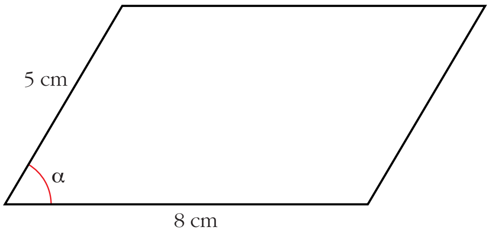
UNITAT 5 VECTORS EN L'ESPAI

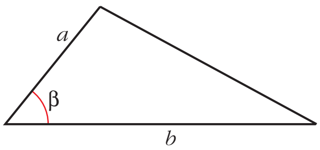
Pàgina 114

■ **Troba l'àrea d'aquest paral·lelogram en funció de l'angle α:**



Àrea = $8 \cdot 5\ sin\ \alpha = 40\ sin\ \alpha$ cm^2

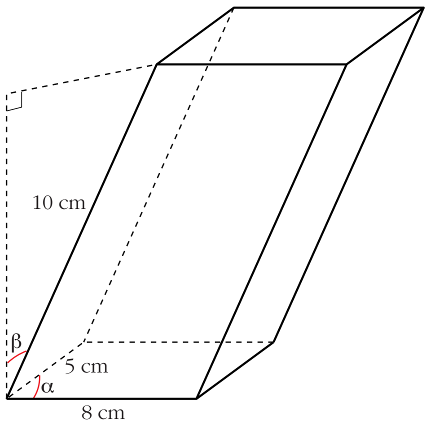
■ **Troba l'àrea d'aquest triangle en funció de l'angle β:**



Àrea triangle = $\dfrac{a\ b\ sin\ \beta}{2}$ cm^2

Pàgina 115

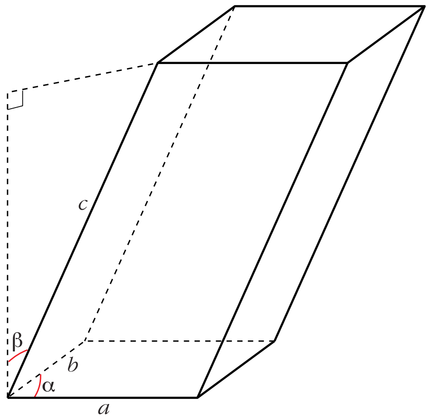
■ **Troba el volum d'aquest paral·lelepípede en funció de α i de β.**



$$\left.\begin{array}{l}\text{Àrea base} = 40\ sin\ \alpha \\ \text{Altura} = 10\ cos\ \beta\end{array}\right\}$$

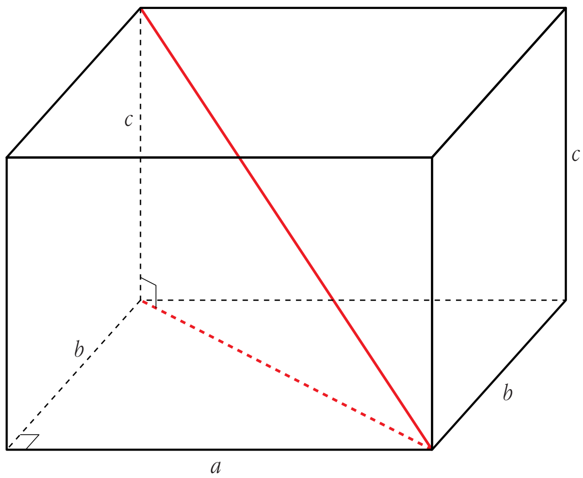
Volum = $400\ sin\ \alpha\ cos\ \beta$ cm^3

■ **Quin serà el volum d'un paral·lelepípede d'arestes a, b, c, tal que les dues arestes de la base formen entre si un angle α, i les arestes laterals formen un angle β amb la perpendicular?**



Volum = $a\ b\ c\ sin\ \alpha\ cos\ \beta$

■ **Troba la diagonal d'un ortoedre les dimensions del qual són: c = 3 cm, b = 4 cm i a = 12 cm.**



Diagonal = $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$ =

= $\sqrt{169}$ = 13 cm

■ **Escriu l'expressió general de la diagonal d'un ortoedre d'arestes a, b i c.**

En general: Diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Pàgina 117

1. La propietat $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ relaciona el producte de nombres per vectors amb el producte entre nombres.

