{-x + 5y = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x + 3z = 0} \\ \boldsymbol{y - t = 0} \\ \boldsymbol{x + y + 2t = 0} \\ \boldsymbol{2x + 2y + 3z + t = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $ran\,(A) = 2$. El sistema és *compatible indeterminat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de les dues últimes equacions i passar la z al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3z \\ y = -z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -3z + 2y = -3z - 2z = -5z \\ y = -z \end{array}\right\}$$

Solució: $x = -5\lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{rrrrl} x & & +\,3z & & = 0 \\ & y\,- & & t & = 0 \\ x\,+ & y\,+ & & 2t & = 0 \\ 2x\,+ & 2y\,+ & 3z\,+ & t & = 0 \end{array}\right\} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ \cline{1-3} 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3 < \textit{nre. d'incògnites}$$

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 4.ª equació i passar la t al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & - 3z = & 0 \\ y & = & t \\ x + y & = & -2t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = \dfrac{-x}{3} = \dfrac{3t}{3} = t \\ y = t \\ x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{array}$$

Solució: $x = -3\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = \lambda, \quad t = \lambda$

Pàgina 92

9. Discuteix i resol:

a) $$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + az = 0} \\ \boldsymbol{ax - y = -1} \\ \boldsymbol{x + 4y + 6z = 0} \end{array}\right. \qquad$$ **b)** $$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y = k} \\ \boldsymbol{kx - y = 13} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 16} \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{rrrl} x\,+ & y\,+ & az = & 0 \\ ax\,- & y & = & -1 \\ x\,+ & 4y\,+ & 6z = & 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \left\langle \begin{array}{l} a = 2 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{array}\right.$$

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\underbrace{\qquad\quad}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

- **Si $a = -3/4$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\underbrace{\qquad\quad}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

- **Si $a \neq 2$ i $a \neq -3/4$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3, el sistema és *compatible determinat.* El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solució: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \quad y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \quad z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\} \qquad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad}_{A}$$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- **Si $k = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 5 & 3\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\ 13\\ 16\end{matrix}\end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2\\ 2x - y = 13\end{array}\right\} \text{ Sumant: } 3x = 15 \;\rightarrow\; x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solució: $x = 5,\ y = -3$

- **Si $k = 5/3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 1\\ 5/3 & -1\\ 5 & 3\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}5/3\\ 13\\ 16\end{matrix}\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5/3 & -1\end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = nre.\ d'incògnites$$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3}\\ \dfrac{5}{3}x - y = 13\end{array}\right\} \text{ Sumant: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solució: $x = \dfrac{11}{2},\ y = \dfrac{-23}{6}$

- **Si $k \neq 2$ i $k \neq 5/3$** $\rightarrow$ $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$, el sistema és *incompatible.*

10. Discuteix i resol, en funció del paràmetre a, el següent sistema d'equacions: $\left\{\begin{array}{l} (a-1)x + \qquad y = 0\\ (a-1)x + (a+1)y = 0\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} (a-1)x + \qquad\quad y = 0\\ (a-1)x + (a+1)y = 0\end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1\\ a-1 & a+1\end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & a+1\end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0\\ a = 1\end{cases}$$

- **Si $a = 0$,** queda:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \quad y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Solució: $x = \lambda, \quad y = \lambda$

- **Si $a = 1$,** queda:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Solució: $x = \lambda, \quad y = 0$

- **Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$** $\rightarrow$ $ran(A) = 2$

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \quad y = 0$

Pàgina 94

11. Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{existeix } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existeix } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

12. Calcula la inversa d'aquestes matrius:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6/5 & -3/5 & 8/5 & -2/5 \\ -3/5 & 4/5 & -4/5 & 1/5 \\ -3/5 & -6/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$$|B| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{existeix } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Pàgina 95

13. Expressa en forma matricial i resol (tingues en compte l'exercici 11 de la pàgina anterior):

a) $\left\{\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x \quad + 3z &= 2 \\ -2x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x - 2y &= 11 \end{aligned}\right.$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x \quad + 3z &= 2 \\ -2x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

A l'exercici 11 de la pàgina anterior hem calculat A^{-1}.

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = 106, \; y = 64, \; z = 36$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x - 2y &= 11 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$$

A l'exercici 11 de la pàgina anterior hem calculat B^{-1}.

$$B \cdot X = C \;\rightarrow\; X = B^{-1} \cdot C = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = 1, \; y = -5$

14. **Expressa en forma matricial i resol:**

$$\textbf{a)}\begin{cases} x-2y-3z-t=0\\ y+2z=4\\ 2y+3z+t=1\\ 3x-2y+t=-2\end{cases}\qquad \textbf{b)}\begin{cases} x+y=5\\ y+z=-1\\ z+t=4\\ t=2\end{cases}$$

a) $A=\begin{pmatrix}1&-2&-3&-1\\0&1&2&0\\0&2&3&1\\3&-2&0&1\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0\\4\\1\\-2\end{pmatrix}$

A l'exercici 12 de la pàgina anterior hem calculat A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\6/5&-3/5&8/5&-2/5\\-3/5&4/5&-4/5&1/5\\-3/5&-6/5&1/5&1/5\end{pmatrix}\qquad A^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-5\end{pmatrix}$$

Solució: $x=1,\ y=0,\ z=2,\ t=-5$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y=5\\ y+z=-1\\ z+t=4\\ t=2\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{B}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}5\\-1\\4\\2\end{pmatrix}}_{C}$

A l'exercici 12 hem calculat B^{-1}.

$$B\cdot X=C\ \to\ X=B^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-3\\2\\2\end{pmatrix}$$

Solució: $x=8,\ y=-3,\ z=2,\ t=2$

Pàgina 101

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

15. **Estudia la compatibilitat d'aquests sistemes:**

$$\textbf{a)}\begin{cases} x-y=6\\ 4x+y=-1\\ 5x+2y=-5\end{cases}\qquad \textbf{b)}\begin{cases} x+y-z=-2\\ 2x-y-3z=-3\\ x-2y-2z=0\end{cases}\qquad \textbf{c)}\begin{cases} 2x+3y-z=3\\ -x-5y+z=0\\ 3x+y-z=6\end{cases}$$

$$\textbf{d)}\begin{cases} x-y-2z=2\\ 2x+y+3z=1\\ 3x+z=3\end{cases}\qquad \textbf{e)}\begin{cases} x+y+z=2\\ x-2y-7z=0\\ y+z=-1\\ 2x+3y=0\end{cases}\qquad \textbf{f)}\begin{cases} x+3y+z=-1\\ x-y-z=-1\\ 2x+y+3z=5\end{cases}$$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{matrix}\right).$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$,

tenim que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 2

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \text{Sumant: } 5x = 5 \;\rightarrow\; x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\} \quad \textit{Solució: } (1, -5)$$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{matrix}\right)$

Tenim que $|A| = 0$ i que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) = 2$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A') = 2 \neq$ *ran* $(A) = 2$

Per tant, el sistema és *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{matrix}\right)$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenim que *ran* $(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Per tant *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - z = 3 - 3y \\ -x + z = 5y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Sumant: } x = 3 + 2y \\ z = 5y + x = 5y + 3 + 2y = 3 + 7y \end{array}$$

Solucions: $x = 3 + 2\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = 3 + 7\lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\right)$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenim que *ran* $(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Per tant, *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la primera equació:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \qquad + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x \qquad = 3 - z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3 - z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array}\right\} \text{Fem } z = 3\lambda$$

Solucions: $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = 3\lambda$

e) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y \qquad = 0 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$,

tenim que: *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nre. d'incògnites* $= 3$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la quarta equació. Apliquem la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solució: $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

f) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} \right)$$

Com que $|A| = -14 \neq 0$, tenim que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3.