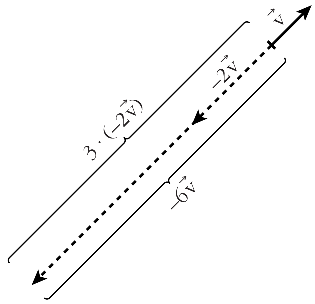
a) Dels quatre productes que hi apareixen, quins són del primer tipus i quins del segon?

b) Interpreta aquesta propietat per a a = 3, b = –2 i $\vec{v}$ un vector qualsevol representat sobre el paper.

a) Producte de nombres per vectors: $b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producte entre nombres: $a \cdot b$

b) $\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array}\right\} \; 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$



2. La propietat $(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ relaciona la suma de nombres amb la suma de vectors.

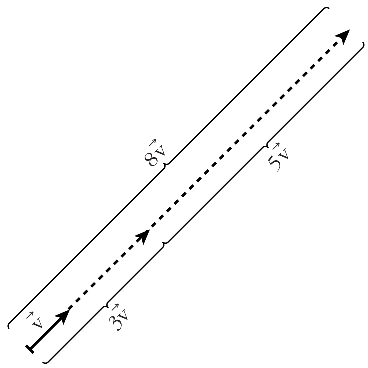
a) De les dues sumes que hi apareixen, quina és de cada tipus?

b) Interpreta aquesta propietat per a $a = 3$, $b = 5$ i $\vec{v}$ un vector qualsevol representat sobre el paper.

a) Suma de nombres: $a + b$

Suma de vectors: $a\vec{v} + b\vec{v}$

b) $\left.\begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array}\right\} \; 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$



Pàgina 119

3. Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, troba les coordenades:

a) $2\vec{u}$ **b) $0\vec{v}$** **c) $-\vec{u}$**

d) $2\vec{u} + \vec{v}$ **e) $\vec{u} - \vec{v}$** **f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$**

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

4. Siguin els vectors $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Troba a, b, c perquè es compleixi: $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left.\begin{aligned} a + 3b + 6c &= 24 \\ -5a + 4b + 3c &= -26 \\ 2a - b - 5c &= -6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solució: $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, és a dir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Pàgina 121

5. **Respecte a base ortonormal, les coordenades de tres vectors són $\vec{u}(3, -1, 5)$, $\vec{v}(4, 7, 11)$, $\vec{w}(-2, k, 8)$**

a) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) Troba k per tal que $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin perpendiculars.

a) $3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 60$

b) $4 \cdot (-2) + 7\,k + 11 \cdot 8 = 0 \qquad k = \dfrac{-80}{7}$

Pàgina 123

6. **Donats els vectors $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $|\vec{u}|$ i $|\vec{v}|$** **c) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$**

d) Proj. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ i proj. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ (segment i vector).

e) Quant ha de valer x perquè el vector $(7, 2, x)$ sigui perpendicular a $\vec{u}$?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c) $\cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0{,}669 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 132°\ 1'\ 26''$

d) Proj. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{3} = -3{,}67$

Significa que el vector projecció de $\vec{u}$ en la direcció de $\vec{v}$ té mòdul 3,67 i sentit contrari al de $\vec{v}$.

$$\text{Proj. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2{,}008$$

e) $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-33}{2}$

7. Obtén tres vectors perpendiculars a $\vec{v}$ que no siguin paral·lels entre si: $\vec{v}\,(3, 2, 7)$

Un vector, $\vec{u}(x, y, z)$, és perpendicular a $\vec{v}(3, 2, 7)$ si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Per exemple: (0, –7, 2); (–7, 0, 3); (–2, 3, 0)

8. Troba un vector que sigui perpendicular als dos vectors donats:

$\vec{u}\,(5, -1, 2)$ $\quad\quad$ $\vec{v}\,(-1, 2, -2)$

Volem trobar les coordenades d'un vector $\vec{w}(x, y, z)$ que sigui perpendicular a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} \perp \vec{u} \;\Rightarrow\; (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema té infinites solucions proporcionals. Una d'elles és $x = -2$, $y = 8$, $z = 9$.

És a dir, el vector buscat pot ser (–2, 8, 9) o qualsevol altre paral·lel a aquest.

Pàgina 126

9. Troba el producte vectorial de $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ i $\vec{v}\,(4, 1, -2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

10. Troba un vector perpendicular a $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ i a $\vec{v}\,(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$ o qualsevol vector proporcional a ell.