El sistema és *compatible determinat*. El resolem mitjançant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solució: $x = 0, \; y = -1, \; z = 2$

16. Resol els sistemes següents aplicant-hi la regla de Cramer:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{8x + 14y = 2} \\ \mathbf{3x - 5y = 11} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y - z = 1} \\ \mathbf{x - y + z = 1} \\ \mathbf{-x + y + z = 1} \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - y = 2} \\ \mathbf{2x + y + z = 0} \\ \mathbf{3y + 2z = -1} \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x + y + z = -2} \\ \mathbf{x - 2y - 3z = 1} \\ \mathbf{-x - y + z = -3} \end{array}\right.$ **e)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y - z + t = 1} \\ \mathbf{x - y - t = 2} \\ \mathbf{z - t = 0} \end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - y - z + t = 4} \\ \mathbf{x + y + z - t = 2} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\} \; A' = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 2 \\ 3 & -5 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -82 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solució: $x = 2, \; y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) \rightarrow |A| = -4 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Solució: $x = 1, \; y = 1, \; z = 1$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{rrr} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}}_{A} \left|\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right.\right) \;\longrightarrow\; |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solució: $x = -1, \; y = -5, \; z = 7$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}}_{A} \left|\begin{array}{r} -2 \\ 1 \\ -3 \end{array}\right.\right) \;\longrightarrow\; |A| = -11 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solució: $x = -1, \; y = 2, \; z = -2$

e) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}}_{A} \left|\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right.\right).$ Veiem que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \quad \textit{Solucions:} \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$$

f) $\left.\begin{array}{r} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y = 4 + z - t \\ x + y = 2 - z + t \end{array}\right\} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 + z - t & -1 \\ 2 - z + t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 + z - t \\ 1 & 2 - z + t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2 - 2z + 2t}{2} = -1 - z + t$$

Solucions: $x = 3$, $y = -1 - \lambda + \mu$, $z = \lambda$, $t = \mu$

17. Estudia i resol els sistemes següents, quan sigui possible:

a) $\left\{\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t = 0 \\ 2x + 2z + t = 0 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$, amb $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}$

Com que $|A| = -6 \neq 0$, tenim que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat*. El resolem mitjançant la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solució: $x = \dfrac{-1}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{-1}{3}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$, amb $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A}$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ i $|A| = 0$, tenim que *ran* $(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Per tant, $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$.

Així doncs, el sistema és *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{rl} x + 2y + z & = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t & = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t & = 0 \\ 2x + 2z + t & = 0 \end{array}\right\}$ És un sistema homogeni.

$$A' = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 4 \\ \hdashline 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{A} \end{array} \to \quad |A'| = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(A) = 3$. És *compatible indeterminat.*

Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació i passar la t al 2n membre. Així:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2t & 4 & 3 \\ -4t & 7 & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{6t}{16} = \frac{3t}{8}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2t & 3 \\ 1 & -4t & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{4t}{16} = \frac{t}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2t \\ 1 & 7 & -4t \end{vmatrix}}{16} = \frac{-14t}{16} = \frac{-7t}{8}. \quad \textit{Solucions: } \left(\frac{3}{8}\lambda, \frac{1}{4}\lambda, \frac{-7}{8}\lambda, \lambda\right)$$

d) $\left.\begin{array}{rl} x + y & = 5 \\ x + z & = 6 \\ y + z & = 7 \\ 2x + y + z & = 11 \end{array}\right\}$ $A' = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ \hdashline 2 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{A} \end{array}$

Tenim que $|A'| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Per tant, $ran\,(A) = ran\,(A') = \textit{nre. d'incògnites} = 3$. El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4. \quad \textit{Solució: } x = 2, \; y = 3, \; z = 4$$

18. Resol en funció de k:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = k \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = k \\ y - z = k - 1 \end{array}\right.$

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 10$

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ k & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4k - 3$$

$$|M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & -2 \end{vmatrix} = -2k + 4$$

$$|M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & k \end{vmatrix} = 2k - 9$$

Solució: $x = \dfrac{|M_x|}{|M|} = \dfrac{4k-3}{10}$, $y = \dfrac{|M_y|}{|M|} = \dfrac{-2k+4}{10}$, $z = \dfrac{|M_z|}{|M|} = \dfrac{2k-9}{10}$

b) $|M| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$

$|M_x| = 2k - 2$

$|M_y| = -7k + 4$

$|M_z| = -k - 2$

Solució:

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{2k-2}{-6} = \frac{1-k}{3},$$

$$y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-7k+4}{-6} = \frac{7k-4}{6}$$

$$z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-k-2}{-6} = \frac{k+2}{6}$$

19. Resol els següents sistemes homogenis:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0\\ 12x-3y-2z=0\\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0\\ x-2y+z=0\\ 12x-3y-2z=0 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2\\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, aleshores, $ran\,(A) = 2$.

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 3a equació i passar la z al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=z\\ x-2y=-z \end{array}\right\} \quad x=\frac{\begin{vmatrix} z & 1\\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-z}{-3}=\frac{z}{3};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & z\\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-2z}{-3}=\frac{2z}{3}$$

Solucions: $\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 9x+3y+2z=0\\ 3x-y+z=0\\ 8x+y+4z=0\\ x+2y-2z=0 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 8 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Com que $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, aleshores: $ran\,(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema només té la solució trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

20. Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:

a) $\left\{\begin{array}{r} mx+y+z=4\\ x+y+z=m\\ x-y+mz=2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=m-1\\ 2x+y+mz=m\\ x+my+z=1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=0\\ x+my+z=0\\ 2x+3y+4z=2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{r} x+my+z=4\\ x+3y+z=5\\ mx+y+z=4 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{r} x+2z=3\\ 3x+y+z=-1\\ 2y-z=-2\\ x-y+mz=-5 \end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{r} (1+m)x+y+z=1\\ x+(1+m)y+z=m\\ x+y+(1+m)z=m^2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} mx+y+z=4\\ x+y+z=m\\ x-y+mz=2 \end{array}\right\}$ $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & m\\ 1 & -1 & m & 2 \end{array}\right)$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictòries} \quad \to \quad \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictòries} \quad \to \quad \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$** $\to$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

b)

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} m-1 \\ m \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \to \quad m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Contradictòries} \quad \to \quad \text{El sistema és } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right).$$ Les columnes 1a, 3a i 4a són iguals.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ $\to$ *ran* (A') = *ran* $(A) = 2 <$ *nre. d'incògnites*

El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $m \neq 1$ i $m \neq 2$** $\to$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

c)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = -2m + 2 = 0 \quad \to \quad m = 1$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right). \text{ Com que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

  aleshores: *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$**, queda: *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

d) $$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 4 \end{array} \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \ \rightarrow \ m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \ \begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$$

- **Si $m = 3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{ Contradictòries } \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 4 \end{array} \end{array}\right). \text{ La 1a i la 3a files són iguals.}$$

  A més, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Per tant, *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nre. d'incògnites.*

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $m \neq 3$ i $m \neq 1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

e) $$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{array} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ \text{1a} \\ \text{2a} - 3 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} \\ \text{4a} - \text{1a} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILES} \\ \text{1a} \\ \text{2a} - 2 \cdot \text{1a} \\ \text{3a} + \text{1a} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9-m+7) =$$

$$= 18(-m-2) = 0 \quad \to \quad m = -2$$

A més, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 3$

- **Si $m = -2$** $\to$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat.*

- **Si $m \neq -2$** $\to$ *ran* $(A') = 4 \neq$ *ran* $(A) = 3$. Sistema *incompatible.*

f) $$\left.\begin{array}{rl} (1+m)x + y + z &= 1 \\ x + (1+m)y + z &= m \\ x + y + (1+m)z &= m^2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 & m \\ \underbrace{1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1+m}_{A} & & & m^2 \end{array}\right)$$

$$|A| = m^3 + 3m^2 = m^2(m+3) = 0 \begin{array}{l} \nearrow m = \ \ 0 \\ \searrow m = -3 \end{array}$$

- **Si $m = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema és *incompatible.* (La 1a equació contradiu les altres.)