11. Troba l'àrea del triangle determinat pels vectors: $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ i $\vec{v}\,(4, 1, -2)$

Àrea del paral·lelogram determinat per $\vec{u}$ i $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| =$$
$$= \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1\,013}$$

Àrea del triangle $= \dfrac{\sqrt{1\,013}}{2} \approx 15{,}91 \text{ u}^2$

Pàgina 127

12. Troba el volum del paral·lelepípede definit per $\vec{u}\,(3, -5, 1)$, $\vec{v}\,(7, 4, 2)$ i $\vec{w}\,(0, 6, 1)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \;\rightarrow\; \text{Volum} = 53 \text{ u}^3$$

13. **Troba el valor de x perquè els vectors $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ i $\vec{z}(1, 14, x)$ siguin coplanaris (és a dir, que el volum del paral·lelepípede determinat per aquests sigui zero).**

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Pàgina 131

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Dependència lineal

14. **Donats els vectors $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:**

a) Troba els vectors $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a i b tals que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

a) $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$

$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$

b) $(3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 5a + b \\ 3 &= -2a - b \\ 2 &= a \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} b &= -7 \\ b &= -7 \\ a &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solució:}\ a = 2,\ b = -7,\ \text{és a dir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

15. **Comprova que no és possible expressar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ com a combinació lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ i $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Són linealment independents $\vec{x}$, $\vec{u}$ i $\vec{v}$?**

$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \to \quad (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= a + 2b \\ -1 &= 2a - 3b \\ 0 &= -a + 5b \end{aligned}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que $|A'| = 28 \neq 0$, el sistema és incompatible.

Així doncs, **no** és possible expressar $\vec{x}$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Com que $ran\,(A') = 3$, els tres vectors són linealment independents.

16. **Quins dels vectors següents tenen la mateixa direcció?**

$\vec{a}(1, -3, 2)$ $\quad\vec{b}(2, 0, 1)$ $\quad\vec{c}(-2, 6, -4)$ $\quad\vec{d}(5, -15, 10)$ $\quad\vec{e}(10, -30, 5)$

$\vec{a}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$, ja que les seves coordenades són proporcionals.

17. **Comprova que qualsevol dels vectors $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ pot expressar-se com a C.L. dels altres dos.**

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \quad \to \quad (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array}\right\} \text{Per tant: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

D'aquí, també obtenim que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

18. Troba, en cada cas, tots els valors de m, n i p tals que $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = \vec{0}$:

a) $\vec{u}(3, 0, 1)$, $\vec{v}(1, -1, 0)$, $\vec{w}(1, 0, 1)$

b) $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$, $\vec{w}(2, 0, 1)$

a) $m(3, 0, 1) + n(1, -1, 0) + p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3m + n + p &=& 0 \\ -n &=& 0 \\ m + p &=& 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que $|A| = -2 \neq 0$, l'única solució del sistema és: $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$

(Per tant $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents.)

b) $m(1, -1, 0) + n(1, 1, 1) + p(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{rcl} m + n + 2p &=& 0 \\ -m + n &=& 0 \\ n + p &=& 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; per tant $ran(A) = 2$.

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} -m + n &=& 0 \\ n + p &=& 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} m = n \\ p = -n \end{array}\right\} \textit{Solucions: } m = \lambda, \; n = \lambda, \; p = -\lambda$$

19. Estudia la dependència o independència lineal dels següents conjunts de vectors:

a) $\vec{u}(1, 2, 1)$, $\vec{v}(-1, 0, 3)$, $\vec{w}(1, 2, -1)$

b) $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 4, 11)$, $\vec{c}(1, 1, -1)$, $\vec{d}(0, 1, 4)$

c) $\vec{u}(1, 1, 0)$, $\vec{v}(1, 0, 1)$, $\vec{w}(5, 2, 3)$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Per tant $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ són **linealment independents**.

b) Com que són quatre vectors en $\mathbb{R}^3$, són **linealment dependents**.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Per tant, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ són **linealment dependents.**

20. **Determina k perquè els següents conjunts de vectors siguin linealment dependents:**

a) $\vec{u}(k, -3, 2), \ \vec{v}(2, 3, k), \ \vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5), \ \vec{v}(2, 4, 7), \ \vec{w}(1, -1, k)$

a) $\begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6k^2 - 24k - 24 = -6(k^2 + 4k + 4) = -6(k + 2)^2 = 0 \ \rightarrow \ k = -2$

Si $k = -2$, els vectors són linealment dependents.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 8k + 5 = 0 \ \rightarrow \ k = \dfrac{-5}{8}$

Si $k = \dfrac{-5}{8}$, els vectors són linealment dependents.