- **Si $m = -3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ \underbrace{1 \quad\ 1 \quad -2}_{A} & & & 9 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 2$

A més, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A') = 3$

Per tant el sistema és *incompatible.*

- **Si $m \neq 0$ i $m \neq -3$** $\to$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat.*

21. **Discuteix els següents sistemes homogenis en funció del paràmetre a:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \ \rightarrow\ a = -5$

- **Si $a = -5$** → Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2.$

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq -5$** → Només té la solució trivial (0, 0, 0).

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\}\quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \ \rightarrow\ a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} a = -3 \\ a = \ \ 2 \end{array}$$

- **Si $a = -3$ o $a = 2$** → Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2.$

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq -3$ i $a \neq 2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Només existeix la solució trivial (0, 0, 0).

c) $\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\}\quad A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$|A| = -2a - 5 = 0 \ \rightarrow\ a = \dfrac{-5}{2}$

- **Si $a = -\dfrac{5}{2}$** → Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2.$

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq -\frac{5}{2}$** → *ran* (A) = *ran* (A') = 3. Només existeix la solució trivial (0, 0, 0).

d) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y + az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3a - 46 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{46}{3}$$

- **Si $a = \frac{46}{3}$** → Com que $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 2.

  El sistema és *compatible indeterminat*.

- **Si $a \neq \frac{46}{3}$** → *ran* (A) = *ran* (A') = 3. Només existeix la solució trivial (0, 0, 0).

22. Hi ha algun valor de *a* per al qual aquests sistemes tinguin solucions infinites?

a) $$\left\{\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right.$$ **c)** $$\left\{\begin{array}{r} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 2 \\ -4 \\ 2 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = 9a + 27 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -3$$

- **Si $a = -3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

  Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ i $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, aleshores:

  ran $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$ → El sistema és *incompatible*.

- **Si $a = -3$** → *ran* (A) = *ran* (A') = 3 → *Compatible determinat*.

  Per tant, *no* existeix cap valor de *a* per al qual el sistema tingui infinites solucions.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} a - 1 \\ a \\ 1 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Contradictòries. El sistema és *incompatible*.

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right).$$ Les columnes 1a, 3a i 4a són iguals, i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

per tant, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$. El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$** → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ → *Compatible determinat.*

Per tant, el sistema té infinites solucions per a $a = 2$.

c) $\left.\begin{array}{r} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + \ \ y \qquad = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a+1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} a+3 \\ a \\ a+2 \end{matrix} \end{array}\right)$

$|A| = a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

- **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ La primera fila és la tercera menys la segona.

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; per tant, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq -1$** → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ → *Compatible determinat.*

Així doncs, el sistema té infinites solucions per a $a = -1$.

Pàgina 102

23. Troba la matriu inversa de les matrius:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \ \text{ i } \ \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

24. **Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Existeix } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Existeix } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

25. **Utilitza les matrius $\boldsymbol{A^{-1}}$ i $\boldsymbol{B^{-1}}$ que has trobat en l'exercici anterior per resoldre les equacions:**

a) $\boldsymbol{AX = B}$ **b) $\boldsymbol{XB = A}$**

a) $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix} = X}$$

b) $X = A \cdot B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix} = X}$$

26. **Considerem la matriu següent:** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Troba els valors de $\boldsymbol{x}$ per als quals $\boldsymbol{A}$ té inversa.

b) Calcula, si és possible, $\boldsymbol{A^{-1}}$ per a $\boldsymbol{x = 2}$.

a) Existeix A^{-1} només quan $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Per tant, existeix A^{-1} per a tot $x \neq 0$.

b) Per a $x = 2$, tenim que $|A| = 2 \neq 0$, per tant existeix A^{-1} en aquest cas. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

27. Expressa en forma matricial i resol utilitzant-hi la matriu inversa:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x + y = 2} \\ \mathbf{y + 3z = 0} \\ \mathbf{2x + y + z = 2} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y - z = 3} \\ \mathbf{2x + y + z = -2} \\ \mathbf{x - 2y - 3z = 1} \end{array}\right.$

a)
$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow$$

$$\rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Així doncs: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existeix A^{-1}. La calculem:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Així doncs: $x = -1, \;\; y = 2, \;\; z = -2$

28. **Escriu en la forma habitual aquests sistemes:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 3y + 2z = 4 \\ x - \;\, y - \;\, z = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

29. **Escriu en forma matricial els sistemes següents:**

a) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = \;\;1 \\ 2x & & +z & = -1 \\ x & -y & +z & = \;\;2 \\ & 2y & -z & = \;\;0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\;\, y & +z & -t & = 2 \\ & 3y & & +t & = 1 \\ 2x & +\;\, y & & -t & = 0 \end{array}\right.$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

PER RESOLDRE

30. **Calcula la matriu inversa de cada una de les matrius següents per a aquells valors de a que sigui possible:**

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = a^2 + 1 \neq 0$ per a qualsevol valor de a.

Així doncs, existeix A^{-1} per a qualsevol valor de a. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \to |A| = 2a \neq 0$ si $a \neq 0$. Només existeix A^{-1} si $a \neq 0$.

La calculem en aquest cas:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{2a} & \dfrac{3}{2a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \to |A| = (a-2)\,a \neq 0$ si $a \neq 0$ i $a \neq 2$

Existeix A^{-1} només quan $a \neq 0$ i $a \neq 2$. La calculem en aquest cas:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

31. Determina si les equacions següents tenen solució i troba-la si és possible:

a) $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Com que $|A| = -7 \neq 0$, existeix A^{-1} i l'equació té solució.

$X \cdot A = I \quad \rightarrow \quad X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}$. Busquem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant: $X = \dfrac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Com que $|A| = 0$, no existeix A^{-1}. L'equació *no* té solució.

c) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Com que $|A| = 4 \neq 0$, existeix A^{-1} i l'equació té solució.

$A \cdot X = B \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$. Busquem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Així doncs:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

32. Discuteix i resol segons els valors de m: $\left\{\begin{array}{l} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{r} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\begin{matrix} m & 1 \\ 1 & m \end{matrix}}_{A} & & \begin{matrix} 2 - 2m \\ m - 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 < \begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}$$

- **Si $m = 1$,** queda:

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ El sistema és *compatible indeterminat.* El resolem:

  $x + y = 0 \rightarrow y = x.$ *Solucions:* $x = \lambda, \ y = -\lambda$

- **Si $m = -1$,** queda:

  $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Les equacions són contradictòries. El sistema és *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 2. El sistema és *compatible determinat.* El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - 2m & 1 \\ m - 1 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{-2m^2 + m + 1}{m^2 - 1} = \frac{(-2m - 1)(m - 1)}{(m + 1)(m - 1)} = \frac{-2m - 1}{m + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 - 2m \\ 1 & m - 1 \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{m^2 + m - 2}{m^2 - 1} = \frac{(m + 2)(m - 1)}{(m + 1)(m - 1)} = \frac{m + 2}{m + 1}$$

Solució: $x = \dfrac{-2m - 1}{m + 1}; \ y = \dfrac{m + 2}{m + 1}$

33. Resol l'equació $A\,X\,B = C$ si:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Multiplica C per A^{-1} per l'esquerra i per B^{-1} per la dreta.***

$$AXB = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Calculem A^{-1} i B^{-1} ($|A| = 1$ i $|B| = 1 \rightarrow$ existeixen A^{-1} i B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Per tant:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