21. **Quins dels següents conjunts de vectors són una base?**

$\boldsymbol{A} = \{(1, 2, 1), \ (1, 0, 1), \ (2, 2, 2)\}$

$\boldsymbol{B} = \{(1, 1, 1), \ (1, 0, 1), \ (1, 1, 0), \ (0, 0, 1)\}$

$\boldsymbol{C} = \{(-3, 2, 1), \ (1, 2, -1), \ (1, 0, 1)\}$

$A = \{(1, 2, 1), \ (1, 0, 1), \ (2, 2, 2)\}$

Com que $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$, els vectors són linealment dependents. Per tant, **no** són una base.

$B = \{(1, 1, 1), \ (1, 0, 1), \ (1, 1, 0), \ (0, 0, 1)\}$

Com que són quatre vectors en $\mathbb{R}^3$, són dependents, per tant **no** són una base.

$C = \{(-3, 2, 1), \ (1, 2, -1), \ (1, 0, 1)\}$

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \ \rightarrow$ Els vectors són linealment independents.

Un conjunt de tres vectors de $\mathbb{R}^3$, linealment independents, són una **base** de $\mathbb{R}^3$.

22. **Per a quins valors de a el conjunt de vectors $S = \{(1, 1, 1), \ (a, 1, 1), \ (1, a, 0)\}$ és una base?**

Com que són tres vectors de $\mathbb{R}^3$, formaran base quan siguin linealment independents:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a - 1) = 0 \ \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Així doncs, S és una base quan $a \neq 0$ i $a \neq 1$.

Producte escalar

23. **En una base ortonormal tenim $\vec{a}(1, 2, 2)$ i $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$ c) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ d) El vector projecció de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$

c) Com que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

d) Projeccció de $\vec{b}$ sobre $\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = 0$

24. **Donats els vectors: $\vec{a} = \vec{i} + m\,\vec{j} + k$ i $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\,\vec{k}$, troba m perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ siguin:**

a) Paral·lels. b) Ortogonals.

$\vec{a}(1, m, 1)$ $\vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{m}{1} \rightarrow m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \dfrac{2}{5}$

25. **Troba el vector projecció del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.**

Projecció de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

26. **Són $\vec{a}(1, 2, 3)$ i $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonals? Si no ho són, troba l'angle que formen.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \rightarrow$ **no** són ortogonals.

Si anomenem α l'angle que formen, aleshores:

$cos\, \alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}\sqrt{9}} \approx 0{,}089 \rightarrow \alpha = 84°\ 53'\ 20''$

27. **Calcula m perquè el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sigui ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \rightarrow m = \dfrac{5}{3}$

28. **Comprova que el vector $\vec{u}\,(1/2, 1/2, 0)$ no és unitari i dóna les coordenades d'un vector unitari de la mateixa direcció que $\vec{u}$.**

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \textbf{ no } \text{és unitari.}$$

Un vector unitari de la mateixa direcció que $\vec{u}$ seria:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ També podria ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Producte vectorial

29. **Donats $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprova que els vectors $\vec{u} \times \vec{v}$ i $\vec{v} \times \vec{u}$ són oposats, i troba'n el mòdul.**

$\vec{u}(2, -1, 1)$ $\vec{v}(-1, 3, 2)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5)$; $\vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$

30. **Troba l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors $\vec{a}\,(7, -1, 2)$ i $\vec{b}\,(1, 4, -2)$.**

Àrea $= |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1\,133} \approx 33{,}66 \text{ u}^2$

31. **Troba un vector perpendicular a $\vec{u}\,(2, 3, 1)$ i a $\vec{v}\,(-1, 3, 0)$ i que sigui unitari.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$

Per tant el vector que busquem és: $\left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}\right)$.

32. **Troba un vector ortogonal a $\vec{u}\,(1, -1, 0)$ i $\vec{v}\,(2, 0, 1)$ i el mòdul del qual sigui $\sqrt{24}$.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2) \quad \rightarrow \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2}$

El vector que busquem serà: $2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$.