34. Determina els valors de m per als quals són incompatibles aquests sistemes. Resol-los quan siguin compatibles:

a) $\begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (m+1)\,x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)\,y + 3z = 0 \\ (m+1)\,x + 2y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} mx - y - z &= m \\ x - y + mz &= m \\ x + y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m & -1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} m \\ m \\ -1 \end{matrix}\right)$

$$|A| = -m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1$$

- **Si $m = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right)$$

Contradictòries. El sistema és *incompatible.*

- **Si $m \neq -1$,** és compatible determinat, ja que $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$.
- Per tant, només és incompatible per a $m = -1$.

b) $\left.\begin{aligned} (m+1)x + y + z &= 3 \\ x + 2y + mz &= 4 \\ x + my + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} (m+1) & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right)$

$$|A| = -m^3 - m^2 + 6m = -m(m-2)\,(m+3) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

- **Si $m = 0$,** queda:

$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right)$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$,

aleshores: $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 \quad \rightarrow$ *Compatible indeterminat.*

- **Si $m = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictòries} \quad \rightarrow \quad \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = -3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Com que} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \text{ i } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -45,$$

A

aleshores: $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$ → Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 0$, $m \neq 2$ i $m \neq -3$** → Sistema *compatible determinat*, ja que $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$.

Per tant, és incompatible per a $m = 2$ i per a $m = -3$.

c) $$\left.\begin{array}{rl} 2x + y - z &= m - 4 \\ (m-6)y + 3z &= 0 \\ (m+1)x + 2y &= 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & m-4 \\ 0 & m-6 & 3 & 0 \\ m+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

A

$$|A| = m^2 - 2m - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{array}{l} m = \ \ 5 \\ m = -3 \end{array}$$

- **Si $m = 5$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right). \quad \text{Com que} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

A

aleshores $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$; el sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $m = -3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right). \quad \text{Com que} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18 \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 72,$$

A

aleshores $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. El sistema és *incompatible.*

- **Si $m \neq 5$ i $m \neq -3$** → Sistema *compatible determinat*, ja que $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$.

Per tant, és incompatible només per a $m = -3$.

35. Discuteix en funció de p i resol quan siguin compatibles els sistemes següents:

a) $$\left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x + py + 2z &= 10 \\ px + 6y + 3z &= 12 \end{aligned}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{aligned} 2y - z &= 5 \\ p^2x - z &= 1 \\ x - y &= p \end{aligned}\right.$$

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & p & 2 \\ p & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -p^2 + 7p - 12$$

Quan $|A| = 0 \rightarrow p = 3 \quad p = 4$

Si $p \neq 3$ i $p \neq 4 \rightarrow$ *rang* $(A) = 3 =$ *rang* $(A') = 3$. El sistema és *compatible determinat*.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & p & 2 \\ 12 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{-p^2 + 7p - 12} = \frac{3p - 12}{-p^2 + 7p - 12} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ p & 12 & 3 \end{vmatrix}}{-p^2 + 7p - 12} = 0 = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 10 \\ p & 6 & 12 \end{vmatrix}}{-p^2 + 7p - 12} = \frac{-5p^2 + 32p - 48}{-p^2 + 7p - 12} = z$$

Avaluem el sistema quan $p = 3 \rightarrow$ *rang* $(A) = 2$; *rang* $(A') = 3$. El sistema és *incompatible*.

Avaluem el sistema quan $p = 4 \rightarrow$ *rang* $(A) =$ *rang* $(A') = 3 < 3 =$ nº incògnites. El sistema és *compatible indeterminat*.

$x = 5$

$y = \dfrac{10 - \lambda}{2}$

$z = \lambda$

b) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = p^2 - 1$$

Si $p \neq 1$ i $p \neq -1 \rightarrow$ sistema *compatible determinat*.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ p & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-p - 1}{p^2 - 1} = \frac{-1}{p - 1} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ p^2 & 1 & -1 \\ 1 & p & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-p^3 - 1}{p^2 - 1} = \frac{-p^2 + p - p}{p - 1} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p^2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-p^3 - 2p^2 + 1}{p^2 - 1} = z$$

Avaluem el sistema si $p = 1 \;\to\; rang\,(A) = 2 < 3 = rang\,(A')$. El sistema és *incompatible.*

Avaluem el sistema si $p = -1 \;\to\; rang\,(A) = rang\,(A') = 2 < 3 =$ nº incògnites. El sistema és *compatible indeterminat.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} \\ x - z = 1 \\ y - z = 2 \\ \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Pàgina 103

36. Donada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, troba una matriu X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☛ ***Multiplica dues vegades per A^{-1}, una vegada per l'esquerra i una altra per la dreta.***

Calculem A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \;\to\;$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;\to\; X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

37. Donades les matrius:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

troba la matriu X que verifica $AB + CX = D$.

$$AB + CX = D \;\to\; CX = D - AB \;\to\; X = C^{-1} \cdot (D - AB)$$

- Calculem C^{-1} ($|C| = -2 \neq 0 \;\to\;$ existeix C^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(C) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(C))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculem $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

- Així doncs:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. **Troba X de manera que $3AX = B$, si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**

$3AX = B \rightarrow X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculem A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

39. **Resol l'equació: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$**

$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$ Calculem A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Així doncs:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; és a dir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

40. **Discuteix i resol, segons els diferents valors del paràmetre a, aquests sistemes d'equacions:**

a) $\left\{\begin{array}{l} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \qquad\quad - az = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax \qquad\quad = 2 \\ \quad ay + 2z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \qquad\quad - az = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{matrix}}_{A} \ \middle|\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \qquad |A| = 1 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- **Si $a = 1$,** queda:

  $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \ \middle|\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$. Observem que la 1a i la 3a columnes són iguals.

  A més, $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$; per tant, *ran* (A) = *ran* (A') = 2.

  El sistema és *compatible indeterminat.* El resolem. Podem prescindir de la 1a equació:

  $\left.\begin{array}{l} x + 8y = 1 - 23z \\ x \qquad\ = 1 + \quad z \end{array}\right\} \ 8y = 1 - 23z - 1 - z = -24z \ \rightarrow \ y = -3z$

  Solucions: $(1 + \lambda, -3\lambda, \lambda)$

- **Si $a = -1$,** queda:

  $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} -1 & 7 & 20 \\ -1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \ \middle|\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$. Com que $\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

  Per tant, *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema és *incompatible.*

- **Si $a \neq 1$ i $a \neq -1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat.* El resolem:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{1 - a}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{1}{1 + a}$$

  $$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 20 \\ a & 1 & 23 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{3 - 3a}{1 - a^2} = \frac{3(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{3}{1 + a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ a & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{a - 1}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-1}{1 + a}$$

Solució: $x = \dfrac{1}{1 + a}, \quad y = \dfrac{3}{1 + a}, \quad z = \dfrac{-1}{1 + a}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ ax \qquad\quad = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{array}}_{A}\middle|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = -a(2 - a) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = 0$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$ Sistema **incompatible** (la 2a equació és impossible).

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}}_{A}\middle|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right).$$ La 1a i la 3a columnes són iguals.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; per tant, *ran* (A) = *ran* (A') = 2.

El sistema és *compatible indeterminat.* El resolem. Podem prescindir de la 3.ª equació:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x \qquad\quad = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - x - z = -z \end{array}\right\} \text{ Solucions: } (1, -\lambda, \lambda)$$

- **Si $a \neq 0$ i $a \neq 2$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat.* El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}}{-a(2 - a)} = \frac{-2(2 - a)}{-a(2 - a)} = \frac{2}{a}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-a(2 - a)} = \frac{2(2 - a)}{-a(2 - a)} = \frac{-2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{-a(2 - a)} = \frac{-a(2 - a)}{-a(2 - a)} = 1; \qquad \text{Solució: } x = \frac{2}{a}, \quad y = \frac{-2}{a}, \quad z = 1$$

41. Discuteix el següent sistema d'equacions segons els valors del paràmetre a i el resols en el cas $a = 2$:

$$\left\{\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}\right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)}_{A}.$$ La 1a i la 3a files són iguals.