Producte mixt

33 **Troba $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en els casos següents:**

a) $\vec{u}\,(1, -3, 2)$, $\vec{v}\,(1, 0, -1)$, $\vec{w}\,(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}\,(3, 2, 1)$, $\vec{v}\,(1, -2, 0)$, $\vec{w}\,(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}\,(1, 2, -1)$, $\vec{v}\,(3, 0, 2)$, $\vec{w}\,(-1, 4, -4)$

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Pàgina 132

34. Calcula el volum del paral·lelepípede determinat per $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ i $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \quad \to \quad \text{Volum} = 70 \text{ u}^3$

35. Calcula el volum del paral·lelepípede determinat per $\vec{a}(3, -1, 1)$, $\vec{b}(1, 7, 2)$ i $\vec{c}(2, 1, -4)$.

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \quad \to \quad \text{Volum} = 111 \text{ u}^3$

36. Calcula el valor de m perquè $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ i $\vec{w}(-4, 5, -1)$ siguin coplanaris.

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \quad \to \quad m = -4$

PER RESOLDRE

37. Prova que els vectors $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$, són linealment independents qualssevol que siguin a, b i c.

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ per a qualsevol valor de a, b, c. Per tant, són linealment independents.

38. Donats els vectors $\vec{a}(1, 2, -1)$ i $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprova que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ és perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ i a $\vec{a} - \vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$

$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (2, 5, -1) = 6 - 5 - 1 = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (0, -1, -1) = 1 - 1 = 0$

Per tant, $\vec{a} \times \vec{b}$ és perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ i a $\vec{a} - \vec{b}$.

39. **a) Comprova que el paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{u}(3, -2, 1)$ i $\vec{v}(4, 3, -6)$ és un rectangle.**

b) Troba'n l'àrea multiplicant la base per l'altura i comprova que obtens el mateix resultat si trobes $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Així doncs, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars, i el paral·lelogram és un rectangle.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array}\right\}$ Àrea $= \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

D'altra banda:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

40. **Donat el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, troba les coordenades dels vectors següents:**

a) Unitaris i de la mateixa direcció que $\vec{v}$.

b) Paral·lels a $\vec{v}$ i de mòdul 6.

$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

a) $\left(\frac{-2}{2\sqrt{6}}, \frac{2}{2\sqrt{6}}, \frac{-4}{2\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

b) $\left(\frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-12}{\sqrt{6}}\right)$ i $\left(\frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}}\right)$

41. **Troba un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ i a $\vec{v}(1, 4, 2)$ la tercera component del qual sigui 1.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \ // \ (2, -1, 1)$

El vector que busquem és $(2, -1, 1)$.

42. **Donats els vectors $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, quina relació han de complir a i b perquè $\vec{u}_3$ sigui ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$

Perquè $\vec{u}_3$ sigui perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0$, és a dir, $a = b$.

43. **Calcula les coordenades d'un vector $\vec{u}$ que sigui ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ i $\vec{w}(1, -1, 1)$ i compleixi que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ i a $\vec{w}$ és de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \;\rightarrow\; k = \frac{1}{2}$$

Per tant: $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

44. **Donats els vectors $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$ i $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprova que:**

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

45. **a) Obtén λ perquè els vectors següents siguin linealment dependents:**

$\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Per a $\lambda = 3$, expressa el vector $\vec{v} = (7, 11, 14)$ com a combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{-27}{8}$

b) Per a $\lambda = 3$, tenim que: $\vec{u}_1(3, 2, 5)$, $\vec{u}_2(2, 4, 7)$, $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expressem $\vec{v}$ com a combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

$(7, 5, 14) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 7 \\ 2a + 4b - 3c &= 5 \\ 5a + 7b + 3c &= 14 \end{aligned}\right\} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 15 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{96}{51} = \frac{32}{17}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{27}{51} = \frac{9}{17}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 14 \end{vmatrix}}{51} = \frac{15}{51} = \frac{5}{17}$$

Per tant: $\vec{v} = \frac{32}{17}\vec{u}_1 + \frac{9}{17}\vec{u}_2 + \frac{5}{17}\vec{u}_3$

46. **a) Comprova que els vectors $\vec{b}_1 = 1/2(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$, $\vec{b}_2 = 1/2(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j})$ i $\vec{b}_3 = \vec{k}$ són els d'una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, essent $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$.**

b) Troba les coordenades de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ respecte a la base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

a) $|\vec{b}_1| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4} = \dfrac{2}{2} = 1$

$|\vec{b}_2| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

$|\vec{b}_3| = 1$

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 0$

$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$

Per tant $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) $(1, 1, 1) = x\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) + y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2}, 0\right) + z(0, 0, 1)$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + \sqrt{3}\,y = 2 \\ \sqrt{3}\,x - y = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x + \sqrt{3}\,y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}\,y = 2\sqrt{3} \\ \hline 4x = 2 + 2\sqrt{3} \end{array}$$