A més, $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$; per tant, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites*.

El sistema és *compatible indeterminat*. El resolem en aquest cas. Podem prescindir de la 3.ª equació (atès que és igual que la 1a):

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} y + 3z &= -x \\ y + 2z &= 1 - x \end{aligned}\right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{x-3}{-1} = 3 - x; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Solucions: $x = \lambda, \ y = 3 - \lambda, \ z = -1$

- **Si $a = -2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20$ i $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -128 \neq 0$, llavors $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 2$ i $a \neq -2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 =$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible determinat*.

42. **Troba els valors de α per als quals admeten infinites solucions els sistemes següents. Obtén totes les solucions i interpreta geomètricament els resultats obtinguts:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + \alpha z &= 5 \\ 2x + y - 3z &= 4 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + \alpha z &= 5 \\ 2x + y - 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & -3 \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}\right.\right)$ $|A| = \alpha - 9 = 0 \rightarrow \alpha = 9$

- **Si $\alpha = 9$**, queda:

  $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -3 \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}\right.\right)$. Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, aleshores:

  ran (A) = *ran* $(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites.* El sistema és *compatible indeterminat.* El resolem. Podem prescindir de la 3a equació i passar la z al 2n membre:

  $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 - 2z \\ x + 2y &= 5 - 9z \end{aligned}\right\}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 5-9z & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 5z;$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 1 & 5-9z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 7z$

  Solucions: $x = 1 + 5\lambda$, $y = 2 - 7\lambda$, $z = \lambda$

  Geomètricament, són tres plans que es tallen en una recta.

- **Si $\alpha \neq 9$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat.* El resolem:

  $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & \alpha \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{\alpha - 9}{\alpha - 9} = 1;$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & \alpha \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{2\alpha - 18}{\alpha - 9} = \dfrac{2(\alpha - 9)}{\alpha - 9} = 2$

  $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{0}{\alpha - 9} = 0.$ *Solució:* $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$

  Geomètricament, són tres plans que es tallen en el punt (1, 2, 0).

b) $\left.\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} 1 \\ 2\alpha - 1 \end{matrix}\right.\right)$

$$|A| = -\alpha^2 + 1 = 0 \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

- **Si** $\alpha = 1$, queda:

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Compatible indeterminat.* El resolem:

  $x - y = 1 \;\rightarrow\; x = 1 + y$. *Solucions:* $x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$.

  Geomètricament són rectes coincidents (es tracta de la mateixa recta).

- **Si** $\alpha = -1$, queda:

  $A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Les equacions són contradictòries. El sistema és *incompatible.*

  Geomètricament, són dues rectes paral·leles.

- **Si** $\alpha \neq 1$ **i** $\alpha \neq -1$ → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 2. El sistema és *compatible determinat.* El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\alpha - 1 & -\alpha \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha - 1}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-1}{1 + \alpha}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{(\alpha - 1)(2\alpha + 1)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Solució: $x = \dfrac{-1}{1 + \alpha}$; $y = \dfrac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$

Geomètricament són dues rectes que es tallen en un punt.

43. Discuteix la compatibilitat del sistema següent segons els diversos valors de λ i el resols per a $\lambda = -1$ i per a $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} -x + \lambda y + 2z &= \lambda \\ 2x + \lambda y - z &= 2 \\ \lambda x - y + 2z &= \lambda \end{aligned}\right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\phantom{\begin{matrix} -1 & \lambda & 2 \end{matrix}}}_{A}$$

$|A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -1$

- **Si** $\lambda = -1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$ La 1a i la 3a equacions són iguals.

$$\underbrace{\phantom{\begin{matrix} -1 & -1 & 2 \end{matrix}}}_{A}$$

Com que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, aleshores $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$.

El sistema és *compatible indeterminat.* El resolem. Podem prescindir de la 3a equació i passar la z al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{l} -x - y = -1 - 2z \\ 2x - y = \;\;2 + \;\;z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 1 + 2z \\ 2x - y = 2 + \;\;z \end{array}\right\} \text{ Sumant: } 3x = 3 + 3z \;\rightarrow\; x = 1 + z$$

$y = 1 + 2z - x = 1 + 2z - 1 - z = z$

Solucions: $x = 1 + \lambda,\;\; y = \lambda,\;\; z = \lambda$

- **Si $\lambda \neq -1$** → $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nre. incògnites* $= 3$. El sistema és *compatible determinat.* El resolem per al cas en què $\boldsymbol{\lambda = 2}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \qquad \textit{Solució: } x = \frac{2}{3},\; y = \frac{2}{3},\; z = \frac{2}{3}$$

44. **Troba, en funció de $\boldsymbol{a}$, el rang de la matriu $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}}$ i calcula, si existeix, la matriu inversa $\boldsymbol{A^{-1}}$ en els casos $\boldsymbol{a = 1}$ i $\boldsymbol{a = -1}$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = a^2 + 4a + 3 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} a = -1 \\ a = -3 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & a & \boxed{-3} \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Per tant:

- **Si $\boldsymbol{a = -1}$ o $\boldsymbol{a = -3}$** → $ran\,(A) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a \neq -1}$ i $\boldsymbol{a \neq -3}$** → $ran\,(A) = 3$

Així, si $a = -1$, com que $|A| = 0$, no existeix A^{-1}.

Per a $a = 1$, $|A| = 8 \neq 0$, sí que existeix A^{-1}. La calculem en aquest cas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -12 & -4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

45. **Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.**

a) Quan el determinant de A és el sinus d'algun nombre real?

b) Calcula A^{-1} quan existeixi.

c) Determina tots els parells (a, b) per als quals A coincideix amb la seva inversa.

a) $|A| = b$ serà el sinus d'algun nombre real quan $-1 \le b \le 1$.

b) Existirà A^{-1} quan $|A| \neq 0$, és a dir, quan $b \neq 0$. La calculem en aquest cas:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} \to \begin{cases} a = -\dfrac{a}{b} \to ab + a = 0 \to a(b+1) = 0 \\ b = \dfrac{1}{b} \to b^2 = 1 \begin{cases} b = 1 \to a = 0 \\ b = -1 \to a \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$$

$A = A^{-1}$ quan $\begin{cases} \bullet\ a = 0 \text{ i } b = 1 \to (0, 1) \\ \bullet\ b = -1 \text{ i } a \text{ qualsevol nombre real} \to (a, -1) \end{cases}$

46. **Troba els valors del paràmetre t per als quals les matrius A i B no són invertibles i calcula:**

a) A^{-1} si $t = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

b) B^{-1} si $t = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \to t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

A no és invertible per a $t = 2$ ni per a $t = -6$.

Calculem A^{-1} per a $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no és invertible per a $t = 1$ ni per a $t = -1$.

Calculem B^{-1} per a $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

47. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en què λ és qualsevol nombre real:

a) Troba els valors de λ per als quals AB és invertible.

b) Determina els valors de λ per als quals BA és invertible.

c) Donats a i b, nombres reals qualssevol, el següent sistema pot ser compatible determinat?

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$A \cdot B$ és invertible quan $\lambda \neq \frac{1}{2}$ i $\lambda \neq -2$.

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda - 3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$|B \cdot A| = 0 \rightarrow B \cdot A$ no és invertible.

c) $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és compatible indeterminat, per a qualsevol valor de a i b. Per tant, no pot ser compatible determinat.