$x = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ $\qquad y = \sqrt{3}\,x - 2 = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{2} - 2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

Per tant:

$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\vec{b}_1 + \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, és a dir:

$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \left(\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 1\right)$

47. **a) Determina els valors de a per als quals resulten linealment dependents els vectors $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ i $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en aquests casos una relació de dependència entre els vectors.

a) $\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a - 1)(a + 2)^2 = 0 \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}$

Per a $a = 1$ i per a $a = -2$, els tres vectors donats són linealment dependents.

b) Per a $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$, i tenim que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Per a $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, i tenim que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

48. Donats els vectors $\vec{u}(1, -1, 2)$ i $\vec{v}(3, 1, -1)$, troba el conjunt de vectors que, essent perpendiculars a $\vec{u}$, siguin coplanaris amb $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Sigui $\vec{w}(x, y, z)$ un vector tal que:

1.r) És perpendicular a $\vec{u}$, és a dir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2.n) És coplanari amb $\vec{u}$ i $\vec{v}$, és a dir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolem el sistema format per les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ -x + 7y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 2z &= y \\ -x + 4z &= -7y \end{aligned}\right\} \quad \text{Sumant:} \quad \begin{aligned} &6z = -6y \quad \rightarrow \quad z = -y \\ &x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{aligned}$$

Solucions: $(3\lambda, \lambda, -\lambda) \quad \lambda \neq 0$

49. Donats els vectors $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ tals que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ i $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcula la suma dels productes escalars $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Com que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 26 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$

Per tant: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -13$

50. Donats els vectors $\vec{u}(a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ i $\vec{w}(1, a, 1)$, es demana:

a) Troba els valors de a per als quals els vectors $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment dependents.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depèn linealment de $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$ per al cas $a = 2$.

c) Justifica raonadament si per a $a = 0$ es compleix la igualtat $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

b) Per a $a = 2$, els vectors $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents. Com que són tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealment independents, formen una base de $\mathbb{R}^3$. Així, qualsevol altre vector, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depèn linealment d'ells.

Obtenim la combinació lineal:

Per a $a = 2$, tenim que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Per tant: $\vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ per a $a = 0$. Està demostrat en l'apartat a).

51. a) Troba el nombre de vectors linealment independents que hi ha en el conjunt: $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$.

b) Un vector no nul té els seus tres components iguals. ¿Pot escriure's com a combinació lineal dels dos primers vectors de S?

c) Determina un vector que, tenint les dues primeres components iguals a 1, es pugui posar com a combinació lineal dels vectors segon i tercer de S.

a) Hem que buscar el rang de la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Com que} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \quad ran\,(M) = 3.$$

Per tant, hi ha tres vectors linealment independents en S.

b) Sí. Si té els seus tres components iguals i és no nul, és de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ amb $k \neq 0$. Aleshores, podem obtenir-lo a partir dels dos primers vectors de S tal com segueix:

$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) $\vec{v}(1, 1, x)$ és el vector que busquem. Perquè es pugui posar com a combinació lineal dels vectors segon i tercer de S, veiem que:

$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array}\right\} \text{Ha de tenir solució: } \begin{array}{l} b = \dfrac{1}{2},\ a = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = x \to x = \dfrac{-2}{2} = -1 \to x = -1 \end{array}$$

Per tant, el vector és $\vec{v}(1, 1, -1)$.

Pàgina 133

52. Troba un vector $\vec{u}$ de la mateixa direcció que $\vec{v}(1, -2, 3)$ i que formi amb $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paral·lelogram d'àrea 25 u².

Si $\vec{u}$ és de la mateixa direcció que $\vec{v}(1, -2, 3)$, serà de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, amb $x \neq 0$.

Perquè formi amb $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paral·lelogram d'àrea 25 u², ha de ser:

$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$

és a dir: $125x^2 = 625 \to x^2 = 5 \to x = \pm\sqrt{5}$

Per tant, hi ha dues solucions: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ i $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$.

53. Troba un vector $\vec{v}$ coplanari amb $\vec{a}(2, -1, 1)$ i $\vec{b}(1, 0, 3)$ i ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.