Pàgina 104

48. En el cas que existeixi, calcula una matriu X tal que $AX = B$ en els casos següents:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}. Per tant:

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -14 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Per poder efectuar el producte $A \cdot X = B$, X hauria de ser (si existís) de dimensió 2 × 3.

Donat $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Aleshores:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a & y + b & z + c \\ 2x + a & 2y + b & 2z + c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x + a = 2 \quad \to \quad x = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2x + a = 1 \quad \to \quad 2x = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \quad \to \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$3a = 5 \quad \to \quad a = \frac{5}{3}$$

No té solució. Per tant *no* existeix X tal que $AX = B$.

49. Donat el sistema: $S: \begin{cases} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x + \qquad z = \beta \\ x - \qquad z = \alpha - 3\beta \end{cases}$

a) Demostra que és compatible determinat per a qualsevol valor de α i β.

b) Resol-lo per a $\alpha = \beta = 1$.

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x + z = \beta \\ x - z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(A) = ran\,(A') = 3$$

El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de α i β.

b) Si $\alpha = \beta = 1$, queda:

$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \end{array}\right)$, amb $|A| = -2$. El resolem mitjançant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}. \quad \textit{Solució:} \ x = \frac{-1}{2}, \ y = \frac{3}{2}, \ z = \frac{3}{2}$$

50. **a) Discuteix, en funció de a, el sistema següent:** $\begin{cases} x+ay+\;\;z=a+2\\ x+\;\;y+az=-2(a+1)\\ ax+\;\;y+\;\;z=a\end{cases}$

b) Resol el sistema anterior per al cas $a=-1$.

a) $\left.\begin{array}{r} x+ay+\;\;z=a+2\\ x+\;\;y+az=-2(a+1)\\ ax+\;\;y+\;\;z=a\end{array}\right\}\quad A'=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1&a&1\\1&1&a\\a&1&1\end{matrix}}_{A}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}a+2\\-2(a+1)\\a\\ \end{matrix}\right)$

$|A| = a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)=0 \begin{matrix}\nearrow a=1\\ \searrow a=-2\end{matrix}$

- **Si $a=1$,** queda:

  $A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&1&1&-4\\1&1&1&1\end{array}\right)$. El sistema és *incompatible.*

- **Si $a=-2$,** queda:

  $A'=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1&-2&1\\1&1&-2\\-2&1&1\end{matrix}}_{A}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}0\\2\\-2\\ \end{matrix}\right)$. Com que $\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}=3$ i $\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&2\\-2&1&-2\end{vmatrix}=0,$

  aleshores *ran* (A) = *ran* $(A')=2<$ *nre. d'incògnites.*

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a\neq 1$ i $a\neq -2$,** el sistema és *compatible determinat.*

b) **Per a $a=-1$,** queda:

$A'=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{matrix}}_{A}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}1\\0\\-1\\ \end{matrix}\right)$ i sabem que $|A|=4$.

El sistema en aquest cas és *compatible determinat.* El resolem aplicant la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\-1&1&-1\end{vmatrix}}{4}=\frac{0}{4}=0.$$ *Solució:* $x=\frac{1}{2},\; y=\frac{-1}{2},\; z=0$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

51. En un sistema d'igual nombre d'equacions que d'incògnites, el determinant de la matriu de coeficients és igual a 0. Respon raonadament les preguntes següents:

a) Pot ser compatible?

b) Pot tenir solució única?

c) S'hi pot aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podria ser compatible indeterminat si $ran\,(A) = ran\,(A') < nre.\ d'incògnites$.

b) No, ja que com que $ran\,(A) < nre.\ d'incògnites$, el sistema no pot ser compatible determinat.

c) Sí, si és compatible, passant al 2.^{n} membre les incògnites que sigui necessari.

52. El rang de la matriu de coeficients d'un sistema homogeni de quatre equacions i tres incògnites és igual a 3.

Què pots dir de la seva solució? Raona la teva resposta.

Com que el sistema és homogeni amb 3 incògnites, tenim que $ran\,(A) = ran\,(A') =$ $= nre.\ d'incògnites = 3$. El sistema seria compatible determinat. Per tant, tindria com a solució única la solució trivial (0, 0, 0).

53. Quina condició ha de complir una matriu quadrada per tenir inversa?

La condició necessària i suficiente perquè una matriu, A, quadrada tingui inversa és que el seu determinant sigui diferent de zero, és a dir, $|A| \neq 0$.

54. Siguin A i B inverses una de l'altra. Si $|A| = 4$, quant val $|B|$?

Si A i B són inverses l'una de l'altra, aleshores $A \cdot B = I$. Així:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

55. El rang de la matriu de coeficients d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és igual a 1. Quin rang, com a màxim, pot tenir la matriu ampliada?

Com a màxim, la matriu ampliada podrà tenir rang 2.

56. Hi ha algun valor de a per al qual la matriu $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tingui inversa?

$$\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0 \text{ per a qualsevol valor de } a.$$

Per tant, no existeix cap valor de a per al qual la matriu donada no tingui inversa.

57. **Donades aquestes equacions:** $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right.$

a) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui incompatible.

b) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui compatible determinat.

Justifica en cada cas el procediment seguit per afegir l'equació.

a) Per exemple, $3x - 2y + z = 1$ contradiu la 1a equació; per tant, si afegim aquesta equació, el sistema obtingut seria incompatible.

b) Per exemple, si afegim l'equació $y = 0$, com que

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ el sistema seria compatible determinat.}$$

58. **Representa matricialment els sistemes:**

$$s\colon \left\{\begin{array}{l} 3x + y = 1 \\ 11x + 4y = 0 \end{array}\right. \qquad s'\colon \left\{\begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ 11x + 4y = 1 \end{array}\right.$$

Resol-los i descobreix si hi ha alguna relació entre les solucions obtingudes i la inversa de la matriu $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Justifica la relació obtinguda.

SISTEMA s

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMA s'

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ $(|A| = 1 \neq 0)$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

SOLUCIÓ DEL SISTEMA s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓ DEL SISTEMA s'

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Les solucions obtingudes són cada una de les columnes de la matriu inversa. Observem que les matrius dels termes independents dels dos sistemes són les columnes de la matriu identitat. Per tant, les incògnites que busquem són els elements de la matriu inversa.

59. **Demostra que no hi ha valors de m per als quals el sistema següent no tingui solució:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{matrix}}_{A}} & \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$|A| = 4 - m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 4$

- **Si $m = 4$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}}_{A}} & \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{matrix} \end{array}\right). \text{ La 4a columna s'obté sumant la 2a i la 3a.}$$

Així doncs, $ran\ (A) = ran\ (A')$. El sistema és compatible. (En aquest cas seria compatible indeterminat, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.)

- **Si $m \neq 4$** $\quad \rightarrow \quad ran\ (A) = ran\ (A') = nre.\ d'incògnites = 3$. El sistema és compatible determinat.

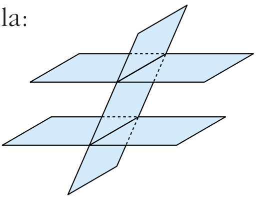
Per tant, no hi ha cap valor de m per al qual el sistema no tingui solució.

60. **Si el rang de la matriu d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és dos i el de la matriu ampliada tres, quines interpretacions geomètriques podem donar a aquest sistema? Posa un exemple d'un sistema d'aquestes característiques i la seva interpretació geomètrica.**

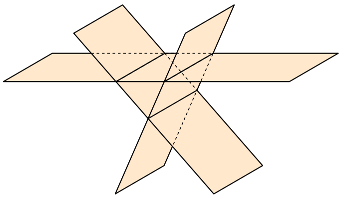
Si $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$, el sistema és incompatible.