Sigui $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1r) és coplanari amb $\vec{a}$ i $\vec{b}$, és a dir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2n) és ortogonal a $\vec{c}$, és a dir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolem el sistema format per les dues equacions:

$$\left.\begin{array}{r} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y \quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x + z = 5y \\ 2x \quad = -3y \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \dfrac{9}{2}y = \dfrac{1}{2}y \\ x = -\dfrac{3}{2}y \end{array}$$

Solucions: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$

Tots els vectors d'aquesta forma compleixen les condicions. Per exemple, per a $\lambda = 1$, tenim el vector $(-3, 2, 1)$.

54. **Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tals que $|\vec{a}| = 4$ i $|\vec{b}| = 2$, amb $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot cos\, 60° = 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

D'altra banda:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

55. **De dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ sabem que són ortogonals i que $|\vec{u}| = 6$ i $|\vec{v}| = 10$. Troba $|\vec{u} + \vec{v}|$ i $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

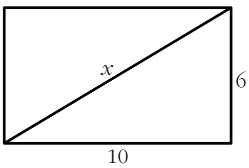
Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals, aleshores $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Així:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

Observació: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, aleshores formen els costats d'un rectangle amb base i altura $|\vec{u}|$ i $|\vec{v}|$. En aquest cas, $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$ són les seves diagonals, que tenen el mateix mòdul (per tractar-se d'un rectangle). A més, per trobar la longitud de la diagonal, podem aplicar en aquest cas el teorema de Pitàgores:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 136 \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

56. **Calcula l'angle que formen $\vec{a}$ i $\vec{b}$ si sabem que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ i $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= 34 + 30\, cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 7^2 = 49$$

Per tant: $cos\,\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \dfrac{49 - 34}{30} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60°$

57. Dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, sabem que compleixen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, quan $\vec{a}(2, -1, 0)$ i $\vec{b}(1, 3, -1)$. Troba l'angle format per $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{rl} 3\vec{u} + 3\vec{v} &= 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} &= \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} &= 3\vec{a} + \vec{b} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2\vec{u} + 2\vec{v} &= 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} &= -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} &= 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{5}(7, 0, -1) = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{5}(3, -5, 1) = \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right)$$

Per tant:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right) = \frac{20}{5} = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

$$cos\,(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4/5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{35}/5} = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0{,}478 \;\rightarrow\; \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 61°\ 26'\ 21''$$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

58. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, podem assegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?

No. Per exemple, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ i $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array}\right\} \; \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Així doncs, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

59. Prova, fent ús del producte escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp \vec{c}$ llavors $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

$\vec{a} \perp \vec{b} \;\rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad \vec{a} \perp \vec{c} \;\rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Per demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, hem de demostrar que el seu producte escalar és zero:

$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$

Per tant $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

60. Demostra que si $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són dos vectors no nuls que tenen el mateix mòdul, aleshores $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$ són ortogonals.

Suposem que $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, aleshores:

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ (ja que $|\vec{a}| = |\vec{b}|$)

Observació: Si recordem que $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$ són les diagonals del paral·lelogram determinat per $\vec{a}$ i $\vec{b}$, hem demostrat que les diagonals d'un rombe són perpendiculars.

61. Demostra que si $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents, també ho són els vectors $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ i $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents, aleshores, si en fem una combinació lineal i la igualem a zero, $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = \vec{0}$, necessàriament han de ser $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Vegem que succeeix el mateix amb els vectors $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ i $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. Considerem-ne una combinació lineal d'aquests igualada a zero:

$x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{w}) + z(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}$, aleshores:

$(x + y + z)\vec{u} + (x - z)\vec{v} + (-y + z)\vec{w} = \vec{0}$

Com que $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \\ \quad - y + z = 0 \end{array}\right\} \text{ Però } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

per tant l'única solució del sistema és la solució trivial $x = y = z = 0$.

Així doncs, els vectors $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ i $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ són linealment independents.

62. Justifica que qualsevol conjunt de vectors que contingui el vector nul és L.D.

Considerem $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{0}\}$ un conjunt de $n + 1$ vectors que conté el vector nul. Si fem una combinació lineal d'aquests vectors i igualem a zero:

(*) $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n + x_{n+1}\vec{0} = \vec{0}$

tenim infinites solucions per a $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, ja que totes les solucions de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (0, 0, \ldots, 0, \lambda)$ satisfan la igualtat (*).

Per tant, són linealment dependents.

63. **a) Pot haver-hi dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tals que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?**

b) Si dos vectors verifiquen $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}|\ |\vec{v}|$, què pots dir de l'angle que formen?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \cdot 2 \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -3 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\dfrac{3}{2} > 1$ Impossible.