Interpretacions geomètriques possibles:

1) Dos plans paral·lels i un altre que els talla:



2) Tres plans que es tallen dos a dos, però sense cap punt comú als tres:



Un exemple de cada un dels dos casos seria:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array}\right\} \qquad\qquad 2)\ \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{array}\right\}$$

Pàgina 105

61. Si dos sistemes de quatre equacions lineals amb quatre incògnites, $AX = B$ i $AX = B'$, tenen una mateixa matriu de coeficients A, pot ser incompatible un dels dos sistemes mentre que l'altre és compatible i determinat?

No. Si un d'ells és compatible determinat és perquè *ran* (A) = *ran* $(A') = 4$. Per tant, si A és la mateixa matriu en els dos sistemes, també en l'altre serà *ran* $(A) = 4$. Així doncs, els dos serien compatibles determinats.

62. Pot passar que un sistema d'equacions lineal homogeni no tingui solució? Pot passar que tingui solucions infinites? Raona les respostes.

Un sistema homogeni sempre té, almenys, la solució trivial (0, 0, 0). A més, *ran* (A) = = *ran* (A'); per tant, sempre és compatible. Si *ran* (A) = *nre. d'incògnites*, aleshores només tindria la solució trivial; i, si *ran* (A) < *nre. d'incògnites*, seria compatible indeterminat, és a dir, tindria infinites solucions.

63. El rang de la matriu dels coeficients d'un sistema de quatre equacions amb tres incògnites és 3. Quin rang pot tenir la matriu ampliada? Segons això, quantes solucions tindrà aquest sistema?

La matriu ampliada, A', podria tenir rang 3 o rang 4.

- Si *ran* (A) = *ran* $(A') = 3$ = *nre. d'incògnites* → El sistema seria compatible determinat, és a dir, amb una sola solució.
- Si *ran* $(A) = 3 \neq$ *ran* $(A') = 4$ → El sistema seria incompatible, sense cap solució.

64. Determina una matriu A perquè el sistema homogeni $AX = 0$ sigui equivalent a l'equació matricial:

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

L'equació matricial donada, la podem escriure així:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{array}\right\} . \text{ Si anomenem } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

aleshores: $AX = 0$

Per tant, la matriu A que busquem és $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

PER APROFUNDIR

65. a) Per a quin valor de a aquest sistema és compatible determinat?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & a \\ x & & & - & 3z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

b) Pot ser compatible indeterminat?

a) $\left.\begin{array}{rl} x - 2y & = 1 \\ y + z & = a \\ x \quad - 3z & = -1 \\ y - z & = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rl} x - 2y & = 1 \\ x \quad - 3z & = -1 \\ y - z & = 2 \\ y + z & = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ a \end{matrix} \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad \mathit{ran}\ (A) = 3 = \mathit{nre.\ d'incògnites}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1a \\ 2a - 1a \\ 3a \\ 4a}]{\text{FILES}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$$

$$\to \quad a = 14$$

Per tant, $\begin{cases} \bullet\ \textbf{Si } \boldsymbol{a = 14} \ \to \ \mathit{ran}\ (A) = \mathit{ran}\ (A') = 3 \ \to \ \textit{Compatible determinat} \\ \bullet\ \textbf{Si } \boldsymbol{a \neq 14} \ \to \ \mathit{ran}\ (A) = 3 \neq \mathit{ran}\ (A') = 4 \ \to \ \textit{Incompatible} \end{cases}$

b) *No*, pel que hem vist en l'apartat anterior.

66. Estudia i resol quan sigui possible:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y \quad + 2t = 3} \\ \boldsymbol{3x - y + z - t = 1} \\ \boldsymbol{5x - 3y + 2z - 4t = a} \\ \boldsymbol{2x + y + z + t = 2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{ax \quad + z + t = 1} \\ \boldsymbol{ay + z - t = 1} \\ \boldsymbol{ay + z - 2t = 2} \\ \boldsymbol{az - t = 0} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{rl} x + y \quad + 2t & = 3 \\ 3x - y + z - t & = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t & = a \\ 2x + y + z + t & = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \ \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \to \quad \mathit{ran}\ (A) = 3$$

(La 4a columna depèn linealment de les tres primeres.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & a \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1a \\ 2a \\ 3a - 2a \\ 4a - 2 \cdot 2a}]{\text{FILES}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 3 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & -1 & \boxed{0} & a - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & a - 2 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[\substack{1a \\ 2a + 1a \\ 3a + 1a}]{\text{FILES}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a + 1 \end{vmatrix} = 3(a + 1) = 0 \quad \to \quad a = -1$$

- **Si $a = -1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = 3 < *nre. d'incògnites.* El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 4a equació i passar la t al 2n membre:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \phantom{{}+z} = 3 - 2t \\ 3x - y + z = 1 + t \\ 2x + y + z = 2 - t \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-2t & 1 & 0 \\ 1+t & -1 & 1 \\ 2-t & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2t-5}{-3} = \frac{5-2t}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2t & 0 \\ 3 & 1+t & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4t-4}{-3} = \frac{4-4t}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-2t \\ 3 & -1 & 1+t \\ 2 & 1 & 2-t \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8-5t}{-3} = \frac{-8+5t}{3}$$

Solucions: $x = \dfrac{5-2\lambda}{3}, \quad y = \dfrac{4-4\lambda}{3}, \quad z = \dfrac{-8+5\lambda}{3}, \quad t = \lambda$

- **Si $a \neq -1$** → *ran* $(A) = 3 \neq$ *ran* $(A') = 4$. El sistema és **incompatible**.

b) $$\left.\begin{array}{r} ax + \phantom{ay+{}} z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{array}\right\} \qquad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 1 & -2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1a \\ 2a - 1a \\ 3a}]{\text{FILES}} \; a \left|\begin{array}{ccc} a & 1 & -1 \\ \multicolumn{3}{c}{\boxed{0 \quad 0 \quad -1}} \\ 0 & a & -1 \end{array}\right| =$$

$$= a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot a^2 = a^3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0$$

- **Si $a = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rightarrow \; z = 1 \\ \rightarrow \; z = 2 \\ \rightarrow \; t = 0 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \textit{Incompatible}$$

- **Si $a \neq 0$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 4. El sistema és *compatible determinat.* El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{(2a+1)a}{a^3} = \frac{2a+1}{a^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^2}{a^3} = \frac{-1}{a}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^3}{a^3} = -1$$

Solucions: $x = \dfrac{2a + 1}{a^2}$, $y = \dfrac{1}{a^2}$, $z = \dfrac{-1}{a}$, $t = -1$

67. **Discuteix els sistemes següents segons els valors dels paràmetres que contenen:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \quad\quad\; - z = b \\ x \quad\quad\; + z = c \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay \quad\;\; = b + 1 \\ -x \quad\quad\; + z = b \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 2 \\ -8 \\ b \end{array}\right.\right)$

$|A| = 5a = 0 \rightarrow a = 0$

- **Si $a = 0$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 2 \\ -8 \\ b \end{array}\right.\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \rightarrow b = -4$$

- **Si $a = 0$ i $b = -4$** → *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nre. d'incògnites.* El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a = 0$ i $b \neq -4$** → *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema és *incompatible.*

- **Si $a \neq 0$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat*, qualsevol que sigui el valor de b.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= b \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} a-1 \\ a \\ b \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \left|\, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ b \end{matrix}\right.\right)$$ Contradictòries, llevat que $b = 0$.