Per tant no existeixen dos vectors que compleixin aquestes condicions.

b) Si $|\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \ \rightarrow \ |\vec{u}|\,|\vec{v}| = \begin{cases} +\ |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ -\ |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \ \rightarrow \ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \ \rightarrow \ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0° \\ |\vec{u}|\,|\vec{v}| = -|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \ \rightarrow \ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \ \rightarrow \ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180° \end{cases}$$

Per tant, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció.

64. **Justifica per què el producte mixt dels vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} + \vec{b}$ és igual a 0 qualssevol que siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$.**

Els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} + \vec{b}$ són coplanaris; per tant, el volum del paral·lelepípede determinat per ells (que coincideix amb el seu producte mixt en valor absolut) és zero.

65. **Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ quan $\vec{u} \neq \vec{0}$ i $\vec{v} \neq \vec{0}$, com són entre si els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$?**

Sabem que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sin\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Si $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$, $|\vec{u}| \neq 0$ i $|\vec{v}| \neq 0$, aleshores ha de ser $sin\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$. És a dir, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ serà 0° o 180°.

Per tant, els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tindran la mateixa direcció.

66. **Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, és $\vec{b} = \vec{c}$ necessàriament? Posa'n exemples.**

No. Per exemple, si considerem $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ i $\vec{c}(3, 6, 9)$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ però } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

67. **Siguin $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tres vectors linealment independents. Indica raonadament quin o quins dels següents productes mixtos valen 0:**

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{a} - \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,], \quad [\vec{a} + \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}\,], \quad [\vec{a} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{b},\ \vec{b} - \vec{a}\,]$$

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ són tres vectors linealment independents de $\mathbb{R}^3$, formen una base. Així, les coordenades respecte a aquesta base dels vectors $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{c}$ i $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ són: $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$ i $(1, 1, 1)$, respectivament.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Són linealment independents $\rightarrow$

$\rightarrow [\vec{a}+\vec{c}, \ \vec{a}-\vec{c}, \ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] \neq 0$

Anàlogament:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow [\vec{a}+\vec{c}, \ \vec{b}, \ \vec{a}+\vec{b}] \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \rightarrow [\vec{a}-\vec{c}, \ \vec{b}-\vec{c}, \ \vec{c}-\vec{a}] = 0$$

PER PENSAR UNA MICA MÉS

68. **Les tres altures, AH_A BH_B CH_C d'un triangle ABC es tallen en un punt.**

Hi ha una bonica forma de demostrar-ho per geometria elemental.

El triangle $A'B'C'$ està format amb els costats paral·lels als de ABC. Els vèrtexs d'aquest són els punts mitjans d'aquell. Per tant, AH_A, BH_B i CH_C són les mediatrius dels costats de $A'B'C'$.

Organitza i completa el raonament anterior per concloure que AH_A, BH_B, CH_C es tallen en un punt.

Donat P com el punt de tall de AH_A i BH_B. Aleshores:

1) Com que AH_A és la mediatriu del costat $B'C'$, P està a igual distància de B' que de C'.

2) Com que BH_B és la mediatriu del costat $A'C'$, aleshores P està a igual distància de A' que de C'.

Per tant, unint 1) i 2), tenim que P està a igual distància de A' que de B'; és a dir, P també pertany a la mediatriu del costat $A'B'$, és a dir, a CH_C.

Així doncs, hem provat que les tres es tallen en el mateix punt.

69. **La propietat anterior pot demostrar-se, també, mitjançant vectors. Anomenem H el punt en què es tallen AH_A i BH_B.**

a) Justifica que $\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$

b) De les igualtats anteriors s'arriba a: $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$ i d'aquí es conclou que $\vec{HC} \perp \vec{AB}$ i, per tant, que les tres altures es tallen en H. (Justifica les afirmacions anteriors.)

a) $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$; i, com que AH_A és l'altura corresponent al costat BC, aleshores:

$$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH_A} \;\rightarrow\; \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{HA} \;\rightarrow\; \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \;\rightarrow\; \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$$

Anàlogament, com que $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC}$, tenim que: $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

b) $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} \stackrel{(1)}{=}$

$$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) \stackrel{(2)}{=} 0$$

(1) $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0 \;\rightarrow\; \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$

(2) $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

Per tant, si $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$, com que $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}$, aleshores $\overrightarrow{HC} \perp AB$; per tant H també pertany a l'altura corresponent al vèrtex C. Així, les tres altures es tallen en el mateix punt, H.