— Si $a = 1$ i $b \neq 0$ → *Sistema incompatible.*

— Si $a = 1$ i $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \left|\, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right.\right).$$ La primera fila i la tercera són iguals.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = ran\ (A') = 2 < nre.\ d'incògnites.$$

El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \left|\, \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ b \end{matrix}\right.\right)$$ La primera i la tercera columnes són iguals.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \quad \to \quad b = 1$$

— Si $a = 2$ i $b \neq 1$ → *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$ → Sistema *incompatible.*

— Si $a = 2$ i $b = 1$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* → El sistema és *compatible indeterminat.*

— Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 3$ = *nre. d'incògnites* → El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de b.

c) $$\left.\begin{array}{l} x-3y+z=a \\ x \qquad -z=b \\ x \qquad +z=c \end{array}\right\} \quad A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&-3&1\\1&0&-1\\1&0&1\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right)$$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de a, b i c.

d) $$\left.\begin{array}{l} ax+\ \ y-z=b-1 \\ 2x+ay \qquad =b+1 \\ -x \qquad +z=b \end{array}\right\} \quad A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}a&1&-1\\2&a&0\\-1&0&1\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}b-1\\b+1\\b\end{matrix}\right)$$

$$|A| = a^2-a-2=0 \begin{cases} a=-1 \\ a=\ \ 2 \end{cases}$$

- **Si $a = -1$,** queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&b-1\\2&-1&0&b+1\\-1&0&1&b\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\ (A)=2$$

$$\begin{vmatrix}-1&1&b-1\\2&-1&b+1\\-1&0&b\end{vmatrix} = -3b=0 \rightarrow b=0$$

— Si $a=-1$ i $b \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*

— Si $a=-1$ i $b=0 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&b-1\\2&2&0&b+1\\-1&0&1&b\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\ (A)=2$$

$$\begin{vmatrix}2&1&b-1\\2&2&b+1\\-1&0&b\end{vmatrix} = 3b-3=0 \rightarrow b=1$$

— Si $a=2$ i $b \neq 1 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*

— Si $a = 2$ i $b = 1$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* → El sistema és *compatible indeterminat.*

— Si $a \neq -1$ i $a \neq 2$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 3$ = *nre. d'incògnites* → El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de b.

68. Calcula els valors de a i b per als quals aquest sistema té solucions infinites. Troba'ls per a aquests valors:

a) $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$, $\underbrace{}_{A}$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{array}{l} \nearrow a = 1 \\ \searrow a = -2 \end{array}$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad \underbrace{}_{A}$$

— Si $a = 1$ i $b = 1$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 1$ → *Compatible indeterminat.*

$x + y + z = 1$ → $x = 1 - y - z$. *Solucions:* $x = 1 - \lambda - \mu$; $y = \lambda$; $z = \mu$

— Si $a = 1$ i $b \neq 1$ → *Incompatible.*

- **Si $a = -2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right), \quad \underbrace{}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow \textit{ran}\ (A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3b + 6 = 0 \rightarrow b = -2$$

— Si $a = -2$ i $b = -2$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 2$ → *Compatible indeterminat.*

$$\left.\begin{array}{r} -2x + y = 1 - z \\ x - 2y = -2 - z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -2-z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z}{3} = z; \; y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-z \\ 1 & -2-z \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z+3}{3} = \frac{3(z+1)}{3} = 1 + z$$

Solucions: $x = \lambda, \quad y = 1 + \lambda, \quad z = \lambda$

– Si $a = -2$ i $b \neq -2 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3 \;\rightarrow\;$ *Incompatible.*

- **Si $a \neq 1$ i $a \neq -2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nre. d'incògnites* $= 3$. El sistema és *compatible determinat.*

b) $\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 4 \\ -b \\ b \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = (a+1)\,(a-1) = 0 \begin{cases} a = -1 \\ a = \;\;1 \end{cases}$$

- **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

Contradictòries llevat que $b = -b \;\rightarrow\; b = 0$

— Si $a = -1$ i $b \neq 0 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible.*

— Si $a = -1$ i $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$ La 2a i la 3a files són iguals.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites* → Sistema *compatible indeterminat.*

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} -x + y = 4 - z \\ x + y = -z \end{array}$$

Sumant les dues equacions:

$$2y = 4 - 2z \;\rightarrow\; \begin{cases} y = 2 - z \\ x = -z - y = -z - 2 + z = -2 \end{cases}$$

Solucions: $x = -2, \quad y = 2 - \lambda, \quad z = \lambda$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 & b \end{array}\right)$$

Contradictòries llevat que $-b = 4 \;\rightarrow\; b = -4$

— Si $a = 1$ i $b \neq -4$ → Sistema *incompatible.*

— Si $a = 1$ i $b = -4$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad \text{La 1a i la 2a files són iguals.}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nre. d'incògnites* → Sistema *compatible indeterminat.*

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x - y + z = -4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x + y = 4 - z \\ x - y = -4 - z \end{array}$$

Sumant les dues equacions:

$$2x = -2z \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 4 - z - x = 4 - z + z = 4 \end{array}\right.$$

Solucions: $x = -\lambda,\ \ y = 4,\ \ z = \lambda$

- **Si $a \neq -1$ i $a \neq 1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* → Sistema *compatible determinat* per a qualsevol valor de b.

69. Discuteix en funció de λ i μ: $\left\{\begin{array}{l} (\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = 1 \\ 3x + (\lambda + 1)y + 2z = \mu - 1 \\ \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = 1 \\ 3x + (\lambda + 1)y + 2z = \mu - 1 \\ \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} \lambda + 1 & 3 & \lambda \\ 3 & \lambda + 1 & 2 \\ \lambda & 2 & \lambda \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 1 \\ \mu - 1 \\ 2 \end{array} \end{array}\right)$$

$$|A| = \lambda^2 - 4 = 0 \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

- **Si λ = 2**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 1 \\ \mu - 1 \\ 2 \end{array} \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ → *ran* $(A) = 2$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \mu - 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mu + 4 = 0$ → $\mu = 2$

— Si $\lambda = 2$ i $\mu = 2$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 2. *Compatible indeterminat.*

— Si $\lambda = 2$ i $\mu \neq 2$ → *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. *Incompatible.*

- **Si $\lambda = -2$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ \mu - 1 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & \mu - 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\mu - 8 = 0 \quad \to \quad \mu = -2$$

— Si $\lambda = -2$ i $\mu = -2$ → $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$. *Compatible indeterminat.*

— Si $\lambda = -2$ i $\mu \neq -2$ → $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. *Incompatible.*

- **Si $\lambda \neq 2$ i $\lambda \neq -2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. *Compatible determinat*, qualsevol que sigui el valor de μ.

PER PENSAR UNA MICA MÉS

70. Donada la matriu: $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Troba la matriu (A_{ij}) formada pels adjunts dels elements de A.

b) Calcula $|A| = |a_{ij}|$ i $|A_{ij}|$ i troba una relació entre aquests.

a) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $|A| = |a_{ij}| = -13$

$|A_{ij}| = 169 = (-13)^2 = |A|^2$

71. En general, quina relació hi ha entre el determinant d'una matriu A, d'ordre 3×3, i el determinant de la matriu formada pels seus adjunts? Per demostrar-ho, tingues en compte que: $|A \cdot B| = |A|\,|B|$ i l'expressió de A^{-1}.

- Sabem que el determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada:

$$|A_{ij}| = |A_{ji}|$$

- D'altra banda, tenim que (suposem que existeix A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) \quad \to \quad |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \cdot |A_{ji}| = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| = |A^{-1}|$$

- També sabem que:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \to \quad |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \quad \to \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Unint les dues igualtats obtingudes, tenim que:

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| \quad \rightarrow \quad |A_{ij}| = |A|^2 \quad (A \text{ d'ordre } 3 \times 3)$$

72. **Si A és una matriu quadrada $n \times n$, dóna el valor de $|A_{ij}|$ en funció de $|A|$.**

Amb el mateix raonament que hem seguit en l'exercici anterior, arribem a la conclusió que si A és $n \times n$:

$$\left.\begin{array}{l} |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|^n} \; |A_{ij}| \\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad |A_{ij}| = |A|^{n-1}$$